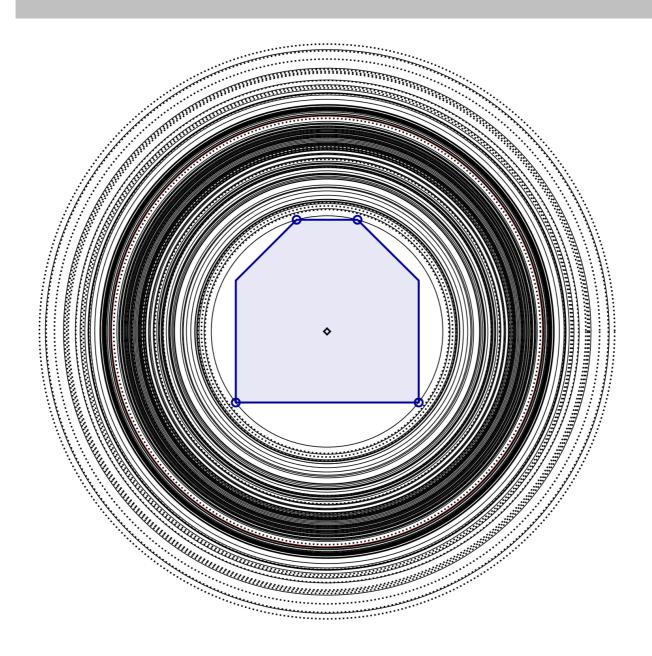
Tangram évolutif Solutions



Tangram Évolutif (solutions)

Traditionnellement, le jeu de Tangram consiste à résoudre des énigmes : on choisit une silhouettes imprimée dans le catalogue, ou sur une carte ou, aujourd'hui, dans la fenêtre d'une application informatique; il faut alors reconstituer la silhouette avec l'ensemble des pièces du jeu. Notre étude des possibilités combinatoires de ce jeu s'écarte assez considérablement de ce mode d'utilisation, mais nous avons voulu conserver, au moins symboliquement, un lien avec l'activité ludique. Ainsi nous donnons souvent, afin de stimuler nos lecteurs sur ce point, juste les silhouettes des tangrams. Pour la même raison, les différents chapitres du livre Tangram Évolutif se terminent par une question, une invitation à prolonger la réflexion sur un des points abordés. Évidemment, il ne suffira souvent pas de manipuler les sept pièces manuellement, ni même de raisonner astucieusement, pour envisager des réponses complètes à nos questions. L'usage d'un ordinateur permet ce type de réponse quand on parvient à traduire les questions sous la forme d'algorithmes. Nous avons ainsi traité nos questions et cette partie consigne les éléments de solutions, obtenu par programmation, qui nous paraissent pertinents. Cela paraîtra trop succinct à certains et trop développé à d'autres – certaines réponses nous amenant à développer parfois, encore un peu, le champ de recherche. Devant la nécessité de faire des choix, nous avons fait « au mieux », selon notre capacité et notre motivation, en espérant que chacun y trouvera un intérêt.

SOLUTIONS

Question 1	5
Question 2	13
Question 3	
Question 4	27
Question 5	
Question 6	36
Question 7	38
Question 8	41
Question 9	44
Question 10	50
Question 11	53
Question 12	
Question 13	61
Question 14	67
Question 15	
Question 16	
Question 17:	80



