# 1 Dénombrement & Suites

---

**Plan du chapitre :**

1.1 Le principe du raisonnement par récurrence

2.2 Dénombrement : cardinaux ensemblistes, produit cartésien, listes

3.3 Combinatoire : permutations, arrangements, combinaisons, coefficients binomiaux

4.4 Suites convergentes et suites divergentes, limite d'une suite et monotonie, suites adjacentes

**Aperçu historique :** Au début, les nombres entiers positifs étaient perçus implicitement – d'où leur appellation de « naturels » – mais au XIX$^{e}$ siècle, les mathématiciens Richard Dedekind (1831-1916) et Guiseppe Peano (1858-1932) établirent les fondements de la théorie des ensembles et l'axiomatique qui justifie le raisonnement par récurrence. Citons le 5$^{e}$ axiome de Peano : *Toute partie non vide de* $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément.* Le plus petit élément de $\mathbb{N}$ étant zéro, la construction complète de l'ensemble ne nécessite plus que le principe de récurrence : *le successeur de l'entier* $n$ *est* $n+1$.

Un dénombrement est aisé si les nombres impliqués sont petits et si les structures sous-jacentes le facilitent. Ainsi, dénombrer le nombre de diagonales d'un polygone à $n$ côtés est relativement simple quand on comprend que d'un sommet on peut en tracer $n-3$ ; de même, on peut assez facilement dénombrer le nombre de plaques d'immatriculation (dites minéralogiques car anciennement attribuées par le Service des mines) différentes dès lors que l'on en connait la structure (actuellement en France 2 lettres-3 chiffres-2 lettres, certaines combinaisons de lettres étant omises). Dessiner un arbre ou un tableau peut aider au dénombrement, mais certaines structures compliquées nécessitent des outils spécifiques et les mathématiciens s'employèrent à les mettre au point, d'abord dans le cadre de l'étude des jeux de hasard. En France, on retient notamment les noms de Blaise Pascal (1623-1663) et Pierre Fermat (1601-1665) qui échangèrent sur ce sujet. En fait, certains résultats combinatoires avaient déjà été établis durant l'antiquité en Inde, en Chine ou en Grèce. Les mathématiciens indiens Varāhamihira au VI$^{e}$ siècle et Bhāskara au XII$^{e}$ s'intéressèrent aux nombres de combinaisons de $k$ éléments choisis parmi $n$. À l'époque contemporaine, la combinatoire se trouve mêlée et s'enrichit de nombreux domaines : l'algèbre, l'analyse, les probabilités, l'informatique. Le mathématicien hongrois Paul Erdős (1913-1996), par exemple, développa la branche combinatoire de la théorie des nombres.

L'étude des suites est très anciennes. En Grèce, au III$^{e}$ siècle avant J.-C., Archimède approche le nombre $\pi$ avec une belle précision grâce à un procédé impliquant deux suites adjacentes. Au I$^{er}$ siècle après J.-C., Héron d'Alexandrie décrit une méthode très efficace pour extraire une racine carrée ; cette méthode utilise une suite récurrente. Léonard de Pise, dit Fibonacci, expose au XIII$^{e}$ siècle sa célèbre suite récurrente d'ordre 2 ; au XIV$^{e}$, Nicolas Oresme a clairement exposé les suites que l'on appelle désormais arithmétique et géométrique ; au XVII$^{e}$, Bernoulli, Newton, De Moivre, Stirling, Wallis, entre autres, s'intéressent aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à ce moment notamment qu'est précisée la notion de limite. Au début du XIX$^{e}$ siècle, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) utilise la notation indicielle $u_n$ et Augustin Louis Cauchy (1789-1857) fonde la théorie des suites. À partir de la seconde moitié du XX$^{e}$ siècle, l'utilisation des ordinateurs va réactiver l'intérêt porté aux suites puisqu'ils permettent de pousser très loin et très vite les calculs, par nature répétitifs, qui leur sont liés.

# 1. Le raisonnement par récurrence

Ce chapitre traite principalement de nombres entiers.

- Dénombrer, c'est compter avec les entiers positifs, dits naturels
- L'analyse combinatoire ne manipule que des entiers naturels
- Les suites sont des applications de $\mathbb{N}$ (l'ensemble des naturels) ou d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$
- Le raisonnement par récurrence s'applique là où une propriété est valable pour tout entier à partir d'un certain rang, on va l'utiliser tout au long de ce chapitre

Contrairement à l'arithmétique qui étudie les propriétés intrinsèques des entiers naturels (diviseurs, congruences, etc.), on utilise ici les nombres entiers pour leurs fonctions, cardinale (pour compter) et ordinale (pour numéroter). Ces notions sont abordées dès les petites classes, mais elles deviennent rapidement techniques et complexes d'où l'étalement de leur étude en terminale et au-delà.

## 1.a. Récurrence simple

Propriété 1.1 (Démonstration par récurrence) Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui se décline pour toutes les valeurs d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : si $\mathcal{P}(0)$ est une proposition vraie
- Hérédité : et si $\mathcal{P}(n)$ étant supposée vraie, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration Le fondement de cette propriété est le 5$^{e}$ axiome de Peano (toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément). En effet, si la proposition $\mathcal{P}(n)$ n'était pas vraie pour certains entiers, il existerait un plus petit entier $p > 0$ pour lequel la proposition $\mathcal{P}(p)$ serait fausse.
Par conséquent, pour le rang $p-1$ la proposition $\mathcal{P}(p-1)$ serait encore vraie.
Or on sait que $\mathcal{P}(n)$ vraie $\Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie.
On doit en déduire que $\mathcal{P}((p-1)+1) = \mathcal{P}(p)$ est vraie, ce qui contredit l'hypothèse de l'existence d'un rang $p$ pour lequel la proposition est fausse. Finalement, les deux conditions (initialisation et hérédité) suffisent à prouver que la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**Remarques** :

- L'initialisation d'une démonstration par récurrence peut être élargie à un rang $n_0 \geqslant 0$ et formulée ainsi « si $\mathcal{P}(n_0)$ est une proposition vraie ». Dans ce cas, l'hérédité étant également assurée, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ (on note cet ensemble : $[\![n_0; +\infty[\![$).
Pour en donner la preuve, il suffit d'effectuer un glissement des indices : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant rebaptisée proposition $\mathcal{P}'(n-n_0)$, la proposition $\mathcal{P}'(0)$ est vraie car alors $n = n_0$ ; l'hérédité étant conservée, la propriété $\mathcal{P}'(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow n \geqslant n_0$ et donc aussi $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$.
- Méthode : commencer par montrer que la propriété est vraie à un rang $n_0$ (c'est l'initialisation) puis démontrer que si elle est vraie à un rang $n$, alors elle l'est aussi au rang $n+1$ (c'est l'hérédité : la véracité de la propriété se propage d'un rang où elle est vraie au rang suivant). Ceci permet de conclure qu'elles est vraie pour tous les rangs supérieurs ou égaux à $n_0$.

**Exemple** 1 – Prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $0 = \frac{0(0+1)}{2}$.
Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie et établissons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.
Pour cela calculons :
$0+1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Comme $\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$, l'expression obtenue est bien conforme à celle de $\mathcal{P}(n+1)$.
La propriété $\mathcal{P}$ est donc bien héréditaire.
Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

On peut faire cette observation :

- $1^3 = 1^2$
- $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2$

Cette observation se généralise t-elle en une propriété $\mathcal{Q}(n)$ valable pour tous les entiers ?
A t-on : $0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (0+1+2+3+\cdots+n)^2$ ?
Initialisation : $\mathcal{Q}(0)$ est évidemment vraie ($0^3 = 0^2$) et, comme on l'a vu, $\mathcal{Q}(1)$, $\mathcal{Q}(2)$ et $\mathcal{Q}(3)$ aussi.
Hérédité : supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie.
On en déduit $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (1+2+\cdots+n)^2 + (n+1)^3$ et, d'après la propriété $\mathcal{P}$ précédente, on obtient $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$.
Or $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.
Ainsi $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$ ce qui, d'après la propriété $\mathcal{P}$, est égal à $(1+2+\cdots+n+(n+1))^2$, soit l'expression attendue pour la proposition $\mathcal{Q}(n+1)$
La proposition $\mathcal{Q}$ est donc bien héréditaire.
Conclusion : la proposition $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
Finalement, on peut reformuler $\mathcal{Q}(n)$ : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

### 1.b. Récurrence double

La récurrence double est une généralisation assez naturelle du procédé de récurrence simple. Elle permet de démontrer des propriétés dont la véracité à un rang $n$ dépend de sa véracité aux rangs $n-1$ et $n-2$.

PROPRIÉTÉ 1.2 Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui se décline pour toutes les valeurs d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : si $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ est une proposition vraie
- Hérédité : et si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ étant supposées vraies, $\mathcal{P}(n+2)$ est aussi vraie

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION Notons $\mathcal{Q}(n)$ la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
D'après la 1re hypothèse, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
La propriété $\mathcal{Q}$ est ainsi initialisée au rang 0.

D'après la 2e hypothèse, si $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, c'est-à-dire si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n+2)$ sont vraies donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
La propriété $\mathcal{Q}$ est donc héréditaire.

Conclusion : la propriété $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cela signifie que $\mathcal{P}(n)$ (et $\mathcal{P}(n+1)$) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Remarques** :

- L'initialisation d'une récurrence double peut être élargie à un rang $n_0 \geqslant 0$ (on formulerait cette initialisation : « si $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont des propositions vraies ». Dans ce cas, la propriété est alors vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- Méthode :
  — Énoncer clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in [\![n_0; +\infty[\![$
  — Faire une double initialisation : montrer que la propriété est vraie aux rangs $n_0$ et $n_0+1$
  — Démontrer l'hérédité avec une hypothèse de récurrence double. Soit $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, en supposant que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie
  — Conclure d'une phrase : « par principe de récurrence double, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0; +\infty[\![$ »

**Exemple** 2 – On considère la suite $(u_n)$ définie par :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
Cette suite $(u_n)$ est la fameuse suite de Fibonacci dont les termes sont : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc. et dont le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers le « nombre d'or » $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Pour un rang donné $n$, on pose $\mathcal{P}(n)$ : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$
Cette propriété est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ?

Initialisation :
$\dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right] = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times [1-1] = 0 = u_0$
$\dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}] = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1 = u_1$
Les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont donc vraies.

Hérédité :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

Or $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$
Finalement $u_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$
La proposition $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie lorsque $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont toutes les deux vraies.

Conclusion : par principe de récurrence double la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### 1.c. Récurrence forte

La récurrence simple (ou double) permet de démontrer des propriétés dont la véracité se propage d'un (ou deux) rang(s) au rang suivant. La récurrence forte permet de démontrer des propriétés dont la véracité à un rang donné dépend de la véracité à *tous* les rangs précédents.

Propriété 1.3 Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui se décline pour toutes les valeurs d'un entier $n \in \mathbb{N}$.
- Initialisation : si $\mathcal{P}(0)$ est une proposition vraie
- Hérédité : et si $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, ..., $\mathcal{P}(n)$ étant supposées vraies, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration Notons $\mathcal{Q}(n)$ la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, ..., $\mathcal{P}(n)$ sont vraies.
D'après la 1re hypothèse, $\mathcal{P}(0)$ est vraie donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
La propriété $\mathcal{Q}$ est ainsi initialisée au rang 0.

D'après la 2e hypothèse, si $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, c'est-à-dire si $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, ..., $\mathcal{P}(n)$ sont vraies alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On en déduit que $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, ..., $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
La propriété $\mathcal{Q}$ est donc héréditaire.

Conclusion : la propriété $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cela signifie que $\mathcal{P}(n)$ (et tous les $\mathcal{P}(k)$ pour $k \in [\![0;n-1]\!]$) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>**Remarques**</u> :

- L'initialisation d'une récurrence forte peut être élargie à un rang $n_0 \geqslant 0$ (on formulerait cette initialisation : « si $\mathcal{P}(n_0)$ est une proposition vraie ». Dans ce cas, la propriété est alors vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- Méthode :
  — Énoncer clairement, pour tout $n \in [\![n_0; +\infty[$ la propriété $\mathcal{P}(n)$
  — Faire une simple initialisation : montrer que la propriété est vraie au rang $n_0$
  — Démontrer l'hérédité avec une hypothèse de récurrence forte. Soit $n \in [\![n_0; +\infty[$, supposons que $\mathcal{P}(n_0)$, $\mathcal{P}(n_0+1)$, ..., $\mathcal{P}(n)$ sont vraies et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie
  — Conclure d'une phrase : « par principe de récurrence forte, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0; +\infty[$ »

<u>**Exemple**</u> 3 – Le théorème fondamental de l'arithmétique énonce que chaque entier naturel $n \geqslant 2$ peut se décomposer comme produit de facteurs premiers (un seul facteur pour les nombres premiers). L'existence de cette décomposition a été montrée dans le chapitre d'arithmétique par le procédé de descente infinie. On peut néanmoins prouver cette existence grâce à une récurrence forte.
Soit un entier $n \geqslant 2$ et $\mathcal{P}(n)$ : $n$ est, soit un nombre premier, soit un produit de nombres premiers.

Initialisation :
2 est un nombre premier. $\mathcal{P}(2)$ est donc vraie.

