4 Géométrie dans l'espace

Objectifs :

- Vecteurs de l'espace ; direction d'une droite ou d'un plan, translations
- Barycentre de points pondérés ; colinéarité, bases et repères de l'espace
- Orthogonalité, produit scalaire ; projection orthogonale et distance, vecteur normal
- Représentation paramétrique d'une droite, équation cartésienne d'un plan ou d'une sphère

Aperçu historique : Le début de la géométrie remonte à une lointaine antiquité : Égypte ancienne, Babylone, Inde, Chine, etc. Les documents très anciens sont rares et orientés vers les domaines pratiques (cadastre, architecture). La civilisation grecque produit les premiers écrits théoriques : Euclide d'Alexandrie a vécu vers 300 av. J.-C. et publié *Les Éléments*, un livre de référence pendant des siècles. Il y déduit par des démonstrations, les propriétés des objets qu'il définit à partir d'un jeu réduit d'axiomes. La géométrie constitue une part importante des *Elements* : géométrie plane (livres I à IV et VI) ; géométrie dans l'espace (livres XI à XIII).

Au XVIIe siècle, René Descartes (1596-1650) définit la notion de repère et développe ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie analytique : la position des points de l'espace étant connue par leurs coordonnées (x, y z), les problèmes géométriques sont traités par des calculs algébriques. Pierre de Fermat (vers 1600-1665) est le premier à faire un usage systématique des coordonnées pour résoudre les problèmes de lieux géométriques. Mais dans les notations de Descartes, contrairement à Fermat, les constantes sont continuellement notées a, b, c, d, ... et les variables x, y, z.
Le terme « vecteur » qui apparait en français avec Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) vient du latin *vector* (du verbe *vehere* : transporter). Bernard Bolzano (1781-1848) publie un livre où, axiomatiquement comme Euclide, il introduit l'addition et la multiplication des vecteurs. Jean-Victor Poncelet (1788-1867)et Michel Chasles (1793-1880) affinent les travaux de Bolzano tandis que August Ferdinand Möbius (1790-1868) développe le système des coordonnées barycentriques.

Au XIXe siècle, Hermann Grassmann (1809-1877) établit les fondations de la théorie des espaces vectoriels et de l'algèbre linéaire à partir de ses travaux sur les marées. Le produit scalaire apparait assez tard : on en trouve trace en 1843 chez Grassmann et aussi chez William Rowan Hamilton (1805-1865) qui crée le corps des quaternions (extension des nombres complexes). Un peu plus tard, en 1889, les travaux de formalisation de la géométrie sont repris par Giuseppe Peano (1858-1932) qui définit la notion d'espace vectoriel réel et d'application linéaire et associe le produit scalaire à un calcul de déterminant (aire de la surface orientée du parallélogramme engendré par deux vecteurs, volume du parallélépipède orienté engendré par trois). Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent à l'aide seulement du cosinus de l'angle mais sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et deviendra définition.

David Hilbert (1862-1943) définit une nouvelle axiomatique de la géométrie euclidienne qui unifie la géométrie dans le plan et l'espace (1899). Josiah Willard Gibbs (1839-1903), nourri des œuvres de Möbius, Grassmann et Hamilton publie entre 1881 et 1884 ses « Éléments d'analyse vectorielle » qui eut une grande importance. Heaviside (1850-1925) montre que le calcul vectoriel est plus avantageux que le calcul sur les composantes des quaternions qu'il trouve trop abstrait et inutile en physique. Les idées vectorielles et linéaires, au départ séparées, sont aujourd'hui toujours associées.

1. Vecteurs de l'espace

Dans cette première partie, on étend la notion de vecteur du plan vue en 2^e^ et en 1^re^ à l'espace.

1.a. Calcul vectoriel

DÉFINITION 4.1 (DÉFINITION) Soient M et M' deux points de l'espace.
La *translation* qui transforme M en M' est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et est noté $t_{\overrightarrow{MM'}}$.
Le *vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ a
- pour *direction* la droite (MM') ou toute droite parallèle à (MM')
- pour *sens* sur la droite (MM'), le sens de M vers M'
- pour *norme* la longueur du segment $[MM']$, ce qu'on note $\|\overrightarrow{MM'}\| = MM'$

Remarques :
- Quel que soit le point M, le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$.
  La translation $t_{\overrightarrow{0}}$ transforme un point M en lui-même.
  Le vecteur nul n'a ni direction ni sens ; sa norme est nulle.
- Deux vecteurs sont *égaux* si ils ont même direction, même sens et même norme.
  Si la translation $t_{\overrightarrow{MM'}}$ transforme N en N' alors les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux.
  On peut traduire l'égalité vectorielle $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$
  — dans le langage des figures : le quadrilatère $MM'N'N$ est un parallélogramme
  — dans le langage des transformations : $t_{\overrightarrow{MM'}}(N) = N'$ (l'image de N par $t_{\overrightarrow{MM'}}$ est N')
  On nomme souvent les vecteurs avec la notation *générique* : $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, etc. qui n'utilise pas de points pour désigner un vecteur. Si par exemple $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$, on dit que $\overrightarrow{MM'}$ est le *représentant* du vecteur $\overrightarrow{u}$ d'origine M.
- En physique, et plus particulièrement en mécanique, on utilise des vecteurs pour représenter les forces. Un force est une grandeur qui a une direction, un sens, une norme (intensité, mesurée en Newton) et aussi un point d'application (centre de gravité du solide) sur lequel s'exerce cette force.

DÉFINITION 4.2 (ADDITION) Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et A un point de l'espace.
Si B et C sont les points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

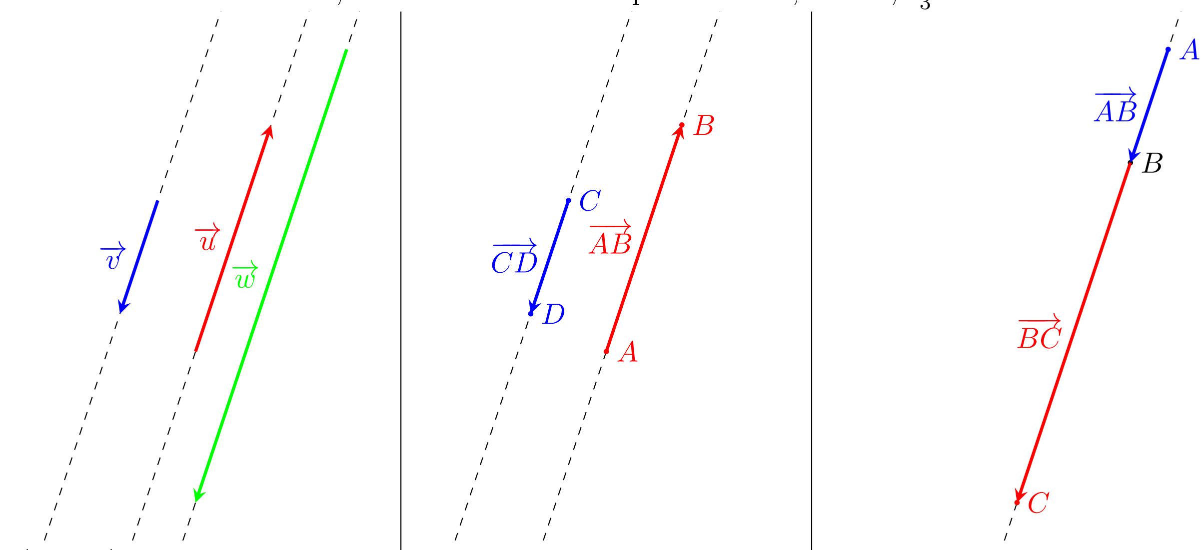
Remarques :
- Quand $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donnés, on peut construire le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ à partir de n'importe quel point. En partant d'un point O : si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$
- Si $\overrightarrow{AC}$ est donné, on peut écrire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; tout point M tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$ convient ; cette propriété s'appelle *relation de Chasles*. Autrement dit, la translation qui transforme A en C peut être décomposée en un translation qui transforme A en M puis une translation qui transforme M en C. Peu importe par où on passe pour aller de A en C. On se sert souvent de cette relation pour décomposer un vecteur en somme de deux ou plusieurs vecteurs : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.
- La *règle du parallélogramme* : A étant donné, si B et C sont les points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ alors le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AD}$ où D est le 4^e^ sommet du parallélogramme $BACD$. En effet, $BACD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ et donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ d'après la définition 4.2.

Définition 4.3 (Multiplication par un réel) Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace et k un réel

Si $k \neq 0$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $k\overrightarrow{u}$ est un vecteur qui a ✦ même direction que $\overrightarrow{u}$ ✦ même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$ ✦ une norme égale à $\overrightarrow{u}$ $\lvert k\rvert \times \lVert\overrightarrow{u}\rVert$	Si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Remarques :

- Avec des points : si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors, dans tous les cas, on aura $AC = kAB$.
  Si, de plus, $k > 0$ alors $C \in [AB)$ mais si $k < 0$ alors $C \in (AB)$ et $C \notin [AB)$.
- La notation de cette multiplication est généralement omise : on écrit $k\overrightarrow{u}$, $2\overrightarrow{AB}$, $\frac{-1}{3}\overrightarrow{CD}$.
  Dans certains textes, elle est notée avec un point : $k \cdot \overrightarrow{u}$, $2 \cdot \overrightarrow{AB}$, $\frac{-1}{3} \cdot \overrightarrow{CD}$.



$\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ avec $k < 0$ $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{w}$ avec $k > 0$	$(AB)//(CD)$ $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ avec $k < -1$	A, B, C alignés $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k > 1$

Propriété 4.1 (Espace vectoriel) Pour tous vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a :

Commutativité : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$	Associativité : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
$\overrightarrow{0}$ élément neutre : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{-u}$ opposé de $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{-u}) = (\overrightarrow{-u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

L'ensemble des vecteurs de l'espace, noté $\mathcal{E}$, muni de l'addition est un *groupe commutatif*.
La multiplication par un réel, confère au groupe $(\mathcal{E}, +)$ la structure d'*espace vectoriel*, noté $(\mathcal{E}, +, \cdot)$, car $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \mathcal{E}^3$ et $\forall(k, k') \in \mathbb{R}^2$:

Distributivité 1 : $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$	Associativité : $k(k'\overrightarrow{u}) = (k \times k')\overrightarrow{u}$
Distributivité 2 : $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$	1 élément neutre : $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

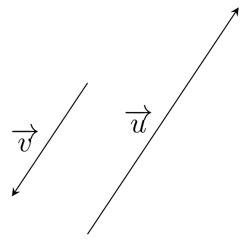
Démonstration Ces propriétés qui découlent des définitions sont admises ici.

Remarques :

- Dire qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ signifie qu'il existe des réels x, y et z tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2} + z\overrightarrow{u_3}$. Dans l'espace, si on connait trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ dont toute combinaison linéaire nulle implique des coefficients tous nuls, autrement dit $x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2} + z\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$, alors $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une *base* de $\mathcal{E}$.
- Il existe de nombreux exemples d'espaces vectoriels, dont les éléments ne sont pas appelés vecteurs : l'ensemble des polynômes, celui des matrices de dimensions $n \times p$ et celui des fonctions continues, pour n'en citer que trois, munis de l'addition et de la multiplication par un réel sont des espaces vectoriels.

1.b. Droites et plans de l'espace

DÉFINITION 4.4 Deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits *colinéaires* s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.