QUESTION 1

Comment peut-on reconnaître un nombre premier de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$? La façon la plus naturelle de répondre à cette question repose sur une adaptation de l'algorithme appelé « crible d'Ératosthène », qui est défini pour les entiers. Cet algorithme retire de la liste des entiers tous les multiples de l'entier qui succèdent au précédent. En partant de 1 (qui n'est pas premier), le suivant est 2 (premier entier premier), donc on retire de la liste des entiers tous les nombres pairs. L'entier qui suit 2 est 3. Comme il n'a pas été retiré, 3 est premier, et on retire les multiples de 3 qui n'ont pas déjà été retiré (9, 15, 21, etc.). On procède ainsi de proche en proche, l'entier suivant est 4 mais comme il a été retiré, on passe à 5 qui n'ayant pas été retiré est le nombre entier premier suivant. On retire alors de la liste 25, 35, 45, etc. La liste des nombres entiers premiers commence donc par 2, 3, 5. Pour trouver les nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$, il faudrait pouvoir décrire cet ensemble pas-à-pas, comme on décrit l'ensemble IN des entiers en incrémentant juste chacun des nombres de 1 pour trouver le suivant. Il est possible de décrire $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ de plusieurs façons, la première peut-être qui vient à l'esprit est de procéder par ordre croissant. Les nombres α et b suivent alors une progression parallèle un peu complexe. Voici les 44 premières valeurs non nulles de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ inférieures à 10.

Une autre façon de faire consiste à augmenter la valeur de la somme s=a+b de 1 après avoir épuisé les différentes combinaisons conduisant à s. Pour s=1, on a deux

rang	а	b	a+b.sqrt(2)	rang	а	b	a+b.sqrt(2)
1	0	0	0,0000	23	4	2	6,8284
2	1	0	1,0000	24	7	0	7,0000
3	0	1	1,4142	25	0	5	7,0711
4	2	0	2,0000	26	3	3	7,2426
5	1	1	2,4142	27	6	1	7,4142
6	0	2	2,8284	28	2	4	7,6569
7	3	0	3,0000	29	5	2	7,8284
8	2	1	3,4142	30	8	0	8,0000
9	1	2	3,8284	31	1	5	8,0711
10	4	0	4,0000	32	4	3	8,2426
11	0	3	4,2426	33	7	1	8,4142
12	3	1	4,4142	34	0	6	8,4853
13	2	2	4,8284	35	3	4	8,6569
14	5	0	5,0000	36	6	2	8,8284
15	1	3	5,2426	37	9	0	9,0000
16	4	1	5,4142	38	2	5	9,0711
17	0	4	5,6569	39	5	3	9,2426
18	3	2	5,8284	40	8	1	9,4142
19	6	0	6,0000	41	1	6	9,4853
20	2	3	6,2426	42	4	4	9,6569
21	5	1	6,4142	43	7	2	9,8284
22	1	4	6,6569	44	0	7	9,8995

Tableau 1: Nombres de la forme $a+b\sqrt{2}$ inférieurs à 10 classés dans l'ordre numérique

possibilités : (a=1, b=0) ou alors (a=0, b=1). Pour s=2, on a trois possibilités : (a=2, b=0), (a=1, b=1), ou (a=0, b=2). On ne repasse ainsi jamais deux fois sur la même valeur du couple (a,b), mais on épuise progressivement toutes les possibilités combinatoires, ce qui assure une description complète de l'ensemble $\mathbb{N}(\sqrt{2})$. Les 44 premières valeurs ainsi générées données dans le tableau suivant ne sont pas exactement les mêmes que dans la méthode précédente, car les nombres ne se suivent pas dans le même ordre. On peut imaginer d'autres façons de décrire cet ensemble de nombres, comme de faire varier successivement a de zéro à l'infini pour une première valeur b=0, puis de recommencer pour b=1, etc. jusqu'à des valeurs infinies pour b. Mais cette dernière façon ne semble pas très exploitable, si on s'intéresse principalement aux premières valeurs de la somme $a+b\sqrt{2}$.

Notre objectif étant d'adapter le crible d'Ératosthène aux nombres de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$, pour déterminer les premiers nombres premiers de cet ensemble, adoptons la $2^{\text{ème}}$ façon de progresser dans l'ensemble, quitte à remettre de l'ordre après coup dans la suite des nombres premiers générés. Les premières valeurs peuvent s'obtenir à la main mais, si on veut aller plus loin, le plus simple est d'écrire un petit programme qui effectue ce travail.