Hérédité :
Supposons que pour tout $k \in [\![2; n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ soit vraie.
Deux cas se présentent :

- Si $n+1$ est un nombre premier alors $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.
- Si $n+1$ n'est pas premier alors il existe au moins un diviseur $m$ tel que $m \neq 1$, $m \neq (n+1)$ et $\exists p \in \mathbb{N},\ \ n+1 = p \times m$. Or tout diviseur $m$ d'un entier $n+1$ est compris entre 1 et $n+1$.
  On a donc $1 \leqslant m \leqslant n+1$ mais comme $m \neq 1$ et $m \neq (n+1)$, on en déduit $m \in [\![2; n]\!]$.
  Ce qu'on vient de dire pour $m$ est valable également pour $p$ (car
  $m > 1 \Longrightarrow p \times m > p \Longrightarrow n+1 > p$ et $m < n+1 \Longrightarrow m < p \times m \Longrightarrow 1 < p$) donc $p \in [\![2; n]\!]$.
  Comme $m \in [\![2; n]\!]$ et $p \in [\![2; n]\!]$, d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(p)$ sont vraies.
  Finalement, $n+1$ peut s'écrire comme produit de nombres premiers. $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.

Ainsi, dans tous les cas, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \geqslant 2$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Tout entier $n \geqslant 2$ est, soit un nombre premier, soit un produit de nombres premiers.

# 2. Dénombrement

## 2.a. Cardinaux ensemblistes

Définition 1.1 (Cardinal) Soit $E$ un ensemble fini d'éléments.
Le cardinal de $E$, noté $\text{Card}(E)$ est le nombre d'éléments de $E$.

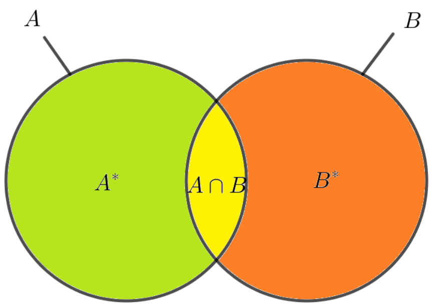
Propriété 1.4 L'*ensemble vide* $\emptyset$ ne contient aucun élément, d'où $\text{Card}(\emptyset) = 0$

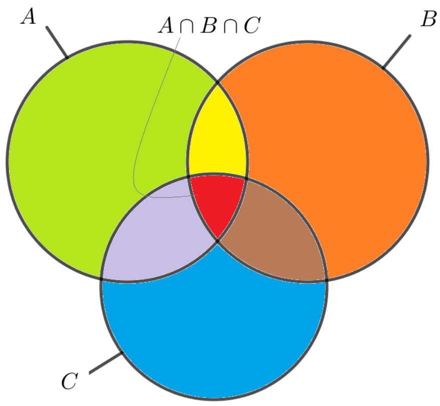
Cardinaux de l'union de deux ou trois ensembles :
Si les ensembles $A$ et $B$ sont *disjoints* alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$
Pour deux ensembles $A$ et $B$ : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
Pour trois ensembles $A$, $B$ et $C$ :

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B \cup C) = {} & \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) \\ & - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION Deux ensembles disjoints :
Les éléments de $A \cup B$ sont tous ceux de $A$ et tous ceux de $B$.
Il n'y a aucun doublon puisque les ensembles sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$).
Par conséquent $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
Dans ce cas $B$ est le *complémentaire* de $A$ dans $E = A \cup B$, ce qu'on note $B = \bar{A}_E$.

Deux ensembles (cas général) :
Notons $E = A \cup B$ et $A^* = \bar{B}_E$ (voir l'illustration en bas à gauche).
On a $A = A^* \cup (A \cap B)$ avec $A^* \cap (A \cap B) = \emptyset$.
En appliquant la propriété précédente : $\text{Card}(A) = \text{Card}(A^* \cup (A \cap B)) = \text{Card}(A^*) + \text{Card}(A \cap B)$.
On en déduit $\text{Card}(A^*) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$ or $A \cup B = A^* \cup B$ avec $A^* \cap B = \emptyset$
donc $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A^*) + \text{Card}(B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(B)$.




Trois ensembles :
On utilise la propriété précédente deux fois, en remarquant que $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$ mais aussi que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$.

$$\begin{aligned}
\text{Card}(A \cup (B \cup C)) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B \cup C) - \text{Card}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \text{Card}(A) + [\text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(B \cap C)] - \text{Card}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \underbrace{\text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C)}_{\text{noté } ABC} - \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}((A \cap B) \cup (A \cup C) \\
&= ABC - \text{Card}(B \cap C) - [\text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}((A \cap B) \cup (A \cap C))] \\
&= ABC - \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

**EXEMPLE** 4 – Dans le club de sport de ma ville, il y a 35 membres : 17 sont inscrits au foot, 14 au basket et 15 au tennis, 8 sont inscrits à la fois au foot et au basket, 7 à la fois au basket et au tennis, 6 à la fois au foot et au tennis et 5 sont inscrits à la fois aux 3 sports. Y a t-il des membres qui ne sont inscrits à aucun de ces trois sports ? Et si oui, combien ?

On va noter $F$, $B$ et $T$ les ensembles de membres inscrits au foot, basket et tennis. Ainsi on a :
- $\text{Card}(F) = 17$, $\text{Card}(B) = 14$, $\text{Card}(T) = 15$
- $\text{Card}(F \cap B) = 8$, $\text{Card}(B \cap T) = 7$, $\text{Card}(F \cap T) = 6$
- $\text{Card}(F \cap B \cap T) = 5$

On en déduit $\text{Card}(F \cup B \cup T) = 17 + 14 + 15 - 8 - 7 - 6 + 5 = 30$.
L'ensemble des membres du club, noté *Club*, est constitué des ensembles disjoints des membres inscrits à au moins un de ces trois sports, noté $F \cup B \cup T$, et de ceux qui ne sont inscrits à aucun des trois, noté $\overline{F \cup B \cup T}$.
On a donc $\text{Card}(Club) = \text{Card}(F \cup B \cup T) + \text{Card}(\overline{F \cup B \cup T})$ donc
$\text{Card}(\overline{F \cup B \cup T}) = \text{Card}(Club) - \text{Card}(F \cup B \cup T)$ soit $\text{Card}(\overline{F \cup B \cup T}) = 35 - 30 = 5$.
Il y a 5 membres qui ne sont inscrits à aucun des trois sports.

### 2.b. Produits cartésiens

Définition 1.2 Si $A$ et $B$ sont deux ensembles, le *produit cartésien* de $A$ et $B$, noté $A \times B$, est l'ensemble dont les éléments sont les *couples* $(a, b)$ où $a \in A$ et $b \in B$.

Soit $n$ est un entier supérieur ou égal à 2 :
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont $n$ ensembles, le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est l'ensemble des $n$-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \ a_i \in A_i$.
$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n fois}$, est l'ensemble des $n$-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \ a_i \in A$.

Propriété 1.5 Si $A$ et $B$ sont deux ensembles finis, $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$

Soit $n$ est un entier supérieur ou égal à 2 :
$\mathrm{Card}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \mathrm{Card}(A_1) \times \mathrm{Card}(A_2) \times \mathrm{Card}(A_n)$
$\mathrm{Card}(A^n) = (\mathrm{Card}(A))^n$

Démonstration Deux ensembles :
Pour constituer les *couples* $(a, b)$ avec $a$ décrivant l'ensemble $A$ et $b$ décrivant l'ensemble $B$, on peut commencer par fixer le 1er élément $a_1$ de $A$ et constituer les couples $(a_1, b)$ avec $b$ décrivant l'ensemble $B$, soit écrire les $\mathrm{Card}(B)$ couples $(a_1, b_i)$ où $\forall i \in [\![1; \mathrm{Card}(B)]\!],\ \ b_i \in B$.
Ensuite on fixe le 2e élément $a_2$ de $A$ et constituer les couples $(a_2, b_i)$ où $\forall i \in [\![1; \mathrm{Card}(B)]\!],\ \ b_i \in B$.
Ainsi de suite, jusqu'à constituer les couples $(a_{\mathrm{Card}(A)}, b_i)$ où $\forall i \in [\![1; \mathrm{Card}(B)]\!],\ \ b_i \in B$.
On a ainsi constitué $\mathrm{Card}(A)$ fois des ensembles contenant $\mathrm{Card}(B)$ éléments.
Cette méthode de construction peut être schématisée par un arbre contenant $\mathrm{Card}(A)$ branches sur chacune desquelles sont réparties $\mathrm{Card}(B)$ feuilles, ce qui conduit à obtenir $\mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$ feuilles.

$n$ ensembles :
On procède par récurrence, l'étape d'initialisation étant vérifiée d'après la propriété précédente.
Pour montrer l'hérédité de cette propriété, on suppose que
$\mathrm{Card}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathrm{Card}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(A_n)$ et on ajoute $\mathrm{Card}(A_{n+1})$ feuilles aux $\mathrm{Card}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(A_n)$ extrémités de l'arbre précédent, en ajoutant à celles-ci les $\mathrm{Card}(A_{n+1})$ éléments du $(n+1)$e ensemble, ce qui conduit à $\mathrm{Card}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(A_{n+1})$ feuilles.

Lorsque $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \ A_i = A$, la formule précédente s'écrit $\mathrm{Card}(A^n) = (\mathrm{Card}(A))^n$.

**Remarques** :

- Lorsqu'on tire deux dés à 6 faces numérotées, un résultat possible est un élément du produit cartésien $A^2$ avec $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Explicitons cet ensemble selon le procédé de la démonstration : $A^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (6,5), (6,6)\}$. Noter que les éléments $(1,2)$ et $(2,1)$ sont tous les deux présents car différents, même si dans la pratique ils peuvent paraître indiscernables : l'ordre des constituants importe.
- Lorsque les ensembles utilisés sont finis, le cardinal d'un produit cartésien est aussi fini. Mais si l'un des ensembles intervenant dans ce produit cartésien n'est pas fini, le produit l'est également. Par exemple $\{A, B\} \times \mathbb{N}$ contient une infinité d'éléments : les couples $(A,0), (A,1), (A,2), \ldots$ et les couples $(B,0), (B,1), (B,2), \ldots$. De même pour $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ qui sont, de plus, indénombrables [1] comme $\mathbb{R}$.

1. Un ensemble est dénombrable si on peut numéroter ses éléments avec des entiers. Ainsi $\mathbb{Q}$ – l'ensemble des rationnels – est infini et dénombrable, mais pas $\mathbb{R}$ qui est indénombrable. Cette propriété a été démontrée par Georg Cantor (1845-1918) en utilisant l'argument de la *diagonale de Cantor*. Pour la dénombrabilité de $\mathbb{Q}^{+*}$, Cantor ordonna les rationnels positifs irréductibles selon la somme croissante du numérateur et du dénominateur ($\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{1}$, etc.) ce qui permet de les numéroter.

**Exemple** 5 (Immatriculations) – L'immatriculation d'un véhicule en France, depuis le 15 avril 2009, est une série de 7 caractères alphanumériques noirs sur fond blanc : 2 lettres, 1 tiret, 3 chiffres, 1 tiret et 2 lettres. Elle fait, de plus, apparaître, sur sa partie droite et sur fond bleu, un identifiant territorial.
Ce nouveau SIV (Système d'Immatriculation des Véhicules) s'est substitué à l'ancien dispositif de numérotation qui datait de 1950 et qui comprenait un numéro d'ordre d'un à quatre chiffres, une série d'une à trois lettres et un code départemental à deux chiffres, sauf exceptions (Corse et départements d'outre-mer).

Dénombrons les immatriculations possibles avec le nouveau SIV :
Il faut choisir 2 lettres, puis 3 chiffres et enfin 2 lettres.
L'identifiant territorial ne compte pas, il ne peut pas y avoir AB-123-AB avec deux identifiants territoriaux différents (un à Paris et l'autre dans le Loiret par exemple) car ce numéro est national.
On a $26^2 = 676$ façons de choisir 2 lettres ordonnées ($AB$ différent de $BA$), $10^3 = 1000$ façons de choisir 3 chiffres ordonnées en supposant que l'on utilise des nombres comme 012, même écrit 12.
Finalement, on peut immatriculer $676 \times 1000 \times 676 = 456\,976\,000$ véhicules avec ce nouveau SIV.
En réalité il y a beaucoup moins d'immatriculations possibles du fait qu'on enlève les $I$, $O$ et $U$ (trop proches de 1, 0 et $V$) ainsi que les groupes $SS$ et $WW$ (utilisé pour les véhicules en attente d'immatriculation) du bloc de gauche et seulement $SS$ du bloc de droite ; on enlève aussi le 000.
l y a donc $(23^2 - 2) \times 999 \times (23^2 - 1) = 277\,977\,744$ immatriculations possibles avec ce SIV. La durée de vie prévisible de ce système est estimée à 80 ans ; l'innovation portant également sur le fait qu'une immatriculation est inchangée si le véhicule change de propriétaire, contrairement à l'ancien système.