Convention : Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

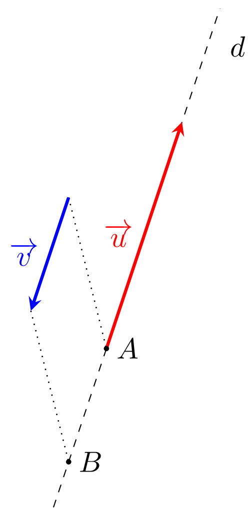
Colinéaire signifie « sur une même ligne ».
Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.
Traduction dans le langage des figures :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\iff (AB)//(CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires $\iff$ les points A, B et C sont alignés

DÉFINITION 4.5 (VECTEUR DIRECTEUR) Soit d une droite.
On appelle *vecteur directeur* de d tout vecteur non nul ayant la même direction que d.

Remarques :

- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs qui sont tous colinéaires entre eux, puisque de même direction. Si A et B sont deux points distincts de la droite d alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\forall k \in \mathbb{R}^*$, $k\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs directeurs de d
- On peut définir une droite par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur. La notation $d(A, \overrightarrow{u})$ désigne la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
  Sur mon illustration, $d = d(A, \overrightarrow{u})$ et $B \in d(A, \overrightarrow{u})$, on a donc $d = (AB)$ et comme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ on a aussi $d = d(A, \overrightarrow{v})$.
- D'une façon générale $M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
  On a aussi $M \in d(A, \overrightarrow{u}) \iff \exists x \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u}$.
  Dans cette dernière formulation $\overrightarrow{u}$ est une *base* de cette droite, A est l'*origine* d'un *repère* $(A, \overrightarrow{u})$ dans lequel x est l'*abscisse* de M.

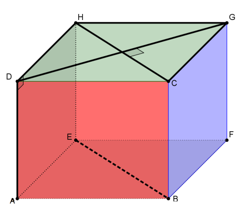


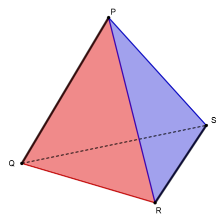
PROPRIÉTÉ 4.2 (POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES) Soient deux droites d et d' dont les vecteurs directeurs respectifs sont $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors d et d' sont coplanaires (dans un même plan) et parallèles, éventuellement confondues
- Sinon, d et d' sont sécantes en un point et coplanaires ou bien non-sécantes et non-coplanaires

Sur le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$

- (BE) et (CH) sont coplanaires et parallèles, de même pour (CG) et (DH)
- (CH) et (DG) sont sécantes en un point et coplanaires, de même pour (AD) et (DH)
- (BE) et (AD) sont non-sécantes et non-coplanaires, de même pour (BE) et (DG)





Attention à la perspective ! Deux droites peuvent sembler sécantes alors qu'elles sont non-coplanaires, comme (AD) et (GH). Deux droites peuvent sembler parallèles alors qu'elles sont non-coplanaires, comme (PQ) et (RS) sur le tétraèdre $PQRS$ de droite.

Définition 4.6 (Plan) Soient A un point et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le *plan* $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est définit par les droites sécantes $d(A, \overrightarrow{u})$ et $d(A, \overrightarrow{v})$.
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un couple de *vecteurs directeurs* du plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ qui définit sa *direction*.

Propriété 4.3 Un point M appartient au plan $\mathcal{P} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si et seulement si il existe un couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Démonstration Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant non-colinéaires, ils définissent une base du plan $\mathcal{P}$.
Le triplet $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est par conséquent un repère du plan $\mathcal{P}$.
Cela implique qu'il existe un couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Réciproquement, supposons qu'un point P vérifie l'égalité $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. P appartient-il à $\mathcal{P}$?
Le couple de réels (x, y) étant donné, on peut lui associer un point $M \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
Comme cela conduit à $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} \iff \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{0}$, on en déduit que $M = P$ et donc $P \in \mathcal{P}$.

Définition 4.7 (Coplanairité) Soient $\mathcal{P} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un *plan* et $\overrightarrow{w}$ un vecteur de l'espace.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires* si et seulement si il existe un point $D \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{w}$.

Propriété 4.4 Soient $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un couple de vecteurs non-colinéaires et $\overrightarrow{w}$ un vecteur de l'espace.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

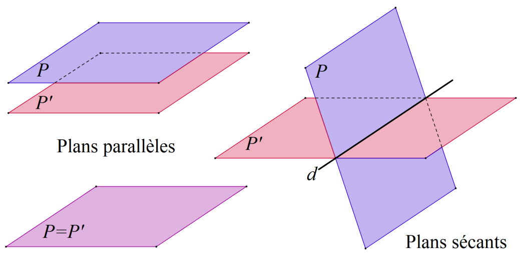
Démonstration En choisissant un point A quelconque, le triplet $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ définit un plan $\mathcal{P}$.
D'après la définition, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe un point $D \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{w}$, et on a vu dans la propriété 4.3 que cela équivaut à l'existence d'un couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. La conclusion en découle.

Remarques :

- Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si un de ces vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres. Cela s'établit généralement par le calcul vectoriel :
  Supposons que A, B, C soient trois points non alignés. Ils définissent le plan $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, noté (ABC). Supposons qu'un point D vérifie $3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$. A t-on $D \in (ABC)$?
  On a $3\overrightarrow{DA} - 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0} \iff (3 - 2 + 1)\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Conclusion : $D \in (ABC)$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Trois vecteurs non-coplanaires forment une base de l'espace. Si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non-coplanaires alors $D \notin (ABC)$, $ABCD$ est un tétraèdre – une pyramide à base triangulaire – dont le volume n'est pas nul.

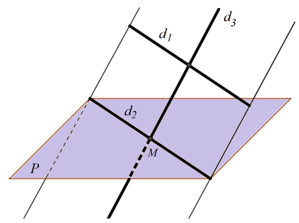
Propriété 4.5 (Position relative de deux plans)
Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

- S'ils ont même direction, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, éventuellement confondus.
- Sinon les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. Leur intersection est une droite d.



Propriété 4.6 (Position relative d'une droite et d'un plan) Soient $\mathcal{P}$ un plan de direction $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

- Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$ $(d_1 \cap \mathcal{P} = \emptyset)$ ou incluse dans $\mathcal{P}$ $(d_2 \subset \mathcal{P})$.
- Sinon d perce le plan $\mathcal{P}$ en un point M $(d_3 \cap \mathcal{P} = \{M\})$.

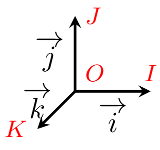


1.c. Bases et repères de l'espace

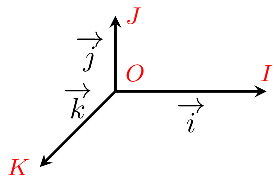
Définition 4.8 Une *base* de l'espace est un triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de vecteurs non coplanaires. Un *repère* est un quadruplet $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où A est un point, appelé *Origine*, et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une base.

Remarques :

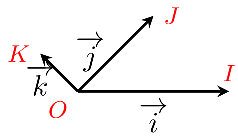
- Dire que la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est *normée* signifie que $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont de même longueur. Ils sont de norme unitaire : $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = \|\overrightarrow{OK}\| = 1$.
  Une base normée $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est dite *orthonormée* si et seulement si elle est orthogonale, c'est-à-dire que $(OI) \perp (OJ)$, $(OI) \perp (OK)$ et $(OJ) \perp (OK)$. Comme on le verra dans la propriété 4.18, on ne peut calculer des distances que si on utilise un repère orthonormé.
- Un quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires constitue le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.
  Ce repère est noté indifféremment $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ ou (O, I, J, K).
  Dans la suite, on prendra souvent $(\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK})$ comme base.



base orthonormée



base orthogonale



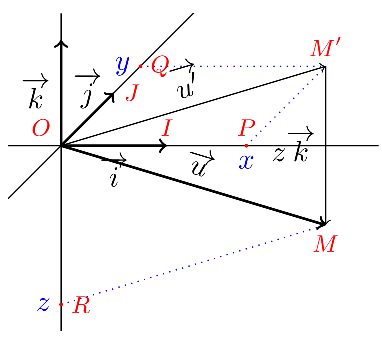
base quelconque

Théorème 4.1 Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base et O un point.

- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tel que $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.
- Pour tout point M, il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

Démonstration Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
Soient O un point et I, J, K et M les points définis par $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

Existence : Projetons M sur le plan (OIJ) parallèlement à (OK).
$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ étant non-coplanaires, la droite $d(M, \overrightarrow{k})$ coupe le plan (OIJ) en un point M'. Par conséquent il existe un réel k tel que $\overrightarrow{M'M} = z\,\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{u'} + z\,\overrightarrow{k}$ avec $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ coplanaires.
$\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ étant non-colinéaires, la parallèle à (OJ) passant par M' coupe la droite (OI) en un point P. De même, la parallèle à (OI) passant par M' coupe la droite (OJ) en un point Q. $OPM'Q$ étant un parallélogramme par construction, on a $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ $(\star)$.
Comme $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{i}$ sont colinéaires, d'après la définition 4.4 il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{i}$ et de même, il existe un réel y tel que $\overrightarrow{OQ} = y\,\overrightarrow{j}$.
L'égalité $(\star)$ s'écrit alors $\overrightarrow{u'} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.
On a construit les réels x, y et z, ce qui assure leur existence.



Unicité : Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe deux triplets distincts de réels (x, y, z) et (x', y', z') tels que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et $\vec{u} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$.
On a $x\,\vec{i} - x'\,\vec{i} = (\vec{u} - y\,\vec{j} - z\,\vec{k}) - (\vec{u} - y'\,\vec{j} - z'\,\vec{k}) = -y\,\vec{j} + y'\,\vec{j} - z\,\vec{k} + z'\,\vec{k}$, soit $(x - x')\,\vec{i} = (y' - y)\,\vec{j} + (z' - z)\,\vec{k}$.
$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ étant non-coplanaires, cette égalité ne peut être vérifiée que si $(x - x')$, $(y' - y)$ et $(z' - z)$ sont nuls :

$$\begin{cases} x - x' = 0 \\ y' - y = 0 \\ z' - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$ ce qui contredit le fait que (x, y, z) et (x', y', z') soient distincts.

La décomposition $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ est donc bien unique.

Remarque : Si $\overrightarrow{OM} = \vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

- x, y et z sont les *coordonnées* du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
  x est l'*abscisse* de M, y en est l'*ordonnée* et z la *cote*.
- x, y et z sont aussi les *composantes* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
  x est la 1re composante de $\vec{u}$, y en est la 2e composante et z la 3e.

On note ce triplet indifféremment (x, y, z) ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Propriété 4.7 (Composantes) Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{u'}(x', y', z')$ deux vecteurs et leurs composantes dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points et leurs coordonnées dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et λ un réel.

- $\vec{u} + \vec{u'}$ a pour composantes $(x + x', y + y', z + z')$
- $\lambda\vec{u}$ a pour composantes $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ et en particulier $-\vec{u}(-x, -y, -z)$
- $\vec{u} - \vec{u'}$ a pour composantes $(x - x', y - y', z - z')$
- $\vec{u} = \vec{u'} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$ et en particulier $\vec{u} = \vec{0} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Démonstration Ces propriétés découlent des propriétés de l'addition vectorielle, du produit d'un vecteur par un réel et de l'utilisation d'une base de l'espace vectoriel.
Pour le dernier point, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (relation « soustractive » de Chasles).
Or $\overrightarrow{OB} = x_B\,\vec{i} + y_B\,\vec{j} + z_B\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{OA} = x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j} + z_A\,\vec{k}$.
Après réduction on obtient $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$ d'où la conclusion.