rang	S	a	b	a+b.sqrt(2)	rang	S	а	b	a+b.sqrt(2)
1	1	1	0	1.0000	23	6	4	2	6.8284
2	1	0	1	1.4142	24	6	3	3	7.2426
3	2	2	0	2.0000	25	6	2	4	7.6569
4	2	1	1	2.4142	26	6	1	5	8.0711
5	2	0	2	2.8284	27	6	0	6	8.4853
6	3	3	0	3.0000	28	7	7	0	7.0000
7	3	2	1	3.4142	29	7	6	1	7.4142
8	3	1	2	3.8284	30	7	5	2	7.8284
9	3	0	3	4.2426	31	7	4	3	8.2426
10	4	4	0	4.0000	32	7	3	4	8.6569
11	4	3	1	4.4142	33	7	2	5	9.0711
12	4	2	2	4.8284	34	7	1	6	9.4853
13	4	1	3	5.2426	35	7	0	7	9.8995
14	4	0	4	5.6569	36	8	8	0	8.0000
15	5	5	0	5.0000	37	8	7	1	8.4142
16	5	4	1	5.4142	38	8	6	2	8.8284
17	5	3	2	5.8284	39	8	5	3	9.2426
18	5	2	3	6.2426	40	8	4	4	9.6569
19	5	1	4	6.6569	41	8	3	5	10.0711
20	5	0	5	7.0711	42	8	2	6	10.4853
21	6	6	0	6.0000	43	8	1	7	10.8995
22	6	5	1	6.4142	44	8	0	8	11.3137

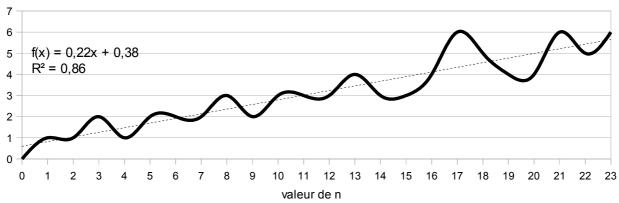
Tableau 2: Les 44 premiers nombres de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ lorsqu'on les obtient en faisant croître régulièrement la somme s=a+b