Dénombrons les immatriculations de l'ancien système :
Il y a $10^4 = 10000$ numéros d'ordre d'un à quatre chiffres. Pour les séries d'une à trois lettres, il y a 26 séries d'une lettre, $26^2 = 676$ séries de deux lettres et $26^3 = 17576$ séries de trois lettres, soit $26 + 676 + 17576 = 18\,278$ séries d'une à trois lettres. Il y a donc potentiellement $10000 \times 18278 = 182\,780\,000$ immatriculations possibles avec l'ancien système pour un département.
Dans chaque département, on peut trouver un même début : par exemple, 1975 $GM$ 75 à Paris et 1975 $GM$ 45 dans le Loiret. On constate que cet ancien système conduit à un nombre plus grand de possibilités car il y a 96 codes départementaux à deux chiffres (Corse $2A$ et $2B$ comprise) et une douzaine de codes à trois chiffres (départements d'outre-mer). Mais en réalité, ce système allait être dépassé à Paris (on s'est arrêté au numéro 523 $RQD$ 75 en 2009) car cette immatriculation était changée lors d'un déménagement ou d'une vente du véhicule, dès lors que le département d'immatriculation changeait. Un même véhicule pouvait ainsi changer 1, 2 ou 3 fois d'immatriculation durant son utilisation, ou encore davantage.

Définition 1.3 (Liste avec répétitions) Si $E$ est un ensemble et $k$ un entier non-nul, une *liste avec répétitions* de $k$ éléments de $E$ – aussi appelée une $k$-liste avec répétitions – est une liste ordonnée d'éléments de $E$ distincts ou non, c'est-à-dire un élément de $E^n$, un $k$-uplet $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ où $\forall i \in [\![1;k]\!],\ e_i \in E$.

**Remarques** :

- On rencontre la notion de liste avec répétitions dans de nombreuses situations : on parle notamment d'*arrangement avec répétitions* dans un contexte combinatoire, et si on considère une *application*[2] définie sur $[\![1;k]\!]$ à valeurs dans $E$, celle-ci peut être considérée comme une $k$-liste avec répétitions. Le nombre d'applications de $[\![1;k]\!]$ vers $E$ est donc donné par la propriété précédente, c'est $(\text{Card}E)^k$.
- Une femme a eu trois enfants : l'aîné « A », le cadet « B » et le benjamin « C ». Elle considère le triplet (la 3-liste) de leurs dates d'anniversaire (A :12Jun, B :24Fev, C :2Nov) comme une application de $[\![1;3]\!]$ vers $E = \{1\text{Jan}, 2\text{Jan}, \ldots, 31\text{Dec}\}$, un ensemble de cardinal 366. Combien y a t-il d'applications de $[\![1;3]\!]$ vers $E$ possibles : $366^3 = 49\,027\,896$.

2. Une application d'un ensemble $E_1$ vers un ensemble $E_2$ une fonction de $E_1$ vers $E_2$ telle que tous les éléments de $E_1$ aient une image dans $E_2$ (son domaine de définition et son ensemble de départ coïncident).

## 2.c. Listes sans répétition

**Définition 1.4 (Liste sans répétition)** Si $E$ est un ensemble et $k$ un entier non-nul, une *liste sans répétition* de $k$ éléments de $E$ – aussi appelée une $k$-liste sans répétition – est une liste ordonnée d'éléments distincts de $E$, c'est-à-dire un $k$-uplet $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ où $\forall i \in [\![1;k]\!],\ e_i \in E$ et $\forall (i,j) \in [\![1;k]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow e_i \neq e_j$.

**Propriété 1.6** Soient $E$ est un ensemble de cardinal $n$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
- Si $k > n$ aucune $k$-listes sans répétition d'éléments de $E$ n'existe.
- Si $k \leqslant n$, le nombre de $k$-listes sans répétition d'éléments de $E$ – noté $A_n^k$ – est :
  $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Démonstration Pour constituer une $k$-liste sans répétition, on en choisit librement $e_1$, le 1<sup>er</sup> élément, dans l'ensemble $E$ : il y a $n$ choix. On choisit alors $e_2$, le 2<sup>e</sup> élément, dans $E \backslash \{e_1\}$ ($E$ privé de l'élément $e_1$) dont le cardinal est $n-1$ : il y a $n-1$ choix.
Ainsi de suite, jusqu'à choisir $e_k$, le $k^{\text{e}}$ élément, dans $E \backslash \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ ($E$ privé des $k-1$ premiers éléments choisis) dont le cardinal est $n-(k-1) = n-k+1$ : il y a $n-k+1$ choix.
Le produit de tous ces choix nous donne le nombre de possibilités.
Il y a donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$ $k$-listes possibles.

La notation $n!$ – factorielle $n$ – signifie $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$. Ainsi :

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

D'où $\dfrac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$
On a simplifié par $(n-k)!$ qui n'est jamais nul quand $k \leqslant n$ (pour $k = n$, on a $0! = 1$).

**Remarques** :
- Dans un contexte combinatoire, pour une $k$-liste sans répétition, on parle d'*arrangement*. La notation $A_n^k$ signifie d'ailleurs « nombre d'arrangements de $k$ objets parmi $n$ ».
  Dans un contexte probabiliste, une $k$-liste sans répétition est obtenue lors du tirage de $k$ boules d'une urne en contenant $n$, *sans remise* de la boule tirée (si on effectue un tirage avec remise, on obtient une $k$-liste avec répétition).
  Dans le contexte des applications de $[\![1;k]\!]$ à valeurs dans $E$, une $k$-liste sans répétition est obtenue si l'application est *injective*[3].
- Lors d'une course de chevaux, s'il y a 15 chevaux au départ, donner le tiercé gagnant revient à énoncer un des $15 \times 14 \times 13 = 2\,730$ triplets sans répétition possibles.
  Dans une classe de 40 élèves, quelle est la probabilité de l'évènement $E$ : deux élèves au moins ont la même date d'anniversaire ? L'évènement contraire est $\overline{E}$ : chacun des élèves a une date d'anniversaire différente. En estimant qu'il n'y a que 365 dates, le nombre de cas possibles est $365^{40} \approx 3,1 \times 10^{102}$. Le nombre de cas favorables à $\overline{E}$ est le nombre de 40-listes sans répétition de dates : il y en a $365 \times 364 \times \cdots \times 326 = \frac{365!}{325!}$. Donc $P(\overline{E}) = \frac{365!}{325! \times 365^{12}} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{326}{365}$.
  Ce simple programme Python nous fournit le résultat $P(\overline{E}) \approx 0,109$, d'où $P(E) = 1 - P(\overline{E}) \approx 0,891$.

```
N,P=12,1
for I in range(N) :
    P*=(365-I)/365
print("P(non E)=",P,"P(E)=",(1-P))
```

3. Une application est injective si chaque élément de l'ensemble de départ est associé à une image différente dans l'ensemble d'arrivée

### 2.d. Permutations

**Définition 1.5 (Permutation)** Soit $E$ en ensemble de cardinal $n$.
Une *permutation* des $n$ éléments de $E$ est une $n$-liste sans répétition des $n$ éléments de $E$.

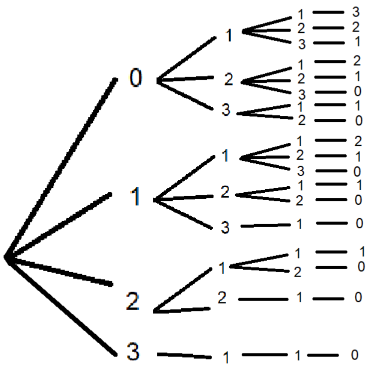
**Remarques** :

- Le nombre de permutations de $n$ éléments est $A_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$
  En effet, une permutation des éléments de l'ensemble $E$ est un arrangement de tous ces éléments, c'est-à-dire une liste ordonnée de ces éléments. Si $\text{Card}(E) = n$, une application de $[\![1;n]\!]$ vers $E$ est *bijective*. Tous les éléments de $E$ ont un antécédent (l'application est surjective) et un seul (l'application est injective).
- On a un ensemble de 8 points dans un plan et on souhaite connaître le nombre de polygones différents que l'on peut tracer avec ces points comme sommets : le nombre de permutations des 8 sommets est $8! = 40\,320$. Mais on a des doublons car $ABCDEFGH$ est le même polygone que $BCDEFGHA$ ; comme il y a 8 points de départ possible cela réduit le nombre à $7! = 5\,040$. Il reste encore des doublons car $ABCDEFGH$ est le même polygone que $HGFEDCBA$ ; comme il y a 2 sens possible cela réduit le nombre à $\frac{7!}{2} = 2\,520$.

**Exemple 6** – Le code du coffre-fort de ma grand-mère Mathilde est un anagramme de son prénom. Combien y a t-il de codes différents : $8! = 40\,320$ les huit lettres étant différentes.

Je me souviens qu'elle a dit que son code n'avait pas deux voyelles accolées.
Combien y a t-il de codes pour lesquels les 3 voyelles sont séparées ?
Cette question est un peu compliquée.

Je commence par dénombrer les emplacements possibles des voyelles : celles-ci doivent être séparées par au moins une consonne, elles peuvent être aux extrémités mais on peut disposer jusqu'à 3 consonnes à une extrémité. Les consonnes sont en 4 groupes : aux extrémités (le 1$^{\text{er}}$ et le 4$^{\text{e}}$ groupe) il peut y avoir de 0 à 3 consonnes, les groupes du centres (le 2$^{\text{e}}$ et le 3$^{\text{e}}$) peuvent en contenir de 1 à 3 et le total des consonnes est 5. Le plus simple est de dresser un arbre avec ces contraintes.
Ainsi, je dénombre 18 emplacements possibles pour les voyelles.
Mathilde correspond à l'emplacement 1-2-2-0




Je dispose une permutation des 3 voyelles dans leurs emplacements : $3! = 6$ choix possibles.
Je dispose une permutation des 5 consonnes dans leurs emplacements : $5! = 120$ choix possibles.
Finalement, il y a $18 \times 6 \times 120 = 12\,960$ codes possibles. Si on pense que le code respecte la disposition des voyelles du prénom original, il n'y a plus que les $6 \times 120 = 720$ codes que voici :

```
def permute(l,s,a,n):
    if a==n:
        ana="".join(s)
        l.append(ana)
    else:
        for b in range(a,n):
            s[a],s[b]=s[b],s[a]
            permute(l,s,a+1,n)
            s[a],s[b]=s[b],s[a]

consonnes = "mthld"
voyelles = "aie"
emp=[1,2,2,0]  #emplacement des consonnes
permutations_consonnes=[]
li,nb=list(consonnes),len(consonnes)
permute(permutations_consonnes,li,0,nb)
permutations_voyelles=[]
li,nb=list(voyelles),len(voyelles)
permute(permutations_voyelles,li,0,nb)
c,v,m=len(permutations_consonnes),len(permutations_voyelles),0
for i in range(c):
    con=list(permutations_consonnes[i])
    #print(con)
    for j in range(v):
        code=""
        voy=list(permutations_voyelles[j])
        #print(voy)
        m+=1
        for k in range(emp[0]):
            code+=con[k]
        code+=voy[0]
        for k in range(emp[0],emp[0]+emp[1]):
            code+=con[k]
        code+=voy[1]
        for k in range(emp[0]+emp[1],5-emp[3]):
            code+=con[k]
        code+=voy[2]
        for k in range(emp[0]+emp[1]+emp[2],5):
            code+=con[k]
        print(m,code)
```