Exemple 1 – Soient $\mathcal{P}(M, \vec{u}, \vec{v})$ un plan et $d(N, \vec{w})$ une droite avec, dans un certain repère de l'espace, $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(2, 0, 1)$, $\vec{w}(-1, 2, -3)$, $M(2, 1, -1)$ et $N(-2, 3, 5)$.
Quelle position relative ont le plan $\mathcal{P}$ et la droite d ?
Une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit $a\vec{u} + b\vec{v}$ dont les composantes sont $(a + 2b, -a, b)$.
Si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ on aurait $\begin{cases} -1 = a + 2b \\ 2 = -a \\ 3 = b \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b = -1 \\ a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$
Cela ne se peut pas car alors $a + 2b = -2 + 6 = 4 \neq -1$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.

On en déduit que la droite d perce le plan plan $\mathcal{P}$ en un point $K(\alpha, \beta, \gamma)$.

- Comme $K \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MK}(\alpha-2, \beta-1, \gamma+1)$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  On doit donc avoir $\begin{cases} \alpha-2 = a+2b \\ \beta-1 = -a \\ \gamma+1 = b \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha-2 = a+2b \\ a = 1-\beta \\ b = \gamma+1 \end{cases}$
  Cela conduit à l'*équation cartésienne* du plan $\mathcal{P}$: $\alpha+\beta-2\gamma-5=0$.
- Comme $K \in d$, $\overrightarrow{NK}(\alpha+2, \beta-3, \gamma-5)$ est colinéaire à $\vec{w}$.
  Il existe donc un réel t tel que $\overrightarrow{NK} = t\vec{w} \iff \begin{cases} \alpha+2 = -t \\ \beta-3 = 2t \\ \gamma-5 = -3t \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -t-2 \\ \beta = 2t+3 \\ \gamma = -3t+5 \end{cases}$
  Ce système constitue l'*équation paramétrique* de d.

Comme $K = d \cap \mathcal{P}$ on doit avoir $\alpha+\beta-2\gamma-5=0$, $\alpha=-t-2$, $\beta=2t+3$ et $\gamma=-3t+5$.
Le paramètre t doit vérifier $-t-2+2t+3-2(-3t+5)-5=0 \iff 7t-14=0 \iff t=2$.
On en déduit les coordonnées de K : $\alpha=-2-2=-4$, $\beta=2\times 2+3=7$ et $\gamma=-3\times 2+5=-1$ donc $K(-4,7,-1)$.

2. Barycentres

On s'intéresse ici à des couples (point, réel) appellés « points pondérés » (des points qui ont un poids).

2.a. Barycentre de deux points

Définition 4.9 Soients (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha+\beta \neq 0$.
On appelle barycentre de (A, α) et (B, β) le point G défini par $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Propriété 4.8 Soient (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha+\beta \neq 0$.
Le barycentre de (A, α) et (B, β) vérifie l'égalité : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Démonstration Décomposons la définition du barycentre G :
$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$.
On obtient la nouvelle égalité $\beta\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{AG} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}$.
Comme $\alpha+\beta \neq 0$, on peut diviser par ce nombre et obtenir la relation de l'énoncé.

Remarques :

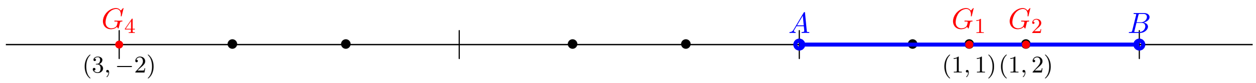
- Lorsque $A = B$, les points A, B et G sont confondus.
  Sinon, les points A, B et G sont alignés et G a pour abscisse $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$.
  Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ (ou $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$), le point G est alors confondu avec B (ou avec A).
- Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Le barycentre de (A, α) et (B, β) est aussi le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$.
  Par exemple, le barycentre de $(A, 120)$ et $(B, 30)$ est aussi le barycentre de $(A, 4)$ et $(B, 1)$.
  On peut remplacer les coefficients du barycentre (α et β) par des coefficients proportionnels.
- I milieu de $[AB]$ se traduit vectoriellement par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, autrement dit I est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$ ou plus généralement de (A, α) et (B, α). On dit alors que I est l'*isobarycentre* de A et B – « iso » pour dire qu'ils sont affectés des même coefficients. On a également les autres traductions vectorielles de l'isobarycentre : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (propriété 4.8) et, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ (propriété 4.10).

Exemple 2 – Quel est le barycentre G_1 de $(A, 30)$ et $(B, 30)$?
Il s'agit aussi du barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$ ou de (A, α) et (B, α) avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
D'après la propriété 4.8 on a $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, G_1 est le milieu de $[AB]$, l'isobarycentre de A et B.

Quel est le barycentre G_2 de $(A, 50)$ et $(B, 100)$?
Il s'agit du barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$. Dans ce cas, on a $\overrightarrow{AG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, G_2 est au tiers de $[AB]$, en partant de B.

Quel est le barycentre G_3 de $(A, 50)$ et $(B, -50)$?
Il s'agirait du barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -1)$ mais ce point n'existe pas car $\alpha + \beta = 1 - 1 = 0$.

Quel est le barycentre G_4 de $(A, 75)$ et $(B, -50)$?
Il s'agit du barycentre de $(A, 3)$ et $(B, -2)$. On a $\overrightarrow{AG_4} = -2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BA}$.
Autrement dit, G_4 est sur la demi-droite $[BA)$, A étant au tiers du segment $[BG]$, en partant de B (voir la figure ci-dessous).



> Propriété 4.9 Le barycentre G de (A, α) et (B, β), lorsqu'il existe, est sur la droite (AB).
> G appartient au segment $[AB]$ lorsque α et β sont de même signe et, dans tous les cas :
> - G est plus proche de A si $|\alpha| > |\beta|$
> - G est le milieu de $[AB]$ si $\alpha = \beta$
> - G est plus proche de B si $|\alpha| < |\beta|$

Démonstration On traduit vectoriellement $M \in (AB)$ par $\exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.
Cette égalité s'écrivant $\overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \iff (1-t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB}$, et comme $(1-t) + t = 1 \neq 0$ on en déduit que M est le barycentre de $(A, 1-t)$ et (B, t).

De même, $M \in [AB]$ par $\exists t \in [0, 1], \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.
M est le barycentre de $(A, 1-t)$ et (B, t) avec $t \in [0, 1]$ et $1 - t \in [0, 1]$.

L'égalité qui définit G peut se noter $\alpha\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{GA}$.
Les normes de ces deux vecteurs égaux sont égales ; on a donc : $|\alpha| \times ||\overrightarrow{GA}|| = |\beta| \times ||\overrightarrow{GB}||$.
Autrement dit : $\frac{||\overrightarrow{GA}||}{||\overrightarrow{GB}||} = \frac{|\beta|}{|\alpha|}$ ou encore $\frac{GA}{GB} = \frac{|\beta|}{|\alpha|}$
Donc G est plus proche de A que de B $\iff GA < GB \iff |\beta| < |\alpha|$.

Exemple 3 (point comme barycentre) – Soient trois points A, B et C alignés.
Connaissant les positions respectives de trois points, exprimons l'un comme barycentre des deux autres affectés des coefficients qui conviennent. Supposons $AB = 2$, $BC = 5$ et $AC = 7$ (voir figure).
La somme $AB + BC = AC$ nous assure que $B \in [AC]$.

B appartient à $[AC]$: les coefficients cherchés sont donc de même signe.
Comme $\frac{BA}{BC} = \frac{2}{5}$, B est le barycentre de $(A, 5)$ et $(C, 2)$.

$A \notin [BC]$: les coefficients sont de signes opposés.
Comme $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{7}$, A est le barycentre de $(B, 7)$ et $(C, -2)$ (ou de $(B, -7)$ et $(C, 2)$).

De la même manière, on montre que C est le barycentre de $(A, -5)$ et $(B, 7)$.

Propriété 4.10 Soient (A,α) et (B,β) tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et G leur barycentre.

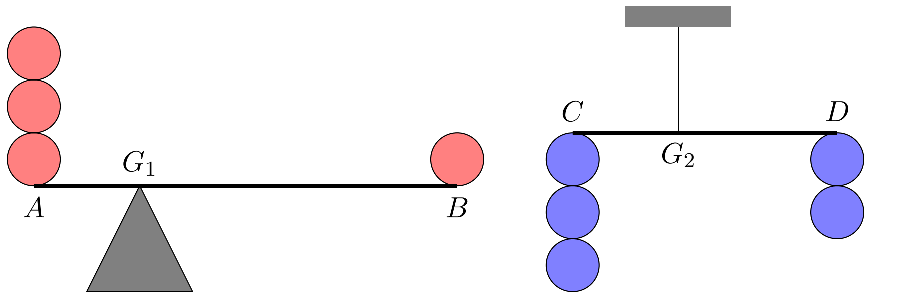
Pour tout point M on a : $\begin{cases} 1) & \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} \\ 2) & \overrightarrow{MG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB} \end{cases}$

Démonstration Décomposons et regroupons :
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+\beta(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}$.
Utilisons la définition du point G : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, on obtient : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\vec{0}$
La 2$^{\text{e}}$ égalité est équivalente à la 1$^{\text{re}}$ car on ne fait que diviser par $\alpha+\beta\neq 0$.

Remarques :

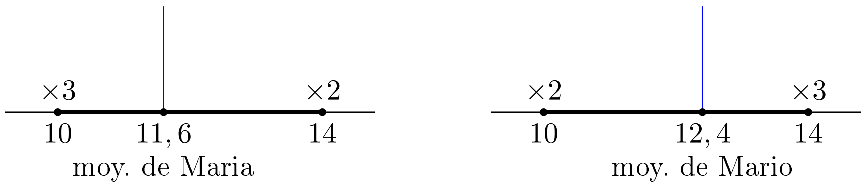
- Pour retrouver les relations connues, remplaçons M par A ou G dans ces égalités :
  $M=A$ dans 2) : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
  $M=G$ dans 1) : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
- L'origine du repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à la place de M dans 2) conduit aux coordonnées de G :
  $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k})+\frac{\beta}{\alpha+\beta}(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k})$.
  Les coordonnées de G dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont donc les moyennes pondérées :
  $$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta},\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \text{ et } z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$$
  Pour l'isobarycentre I de A et B (le milieu de $[AB]$), ses coordonnées sont :
  $$x_I=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2} \text{ et } z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$$

Centre de gravité et moyenne :



Le principe de la balance ou du mobile repose sur la notion de barycentre.
Le point où s'équilibre l'ensemble est le barycentre des extrémités où s'appliquent les masses :

- à gauche, la balance est équilibrée au barycentre G_1 de $(A,3)$ et $(B,1)$, soit au quart de $[AB]$
- à droite, le mobile est équilibré au barycentre G_2 de $(C,3)$ et $(D,2)$, soit aux $\frac{2}{5}$ de $[CD]$



Un professeur de maths a fait deux contrôles dans le trimestre : le 1$^{\text{er}}$ avait duré 3 heures, le 2$^{\text{d}}$ 2 heures. Il fait sa moyenne en calculant la moyenne pondérée des deux notes, affectées des coefficients 3 et 2. La note moyenne va ainsi devenir le barycentre des deux notes avec les coefficients de la pondération. Par exemple, Maria a eu 10 et 14 et Mario 14 et 10. La moyenne de Maria est $\frac{10\times3+14\times2}{5}=\frac{58}{5}=11,6$ tandis que celle de de Mario est $\frac{14\times3+10\times2}{5}=\frac{62}{5}=12,4$.
Dans les deux cas, elle s'est installée aux $\frac{2}{5}$ de l'intervalle séparant la 1$^{\text{re}}$ et la 2$^{\text{e}}$ note.