Nous pouvons ainsi vérifier nos premières valeurs trouvées à la main : $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+1$, 3 et $2\sqrt{2}+1$ sont les quatre premiers nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$. Si on poursuit la liste, avec l'ordre particulier induit par notre progression, on trouve $\sqrt{2+3}$, $3\sqrt{2}+1$, 5, $4\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}+5$, $5\sqrt{2}+1$, 7, $2\sqrt{2}+5$, $4\sqrt{2}+3$, $6\sqrt{2}+1$, etc. (on s'arrête ici au dernier nombre dont la somme s=a+b est strictement inférieure à huit). Si on en veut d'autres, le programme nous les fournit : on en trouve 23 pour $s \le 10$, 76 pour $s \le 20$, ..., 1455 pour $s \le 100$, etc. L'illustration donne les 75 premières valeurs. Si on les réordonne par valeurs décimales croissantes, on obtient une liste qui permet de réaliser qu'il y a de plus en plus de valeurs premières par intervalle [n;n+1[au fur et à mesure que l'entier n croît. C'est l'inverse de ce qui se produit avec les nombres premiers de IN qui, eux, ont tendance à se raréfier lorsque n augmente.

```
Nombre premier no 1 : 0 * 1.sqrt(2) approx 1.4142135623738951 Nombre premier no 2 : 1 * 1.sqrt(2) approx 2.4142135623738951 Nombre premier no 3 : 3 * 0.sqrt(2) approx 3.0 approx 3.8284271247461983 Nombre premier no 6 : 1 * 3.sqrt(2) approx 3.8284271247461983 Nombre premier no 6 : 1 * 3.sqrt(2) approx 4.4142135623738951 Nombre premier no 6 : 1 * 3.sqrt(2) approx 4.4142135623738951 Nombre premier no 8 : 1 * 4.sqrt(2) approx 6.4142135623738951 Nombre premier no 8 : 1 * 4.sqrt(2) approx 6.4142135623738951 Nombre premier no 11 : 7 * 0.sqrt(2) approx 6.4142135623738951 Nombre premier no 11 : 7 * 0.sqrt(2) approx 6.4142135623738951 Nombre premier no 12 : 17 * 0.sqrt(2) approx 6.4142135623738951 Nombre premier no 13 : 3 * 4.sqrt(2) approx 6.4142135623738951 Nombre premier no 15 : 7 * 1.sqrt(2) approx 6.4142135623738951 Nombre premier no 15 : 7 * 1.sqrt(2) approx 8.4142135623738961 Nombre premier no 15 : 7 * 1.sqrt(2) approx 8.4142135623738961 Nombre premier no 15 : 7 * 1.sqrt(2) approx 8.4142135623738961 Nombre premier no 16 : 7 * 2.sqrt(2) approx 9.485281374238571 Nombre premier no 28 : 9 * 1.sqrt(2) approx 9.485281374238571 Nombre premier no 28 : 9 * 1.sqrt(2) approx 9.485281374238571 Nombre premier no 29 : 17 * 1.sqrt(2) approx 10.4142135623738961 Nombre premier no 29 : 17 * 1.sqrt(2) approx 10.4142135623738961 Nombre premier no 29 : 17 * 1.sqrt(2) approx 10.4142135623738961 Nombre premier no 29 : 17 * 1.sqrt(2) approx 11.42434611747619 Nombre premier no 29 : 11 * 1.sqrt(2) approx 11.42434611747619 Nombre premier no 29 : 11 * 1.sqrt(2) approx 11.42434611747619 Nombre premier no 29 : 11 * 1.sqrt(2) approx 12.313788498984761 Nombre premier no 29 : 11 * 1.sqrt(2) approx 12.313788498984761 Nombre premier no 29 : 11 * 1.sqrt(2) approx 12.313788498984761 Nombre premier no 39 : 5 * 7.sqrt(2) approx 13.4822817447619 Nombre premier no 42 : 13 * 2.sqrt(2) approx 13.4822817447619 Nombre premier no 65 : 17 * 4.sqrt(2) approx 14.4931862373896 Nombre premier no 65 : 17 * 4.sqrt(2) approx 14.493184238571 Nombre premier no 65 : 17 
Nombre premier no 1 : 0 + 1.sqrt(2)
Nombre premier no 2 : 1 + 1.sqrt(2)
Nombre premier no 3 : 3 + 0.sqrt(2)
Nombre premier no 4 : 1 + 2.sqrt(2)
Nombre premier no 5 : 3 + 1.sqrt(2)
Nombre premier no 6 : 1 + 3.sqrt(2)
Nombre premier no 7 : 5 + 0.sqrt(2)
Nombre premier no 8 : 1 + 4.sqrt(2)
Nombre premier no 9 : 5 + 1.sqrt(2)
Nombre premier no 10 : 7 + 0.sqrt(2)
Nombre premier no 11 : 7 + 0.sqrt(2)
Nombre premier no 12 : 5 + 2.sqrt(2)
Nombre premier no 13 : 3 + 4.sqrt(2)
Nombre premier no 13 : 3 + 4.sqrt(2)
Nombre premier no 14 : 1 + 6.sqrt(2)
Nombre premier no 15 : 7 + 1.sqrt(2)
Nombre premier no 16 : 3 + 5.sqrt(2)
Nombre premier no 17 : 1 + 7.sqrt(2)
Nombre premier no 16 : 3 + 5.sqrt(2)
Nombre premier no 17 : 1 + 7.sqrt(2)
Nombre premier no 18 : 7 + 2.sqrt(2)
Nombre premier no 19 : 1 + 8.sqrt(2)
Nombre premier no 19 : 1 + 8.sqrt(2)
Nombre premier no 22 : 3 + 7.sqrt(2)
Nombre premier no 22 : 3 + 7.sqrt(2)
Nombre premier no 22 : 3 + 7.sqrt(2)
Nombre premier no 24 : 11 + 0.sqrt(2)
Nombre premier no 25 : 9 + 2.sqrt(2)
Nombre premier no 26 : 5 + 6.sqrt(2)
Nombre premier no 27 : 3 * 8.sqrt(2)
Nombre premier no 28 : 1 + 10.sqrt(2)
Nombre premier no 30 : 5 + 7.sqrt(2)
Nombre premier no 31 : 1 * 11.sqrt(2)
Nombre premier no 32 : 13 * 0.sqrt(2)
Nombre premier no 32 : 13 * 0.sqrt(2)
Nombre premier no 33 : 11 * 2.sqrt(2)
Nombre premier no 36 : 5 + 7.sqrt(2)
Nombre premier no 37 : 13 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 38 : 5 + 7.sqrt(2)
Nombre premier no 39 : 5 + 9.sqrt(2)
Nombre premier no 39 : 5 + 9.sqrt(2)
Nombre premier no 31 : 1 * 11.sqrt(2)
Nombre premier no 36 : 1 + 12.sqrt(2)
Nombre premier no 37 : 13 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 38 : 11 * 3.sqrt(2)
Nombre premier no 40 : 1 * 1 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 40 : 1 * 1 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 40 : 1 * 1 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 40 : 1 * 1 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 40 : 1 * 1 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 60 : 1 * 1 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 60 : 1 * 1 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 60 : 1 * 1 * 1.sqrt(2)
Nombre premier no 60 : 1 * 1 * 1.sqrt(2)
Nombre pre
```