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 mathilde | 41 mehtilda | 81 milhadte | 121 madlihte | 161 temlihda | 201 tihladme | 241 taldimhe | 681 dilmahte |
| 2 matheldi | 42 mehtaldi | 82 milhedta | 122 madlehti | 162 temlahdi | 202 tihledma | 242 taldemhi | 682 dilmehta |
| 3 mithalde | 43 mahtidle | 83 melhidta | 123 midlahte | 163 tamlidhe | 203 tehlidma | 243 tildamhe | 683 delmihta |
| 4 mithelda | 44 mahtedli | 84 melhadti | 124 midlehta | 164 tamledhi | 204 tehladmi | 244 tildemha | 684 delmahti |
| 5 methilda | 45 mihtadle | 85 maltihde | 125 medlihta | 165 timladhe | 205 tahdilme | 245 teldimha | 685 damhilte |
| 6 methaldi | 46 mihtedla | 86 maltehdi | 126 medlahti | 166 timledha | 206 tahdelmi | | 686 damhelti |
| 7 mathidle | 47 mehtidla | 87 miltahde | 127 madlithe | 167 temlidha | 207 tihdalme | ...... | 687 dimhalte |
| 8 mathedli | 48 mehtadli | 88 miltehda | 128 madlethi | 168 temladhi | 208 tihdelma | | 688 dimhelta |
| 9 mithadle | 49 mahlitde | 89 meltihda | 129 midlathe | 169 tamdilhe | 209 tehdilma | | 689 demhilta |
| 10 mithedla | 50 mahletdi | 90 meltahdi | 130 midletha | 170 tamdelhi | 210 tehdalmi | 650 dalhetmi | 690 demhalti |
| 11 methidla | 51 mihlatde | 91 maltidhe | 131 medlitha | 171 timdalhe | 211 tahdimle | 651 dilhatme | 691 damhitle |
| 12 methadli | 52 mihletda | 92 maltedhi | 132 medlathi | 172 timdelha | 212 tahdemli | 652 dilhetma | 692 damhetli |
| 13 matlihde | 53 mehlitda | 93 miltadhe | 133 madtilhe | 173 temdilha | 213 tihdamle | 653 delhitma | 693 dimhatle |
| 14 matlehdi | 54 mehlatdi | 94 miltedha | 134 madtelhi | 174 temdalhi | 214 tihdemla | 654 delhatmi | 694 dimhetla |
| 15 mitlahde | 55 mahlidte | 95 meltidha | 135 midtalhe | 175 tamdihle | 215 tehdimla | 655 dalhimte | 695 demhitla |
| 16 mitlehda | 56 mahledti | 96 meltadhi | 136 midtelha | 176 tamdehli | 216 tehdamli | 656 dalhemti | 696 demhatli |
| 17 metlihda | 57 mihladte | 97 maldithe | 137 medtilha | 177 timdahle | 217 talhimde | 657 dilhamte | 697 damlihte |
| 18 metlahdi | 58 mihledta | 98 maldethi | 138 medtalhi | 178 timdehla | 218 talhemdi | 658 dilhemta | 698 damlehti |
| 19 matlidhe | 59 mehlidta | 99 mildathe | 139 madtihle | 179 temdihla | 219 tilhamde | 659 delhimta | 699 dimlahte |
| 20 matledhi | 60 mehladti | 100 mildetha | 140 madtehli | 180 temdahli | 220 tilhemda | 660 delhamti | 700 dimlehta |
| 21 mitladhe | 61 mahdilte | 101 melditha | 141 midtahle | 181 tahmilde | 221 telhimda | 661 daltihme | 701 demlihta |
| 22 mitledha | 62 mahdelti | 102 meldathi | 142 midtehla | 182 tahmeldi | 222 telhamdi | 662 daltehmi | 702 demlahti |
| 23 metlidha | 63 mihdalte | 103 maldihte | 143 medtihla | 183 tihmalde | 223 talhidme | 663 diltahme | 703 damlithe |
| 24 metladhi | 64 mihdelta | 104 maldehti | 144 medtahli | 184 tihmelda | 224 talhedmi | 664 diltehma | 704 damlethi |
| 25 matdilhe | 65 mehdilta | 105 mildahte | 145 tamhilde | 185 tehmilda | 225 tilhadme | 665 deltihma | 705 dimlathe |
| 26 matdelhi | 66 mehdalti | 106 mildehta | 146 tamheldi | 186 tehmaldi | 226 tilhedma | 666 deltahmi | 706 dimletha |
| 27 mitdalhe | 67 mahditle | 107 meldihta | 147 timhalde | 187 tahmidle | 227 telhidma | 667 daltimhe | 707 demlitha |
| 28 mitdelha | 68 mahdetli | 108 meldahti | 148 timhelda | 188 tahmedli | 228 telhadmi | 668 daltemhi | 708 demlathi |
| 29 metdilha | 69 mihdatle | 109 madhilte | 149 temhilda | 189 tihmadle | 229 talmihde | 669 diltamhe | 709 damtilhe |
| 30 metdalhi | 70 mihdetla | 110 madhelti | 150 temhaldi | 190 tihmedla | 230 talmehdi | 670 diltemha | 710 damtelhi |
| 31 matdihle | 71 mehditla | 111 midhalte | 151 tamhidle | 191 tehmidla | 231 tilmahde | 671 deltimha | 711 dimtalhe |
| 32 matdehli | 72 mehdatli | 112 midhelta | 152 tamhedli | 192 tehmadli | 232 tilmehda | 672 deltamhi | 712 dimtelha |
| 33 mitdahle | 73 malhitde | 113 medhilta | 153 timhadle | 193 tahlimde | 233 telmihda | 673 dalmithe | 713 demtilha |
| 34 mitdehla | 74 malhetdi | 114 medhalti | 154 timhedla | 194 tahlemdi | 234 telmahdi | 674 dalmethi | 714 demtalhi |
| 35 metdihla | 75 milhatde | 115 madhitle | 155 temhidla | 195 tihlamde | 235 talmidhe | 675 dilmathe | 715 damtihle |
| 36 metdahli | 76 milhetda | 116 madhetli | 156 temhadli | 196 tihlemda | 236 talmedhi | 676 dilmetha | 716 damtehli |
| 37 mahtilde | 77 melhitda | 117 midhatle | 157 tamlihde | 197 tehlimda | 237 tilmadhe | 677 delmitha | 717 dimtahle |
| 38 mahteldi | 78 melhatdi | 118 midhetla | 158 tamlehdi | 198 tehlamdi | 238 tilmedha | 678 delmathi | 718 dimtehla |
| 39 mihtalde | 79 malhidte | 119 medhitla | 159 timlahde | 199 tahlidme | 239 telmidha | 679 dalmihte | 719 demtihla |
| 40 mihtelda | 80 malhedti | 120 medhatli | 160 timlehda | 200 tahledmi | 240 telmadhi | 680 dalmehti | 720 demtahli |

### 2.e. Combinaisons

DÉFINITION 1.6 (COMBINAISON) Si $E$ est un ensemble de cardinal $n$ et un entier $k \in [\![0; n]\!]$. Une *combinaison* de $k$ éléments de $E$ est une liste non-ordonnée d'éléments distincts de $E$, c'est-à-dire un *sous-ensemble* de $k$ éléments de $E$ ou une *partie* à $k$ éléments de $E$.

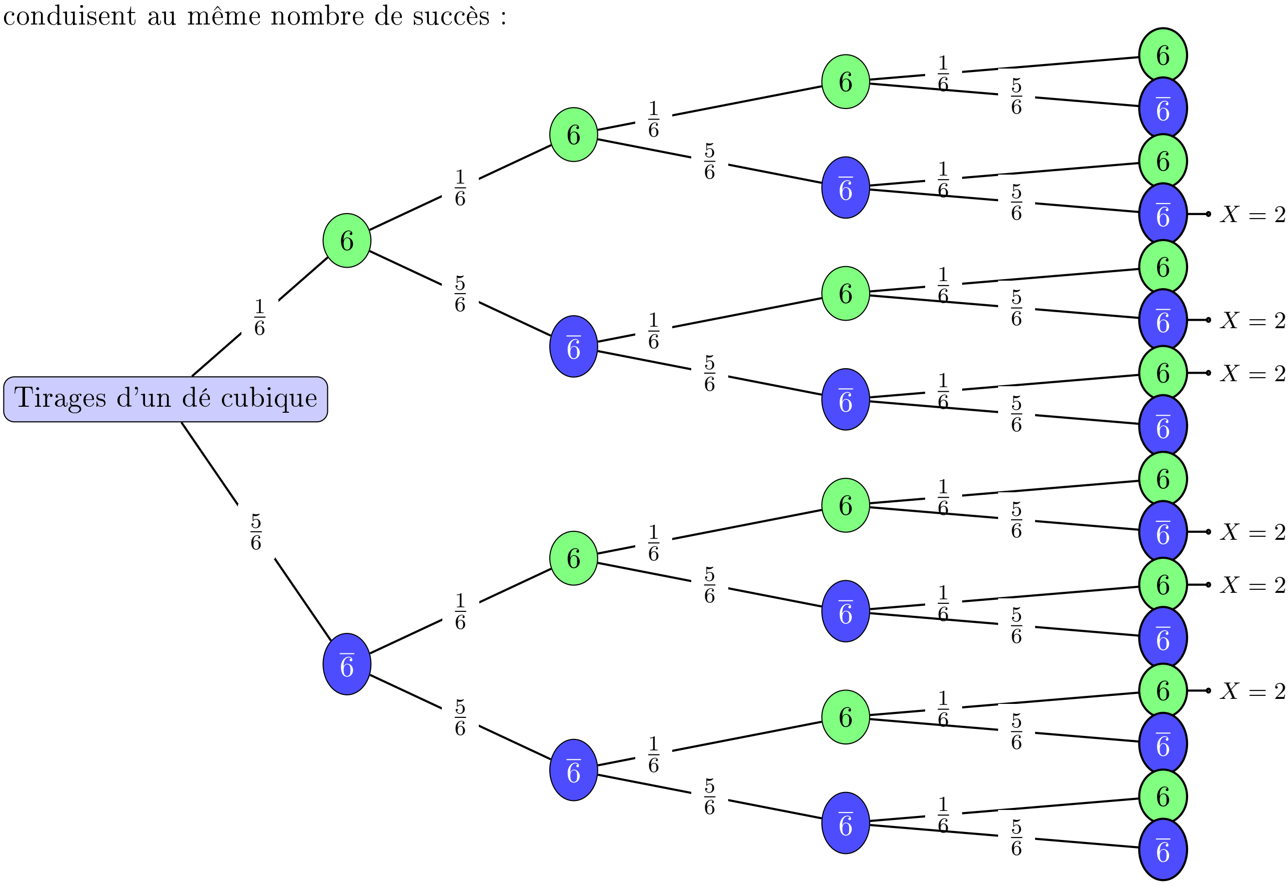
PROPRIÉTÉ 1.7 Soient $E$ est un ensemble de cardinal $n$ et $k \in [\![0; n]\!]$.
Le nombre de combinaisons de $k$ éléments de $E$ – noté $C_n^k$ ou $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ (lire $k$ parmi $n$) – est :
$\dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 2 \times 1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

DÉMONSTRATION Les $k$ éléments d'un sous-ensemble de $E$ ne sont pas ordonnés :
le sous-ensemble $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ contient les mêmes éléments que les $k!$ permutations de ces éléments.
Par exemple, si $k = 3$, le sous-ensemble $\{e_1, e_2, e_3\}$ contient les mêmes trois éléments que ses $3! = 6$ permutations $(e_1, e_2, e_3)$, $(e_1, e_3, e_2)$, $(e_2, e_1, e_3)$, $(e_2, e_3, e_1)$, $(e_3, e_1, e_2)$, $(e_3, e_2, e_1)$.
Les $C_n^k$ sous-ensembles de $k$ éléments de $E$ sont chacun en correspondance avec $k!$ permutations.
Il y a donc au total $C_n^k \times k!$ permutations, toutes distinctes, qui forment l'ensemble des $k$-listes sans répétition ou arrangements de $k$ éléments de $E$.
Comme on sait qu'il en existe $A_n^k$, on en déduit :
$A_n^k = C_n^k \times k! \iff C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

**Remarques** :

- La notation est importante : des accolades pour les combinaisons, des parenthèses pour les arrangements. On retrouve d'ailleurs cette notation en Python ou les `list` sont des listes ordonnées (avec cette différence qu'un même élément peut y être répété) tandis que les `set` sont des ensembles non-ordonnés (un même élément ne peut y être répété).
  Exemple : $\{2, 4, 6\}$ est le sous-ensemble des éléments pairs des numéros d'un dé.
  $\{6, 4, 2\}$ est le même sous-ensemble, la même combinaison.
  Par contre, $(2, 4, 6)$ et $(6, 4, 2)$ ne sont pas les mêmes arrangements de ces trois éléments.
  En Python toujours, pour ajouter un élément à une liste, on utilise la méthode `append` qui l'ajoute à la fin ou `insert` qui l'insère à une position donnée ; pour ajouter un élément dans un ensemble on utilise la méthode `add` qui l'ajoute n'importe où.
- Dans toutes les situations où on rencontre des combinaisons, l'ordre n'a pas d'importance : les éléments d'une combinaison peuvent être réarrangés sans que celle-ci ne soit modifiée.
  Au poker, par exemple, un joueur reçoit une combinaison de 5 cartes choisies au hasard parmi 32 ; peu importe l'ordre dans lequel le joueur arrange ses cartes. Lors du tirage simultané de $k$ boules d'une urne en contenant $n$, on obtient une combinaison de $k$ boules.
  Trouver la combinaison gagnante au Loto consiste à trouver le sous-ensemble des numéros gagnants. Dans l'ancienne formule, on devait choisir 6 numéros d'une grille en contenant 49 ; il s'agit d'une partie à 6 éléments choisis parmi 49. Leur nombre est $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \times 43!}$.
  Il ne faut pas calculer les nombres séparément car 49! s'écrit avec 63 chiffres (!)
  $\binom{49}{6} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13\,983\,816$.
  Chaque grille étant équiprobable, il y avait une chance sur 13 983 816 de gagner le gros lot.
- Quelques propriétés immédiates de ces nombres $C_n^k$ :
  — $C_n^0 = 1$, le seul sous-ensemble à 0 élément est $\emptyset$ (l'ensemble vide)
  — $C_n^1 = n$, il y a $n$ façons de choisir un élément d'un ensemble à $n$ éléments
  — $C_n^{n-1} = n$, il y a $n$ façons de choisir l'élément qui est enlevé aux $n$ éléments
  — $C_n^n = 1$, un seul sous-ensemble à $n$ éléments d'un ensemble $E$ à $n$ éléments : $E$ lui-même

**Exemple** 7 – On lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces. On appelle succès l'obtention d'un 6 et on considère la variable aléatoire $X$ qui comptabilise le nombre de succès.
On verra, dans le chapitre « Probabilités », que cette variable suit une *loi binomiale* $\mathscr{B}(4, \frac{1}{6})$.
Mais on peut dors et déjà construire l'arbre aux $2^4 = 16$ chemins qui permet de dénombrer ceux qui conduisent au même nombre de succès :




- 1 seul chemin mène à 0 succès et 1 seul mène à 4 succès.
- 4 mènent à 1 succès et 4 mènent à 3 succès. Il suffit de choisir l'emplacement du dé qui conduit ou ne conduit pas au succès ; il y a 4 emplacements possibles.
- total provisoire : $1 + 1 + 4 + 4 = 10$ chemins ; il en reste $16 - 10 = 6$ qui réalisent 2 succès. Je les ai marqué sur l'illustration. Leur nombre correspond au nombre de combinaisons de 2 emplacements parmi 4 : il y en a 6, ce sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ et $\{3, 4\}$.