2.b. Barycentre de trois points (ou plus)

Définition 4.10 Soient (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
On appelle barycentre de (A,α) , (B,β) et (C,γ) le point G défini par : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
De manière plus générale, le barycentre de n points pondérés (A_i,α_i) tels que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ est défini par la relation vectorielle $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$.

Propriété 4.11 (Barycentre de trois points) Si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, le barycentre G des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) vérifie, pour tout point M, les égalités :

$$\begin{cases} 1)\quad \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} \\ 2)\quad \overrightarrow{MG}=\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{MA}+\dfrac{\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{MB}+\dfrac{\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{MC} \end{cases}$$

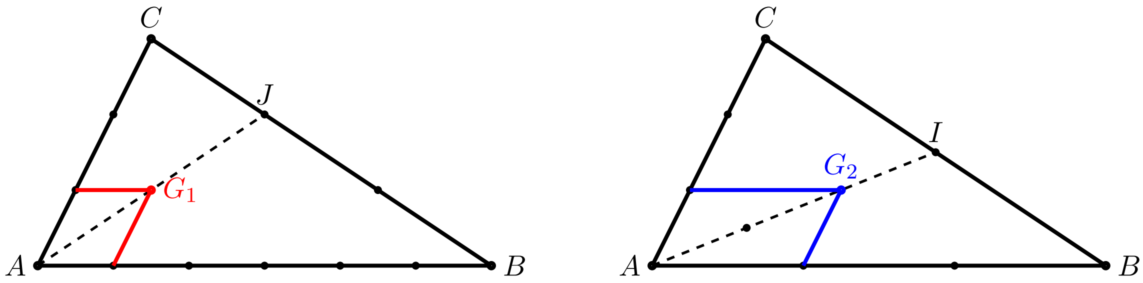
En particulier, lorsque $M=A$, on a $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{AC}$.

Démonstration Ces relations découlent de la définition, en décomposant la relation vectorielle avec la relation de Chasles et les différentes propriétés du calcul vectoriel.
La dernière relation assure de l'existence et de l'unicité du point G puisqu'elle en explicite la construction à partir des données ; elle prouve par ailleurs que $G\in(ABC)$.

Remarques :

- Comme pour le barycentre de deux points, le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) est aussi celui de $(A,k\alpha)$, $(B,k\beta)$ et $(C,k\gamma)$, quel que soit le réel non nul k.
  On peut toujours remplacer les coefficients du barycentre par des coefficients proportionnels.
- Lorsqu'on met l'origine du repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à la place de M, on obtient :
  $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{OC}$. En passant aux coordonnées, on obtient
  $$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma},\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\text{ et }z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$
- Si un des coefficients est nul, par exemple $\alpha=0$, le barycentre de $(A,0)$, (B,β) et (C,γ) est le barycentre des deux points (B,β) et (C,γ) ; il est donc sur (BC).
- Si tous les coefficients sont égaux, le barycentre est celui de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.
  Il est appelé *isobarycentre* de A, B,t C et correspond au centre de gravité du triangle ABC.
- Le barycentre de (A,α), (B,β), (C,γ) appartient au plan (ABC). Réciproquement, un point M de ce plan $(ABC)=\mathcal{P}(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est défini par ses coordonnées (x,y) qui vérifient $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\iff(1-x-y)\overrightarrow{MA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$, cela prouve que M est le barycentre de $(A,1-x-y)$, (B,x), (C,y) puisque $(1-x-y)+x+y=1\neq 0$.
  Reformulons cette remarque : le plan (ABC) est l'ensemble de tous les barycentres de A, B, C.

Exemple 4 – Quel est le barycentre G_1 de $(A,12)$, $(B,4)$ et $(C,8)$?
G_1 est barycentre de $(A,3)$, $(B,1)$, $(C,2)$; d'après la propriété 4.11 on a $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Quel est le barycentre G_2 de $(A,24)$, $(B,24)$ et $(C,24)$?
G_2 est l'isobarycentre de A, B, C ; d'après la propriété 4.11 on a $\overrightarrow{AG_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



Remarque : dans cette dernière construction, on remarque que $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
En introduisant le milieu I de $[BC]$, $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AI}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
Cela signifie que G_2 est le barycentre de $(A,1)$ et $(I,2)$.
Le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$ est en fait le barycentre de $(A,1)$ et $(I,2)$.
On remplace le couple $((B,1),(C,1))$ par leur barycentre affecté de la somme des coefficients.
Cette remarque se généralise dans la propriété 4.12.
Pour placer le point G_1 – barycentre de $(A,3)$, $(B,1)$, $(C,2)$ – on peut remplacer $((B,1),(C,2))$ par leur barycentre J affecté du coefficient 3. G_1 apparait alors comme le barycentre de $(A,3)$ et $(J,3)$, c'est-à-dire le milieu de $[AJ]$.

Propriété 4.12 (Réduction de barycentres) Le barycentre G de (A,α), (B,β) et (C,γ) est aussi celui de (A,α), $(D,\beta+\gamma)$ si $\beta+\gamma \neq 0$, D étant le barycentre de (B,β) et (C,γ).

Démonstration Montrons cette propriété. On a : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
Au moins une somme de deux des coefficients doit être non nulle, sinon la somme des trois coefficients serait nulle ce qui ne se peut pas.
Quitte à en changer, supposons que $\beta+\gamma \neq 0$: le barycentre D de (B,β) et (C,γ) existe donc.
Ce point vérifie, selon la propriété 4.10, en remplaçant M par G, $\beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = (\beta+\gamma)\overrightarrow{GD}$.
On peut alors écrire $\alpha\overrightarrow{GA} + (\beta+\gamma)\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ce qui prouve la propriété énoncée.

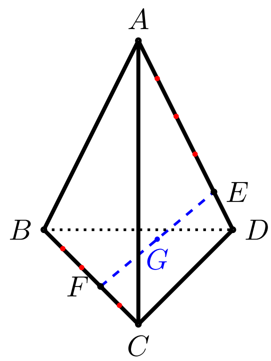
Remarque :

- On fait de même avec le barycentre de quatre points : on peut en remplacer trois par leur barycentre affecté de la somme des trois coefficients (à condition qu'elle ne soit pas nulle) ou bien regrouper les points par paires dont on détermine les barycentres ; le barycentre cherché apparaissant comme celui des deux barycentres intermédiaires, affectés des coefficients qui conviennent (toujours à condition que ces coefficients ne soient pas nuls).
- Le barycentre G de (A,α), (B,β), (C,γ) appartient à l'intérieur du triangle ABC si α, β et γ sont de même signe. En effet, la propriété 4.9 indique que le barycentre C' de (A,α), (B,β) appartient à $[AB]$ si α et β sont de même signe et, comme G est aussi le barycentre de $(C',\alpha+\beta)$ et (C,γ), puisque $\alpha+\beta$ et γ sont de même signe, $G \in [CC']$.
- Cette possibilité de réduction a de nombreuses applications. Supposons que l'on cherche à caractériser l'ensemble des points M tels que $||3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|| = AB + BC + CA$.
  Dans l'exemple 4 on a nommé G_1 le barycentre de $(A,3)$, $(B,1)$, $(C,2)$.
  On peut donc substituer à la somme $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ le vecteur $6\overrightarrow{MG_1}$ qui lui est égal.
  Ainsi, on obtient $||6\overrightarrow{MG_1}|| = AB + BC + CA \iff MG_1 = \frac{AB+BC+CA}{6}$.
  Les points M sont sur une sphère de centre G_1 et de rayon $\frac{AB+BC+CA}{6}$ (le sixième du périmètre du triangle ABC).

Exemple 5 (Barycentre de 4 points) – Soit G le barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,3)$ et $(D,4)$

Remplaçons le couple $((A,1),(D,4))$ par le point pondéré $(E,5)$ où E est le barycentre de $(A,1)$ et $(D,4)$. De même, remplaçons le couple $((B,2),(C,3))$ par le point pondéré $(F,5)$ où F est le barycentre de $(B,2)$, $(C,3)$. D'après la propriété 4.12, Le point G cherché est l'isobarycentre de E et F, le milieu de $[EF]$. La construction de G se limite à celle des barycentres partiels E et F puis à leur milieu.

Noter que le choix d'une association judicieuse est hautement préférable à une association arbitraire, relevant d'un processus systématique (aveugle par essence) ou aléatoire. On aurait pu, ici, chercher le barycentre H de $(B,2)$, $(C,3)$ et $(D,4)$ et ensuite celui de $(H,9)$ et $(A,1)$. Mais cette solution, guidée par le choix de la représentation où BCD semble une base toute indiquée pour le tétraèdre, ne parait pas aussi simple à mettre en œuvre.



Notation : Pour simplifier, je vais noter « M' est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ et $(M,-1)$ » sous la forme plus condensée $M' = \mathscr{B}\{(A,1),(B,1),(C,1),(M,-1)\}$.

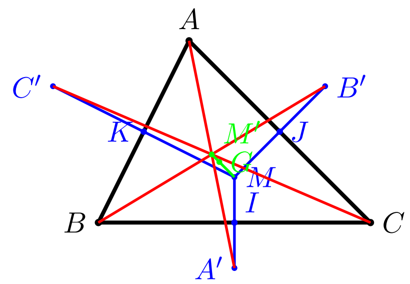
Exemple 6 (Du plan à l'espace) – Soient A, B et C trois points non alignés et M un point quelconque. On complète la figure avec sept points :

- l'isobarycentre G de A, B, C ce qu'on note $G = \mathscr{B}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$
- les points I, J et K qui sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$
- les points A', B' et C' qui sont les symétriques de M par rapport à I, J et K

Prouvons que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point M', le milieu commun des segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ et prouvons que $M' \in (MG)$.

$\boxed{\text{Partie 1 : } M \text{ appartient au plan } (ABC)}$

Soit M' le milieu de $[AA']$ ce qu'on note $M' = \mathscr{B}\{(A,1),(A',1)\}$.
Montrons que M' est aussi le milieu de $[BB']$ et $[CC']$.
I étant le milieu de $[MA']$, on a $A' = \mathscr{B}\{(I,2),(M,-1)\}$.
(car $\overrightarrow{A'I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'M} \iff 2\overrightarrow{A'I} - \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{0}$) et, comme $2+(-1)=1$, on peut remplacer $(A',1)$ par le couple $((I,2),(M,-1))$:
$M' = \mathscr{B}\{(A,1),(A',1)\} = \mathscr{B}\{(A,1),(I,2),(M,-1)\}$



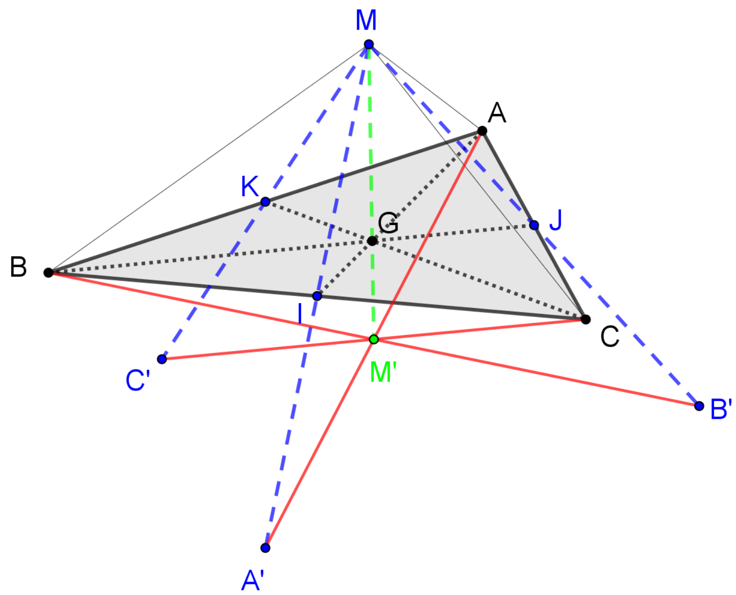
I étant le milieu de $[BC]$, $I = \mathscr{B}\{(B,1),(C,1)\}$.
Donc $(I,2)$ peut être remplacé par le couple $((B,1),(C,1))$.
Finalement $M' = \mathscr{B}\{(A,1),(B,1),(C,1),(M,-1)\}$.