Les nombres de combinaisons $C_n^k = \binom{n}{k}$ de $k \in [\![0, 4]\!]$ éléments parmi 4 sont :

$C_4^0 = \binom{4}{0} = \mathbf{1}$, $C_4^1 = \binom{4}{1} = \mathbf{4}$, $C_4^2 = \binom{4}{2} = \mathbf{6}$, $C_4^3 = \binom{4}{3} = \mathbf{4}$ et $C_4^4 = \binom{4}{4} = \mathbf{1}$

Ces nombres sont les coefficients du développement du binôme $(a + b)^4$ :
$(a + b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2)^2 = \mathbf{1} \times a^4 + \mathbf{4} \times a^3b + \mathbf{6} \times a^2b^2 + \mathbf{4} \times ab^3 + \mathbf{1} \times b^4$

Pour cette raison, les nombres $C_n^k = \binom{n}{k}$ sont appelés « coefficients binomiaux ». Ils s'appliquent au développement du binôme $(a + b)^n$ car, lorsqu'on doit calculer le coefficient du terme $a^kb^{n-k}$, on dénombre des parties à $k$ éléments parmi $n$ (les $k$ facteurs où on prend le nombre $a$). Pour la loi binomiale, les parties à $k$ éléments parmi $n$ sont les places des $k$ succès.

Propriété 1.8 Soient $n$ et $k$ deux entiers :

- si $k \leqslant n$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- si $k < n$ alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

DÉMONSTRATION On va raisonner ici dans le cadre de l'exemple précédent où on considère la répétition de $n$ expériences aléatoires pour lesquelles deux issues sont possibles : le succès et l'échec (épreuves de Bernoulli).

- Il y a autant de chemins qui mènent à $k$ succès que de chemins qui mènent à $k$ échecs (c'est-à-dire à $n-k$ succès). Les qualificatifs de *succès* et *échec* sont subjectifs ; en permutant les mots, on ne change pas le nombre de leurs occurrences.
- Le coefficient $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de chemins qui mènent à $k+1$ succès dans une répétition de $n+1$ épreuves de Bernoulli. À l'issue des $n$ premières épreuves, il n'y a que trois possibilités :
  - on a déjà eu $k+1$ succès. Il y a $\binom{n}{k+1}$ possibilités, suivies d'un échec à la dernière étape
  - on a déjà eu $k$ succès. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités, suivies d'un succès à la dernière étape
  - dans les autres cas (moins de $k$ succès ou plus de $k+1$ succès), on ne peut aboutir à $k+1$ succès

  Finalement, le nombre de chemins cherché est la somme des dénombrements associés aux deux premières possibilités : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$.

  Remarquons qu'il est très simple de prouver cette relation algébriquement.
  Il suffit d'écrire les deux expressions avec le même dénominateur, en remarquant que $(n-(k+1)) = (n-k-1)$ précède $(n-k)$ :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

**Le triangle de Pascal**[4] exploite ces propriétés pour le calcul des coefficients $\binom{n}{k}$ de proche en proche. Chaque nombre est obtenu en additionnant les deux nombres de la ligne du dessus ($2^e$ propriété 1.8) : celui de la même colonne et celui de la colonne précédente comme le montre sur fond jaune le $\binom{5}{2}=10$ qui est égal à la somme $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=4+6$.
Il suffit d'ajouter à cette propriété la $1^{re}$ colonne de 1 qui vient de la propriété $C_n^0=1$ et la diagonale de 1 qui vient de la propriété $C_n^n=1$ pour construire le triangle en entier.

| $n$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | ⋱ |

**Utilisation de la calculatrice** :
La calculatrice permet de déterminer les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

| | TI | Casio | Numworks |
|---|---|---|---|
| $\binom{n}{k}$ | touche math option PRB choisir 3 (combinaison) | menu RUN option PROB(F3) choisir nCr | menu Calculs, Toolbox ($5^e$ touche), Dénombrement, binomial($n$,$k$), entrer $n$ et $k$ |

**Utilisation du tableur** :
Avec le tableur *calc* d'OpenOffice, on a accès aux coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ en tapant la formule =COMBIN($n$ ;$k$)

4. Blaise Pascal (1623-1662) : philosophe et mathématicien français. Le triangle qui porte son nom était connu au Moyen-âge, par des mathématiciens persans et chinois et plus tard en Europe, au XVIe siècle, par Tartaglia et Stiefel. Pascal en étudia les propriétés dans son « Traité du triangle arithmétique (1654).

## 2.f. Développement du binôme

On l'a dit plus haut, les nombres $C_n^k = \binom{n}{k}$ sont appelés « coefficients binomiaux » car ce sont ceux qui interviennent dans le développement du binôme $(a+b)^n$ : lorsqu'on doit calculer le coefficient du terme $a^k b^{n-k}$, on dénombre des parties à $k$ éléments parmi $n$. Cet argument est de nature combinatoire mais on peut directement prouver ce résultat par un raisonnement algébrique.

DÉFINITION 1.7 (FORMULE DE NEWTON) Soient $a$ et $b$ deux réels et $n$ un entier quelconque.
$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \cdots + nab^{n-1} + b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

DÉMONSTRATION Démontrons que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $(a+b)^0 = 1$ or $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, la propriété est vraie.
Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geqslant 0$ on a $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
$(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n = (a+b) \times \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Développons et arrangeons cette somme pour utiliser la propriété de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ sous la forme $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (j'utilise aussi le changement de variable $k' = k+1$) :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \left( a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \right) + \left( \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \right) \\
&= a^{n+1} + \sum_{k'=1}^{n} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n+1-k'} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left( \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est bien héréditaire.
Par principe de récurrence elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Cas particuliers** :

- En prenant $a = b = 1$ on obtient $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ce qui montre que le nombre des combinaisons à $0, 1, \ldots, n$ éléments – soit le nombre de parties à $k$ éléments avec $k \in [\![0, n]\!]$ – est $2^n$.
- En prenant $b = 1$ on obtient $(1+a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = 1 + na + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k$ et comme $\binom{n}{k} > 0$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$, pour tout réel $a > 0$ on a $(1+a)^n > 1 + na$ (inégalité de Bernoulli), cette inégalité est vraie au sens large pour $n \in \mathbb{N}$ car pour $n = 0$ et $n = 1$ elle s'écrit $1 \geqslant 1$.

## 3. Suites

DÉFINITION 1.8 (SUITE NUMÉRIQUE) Une suite est une fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ à partir d'un certain rang, noté $n_0$. L'image d'un entier $n$ par la suite $u$ est notée $u_n$ (lire « $u$ indice $n$ »). $u_n$ est le « terme général » de la suite. Celle-ci est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

**Remarques** :

- Généralement, une suite numérique commence à partir de $n = 0$ : son 1[er] terme est alors $u_0$, le 2[e] terme est $u_1$, etc. Le $n^{\text{e}}$ terme est $u_{n-1}$. Elle peut être notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite de terme général $u_n = 2n$ est définie à partir de $n = 0$, c'est la suite des nombres pairs.
- Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un rang $n_0 \neq 0$, par exemple à partir de $n = 1$. Le $n^{\text{e}}$ terme de la suite est alors le terme de rang $n_0 + n - 1$. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est définie à partir de $n = 1$, c'est la suite des inverses d'entiers. La suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ n'est définie qu'à partir du rang $n = 3$, on la note $(v_n)_{n\geqslant 3}$.
- La notation indicielle est une spécificité des suites qui est commode et fixée par l'usage. On pourrait définir une suite $(u)$ comme une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ (par exemple $u(n) = n^2$) mais on préfère définir une fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ ($f(x) = x^2$) et ensuite le terme général $u_n = f(n)$.

MÉTHODE (TYPES DE DÉFINITION :)

- Explicite : soient $a \in \mathbb{N}$, et $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$. La suite $(u_n)_{n\geqslant a}$ de terme général $u_n = f(n)$ est définie *explicitement* par la fonction $f$.
- Implicite : une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est définie *implicitement* si le terme général est donné par une description, valable à partir du rang $n_0$, qui permet de l'identifier, sans forcément fournir le moyen de le déterminer. Exemple : $s_n$ est la somme des chiffres de $n$ en base dix. Il n'y a pas d'expression algébrique qui corresponde à cette notion, pourtant on peut déterminer n'importe que terme de cette suite : $s_{101} = 2$, $s_{123\,456\,789} = 45$, etc.
- Récurrence : soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ telle que $f(I) \subset I$ et $a \in I$. La suite $u$ définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est définie *par une récurrence simple.* On peut aussi définir une suite par une relation de récurrence portant sur plusieurs termes précédents, comme dans l'exemple 2 où la relation de récurrence $u_n = u_{n-1}+u_{n-2}$ implique de connaître les deux premiers termes pour calculer les autres.
- Mixte : une suite définie par une expression contenant à la fois une ou plusieurs valeur(s) précédente(s) et la valeur du rang. Par exemple, la suite $(u_n)$ des factorielles $u_n = n!$ peut être définie par la relation mixte $u_n = u_{n-1} \times n$ et la condition initiale $u_0 = 1$.

**Remarques** :

- Une suite définie explicitement peut gagner à être définie par une récurrence ou une relation mixte, pour un calcul algorithmique plus efficace (ex : factorielles). Réciproquement, on cherche souvent à déterminer explicitement une suite définie par récurrence (exemple 2).
- Une même fonction $f$ peut définir une infinité de suites récurrentes différentes car changer la valeur initiale change la suite. La suite des nombres pairs $u_n = 2n$ peut être définie par la relation de récurrence : $u_n = u_{n-1} + 2$ et la condition initiale $u_0 = 0$, mais la même fonction $(x \mapsto x + 2)$ avec la valeur initiale $u_0 = 1$ sert à définir la suite des nombres impairs.
- L'étude d'une suite peut bénéficier de suites intermédiaires. La suite $(p_n)$ définie par $p_0 = 2$ et $p_n = \frac{1}{1+p_{n-1}}$ peut bénéficier de l'étude des suites $(N_n)$ et $(D_n)$ telles que $p_n = \frac{N_n}{D_n}$. On choisit $N_0 = 2$ et $D_0 = 1$ et comme $p_n = \frac{N_n}{D_n} = \frac{1}{1+\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}} = \frac{D_{n-1}}{D_{n-1}+N_{n-1}}$, on obtient les relations $N_n = D_{n-1}$ et $D_n = D_{n-1} + N_{n-1} = D_{n-1} + D_{n-2}$ qui permettent, à l'aide d'un programme, de déterminer la valeur exacte $p_{100} = \frac{792\,070\,839\,848\,372\,253\,127}{1\,281\,597\,540\,372\,340\,914\,251}$ (la définition initiale utilise des valeurs approchées).

### 3.a. Propriétés

**Définition 1.9 (sens de variation)** Une suite est croissante (respect. strictement croissante) si, à partir d'un certain rang $N$, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ (respect. $u_{n+1} > u_n$).

**Remarques** :
Même définition pour une suite décroissante ou strictement décroissante, il suffit de mettre $\leqslant$ ou $<$.
Une suite est (strictement) *monotone* si elle est (strictement) croissante ou décroissante.
Une suite est *constante* si à partir d'un certain rang, on a $u_{n+1} = u_n$.

**Propriété 1.9 (Critères de monotonie)** Une suite $(u)$ est croissante si et seulement si :

$$\begin{array}{rl}(\text{i}) & \forall n \geqslant N, u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \\ (\text{ii}) & \forall n \geqslant N, u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \\ (\text{iii}) & \forall n \geqslant N, u_n < 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1\end{array}$$

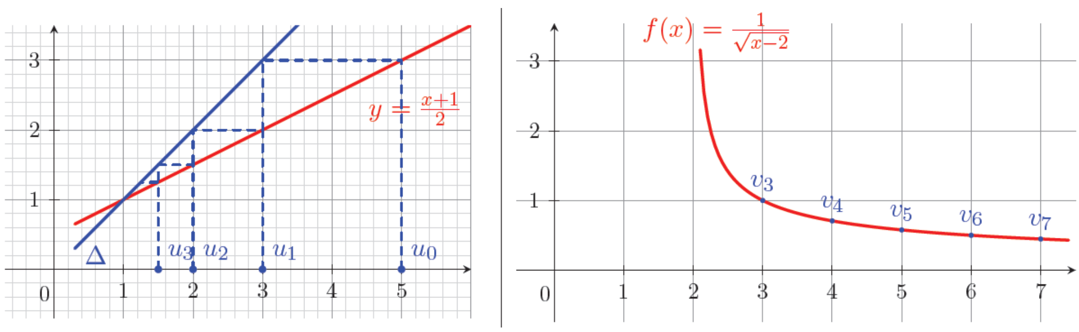
Démonstration Évident, les critères ne faisant que traduire la définition 1.9.