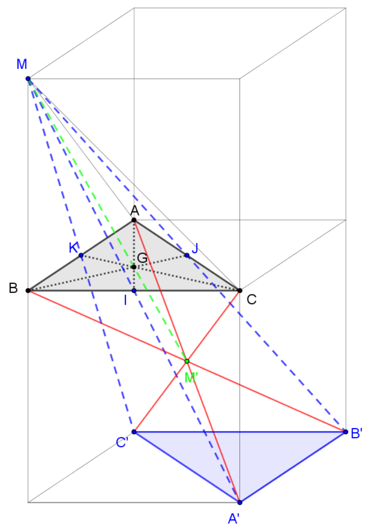
Comme J est le milieu de $[AC]$, $J = \mathscr{B}\{(A,1),(C,1)\}$ et donc $M' = \mathscr{B}\{(J,2),(B,1),(M,-1)\}$.
Comme J est le milieu de $[MB']$, $B' = \mathscr{B}\{(J,2),(M,-1)\}$ et donc $M' = \mathscr{B}\{(B',1),(B,1)\}$.
Cette dernière relation montre bien que M' est le milieu de $[BB']$, ce que l'on devait prouver.
On procède de la même manière pour montrer que M' est le milieu de $[CC']$.

Puisque $M' = \mathscr{B}\{(A,1),(B,1),(C,1),(M,-1)\}$, comme $G = \mathscr{B}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$, on remplace le triplet $((A,1),(B,1),(C,1))$ par $(G,3)$ et on obtient $M' = \mathscr{B}\{(G,3),(M,-1)\}$, ce qui prouve que M, G et M' sont alignés.

$\boxed{\text{Partie 2 : } M \text{ n'appartient pas au plan } (ABC)}$

Dans ce cas, que doit-on changer ? Rien. Les points G, I, J et K appartiennent toujours au plan (ABC) (par définition) tandis que les points A', B', C' et M' n'y appartiennent pas.
On peut ajouter que si M est au-dessus de ce plan, A', B', C' et M' sont en-dessous.
J'ai représenté la situation avec des segments en tiretés pour ceux qui traversent le plan (ABC).





3. Colinéarité et Orthogonalité

3.a. Colinéarité

PROPRIÉTÉ 4.13 (REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE DE DROITE) Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère, $M(x_0, y_0, z_0)$ un point et $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma) \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur.
$M(x, y, z) \in d(M_0, \overrightarrow{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{u}$, autrement dit :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$

DÉMONSTRATION $M(x, y, z) \in d(M_0, \overrightarrow{u})$ si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
Cela se traduit vectoriellement $\exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{u} \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\overrightarrow{u}$.
Cela équivaut à $\exists t \in \mathbb{R},\ x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = (x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + z_0\overrightarrow{k}) + t(\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k})$.
Comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de l'espace, la conclusion s'en déduit.

Remarques :

- Pour une même droite, il existe une infinité de représentations paramétriques différentes : il suffit de remplacer le point M_0 par un autre point M_0' de la droite ou de choisir un autre vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$.
  Supposons qu'une représentation paramétrique de la droite d soit
  $$M(x, y, z) \in d \iff \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$
  Avec $M_0(1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{u}(3, 2, 1)$ la droite d est $d(M_0, \overrightarrow{u})$.
  Mais, en prenant $t = -1$ on a $M_0'(-2, 0, 2) \in d$ et $\overrightarrow{u'}(6, 4, 2)$ est un autre vecteur directeur de d.
  On peut donc proposer d'autres représentations paramétriques de d :
  $$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$
- Une représentation paramétrique de demi-droite s'obtient en prenant $t \geqslant 0$ ou $t \leqslant 0$;
  pour la demi-droite $[AB)$, on prend la représentation paramétrique de $d(A, \overrightarrow{AB})$ avec $t \geqslant 0$;
  pour la demi-droite $[BA)$, on prend la représentation paramétrique de $d(B, \overrightarrow{BA})$ avec $t \geqslant 0$,
  mais bien sûr on peut aussi prendre la représentation paramétrique de $d(B, \overrightarrow{AB})$ avec $t \leqslant 0$.
- Une représentation paramétrique de segment s'obtient en prenant $t \in [0, 1]$ ou $t \in [0, 1]$;
  pour le segment $[AB]$, on prend la représentation paramétrique de $d(A, \overrightarrow{AB})$ avec $t \in [0, 1]$
  ou bien la représentation paramétrique de $d(B, \overrightarrow{AB})$ avec $t \in [-1, 0]$.

PROPRIÉTÉ 4.14 (REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UN PLAN) Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère, $M(x_0, y_0, z_0)$ un point $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ deux vecteurs non colinéaires.
$M(x, y, z) \in \mathcal{P}(M_0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$, autrement dit :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_0 + t\beta + t'\beta' \\ z = z_0 + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$

DÉMONSTRATION La démonstration est calquée sur la précédente.
D'après la définition 4.7, $M(x,y,z) \in \mathcal{P}(M_0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ est une combinaison linéaire d'une base du plan $\mathcal{P}$, ou $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, étant non-colinéaires, forment une base de ce plan.
Cela se traduit vectoriellement $\exists(t,t') \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$.
Cela équivaut à
$\exists(t,t') \in \mathbb{R}^2$, $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = (x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + z_0\overrightarrow{k}) + t(\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}) + t'(\alpha'\overrightarrow{i} + \beta'\overrightarrow{j} + \gamma'\overrightarrow{k})$.
Comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de l'espace, la conclusion s'en déduit.

Remarques :

- De même que pour les droites, et pour les mêmes raisons, la représentation paramétrique d'un plan n'est pas unique. Par contre, il est possible de déterminer une équation cartésienne d'un plan (voir à ce sujet la propriété 4.20) alors que ce type de représentation n'existe pas pour les droites.

  Supposons qu'une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ soit $\begin{cases} x = 1 + 3t - t' \\ y = 2 + 2t - 2t' \\ z = 3 + t - 3t' \end{cases}$

  Exprimons t et t' en fonction de x, y et z :
  $$\begin{cases} 3t - t' = x - 1 \\ 2t - 2t' = y - 2 \\ t - 3t' = z - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 6t - 2t' = 2x - 2 \\ 2t - 2t' = y - 2 \\ 2t - 6t' = 2z - 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 4t = 2x - y \\ 2t - 2t' = y - 2 \\ 4t' = y - 2z + 4 \end{cases}$$
  On trouve par soustraction $4t = 2x - y$ et $4t' = y - 2z + 4$, et en remplaçant dans la 3^{e} équation : $2t - 2t' = \frac{2x-y}{2} - \frac{y-2z+4}{2} = \frac{2x-y-(y-2z+4)}{2} = \frac{2x-2y+2z-4}{2} = y - 2$, soit
  $2x - 2y + 2z - 4 = 2(y-2) \iff 2x - 4y + 2z = 0 \iff x - 2y + z = 0$.
  L'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $x - 2y + z = 0$.

  Vérifions : $1 - 2 \times 2 + 3 = 0 \Longrightarrow M_0(1,2,3) \in \mathcal{P}$
  De plus, si $\overrightarrow{u}(3,2,1)$ et $\overrightarrow{v}(-1,-2,-3)$ sont les vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$, on doit pouvoir trouver $(M_1, M_2) \in \mathcal{P}^2$ tels que $\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{M_0M_2} = \overrightarrow{v}$.

  — L'égalité $\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{u}$ conduit à prendre $(t,t') = (1,0)$: $\begin{cases} x = 1 + 3 = 4 \\ y = 2 + 2 = 4 \\ z = 3 + 1 = 4 \end{cases}$ d'où $M_1(4,4,4)$

  — L'égalité $\overrightarrow{M_0M_2} = \overrightarrow{v}$ conduit à prendre $(t,t') = (0,1)$: $\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 3 - 3 = 0 \end{cases}$ d'où $M_2(0,0,0)$

  Il reste à vérifier $4 - 2 \times 4 + 4 = 0 \Longrightarrow M_1(4,4,4) \in \mathcal{P}$ et $0 - 2 \times 0 + 0 = 0 \Longrightarrow M_2(0,0,0) \in \mathcal{P}$.
- En jouant sur les intervalles dans lesquels on choisit t et t', on doit pouvoir donner une représentation paramétrique d'un secteur angulaire (en prenant $t \geqslant 0$ et $t' \geqslant 0$), d'un parallélogramme (en prenant $t \in [0,a]$ et $t' \in [0,b]$, a et b étant des nombres positifs), d'une bande limités par deux droites parallèles (en prenant $t \in [0,a]$ et $t' \in \mathbb{R}$).

3.b. Produit scalaire

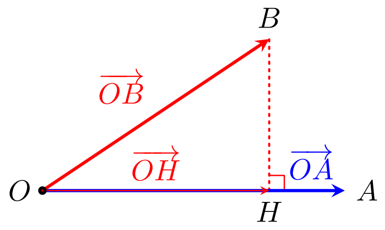
DÉFINITION 4.11 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, leur produit scalaire est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

  — Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

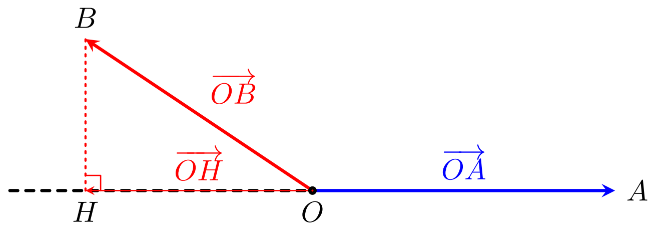
  — si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. O, A et B étant des points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal au produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ calculé dans le plan (OAB)

Remarques :

- On a appris, en 1re, à calculer le produit scalaire dans un plan.
  Rappelons qu'en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA) on a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$
  — si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OH$
  — si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-OA\times OH$



$\vec{u}\cdot\vec{v}=OA\times OH$



$\vec{u}\cdot\vec{v}=-OA\times OH$

- En notant θ l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\begin{cases}\text{si } -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ alors } \vec{u}\cdot\vec{v}\geqslant 0\\ \text{si } \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \text{ alors } \vec{u}\cdot\vec{v}\leqslant 0\end{cases}$
- Le carré scalaire est noté $\vec{u}^2$ et on a $\vec{u}^2=||\vec{u}||^2$. En particulier $\overrightarrow{AB}^2=||\overrightarrow{AB}||^2=AB^2$.