**Remarque** :
Changer le sens des inégalités pour montrer qu'une suite est décroissante (pour une monotonie stricte prendre des inégalités strictes) : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ; $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ ; $u_n < 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

**Exemple** 8 – ➲ Soit $(u)$ la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$ et $u_0 = 5$.
Montrons que $(u)$ est strictement décroissante à partir de $n = 0$ à l'aide du critère (i) :
$u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{2}$. Ainsi, $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n < 0 \iff \frac{1-u_n}{2} < 0 \iff 1 - u_n < 0 \iff u_n > 1$.
Initialisation : $u_0 = 5 > 1$.
Hérédité : Supposons $u_n > 1$ $(\star)$ pour $n > 0$. Pour $n+1$ on a $u_n + 1 > 2 \iff \frac{u_n+1}{2} > \frac{2}{2}$, soit $u_{n+1} > 1$.
Par principe de récurrence la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

➲ Montrons que la suite $(u)$ est strictement décroissante à l'aide du critère (ii) :
Ce critère nécessite qu'on s'assure de deux inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
On a déjà montré $(\star)$ que $\forall n, u_n > 1$ donc, à fortiori, on a $\forall n, u_n > 0$.
Pour l'autre inégalité, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n+1}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2u_n}$.
Or $u_n > 1 \iff 2u_n > 2 \iff \frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;\infty[$.
On en déduit que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

➲ Montrons que la suite $(v)$ définie par $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ est strictement décroissante à partir de $n = 3$.
On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1-2}}}{\frac{1}{\sqrt{n-2}}} = \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}}$ .
Comme $n > 2$ on a $n - 2 > 0$, $n - 1 > n - 2$ et donc $0 < n - 2 < n - 1 \iff \frac{n-2}{n-1} < 1$.
La fonction racine étant croissante sur $[0;\infty[$, on en déduit que $\sqrt{\frac{n-2}{n-1}} < \sqrt{1}$, soit $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$.
Comme, de plus, $\forall n > 2, v_n > 0$, d'après (ii) la suite $(v)$ est strictement décroissante.

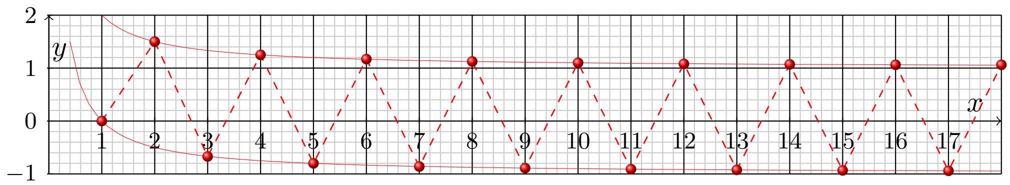



Ces suites sont représentées graphiquement ci-dessus de deux façons différentes.

**Définition 1.10 (suite bornée)** Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant M$.
Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *minorée* si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant m$.
Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *bornée* si elle est minorée *et* majorée.

**Remarque** :
Les nombres $m$ et $M$ qui interviennent dans cette définition sont appelés « minorant » et « majorant ». Il n'y a pas unicité de ces nombres : si une suite est majorée par $M$ alors elle est majorée aussi par tous les nombres supérieurs à $M$. Il n'y a pas de plus grand majorant.
Par contre, une suite majorée admet toujours un plus petit majorant, appelé *borne supérieure* ; de même, une suite minorée admet toujours un plus grand minorant, appelé *borne inférieure*.
La suite des troncatures décimales de $\pi$ admet pour borne supérieure le nombre $\pi$.

**Exemples** :
- La suite récurrente $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$ et $u_0 = 5$ est bornée car majorée par son premier terme $u_0 = 5$ et minorée par 1 (voir l'exemple 8). Ce minorant est également sa borne inférieure qui n'est jamais atteinte, sa limite quand $n$ tend vers l'infini (voir plus loin).
- La suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$, définie par $t_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ admet -1 comme borne inférieure et $\frac{3}{2}$ comme borne supérieure. Sur la représentation graphique ci-dessous, on remarque deux sous-suites :
  — la suite $(p)$, associée à la fonction $f : x \mapsto -1 + \frac{1}{x}$ contient tous les termes de rang pair
  — la suite $(i)$ associée à la fonction $g : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ contient tous les termes de rang impair
  Les suites $(p)$ et $(i)$ sont décroissantes mais la suite $(t)$, quant-à elle, n'est pas monotone.
  — Sa borne supérieure est le maximum des bornes supérieures des deux sous-suites.
  — Sa borne inférieure est le minimum des bornes supérieures des deux sous-suites.




**Définition 1.11 (suite périodique)** Une suite $(u_n)$ est périodique à partir du rang $N$ s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant N, u_{n+p} = u_n$. L'entier $p$ est alors la « période » de $u$.

**Remarque** :
L'entier $p$ appelé période est « le plus petit » entier non nul vérifiant la définition 1.11. Il est évident qu'une suite de période $p > 0$ vérifie aussi la propriété pour $2p$, $3p$, etc. La suite de terme général $(-1)^n$ est périodique de période 2 à partir de $n = 0$, car $\forall n \geqslant 0, u_{n+2} = u_n$. Cette suite vérifie aussi $u_{n+4} = u_n$, mais la période est 2 et non 4.

**Exemples** :
- Les suites constantes, ou constantes à partir d'un certain rang, sont des suites périodiques de période 1. La suite $q$ des décimales de $\frac{1}{15} = 0,0666\ldots$ est une suite constante, donc périodique de période 1, à partir du rang 2 : $\forall n \geqslant 2,\ \ q_{n+1} = q_n$.
- La suite $(p_n)$ donnant la $n^{\text{e}}$ décimale d'un nombre rationnel non décimal est périodique à partir d'un certain rang. Celle qui est associée à $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ (la séquence 142857 se répète) est périodique à partir du rang 1 ; sa période est 6. On a
  $\forall k \in \mathbb{N}, p_1 = p_7 = p_{6k+1} = 1,\ \ p_2 = p_8 = p_{6k+2} = 4,\ \ \ldots,\ \ p_6 = p_{12} = p_{6k} = 7.$
- Si $k$ est un entier non nul, les suites $c$ et $s$ définies par $c_n = \cos(\frac{2n\pi}{k})$ et $s_n = \sin(\frac{2n\pi}{k})$ sont périodiques de période $k$ car cos et sin sont des fonctions périodiques de période $2\pi$ :
  $c_{n+k} = \cos(\frac{2(n+k)\pi}{k}) = \cos(\frac{2n\pi}{k} + 2\pi) = \cos(\frac{2n\pi}{k}) = c_n$ (même chose pour la suite $s$).
- La suite de Syracuse $S$ d'un entier $S_0 = p$ est un exemple intéressant de suite « finalement » périodique. Définie par $S_{n+1} = \frac{S_n}{2}$ si $S_n$ pair, $3S_n + 1$ si $S_n$ impair, cette suite a un comportement périodique de période 3 qui tarde parfois à se manifester, le cycle final étant $[4, 2, 1]$ (cela reste une conjecture).

## 3.b. Limite d'une suite

### 3.b.1. Convergence

DÉFINITION 1.12 (SUITE CONVERGENTE) Une suite $(u_n)$ converge vers une limite $l$ si, à partir d'un certain rang $N$, tout intervalle ouvert contenant $l$ contient toutes les valeurs $u_n$. Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff \forall\epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$
Si la suite $(u_n)$ converge ver $l$, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

**Remarque** :
À la fin de la dernière ligne, à la place de $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$, on aurait pu écrire $|u_n - l| < \epsilon$ ou encore $u_n \in ]l-\epsilon; l+\epsilon[$ ou, en utilisant la notion de distance entre $u_n$ et $l$, $d(u_n, l) < \epsilon$. Ces écritures traduisent l'expression *un intervalle ouvert contenant* $l$ *contient le terme* $u_n$. Ici, l'intervalle est centré sur $l$, le réel positif $\epsilon$ est son rayon. Plus $\epsilon$ est petit, plus on s'approche de $l$. En exigeant qu'à partir d'un certain rang $N$ tous les termes $u_n$ soient dans cet intervalle, quelle que soit la petitesse de $\epsilon$, on traduit analytiquement la notion intuitive de limite.

**Suites de référence convergeant vers zéro** :
La suite $(\frac{1}{n})_{n>0}$ des inverses d'entiers converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Cette affirmation est fondée sur l'observation que les inverses d'entiers deviennent de plus en plus petites, tout en restant supérieures à zéro. Pour prouver cela, choisissons une valeur arbitraire de la précision, par exemple $\epsilon = 10^{-6}$, et montrons qu'il existe un rang $N$ à partir duquel toutes les inverses sont plus petites que cette valeur : $\frac{1}{n} < 10^{-6} \iff n > \frac{1}{10^{-6}} \iff n > 10^6$ ; il suffit donc de choisir comme valeur de $N$ le premier entier supérieur à $10^6$, soit $10^6 + 1 = 1000001$.

Cela se généralise à toute valeur de $\epsilon$ car, comme $n > 0$ et $\epsilon > 0$, on a : $\frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$.
Le premier entier supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$ convient et donc, pour tout entier $n \geqslant \frac{1}{\epsilon}$, on aura bien $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

De la même façon, les suites $(\frac{1}{n^2})$, $(\frac{1}{n^3})$, etc., $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ convergent toutes vers 0.

DÉFINITION 1.13 (SUITE DE LIMITE $+\infty$) Une suite $(u_n)$ *diverge* et admet $+\infty$ comme limite si, à partir d'un certain rang $N$, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs $u_n$. Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n > A$

**Remarques** :
- On a une définition analogue pour les suites de limite $-\infty$ :
 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n < A$
- Une suite qui ne converge pas diverge. Il y a des suites qui divergent vers une limite infinie et des suites qui divergent sans avoir de limite comme la suite $((-1)^n)$ qui est périodique de période 2 ($u_{2k} = 1$ et $u_{2k+1} = -1$) ou la suite $((-1)^n + \frac{1}{n}))_{n>0}$ de l'illustration précédente.

**Suites de référence divergeant vers l'infini** :
La suite $(n^2)_{n\geqslant 0}$ des carrés diverge vers $+\infty$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.
Cette affirmation est fondée sur l'observation que les carrés des entiers deviennent de plus en plus grands et finissent par dépasser toute valeur fixée à l'avance. Pour prouver cela, choisissons un maximum arbitraire $A > 0$, par exemple $A = 10^6$, et montrons qu'il existe un rang $N$ à partir duquel tous les carrés sont plus grands que cette valeur. Pour $A = 10^6$, il suffit de choisir $N = 1001$ car $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1001 \Longrightarrow u_n \geqslant 1001^2 > 10^6$.
On généralise cela à toutes les valeurs possibles de $A$.
Comme $n$ et $A$ sont positifs tous les deux : $n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$.
Il suffit de choisir comme valeur de $N$ le premier entier supérieur à $\sqrt{A}$.
Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N$, on aura bien $n^2 > A$.

De la même façon, les suites $(n)$, $(n^3)$, etc., $(\sqrt{n})$ sont des suites qui ont pour limite $+\infty$.

### 3.b.2. Théorèmes sur les limites

Théorème 1.1 (convergence monotone) Toute suite croissante et majorée est convergente vers une limite $l$ qui est le plus petit majorant de la suite.
De même, pour toute suite décroissante et minorée : sa limite est le plus grand des majorants.

Démonstration La démonstration repose sur l'axiome de la borne supérieure : *toute partie $E$ non vide de $\mathbb{R}$ et majorée admet une borne supérieure, notée* $\sup E$ *qui en est le plus petit des majorants.*
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$, l'ensemble $E = \{u_n, n \geqslant n_0\}$ des valeurs prises par la suite $(u)$ n'est pas vide car $u_{n_0} \in E$ et il est majoré car $(u_n)$ l'est.
$E$ admet donc une borne supérieure $\mu = \sup E$.
Cela signifie que les valeurs $u_n$ dépassent n'importe quelle valeur inférieure strictement à $\mu$.
En d'autres termes $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \mu - \epsilon < u_N \leqslant \mu$.
Et, par conséquent, comme $(u_n)$ est croissante, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \mu - \epsilon < u_N \leqslant u_n < \mu$, soit $n \geqslant N \Longrightarrow \mu - \epsilon < u_n \leqslant \mu$.
A fortiori, comme $\mu + \epsilon > \mu$, on a même $n \geqslant N \Longrightarrow \mu - \epsilon < u_n < \mu + \epsilon$, ce qui, d'après la définition 1.12, prouve que la suite $(u_n)$ converge vers $\mu$, soit $\lim_{n \to +\infty} u_n = \mu$.

Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante et majorée alors elle converge vers une limite $l$.
La suite $(v_n)_{n \geqslant n_0} = (-u_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante, minorée et converge vers la limite $-l$.

**Exemple** 9 – Montrons que la suite $u$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée par 2.
Pour commencer, montrons que $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ pour tout $n > 1$. En effet, $n^2 > n(n-1) = n^2 - n$ pour tout entier $n$, leurs inverses sont donc rangées dans le sens inverse.
La somme $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est donc majorée par $1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
Or $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ (mettre au même dénominateur), $u_n$ est donc majoré par $1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$.
En écrivant tous les termes de cette somme, on s'aperçoit qu'ils s'éliminent deux à deux :
$1 + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n}$. Donc $u_n < 2$.
De plus, la suite $u$ est croissante, car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2} > 0$.
Par application du théorème 1.1, la suite converge vers une limite $l$.
Remarque : si le théorème annonce qu'il y a une limite, il ne donne pas sa valeur. Ici, on sait seulement que la limite est $l \leqslant 2$. puisque 2 est un majorant de cette suite. On peut s'approcher de la véritable limite de cette suite au moyen d'un programme. On en obtiendra ainsi une valeur approchée qui est bien inférieure à 2 puisqu'elle vaut environ 1,644 934 066 848 226 436 472 415 166 6.
Comme l'a montré Euler[5] en 1735, il s'agit de l'irrationnel $\frac{\pi^2}{6}$.

Théorème 1.2 (somme et produit par un réel) Soient $u$ une suite qui diverge vers $+\infty$ et $k$ un réel non nul.

- La suite $(u_n + k)$ diverge vers $+\infty$ et, si $k > 0$, la suite $(ku_n)$ aussi
- Si $k < 0$, la suite $(ku_n)$ diverge vers $-\infty$

Démonstration Examinons le cas $k > 0$ : comme la suite $u$ diverge vers $+\infty$, elle dépasse toute valeur arbitrairement fixée. Un réel $A > 0$ étant arbitrairement fixé.
La suite dépasse le réel $\frac{A}{k}$, à partir d'un certain rang $N$, et donc $\forall n > N,\ u_n > \frac{A}{k}$, soit $ku_n > A$. La suite $(ku_n)$ diverge donc vers $+\infty$.
La suite dépasse le réel $A - k$, à partir d'un certain rang $N'$, et donc $\forall n > N',\ u_n > A - k$, soit $u_n + k > A$. La suite $(u_n + k)$ diverge donc vers $+\infty$.
On raisonne de même dans le cas $k < 0$.

5. Leonhard Euler(1707 Bâle - 1783 St Pétersbourg), un des plus grands et des plus prolifiques mathématiciens

Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant qui envisage les différents cas de figure pour la somme et le produit de deux suites.

THÉORÈME 1.3 (SOMME ET PRODUIT DE SUITES) Soient $u$ et $v$ deux suites ayant une limite, finie ou infinie. Les suites de terme général $u_n + v_n$ et $u_n \times v_n$, admettent ou non une limite selon les différents cas exposés par les deux tableaux ci-dessous :

Suite « somme » : $(u_n + v_n)$

| $\lim u$ / $\lim v$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $l'$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | |
| $-\infty$ | $-\infty$ | | $-\infty$ |

Suite « produit » : $(u_n \times v_n)$

| $\lim u$ / $\lim v$ | $l \neq 0$ | $l = 0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|
| $l' \neq 0$ | $l \times l'$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $l' = 0$ | $0$ | $0$ | |
| $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | | $\pm\infty$ |

DÉMONSTRATION ➲ Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$.
D'après la définition des limites on sait que :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Longrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \Longrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N' \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N' \Longrightarrow |v_n - l'| < \frac{\epsilon}{2}$
On en déduit que $n \geqslant \max\{N, N'\} \Longrightarrow |u_n - l| + |v_n - l'| < \epsilon$.
Inégalité triangulaire : $|u_n - l| + |v_n - l'| > |u_n - l + v_n - l'| = |(u_n + v_n) - (l - l')|$.
Finalement, par transitivité de la relation d'ordre, $n \geqslant \max\{N, N'\} \Longrightarrow |(u_n + v_n) - (l - l')| < \epsilon$.
Ceci étant vrai $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$.

➲ Appliquons le théorème d'encadrement (v. plus loin) pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = l \times l'$.
On majore l'expression $|u_n \times v_n - l \times l'|$ par une expression de limite nulle :
$u_n \times v_n - l \times l' = u_n \times v_n - u_n \times l' + u_n \times l' - l \times l' = u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)$
Inégalité triangulaire : $|u_n \times v_n - l \times l'| < |u_n(v_n - l')| + |l'(u_n - l)|$
Comme la suite $(u_n)$ est convergente, elle est majorée.
En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Longrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon \Longrightarrow u_n < l + \epsilon$
En notant $M$ un de ses majorants, on obtient $|u_n(v_n - l')| + |l'(u_n - l)| < |M(v_n - l')| + |l'(u_n - l)|$.

Les expressions $v_n - l'$ et $u_n - l$ ont pour limite 0. D'après la propriété 1.2, les expressions $M(v_n - l')$ et $l'(u_n - l)$ ont donc aussi pour limite 0, de même pour leur somme, d'après la propriété ci-dessus. Ainsi $|u_n \times v_n - l \times l'|$ est encadrée entre 0 et une expression ayant pour limite 0 ; sa limite est donc 0.

**Remarques** :

- Les cases hachurées indiquent des cas indéfinis. Dans ces cas, on ne peut pas conclure directement à l'aide de ce théorème. Par exemple, si on a $u_n = n^2$ et $v_n = -2n$, on a $\lim u = +\infty$ et $\lim v = -\infty$. La somme $u + v$ a une limite indéterminée à l'égard de ce théorème. Il suffit, dans ce cas, de factoriser : $u_n + v_n = n(n-2)$. La somme indéterminée est devenue déterminée puisque les suites $r$ et $s$ définies par $r_n = n$ et $s_n = n - 2$ forment une suite « produit » déterminée : chacune divergeant vers $+\infty$, la limite est trouvée à l'aide du tableau de droite, c'est $+\infty$. On verra dans l'exemple qui suit que les suites « polynomiale » admettent pour limite la limite de son « terme dominant ».
- Deux cas d'indétermination sont présents ici : $\infty - \infty$ et $\infty \times 0$.
On peut lever la 1^re par une factorisation : $n^2 - 3n = n(n-3)$ qui n'est plus indéterminé.
Pour la 2^e, il peut suffire de simplifier : $n^2 \times \frac{2}{n} = 2n$ qui n'est plus indéterminé.
Mais la plupart du temps, on aura recours aux théorèmes de comparaison pour lever les indéterminations.
- La notation $\pm\infty$ indique que la limite est $+\infty$ ou $-\infty$. La règle des signes étendue aux signes des limites, s'applique. Par exemple $\frac{n^3}{100}(-2 + \frac{1}{n})$ admet $-\infty$ comme limite, du fait que $\lim \frac{n^3}{100} = +\infty$ (positive) et $\lim(-2 + \frac{1}{n}) = -2$ (négative).

**Exemple** 10 – Quelle est la limite de la suite $u$ définie par $u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$ ?
Le théorème 1.3 ne permet pas de conclure directement, le terme général étant écrit sous cette forme développée. Il faut mettre la plus grande puissance de l'indice en facteur et utiliser le volet « produit » de ce théorème. Ici, on écrira $u_n = n^3(-1 + \frac{3}{n} + \frac{-2}{n^2} + \frac{3}{n^3})$.
Le 1er facteur tend vers $+\infty$ tandis que le 2d tend vers $-1$, du fait de la limite de chacun des termes de la somme et du théorème sur la somme : $\lim -1 = -1$, $\lim \frac{3}{n} = 0$, $\lim \frac{-2}{n^2} = 0$ et $\lim \frac{3}{n^3} = 0$.

Méthode (Suite polynomiale)
Lorsque le terme général a une forme polynomiale de degré $p$ : $u_n = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k$, le terme dominant au voisinage de $+\infty$ est toujours celui de plus haut degré, donc ici $a_p n^p$. Les autres termes sont vite négligeables devant lui lorsque $n$ devient très grand. La limite de $u$ sera celle du terme dominant :

$$a_p \neq 0 \Longrightarrow \lim \sum_{k=0}^{p} a_k n^k = \lim a_p n^p$$

L'expression « forme polynomiale » s'étend même ici aux puissances négatives de l'indice. La suite $v$ définie par $v_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^2}$ aura le même comportement asymptotique que la suite $u$, au voisinage de $+\infty$, la différence $v_n - u_n$ ayant pour limite 0.

Théorème 1.4 (suite quotient) Soient $u$ et $v$ deux suites ayant une limite, finie ou infinie. La suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ admet ou non une limite selon les différents cas exposés par le tableau ci-dessous :

| $\lim v$ \ $\lim u$ | $l \neq 0$ | $l = 0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|
| $l' \neq 0$ | $\frac{l}{l'}$ | 0 | $\pm\infty$ |
| $l' = 0$ | $\pm\infty$ | ////// | $\pm\infty$ |
| $\pm\infty$ | 0 | 0 | ////// |

Démonstration Montrons simplement, comme précédemment, la 1re case de ce tableau.
Commençons pour cela à montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$
Il suffira ensuite d'appliquer le résultat sur la limite d'un produit à $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.
Comme la suite $(u_n)$ est convergente, $(|u_n|)$ converge vers $|l|$ et est minorée par un réel $m > 0$ :
On a donc $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow ||u_n| - |l|| < \epsilon \Longrightarrow |l| - \epsilon < |u_n| < |l| + \epsilon$
En prenant $\epsilon = \frac{|l|}{2}$, on obtient $|l| - \frac{|l|}{2} < |u_n| \Longleftrightarrow |u_n| > \frac{|l|}{2}$.
Ainsi, en notant $m = \frac{|l|}{2}$, à partir d'un rang $N$, $|u_n| > m$.

Comme $l \neq 0$, on en déduit que $m > 0$ et donc que $|u_n| \neq 0$ pour tout $n > N$.
$|u_n| > m > 0 \Longrightarrow \frac{1}{|u_n|} < \frac{1}{m}$, d'où $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = |\frac{l-u_n}{u_n \times l}| = \frac{|u_n - l|}{|u_n| \times |l|} = \frac{1}{|u_n| \times |l|} \times |u_n - l| < \frac{1}{m \times |l|} \times |u_n - l|$
Or $|u_n - l|$ tendant vers 0, il en est de même $\frac{1}{m \times |l|} \times |u_n - l|$.
D'après le théorème d'encadrement, la limite de $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}|$ est donc nulle ; $\frac{1}{u_n}$ a pour limite $\frac{1}{l}$.

**Remarque** :
Les cases hachurées indiquent ici deux autres cas d'indétermination : $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$.
Dans le cas des suites rationnelles (quotients de deux expressions polynomiales), on ne conserve que les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur, on simplifie l'expression obtenue et on lui applique le théorème sur le quotient.
Pour la suite $u$ de terme général $u_n = \frac{-n^3+3n^2-2n+1}{5n^4+12n-7}$, on commence par dire que $u$ a la même limite que la suite $(\frac{-n^3}{5n^4})$. L'expression du terme général se simplifiant en $\frac{-1}{5n}$, on applique le théorème sur le quotient : la limite est 0 (le numérateur est constant et le dénominateur tend vers $+\infty$).

**Exemple** 11 – Quelle est la limite de la suite $u$ définie par $u_n = \frac{2^n-5}{3^n+1}$ ?
Le théorème 1.4 ne permet pas de conclure directement. En effet, les expressions au numérateur et au dénominateur tendent toutes les deux vers $+\infty$ (voir plus loin, les suites géométriques).
Mais si on divise le numérateur et le dénominateur par $3^n > 0$, on obtient $u_n = \frac{(\frac{2}{3})^n - \frac{5}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}}$.
Le numérateur tend maintenant vers 0 car les deux termes qui le composent tendent vers 0 ; le dénominateur, quant-à lui, tend vers 1.
Finalement, la suite $u$ tend vers 0.

**Théorème 1.5 (Majoration/Minoration)** Soient $u$ et $v$ deux suites.
Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration Montrons seulement la 1re ligne de ce théorème.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on a $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N' \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N' \Longrightarrow v_n > A$,
et comme $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant v_n$, on a $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \max\{N, N'\} \Longrightarrow u_n > A$.
Ceci prouve bien que la suite $u$ diverge vers $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$).

**Exemple** 12 – Montrons que la suite $u$ définie par $u_n = 2^n$ diverge vers $+\infty$.
Le terme général $2^n$ est supérieur à $n$ pour toutes les valeurs de $n$ car, en factorisant, on a :
$2^n - 1 = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0)$, et comme $\forall k \geqslant 0,\ 2^k \geqslant 1$, on a
$2^n = 1 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 1) \geqslant n + 1$.
Comme la suite $v$ définie par $v_n = n+1$ diverge vers $+\infty$ et que $\forall n \geqslant 1,\ v_n < u_n$, d'après le théorème 1.5, la suite $u$ diverge vers $+\infty$.

Méthode
### ➲ Limites des suites géométriques

Ce que nous venons de faire avec la suite $(2^n)$ se généralise à toutes les suites $(a^n)$ où $a \geqslant 1$.

L'inégalité préliminaire que l'on obtient s'appelle « inégalité de Bernoulli » :
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^1 + a^0)$, et comme $\forall k \geqslant 0,\ a \geqslant 1 \Longleftrightarrow a^k \geqslant 1$, on a $\forall n \geqslant 0,\ a^n = 1 + (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^1 + a) \geqslant n(a-1) + 1$.

- Pour $a > 1$, d'après le théorème 1.5, la suite $(a^n)$ diverge vers $+\infty$ car $a^n \geqslant n(a-1)+1$ et que $\forall a > 1,\ \lim n(a-1)+1 = +\infty$.
- Pour $a = 1$, la suite $(1^n)$ est constante. Elle converge vers 1.
- Pour $0 < a < 1$, la suite $(a^n)$ converge vers 0. En effet, $a^n = \frac{1}{(\frac{1}{a})^n}$ et, comme $\frac{1}{a} > 1$, la suite de terme général $(\frac{1}{a})^n$ tend vers $+\infty$. Par application du théorème 1.4, la suite $(a^n)$ étant obtenu par quotient d'une constante 1 par une expression tendant vers $+\infty$ tend vers 0.
- Pour $-1 < a < 0$, les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs, mais globalement la suite $(a^n)$ tend vers 0.
- Pour $a < -1$, les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs, leur valeur absolue tend vers $+\infty$, mais la suite $(a^n)$ diverge sans admettre de limite.