DÉFINITION 4.12 (DROITES ORTHOGONALES) Deux droites d et d' sont dites *orthogonales*, et on note $d\perp d'$, si les parallèles à ces droites passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

DÉFINITION 4.13 (VECTEURS ORTHOGONAUX) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux*, et on note $\vec{u}\perp\vec{v}$, si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ ou,
en notant O, A et B des points tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, on a $(OA)\perp(OB)$.

PROPRIÉTÉ 4.15 Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}\perp\vec{v}\Longleftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

DÉMONSTRATION Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux, on a deux cas :

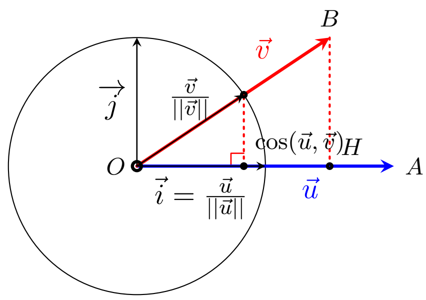
- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors le produit scalaire est évidemment nul
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-nuls, avec les notations de la définition 4.11, on a $(OA)\perp(OB)$, le projeté orthogonal de B sur (OA) est O donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=OA\times OO=0$

Réciproquement, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Comme $\vec{u}\cdot\vec{v}=\pm OA\times OH$,

- soit $OA=0$ c'est-à-dire que $\vec{u}=\vec{0}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
- soit $OH=0$ c'est-à-dire que $\vec{v}=\vec{0}$ ou B appartient à la perpendiculaire à (OA) passant par O donc dans les deux cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

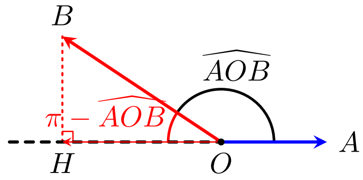
PROPRIÉTÉ 4.16 (VECTORIELLEMENT) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

DÉMONSTRATION Soient O, A et B des points tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. Le cercle trigonométrique de centre O est associé aux vecteurs $\vec{i}=\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ et $\vec{j}$ tels que $(\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Les angles $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||},\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||})$ étant égaux $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos(\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||},\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||})$.
La projection orthogonale de B sur (OA) étant notée H, on a
$\overrightarrow{OH}=||\vec{v}||\times\cos(\vec{u},\vec{v})\times\vec{i}$ et donc
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\overrightarrow{OH}=||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.



$\cos(\vec{u},\vec{v})$ conserve l'information sur le sens des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA}$: il est positif s'ils ont même sens, et négatif sinon.

Remarque :
Appliquons à une configuration géométrique, cette propriété :
Si O, A et B sont trois points du plan,
alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$



Propriété 4.17 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un réel.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 = \lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\lVert\vec{u}\rVert^2+\lVert\vec{v}\rVert^2-\lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert^2}{2}$
$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$	$\lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert^2 = \lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2-\lVert\vec{u}\rVert^2-\lVert\vec{v}\rVert^2}{2}$
$(\vec{u}+\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$	$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \lVert\vec{u}\rVert^2 - \lVert\vec{v}\rVert^2$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2-\lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert^2}{4}$

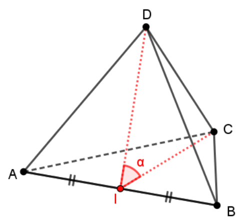
Démonstration La symétrie $(\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u})$ se montre à partir de la propriété 4.16 en utilisant la parité de la fonction cosinus $(\cos(-\theta) = \cos(\theta))$.

La bilinéarité – exprimée ici par rapport au 1er vecteur ($(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et
$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$) – se montre facilement en utilisant les expressions analytiques dans un repère orthonormé ; cela est fait plus loin.
Du fait de la symétrie, la linéarité par rapport au 2e vecteur ($\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$) – est automatique.

Les expressions de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ impliquant des normes qui sont listées dans la 3e colonne se déduisent des développements de $(\vec{u}+\vec{v})^2$, $(\vec{u}-\vec{v})^2$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ donnés dans la 2e colonne.

Remarques : Si ABC est un triangle alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$
Cela vient de la propriété de la 1re ligne, 3e colonne, car en prenant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
on a $\vec{u}-\vec{v} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Si $ABDC$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{AD^2-AB^2-AC^2}{2}$
Cela vient de la propriété de la 2e ligne, 3e colonne, car en prenant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
on a $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (règle du parallélogramme).

Exemple 7 –
Dans un tétraèdre régulier $ABCD$ de côté 1 les 4 faces sont des triangles équilatéraux dont on sait que les hauteurs mesurent $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On a, en particulier, $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{3}$ rad et $DI = CI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = DA \times DB \times \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$



Montrons que les côtés opposés sont orthogonaux, soit que $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$:
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$
Calculons l'angle dièdre $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC})$ entre les faces :
$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CB}}{4} = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}}{4} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{4}$
Or $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = DI \times CI\cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{CI}) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2\cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{CI})$
d'où $\cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{CI}) = \frac{3}{8}$ et $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{CI}) = \cos^{-1}(\frac{3}{8}) \approx 1,1864$ rad, environ 68°.

3.c. Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété 4.18 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé et les vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration Décomposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ selon les vecteurs de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$:
$\vec{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\vec{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$.
Développons le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) \cdot (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}) \\ &= x\overrightarrow{i} \cdot x'\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{i} \cdot y'\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{i} \cdot z'\overrightarrow{k} + y\overrightarrow{j} \cdot x'\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \cdot y'\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{j} \cdot z'\overrightarrow{k} + z\overrightarrow{k} \cdot x'\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{k} \cdot y'\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \cdot z'\overrightarrow{k} \\ &= xx'\overrightarrow{i}^2 + yy'\overrightarrow{j}^2 + zz'\overrightarrow{k}^2 + (xy' + yx')\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + (xz' + zx')\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} + (yz' + zy')\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Le repère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ étant normé, d'après la propriété 4.8, on a $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$.
(En effet $\overrightarrow{i}^2 = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = ||\overrightarrow{i}||^2 \cos(0) = 1$ et de même, $\overrightarrow{j}^2 = \overrightarrow{k}^2 = 1$)
De plus, le repère étant orthogonal, d'après la propriété 4.8, on a $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{j} \perp \overrightarrow{k}$.
(En effet $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = ||\overrightarrow{i}|| \times ||\overrightarrow{j}|| \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et de même $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$)
L'expression de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se simplifie donc en $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Remarques :

- Dans une base orthonormée la norme d'un vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ est donnée par cette propriété : $||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$, d'où $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ car $||\vec{u}|| \geqslant 0$.
  De même pour des points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ dont les coordonnées se réfèrent à un repère orthonormé. On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ et alors
  $AB^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$, d'où
  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- Montrons maintenant, à l'aide de cette propriété, la linéarité du produit scalaire exprimée dans la propriété 4.17. Pour cela, on se place dans une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y, z)$, $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ et $\overrightarrow{w}(x'', y'', z'')$ ainsi que le réel k :
  On sait que $k\vec{u}$ a pour composantes (kx, ky, kz) donc
  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = kxx' + kyy' + kzz' = k(xx' + yy' + zz') = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
  De plus $\vec{u} + \vec{v}$ ayant pour composantes $(x + x', y + y', z + z')$ on a
  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = x''(x + x') + y''(y + y') + z''(z + z') = xx'' + x'x'' + yy'' + y'y'' + zz'' + z'z'' = (xx'' + yy'' + zz'') + (x'x'' + y'y'' + z'z'') = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Définition 4.14 (Droite orthogonale à un plan) Une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à toute droite $d \in \mathcal{P}$.

Propriété 4.19 Une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.
Autrement dit, si $\overrightarrow{n}$ dirige $\mathcal{D}$ et si $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ dirige $\mathcal{P}$, on a $\mathcal{D} \perp \mathcal{P} \iff \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = 0$.

Démonstration Dans le sens direct, c'est immédiat : si $d \perp \mathcal{P}$ alors d est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$ et en particulier les droites d_1 et d_2 dirigées respectivement par $\overrightarrow{v}$ et par $\overrightarrow{w}$ or ces droites sont sécantes puisqu'elles sont dirigées par des vecteurs non-colinéaires.

Réciproquement, supposons $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = 0$. On a donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{w}$.
D'après la propriété 4.4, trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des deux autres. Toute droite d de $\mathcal{P}$ est donc dirigée par un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ qui est une combinaison linéaire des vecteurs non-colinéaires $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w}$.
Le produit scalaire $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{n} \cdot (x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w}) = x\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} + y\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = 0$; on en déduit que $d \perp \mathcal{P}$.

Définition 4.15 (Vecteur normal à un plan) Un vecteur est dit *normal* à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il dirige une droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Propriété 4.20 (Caractérisation d'un plan) Soient $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur et A un point.
Le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ contient tous les points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.
Dans un repère orthonormé, un triplet de réels $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et un point $A(x_A, y_A, z_A)$ étant donnés, le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, où $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$ et, réciproquement, tout plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet $\vec{n}(a, b, c)$ comme vecteur normal.

Démonstration $\boxed{\text{Caractérisation vectorielle}}$
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et soit $M \in \mathcal{P}$.

- Si $M = A$, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ car $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$.
- Si $M \neq A$, la droite (AM) existe et, comme elle est incluse dans $\mathcal{P}$, son vecteur directeur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

Réciproquement, montrons par l'absurde que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Longrightarrow M \in \mathcal{P}$:
Supposons que $M \notin \mathcal{P}$ et appelons M' le projeté orthogonal M sur $\mathcal{P}$.
On a $M' \neq M$, $(MM') \perp (AM')$ et $\overrightarrow{M'M}$ colinéaire à $\overrightarrow{n}$.
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = (\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}) \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{n} + \overrightarrow{M'M} \cdot \overrightarrow{n} = 0 + \overrightarrow{M'M} \cdot \overrightarrow{n} = \pm||\overrightarrow{M'M}|| \times ||\overrightarrow{n}||$.
Mais comme $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ et $||\overrightarrow{n}|| \neq 0$, on en déduit $||\overrightarrow{M'M}|| = MM' = 0 \Longleftrightarrow M = M'$.
Par conséquent si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ alors $M \in \mathcal{P}$.

$\boxed{\text{Caractérisation analytique, dans un repère orthonormé}}$
Soit $\mathcal{P}$ le plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c) \neq \vec{0}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$.
$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Et, comme $\overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$,
$M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Longleftrightarrow ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$,
et, en notant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient l'égalité $ax + by + cz + d = 0$.

Réciproquement : Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ n'étant pas nul, on peut supposer qu'une de ses composantes est non nulle, mettons $c \neq 0$. Le point $C(0, 0, \frac{-d}{c}) \in \mathcal{P}$ car $a \times 0 + b \times 0 + c \times \frac{-d}{c} + d = -d + d = 0$
Choisissons un point $A(x_A, y_A, z_A) \neq C$ de $\mathcal{P}$: $ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \Longrightarrow d = -ax_A - by_A - cz_A$
On a $\overrightarrow{AC}(-x_A, -y_A, \frac{-d}{c} - z_A)$ et donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \underbrace{-ax_A - by_A - cz_A}_{=d} - \frac{cd}{c} = d - d = 0$

Finalement $\vec{n}$ est bien un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Remarques :

- Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ quelle est l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{k}(0, 0, 1)$? C'est $cz + d = 0$ avec $O(0, 0, 0) \in \mathcal{P}$ on obtient $d = 0$.
  Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $z = 0$ (j'ai pris $c = 1$).
  Avec la notation $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}$ c'est le plan (IOJ).
  De même, le plan (IOK) a pour équation $y = 0$ et (JOK) a pour équation $x = 0$.
- Soient $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{v}(a', b', c')$ les vecteurs directeurs d'un plan $\mathcal{P}$. Déterminons le couple de réels (x, y) pour que le vecteur $\overrightarrow{n}(x, y, z = 1)$ soit normal à $\mathcal{P}$. Le système qui se déduit des conditions $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ conduit aux valeurs $x = \frac{cb' - bc'}{ba' - ab'}$ et $y = \frac{ac' - ca'}{ba' - ab'}$ (le vérifier).
  En reprenant les valeurs de la propriété 4.14, soient $\overrightarrow{u}(3, 2, 1)$ et $\overrightarrow{v}(-1, -2, -3)$ les vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$ passant par $M_0(1, 2, 3)$. Le vecteur $\overrightarrow{n}(\frac{-2+6}{-2+6}, \frac{-9+1}{-2+6}, 1) = (1, -2, 1)$ est normal à $\mathcal{P}$ donc l'équation qui s'en déduit est $x - 2y + z + d = 0$ et avec $M_0 \in \mathcal{P}$ on obtient $1 - 4 + 3 + d = 0 \Longleftrightarrow d = 0$, d'où l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$: $x - 2y + z = 0$.

3.d. Applications du produit scalaire

PROPRIÉTÉ 4.21 (POSITIONS RELATIVES) Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$' deux plans de vecteur normal respectif $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ et soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$

- Si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ alors la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ ($\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ ou $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$). Sinon $\mathcal{D}$ perce $\mathcal{P}$ en un point.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$' sont parallèles ($\mathcal{P} = \mathcal{P}$' ou $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$). Sinon $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{P}$' selon une droite.
- Si $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$' sont perpendiculaires ($\mathcal{P} = \mathcal{P}$' ou $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$)

DÉMONSTRATION Ces propriétés sont immédiates et ne font que reformuler les propriétés 4.5 et 4.6.

DÉFINITION 4.16 (PROJETÉ ORTHOGONAL) Soient $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et M un point. Le *projeté orthogonal* de M sur $\mathcal{P}$ est un point M' tel que $M' \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{MM'}$ colinéaire à $\overrightarrow{n}$.

Soient $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point.
Le *projeté orthogonal* de M sur $\mathcal{D}$ est un point M'' tel que $M'' \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{MM''} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.

PROPRIÉTÉ 4.22 (DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN) Soient $\mathcal{P}$ un plan passant par le point N de vecteur normal $\vec{n}$ et M un point. La *distance* du point M au plan $\mathcal{P}$ est $\dfrac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$
Dans un repère orthonormé, la distance entre un point $M(x, y, z)$ et le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est égale à $\dfrac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

DÉMONSTRATION Montrons tout d'abord que le projeté orthogonal M' de M sur $\mathcal{P}$ est le point le plus proche de M sur $\mathcal{P}$. Soit N un point de $\mathcal{P}$ différent de M'.
Dans le plan $(MM'N)$, comme (MM') est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, le triangle $MM'N$ est rectangle en M' et par application du théorème de Pythagore $MN^2 = MM'^2 + M'N^2$.
Comme $M'N > 0$ (car $M' \neq N$), on a $MN^2 > MM'^2 \iff MN > MM'$.
Calculons $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{n} = (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N}) \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{n} + \overrightarrow{M'N} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{n}$ car $\overrightarrow{M'N} \perp \overrightarrow{n}$.
On a donc $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{n} = \pm ||\overrightarrow{MM'}|| \times ||\overrightarrow{n}||$ car $\overrightarrow{M'N}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.
On en déduit $MM' = ||\overrightarrow{MM'}|| = \pm \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||}$ et comme une distance est positive $MM' = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$.
Prenons un point $N(x_N, y_N, z_N) \in \mathcal{P}$. On a $ax_N + by_N + cz_N + d = 0 \Longrightarrow d = -(ax_N + by_N + cz_N)$
$\overrightarrow{MN}(x_N - x, y_N - y, z_N - z)$ et donc
$\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = a(x_N - x) + b(y_N - y) + c(z_N - z) = \underbrace{ax_N + by_N + cz_N}_{=-d} - (ax + by + cz) = -(ax + by + cz + d)$
Donc $|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}| = |ax + by + cz + d|$ et comme, de plus, $||\overrightarrow{n}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, le résultat s'en déduit.

PROPRIÉTÉ 4.23 (DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE) Soient M et N deux points, $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vecteur. La *distance* de M à la droite et $\mathcal{D}(N, \vec{u})$ est $\sqrt{MN^2 - \frac{(\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u})^2}{||\overrightarrow{u}||^2}}$ soit $MN \times |\sin(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{u})|$.

DÉMONSTRATION Dans un repère orthonormé, projetons M sur $\mathcal{D}$ en faisant intervenir le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ passant par M.
Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ est un point M'' tel que $M'' \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{MM''} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.
Les coordonnées de $M(x,y,z)$ vérifient l'équation de $\mathcal{P}$ donc
$ax+by+cz+d=0 \Longrightarrow d = -(ax+by+cz)$
De même pour $M''(x'',y'',z'')$ donc
$ax''+by''+cz''-(ax+by+cz)=0 \Longleftrightarrow a(x''-x)+b(y''-y)+c(z''-z)=0$, cette dernière expression étant équivalente à $\overrightarrow{MM''} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.
Comme $M'' \in \mathcal{D}$, on doit avoir $\overrightarrow{NM''}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ donc $(x''-x_N, y''-y_N, z''-z_N)$ proportionnel à (a,b,c), soit $\begin{cases} x''-x_N = at \\ y''-y_N = bt \\ z''-z_N = ct \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'' = x_N + at \\ y'' = y_N + bt \\ z'' = z_N + ct \end{cases}$
En reportant ces expressions dans le produit scalaire $\overrightarrow{MM''} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ on obtient
$a(x_N+at-x)+b(y_N+bt-y)+c(z_N+ct-z)=0 \Longleftrightarrow (a^2+b^2+c^2)t =$
$-a(x_N-x)-b(y_N-y)-c(z_N-z) \Longleftrightarrow t = \frac{-a(x_N-x)-b(y_N-y)-c(z_N-z)}{a^2+b^2+c^2}$,
cette dernière expression étant équivalente à $t = \frac{-\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}$.
En reportant cette valeur dans les coordonnées de M'' on obtient $\begin{cases} x'' = x_N - a\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2} \\ y'' = y_N - b\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2} \\ z'' = z_N - c\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} MM''^2 &= (x_N - x - a\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2})^2 + (y_N - y - b\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2})^2 + (z_N - z - c\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2})^2 \\ &= (x_N-x)^2+(y_N-y)^2+(z_N-z)^2+(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}\right)^2 \\ &\quad - 2\left(a(x_N-x)+b(y_N-y)+c(z_N-z)\right) \times \frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2} \\ &= MN^2 - \frac{(\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u})^2}{||\overrightarrow{u}||^2} \end{aligned}$$

On en déduit $MM''^2 = \frac{||\overrightarrow{u}||^2 \times MN^2 - (\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u})^2}{||\overrightarrow{u}||^2} = \frac{||\overrightarrow{u}||^2 \times MN^2 - ||\overrightarrow{MN}||^2 \times ||\overrightarrow{u}||^2 \times \cos^2(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{u})}{||\overrightarrow{u}||^2}$ d'où
$MM''^2 = MN^2\left(1-\cos^2(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{u})\right) = MN^2 \times \sin^2(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{u})$ ce qui justifie la dernière expression.

Remarques :

- Cette démonstration est bien compliquée pour un résultat si simple qui parait presque évident lorsqu'on se reporte dans le plan $(MM'N)$ où, le triangle $MM'N$ étant rectangle en M', on établit immédiatement la dernière relation. Disons qu'en la faisant, on a obtenu quelques résultats intéressants comme les coordonnées du projeté orthogonal M'' de M sur $\mathcal{D}$ ainsi qu'une expression de la distance que l'on peut utiliser, programmer, dès lors que l'on connait les coordonnées de M, N et les composantes de $\overrightarrow{u}$ dans un repère orthonormé.
- Supposons que $\overrightarrow{u}(-2,1,5)$ dirige $\mathcal{D}$, une droite passant par $N(1,3,0)$.
  Quelle est la distance d de $M(2,0,7)$ jusqu'à $\mathcal{D}$? Facile : $d^2 = MN^2 - \frac{(\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u})^2}{||\overrightarrow{u}||^2}$
  $d^2 = (1-2)^2+(3-0)^2+(0-7)^2-\frac{(-2(1-2)+1(3-0)+5(0-7))^2}{(-2)^2+1^2+5^2} = 1+9+49-\frac{(2+3-35)^2}{4+1+25} = 59-30 = 29$
  Par conséquent $d = \sqrt{29} \approx 5,385$.

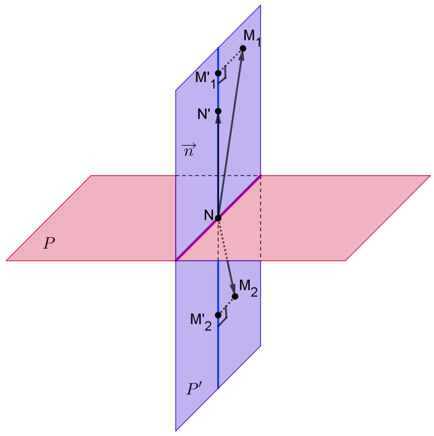
PROPRIÉTÉ 4.24 (DEMI-ESPACE) Soient $\mathcal{P}$ un plan passant par le point N de vecteur normal $\vec{n}$ et N' le point tel que $\overrightarrow{NN'} = \vec{n}$. Un point M quelconque de l'espace est :

- Dans le plan $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{NM} \cdot \vec{n} = 0$
- Dans le demi-espace limité par $\mathcal{P}$ contenant N' si $\overrightarrow{NM} \cdot \vec{n} > 0$
- Dans le demi-espace limité par $\mathcal{P}$ ne contenant pas N' si $\overrightarrow{NM} \cdot \vec{n} < 0$

Dans un repère orthonormé, le plan $\mathcal{P}$ ayant pour équation $ax + by + cz + d = 0$, les inéquations des deux demi-espaces sont $ax + by + cz + d > 0$ et $ax + by + cz + d < 0$.

DÉMONSTRATION Si M' est le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}(N, \vec{n})$ alors $\overrightarrow{NM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{NM'} \cdot \overrightarrow{NN'}$.

- Si $\overrightarrow{NM} \cdot \vec{n} = 0$ alors $M \in \mathcal{P}$
- Si $\overrightarrow{NM} \cdot \vec{n} > 0$ les vecteurs $\overrightarrow{NM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont donc colinéaires et de même sens. Les points N', M' et M sont dans la même partie de l'espace limitée par $\mathcal{P}$
- Si $\overrightarrow{NM} \cdot \vec{n} < 0$ les vecteurs sont colinéaires et de sens contraires. Les points M' et M sont dans le demi-espace limité par $\mathcal{P}$ qui ne contient pas N'

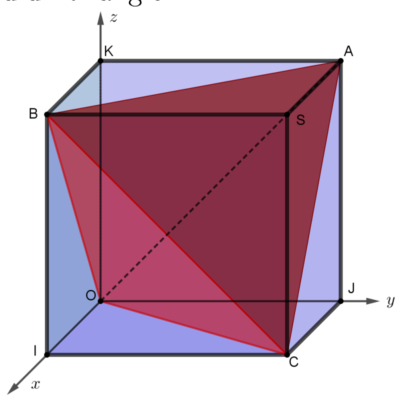


Sur l'illustration, les points M_1 et M_2 ne sont pas dans les mêmes demi-espaces limités par le plan $\mathcal{P}$.