Comportement asymptotique d'une suite géométrique $u$ de raison $a$ et de premier terme $u_0$ :

| $a$ | $]-\infty;-1]$ | $]-1;1[$ | $1$ | $]1;+\infty[$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_0 > 0$ | pas de limite | 0 | $u_0$ | $+\infty$ |
| $u_0 < 0$ | pas de limite | 0 | $u_0$ | $-\infty$ |

Pour ce qui est de la somme $S$ des termes d'une suite géométrique :
- Si $a > 1$, $S$ diverge vers $\pm\infty$
- Si $|a| < 1$, la formule $S = u_0 \times \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ montre que, $1 - a^{n+1}$ tendant vers 1, $\lim S = \frac{1}{1-a}$.

**Théorème 1.6 (gendarmes)** Soient $u$, $v$ et $w$ trois suites. Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Démonstration Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, on a :

- $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N' \Longrightarrow l - \epsilon < v_n < l + \epsilon$
- $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N'' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N'' \Longrightarrow l - \epsilon < w_n < l + \epsilon$

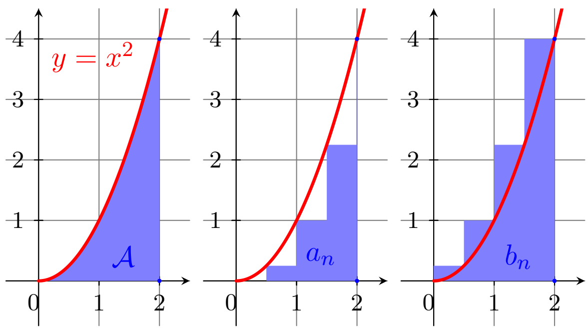
On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant \max\{N, N', N''\}$ on a $l - \epsilon < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < l + \epsilon$, soit $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$, ce qui prouve bien que la suite $u$ converge vers $l$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$).

**Exemple** 13 – ➲ Montrons que la suite $u$ définie par $u_n = \frac{\sin n}{n}$ a pour limite 0.
Nous savons que $\forall n \geqslant 0$ on a $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$.
On en déduit l'encadrement, valable pour tout entier $n \geqslant 1$ : $\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$. D'après le théorème 1.6, la suite $u$ converge donc vers 0.

➲ Calcul d'aire
Calculons l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par

- la parabole d'équation $y = x^2$
- les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$
- l'axe des abscisses $y = 0$

Pour cela, encadrons cette aire :
$\forall n \geqslant 0,\ \ a_n < \mathcal{A} < b_n$
les aires $a_n$ et $b_n$ étant faciles à calculer car constituées de rectangles
(sur notre illustration $n = 4$)




- L'aire $a_n$ est obtenue en additionnant les aires de $n$ rectangles de largeur $\frac{2}{n}$ ; les hauteurs de ces rectangles constituent la suite $h$ : $h_0 = 0$, $h_1 = (\frac{1\times 2}{n})^2$, $h_2 = (\frac{2\times 2}{n})^2$, $\cdots$, $h_{n-1} = (\frac{(n-1)\times 2}{n})^2$
- L'aire $b_n$ est obtenue en additionnant les aires de $n$ rectangles de largeur $\frac{2}{n}$ ; les hauteurs de ces rectangles constituent la suite $H$ : $H_0 = (\frac{1\times 2}{n})^2$, $H_1 = (\frac{2\times 2}{n})^2$, $H_2 = (\frac{3\times 2}{n})^2$,$\cdots$,$H_{n-1} = (\frac{n\times 2}{n})^2$

Ainsi on a $a_n = h_0 \times \frac{2}{n} + h_1 \times \frac{2}{n} + \cdots + h_{n-1} \times \frac{2}{n} = \frac{2}{n}[(0 + (\frac{1\times 2}{n})^2 + \cdots + (\frac{(n-1)\times 2}{n})^2]$
On obtient $a_n = (\frac{2}{n})^3[(1)^2 + (2)^2 + \cdots + (n-1)^2]$ et $b_n = (\frac{2}{n})^3[(1)^2 + (2)^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2]$.

L'identité $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ prouvée dans le cours de 1re (Ex.1.10 et prop.3.5)
permet de simplifier $a_n = (\frac{2}{n})^3(\frac{(n+1)(n)[2(n-1)+1]}{6}) = (\frac{2}{n})^3(\frac{n(n+1)(2n-1)}{6})$ et $b_n = (\frac{2}{n})^3(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$.
Déterminons alors les limites de $a$ et $b$ :

- $\lim a_n = \lim \frac{2^3\times n(n+1)(2n-1)}{6n^3} = \lim \frac{2^3\times 2n^3}{6n^3} = \frac{2^4}{6} = \frac{8}{3}$
- $\lim b_n = \lim \frac{2^3\times n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim \frac{2^3\times 2n^3}{6n^3} = \frac{2^4}{6} = \frac{8}{3}$

Ces deux suites encadrent $\mathcal{A}$ et convergent vers $\frac{8}{3}$ ; par application du théorème 1.6, $\mathcal{A} = \frac{8}{3}$.

**Théorème 1.7 (Passage à la limite)** Soient $u$ et $v$ deux suites qui convergent respectivement vers $l$ et $l'$. Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $u_n > v_n$, alors $l \geqslant l'$.

Démonstration Montrons d'abord par l'absurde, la propriété :
Soit $u$ une suite qui converge vers $l$. Si, à partir d'un rang $N$, on a $u_n > 0$, alors $l \geqslant 0$.
Supposons $l < 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Longrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N' \Longrightarrow l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$,
en prenant $\epsilon = -l > 0$, on obtient $2l < u_n < 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent $l \geqslant 0$.

En prenant $w_n = u_n - v_n$, à partir d'un certain rang $N$, on a $w_n > 0$ et comme, d'après la propriété 1.3, $w$ est une suite qui converge vers $l - l'$, on lui applique le résultat précédent :
$l - l' \geqslant 0 \Longleftrightarrow l \geqslant l'$.

#### 3.b.3. Suites adjacentes

Théorème 1.8 (Suites adjacentes) Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
On dit que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes si $(u_n)$ est croissante, $(v_n)$ décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

**Remarques** :

- Pour illustrer le théorème 1.6 des gendarmes, on a vu que le terme général de la suite $(\frac{\sin n}{n})$ était encadré par les termes des deux suites s $(\frac{-1}{n})$ et $(\frac{1}{n})$. La 1re est croissante tandis que la 2e est décroissante et la différence $\frac{1}{n} - \frac{-1}{n} = \frac{2}{n}$ tend vers zéro. Ces suites sont donc adjacentes. Ces deux suites tendent vers une même limite qui est, ici, nulle.
- Dans le même exemple 13, lorsqu'on a encadré l'aire du domaine situé entre la courbe de la fonction $x \longmapsto x^2$ et l'axe des abscisses pour $0 \leqslant x \leqslant 2$, on a construit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ qui convergeaient vers la même limite ; ces suites étaient adjacentes par construction car l'une minorait l'aire cherchée tandis que l'autre la majorait et, comme elles convergeait vers la même limite, leur différence tendait vers zéro.
- D'autres suites sont adjacentes de façon encore plus triviale : les suites $p_n$ et $q_n$ des approximations par défaut et par excès à $10^{-n}$ près d'un nombre réel quelconque.

Propriété 1.10 (Ordre) Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites adjacentes définies sur $\mathbb{N}$.
Si $(u)$ est croissante et $(v)$ décroissante alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$.

Démonstration Supposons qu'il existe un rang $m$ pour lequel $u_m > v_m \Longleftrightarrow u_m - v_m > 0$.
Comme $u$ est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}, n > m \Longrightarrow u_n \geqslant u_m$
Comme $v$ est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N}, n > m \Longrightarrow v_n \leqslant v_m \Longleftrightarrow -v_n \geqslant -v_m$
Par addition des deux inégalités, il vient $u_n - v_n \geqslant u_m - v_m$ pour $n > m$.
Or, $u$ et $v$ étant adjacentes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, -\epsilon < u_n - v_n < \epsilon$.
En prenant $\epsilon = u_m - v_m$, on a alors $u_n - v_n < u_m - v_m$.
Pour $n > \max\{m, N\}$, on a donc simultanément $u_n - v_n < u_m - v_m$ et $u_n - v_n \geqslant u_m - v_m$.
Cette contradiction prouve que l'hypothèse $\exists m \in \mathbb{N}, u_m > v_m$ est à rejeter.

Théorème 1.9 (Convergence) Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites adjacentes définies sur $\mathbb{N}$.
Si $(u)$ est croissante et $(v)$ décroissante alors les deux suites convergent vers un même réel $\lambda$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant \lambda \leqslant v_n$.

Démonstration Par définition, la suite $(v_n)$ est décroissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant v_0$.
D'après la propriété 1.10, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ donc $u_n \leqslant v_0$.
La suite $(u_n)$ est donc croissante et majorée. D'après la propriété 1.1 elle converge vers un réel $l$.
De même, $(v_n)$ étant décroissante et minorée (par $u_0$), converge vers un réel $l'$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l - l'$.
On en déduit que $l - l' = 0 \Longleftrightarrow l = l'$. Les deux suites convergent vers la même limite.

**Exemple** 14 – Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. et soient $(a_n)$ et $(b_n)$ les suites définies par $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n =& u_{2(n+1)} - u_{2n} = \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2}\right] - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n}\right] \\ =& \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \end{aligned}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$, on en déduit que $(a_n)$ est croissante.

Prouvons par récurrence que $a_n \leqslant 1 - \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
$a_1 = u_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. La propriété est vraie pour $n = 1$.
Supposons que pour un rang $n \geqslant 1$ on ait $a_n \leqslant 1 - \frac{1}{2n}$.
Comme, d'après le calcul ci-dessus $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$.
On a donc $a_{n+1} \leqslant 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 1 - \frac{(2n+2)(2n+1)-2n}{2n(2n+2)(2n+1)} = 1 - \frac{2n^2+2n+1}{2n(n+1)(2n+1)}$.
A-t-on $1 - \frac{2n^2+2n+1}{2n(n+1)(2n+1)} \leqslant 1 - \frac{1}{2(n+1)}$, soit $\frac{2n^2+2n+1}{2n(n+1)(2n+1)} \geqslant \frac{1}{2(n+1)}$ ou encore
$2(n+1)(2n^2+2n+1) \geqslant 2n(n+1)(2n+1) \iff 2n^2+2n+1 \geqslant n(2n+1) \iff n \geqslant -1$ ?
Oui, d'où la conclusion $a_n \leqslant 1 - \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
La suite $(a_n)$ est donc croissante et majorée par 1.
D'après le théorème 1.1 de convergence monotone et la propriété 1.7 de passage aux limites, la suite $(a_n)$ converge vers un réel $\lambda \leqslant 1$.

$b_n = u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = a_n + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = a_n + \frac{1}{2n+1}$.
Comme $(a_n)$ converge vers $\lambda$ et $(\frac{1}{2n+1})$ converge vers 0 par addition des limites $(b_n)$ converge vers $\lambda$.

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \left[a_{n+1} + \frac{1}{2n+3}\right] - \left[a_n + \frac{1}{2n+1}\right] = a_{n+1} - a_n + \frac{(2n+1)-(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} + \frac{-2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+3)-2(2n+2)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{-(2n+1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)} = \frac{-1}{2(n+1)(2n+3)}
\end{aligned}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{-1}{2(n+1)(2n+3)} < 0$, on en déduit que $(b_n)$ est décroissante.

Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes et convergent vers une même limite $\lambda \leqslant 1$ que cette étude ne permet pas de déterminer algébriquement. On peut, tout au plus en donner des valeurs approchées puisque, d'après le théorème 1.9, on a l'encadrement $a_n \leqslant \lambda \leqslant b_n$.
Voici les premières valeurs obtenues pour cet encadrement :

| n | 1/n | u_n | a_n | b_n |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0,5 | 0,8333333333 |
| 2 | 0,5 | 0,5 | 0,5833333333 | 0,7833333333 |
| 3 | 0,3333333333 | 0,8333333333 | 0,6166666667 | 0,7595238095 |
| 4 | 0,25 | 0,5833333333 | 0,6345238095 | 0,7456349206 |
| 5 | 0,2 | 0,7833333333 | 0,6456349206 | 0,7365440115 |
| 6 | 0,1666666667 | 0,6166666667 | 0,6532106782 | 0,7301337551 |
| 7 | 0,1428571429 | 0,7595238095 | 0,6587051837 | 0,7253718504 |
| 8 | 0,125 | 0,6345238095 | 0,6628718504 | 0,7216953798 |
| 9 | 0,1111111111 | 0,7456349206 | 0,6661398242 | 0,7187714032 |
| 10 | 0,1 | 0,6456349206 | 0,6687714032 | 0,7163904508 |
| 11 | 0,0909090909 | 0,7365440115 | 0,6709359053 | 0,7144141662 |
| 12 | 0,0833333333 | 0,6532106782 | 0,6727474995 | 0,7127474995 |

Ainsi, pour $n = 12$ par exemple on obtient $a_{12} \leqslant \lambda \leqslant b_{12}$, soit environ $0,6727 \leqslant \lambda \leqslant 0,7127$.
On constate que l'amplitude de l'encadrement ne diminue pas rapidement : au rang $n$ il vaut $\frac{1}{2n+1}$.
Pour $n = 12$, sur notre illustration, il vaut $\frac{1}{25} = 0,4$ et il faut atteindre $n = 50$ pour que cette amplitude soit inférieure à $0,01$.
La valeur exacte de la limite $\lambda$ est le nombre transcendant $\ln(2) \approx 0,6931471806$.