EXEMPLE 8 – Le cube dessiné ci-dessous est construit à partir du repère orthonormé (O, I, J, K). Un point $M(x, y, z)$ de ce cube vérifie les trois encadrements $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $0 \leqslant z \leqslant 1$. Où doit se trouver le point M pour que ses coordonnées soient les cotés d'un triangle ?

Pour construire un triangle, chaque côté doit être inférieur ou égal à la somme des deux autres. Les coordonnées d'un point-solution doivent donc vérifier, en plus des trois encadrements, les trois inégalités $x \leqslant y + z$, $y \leqslant x + z$ et $z \leqslant x + y$.

L'inégalité $x \leqslant y + z$ correspond à un demi-espace limité par le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x - y - z = 0$. Parmi les sommets du cube $O(0, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$ et $B(1, 0, 1)$ vérifient l'équation de $\mathcal{P}_1$ donc $\mathcal{P}_1 = (OBC)$. Le point $I(1, 0, 0)$ ne vérifie pas l'inéquation $x \leqslant y+z$ du demi-espace solution donc on élimine du cube le tétraèdre $OBCI$.



De même, l'inégalité $y \leqslant x + z$ conduit à éliminer le tétraèdre $OCAJ$ car $O(0, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$ et $A(0, 1, 1)$ vérifient l'équation $x - y + z = 0$ de $\mathcal{P}_2$ tandis que $J(0, 1, 0)$ ne vérifie pas l'inégalité $y \leqslant x + z$. L'inégalité $z \leqslant x + y$, quant à elle, conduit à éliminer le tétraèdre $OBAK$.

La suppression de ces trois tétraèdres fait émerger un solide-solution constitué du tétraèdre régulier $OABC$ auquel s'accole le tétraèdre rectangle $SABC$. Ce solide est un hexaèdre (6 faces triangulaires).

Quelle est l'équation du plan $\mathcal{P}_4 = (ABC)$?
$\overrightarrow{OS}(1, 1, 1)$ est un vecteur normal à ce plan $\mathcal{P}_4$, l'équation cherchée est de la forme $x + y + z + d = 0$.
Comme $A(0, 1, 1) \in \mathcal{P}_4$, on obtient $1 + 1 + d = 0 \iff d = -2$. L'équation de $\mathcal{P}_4$ est $x + y + z - 2 = 0$.
Le point $S(1, 1, 1)$ vérifiant l'inégalité $x + y + z - 2 \geqslant 0$, cette inéquation caractérise le demi-espace contenant S limité par (ABC).
Un point du tétraèdre $SABC$ vérifie, en plus des trois encadrements, cette inéquation.
Un point du tétraèdre régulier $OABC$ vérifie, en plus des trois encadrements ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$) et des trois inégalités ($x \leqslant y + z$, $y \leqslant x + z$, $z \leqslant x + y$), l'inéquation $x + y + z - 2 \leqslant 0$.
Comme les quatre plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ sont sécants deux à deux, leurs intersections constituant les arêtes du tétraèdre $OABC$, on comprend que les quatre inéquations des demi-espaces concernés ($x \leqslant y + z$, $y \leqslant x + z$, $z \leqslant x + y$, $x + y + z \leqslant 2$) suffisent à caractériser les points de ce tétraèdre.

DÉFINITION 4.17 (SPHÈRE) La *sphère* $\mathcal{S}(\Omega, R)$ de centre Ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$.
La *boule* $\mathcal{B}(\Omega, R)$ de centre Ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M tels que $\Omega M \leqslant R$.

PROPRIÉTÉ 4.25 Soient A et B deux points et Ω leur milieu.
La sphère $\mathcal{S}(\Omega, \frac{AB}{2})$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Dans un repère orthonormé, avec $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et $M(x, y, z)$,
l'équation cartésienne de $\mathcal{S}(\Omega, R)$ est $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$.
Un point $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ avec $d \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$ appartient à la sphère de centre $\Omega(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-b}{2})$ et de rayon $R = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d}$.

DÉMONSTRATION ➲ On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en utilisant le milieu Ω de $[AB]$:
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{M\Omega} + \cdot\overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \cdot\overrightarrow{\Omega B}) = ||M\Omega||^2 + \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B}$
Mais comme Ω est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B} = -||\overrightarrow{\Omega A}||^2$ (vecteurs opposés) et
$\overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{M\Omega} = \overrightarrow{M\Omega} \cdot (\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega A}) = \overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{0} = 0$
On en déduit $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = ||M\Omega||^2 - ||\overrightarrow{\Omega A}||^2 = M\Omega^2 - \Omega A^2 = M\Omega^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$.
Par conséquent $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff M\Omega^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \implies M\Omega = \frac{AB}{2}$.
➲Transformons l'équation donnée dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} + d \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 + d - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \end{aligned}$$

La discussion porte alors sur $d' = d - \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$

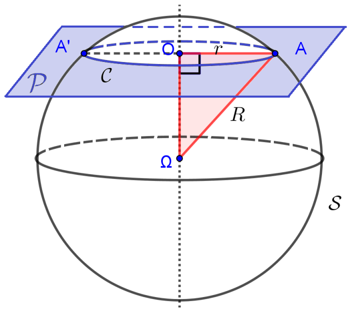
- si $d' > 0$ alors $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \iff (x + \frac{a}{2})^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + (z + \frac{c}{2})^2 = 0$
  alors M appartient à une sphère de rayon $\sqrt{d'}$ et de centre $\Omega(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-b}{2})$.
- si $d' = 0$ alors cette sphère est réduit au point $\Omega(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-b}{2})$ (le rayon est nul).
- si $d' < 0$ alors aucun point ne vérifie l'équation (une somme de carrés n'est jamais négative).

EXEMPLE 9 – Dans un repère orthonormé, on considère la sphère $\mathcal{S}(\Omega, R)$ d'équation $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + 3z = a$ et on se demande pour quelles valeurs de a le plan coupe la sphère et dans ce cas, quelles sont les coordonnées du centre du cercle-solution et quel en est le rayon.
Le centre $\Omega(1, 2, 3)$ de la sphère se projette orthogonalement sur le plan en un point $O(x_O, y_O, z_O)$ tel que $\overrightarrow{\Omega O}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}(1, 2, 3)$ normal à $\mathcal{P}$.
On en déduit que $x_O + 2y_O + 3z_O = a$ et $\exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\Omega O}(x_O - 1, y_O - 2, z_O - 3) = t\overrightarrow{u}(1, 2, 3)$
Pour déterminer les coordonnées de O, il faut donc résoudre ce système :

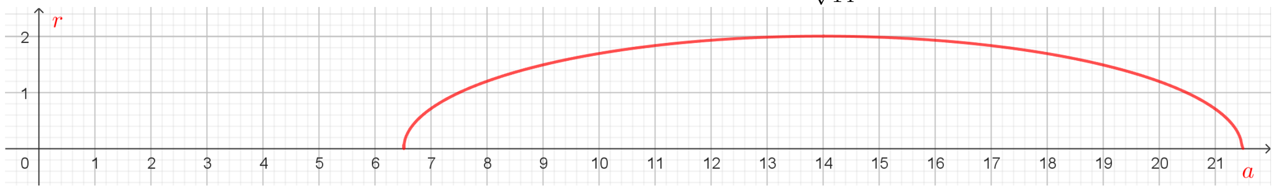
$$\begin{cases} x_O + 2y_O + 3z_O = a \\ x_O - 1 = t \\ y_O - 2 = 2t \\ z_O - 3 = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} x_O + 2y_O + 3z_O = a \\ x_O - 1 = t \\ y_O - 2 = 2(x_O - 1) \\ z_O - 3 = 3(x_O - 1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_O + 4x_O + 9x_O = a \iff 14x_O = a \\ x_O - 1 = t \\ y_O = 2(1 + x_O - 1) = 2x_O \\ z_O = 3x_O \end{cases}$$

On en déduit $x_O = \dfrac{a}{14}$, $y_O = 2x_O = \dfrac{2a}{14}$ et $z_O = 3x_O = \dfrac{3a}{14}$.

La sphère est coupée par le plan si la distance ΩO est inférieure ou égale au rayon R de la sphère, soit si $\Omega O^2 \leqslant R^2$.
Si on effectue une coupe de la sphère par un plan $\mathcal{P}'$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par Ω, $\overrightarrow{\Omega O}$ est un des deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}'$ et, si $A \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}'$, $\overrightarrow{OA}$ en est un autre. Ces deux vecteurs sont orthogonaux et, dans le triangle ΩOA, inclus dans $\mathcal{P}'$ et rectangle en O, on peut appliquer le théorème de Pythagore :
$\Omega A^2 = \Omega O^2 + OA^2 \iff R^2 = \Omega O^2 + r^2 \implies r = \sqrt{R^2 - \Omega O^2}$



Or $\Omega O^2 = (\frac{a}{14} - 1)^2 + (\frac{2a}{14} - 2)^2 + (\frac{3a}{14} - 3)^2 = \frac{(a-14)^2+4(a-14)^2+9(a-14)^2}{14^2} = \frac{(a-14)^2(1+4+9)}{14^2} = \frac{(a-14)^2}{14}$.
Le plan coupe donc la sphère si $\frac{(a-14)^2}{14} \leqslant 4 \iff (a-14)^2 \leqslant 56 \iff 14 - 2\sqrt{14} \leqslant a \leqslant 14 + 2\sqrt{14}$
Le rayon r du cercle d'intersection est $r = \sqrt{R^2 - \Omega O^2}$ soit ici $r = \sqrt{4 - \frac{(a-14)^2}{14}} = \frac{\sqrt{56-(a-14)^2}}{\sqrt{14}}$.
Je trace pour vérification la courbe de la fonction $r : a \longmapsto \frac{\sqrt{56-(a-14)^2}}{\sqrt{14}}$



Lorsque $a = 14$, $\mathcal{P}$ passe par Ω et coupe $\mathcal{S}$ selon un de ses grands cercles (on a alors $R = r$).
Comme $14 - 2\sqrt{14} \approx 6,52$ et $14 + 2\sqrt{14} \approx 21,48$, entre ces deux valeurs le plan $\mathcal{P}$ coupe la sphère selon un cercle dont le rayon est lu en ordonnée de cette courbe.

Il me reste encore une interrogation : quelle est l'équation du cercle intersection $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$?
Bien sûr, on peut chercher les coordonnées des deux points A et A', diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$ et traduire la caractérisation $M(x, y, z) \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$ par l'expression algébrique recherchée.
Cette démarche est parfaitement légitime et conduit au bon résultat après de longs et rébarbatifs calculs impliquant le paramètre a ; mais surtout, cette démarche est parfaitement inutile puisqu'on sait déjà les coordonnées du centre et le rayon du cercle.
L'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est tout simplement :

$$\left(x - \frac{a}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{2a}{14}\right)^2 + \left(z - \frac{3a}{14}\right)^2 = \frac{56 - (a-14)^2}{14}$$

Lorsque $a = 14$, cette équation se simplifie en $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$ (grand cercle)