Illustration 1: Les premiers nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$, classés dans l'ordre numérique à droite, dans l'ordre de leur découverte par l'algorithme à gauche (s croissant, a>b en premier)

On peut essayer maintenant de découvrir la décomposition d'un nombre de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ selon ses facteurs premiers. C'est ce qu'il faut faire pour $10\sqrt{2}+20$ – la longueur totale des bords des pièces du Tangram – car notre programme, réglé pour aller jusqu'à s=10+20=30, nous informe que ce n'est pas un nombre premier. Les deux premiers facteurs de la décomposition ne sont pas difficiles à trouver, car notre nombre s'écrit $10(\sqrt{2}+2)$, or $10=5\times 2=5(\sqrt{2})^2$. Il reste à décomposer le nombre $\sqrt{2}+2$, qui n'est pas premier comme on le voit sur notre liste (il devrait se situer, s'il l'était, entre les nombres premiers n°3 et n°4 dans les deux listes). Nous pouvons diviser ce nombre par le premier nombre premier, $\sqrt{2}$, qui est un facteur commun évident : $\sqrt{2}+2=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$. Le dernier facteur est premier (c'est le deuxième nombre premier). La décomposition est donc achevée, et l'on peut écrire : $10\sqrt{2}+20=5(\sqrt{2})^3(\sqrt{2}+1)$.



Graphique 1: Évolution du nombre de nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ dans les intervalles [n;n+1]

Par curiosité, examinons les périmètres des différentes pièces et jugeons de leur primarité éventuelle. Le petit triangle a un périmètre égal à $\sqrt{2}+2$ qui est un nombre composé, comme on vient de le voir, des facteurs $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}+1$. Le triangle moyen et le parallélogramme ont un périmètre égal à $2\sqrt{2}+2$ qui est un nombre composé qui s'écrit $2(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2})^2(\sqrt{2}+1)$. Le carré a un périmètre égal à $\sqrt{2}+2$ qui est un nombre composé qui s'écrit $\sqrt{2}$. Enfin, le grand triangle a un périmètre égal à $\sqrt{2}+2$ qui est un nombre composé qui s'écrit $\sqrt{2}+2$ qui est un nombre composé qui s'écrit $\sqrt{2}+2$ qui est un nombre composé qui s'écrit $\sqrt{2}+2$ più est un nombre composé qui s'écrit $\sqrt{2}+2$ qui est un nombre

Comment les périmètres réels des tangrams homogènes peuvent-ils s'exprimer à partir des nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$? les nombres à examiner sont donnés dans le corps du texte (nous avons pris les périmètres des 16abolos du chapitre 11 qui recouvrent les périmètres de tangrams homogènes).

On a successivement : $8+2\sqrt{2}=2(4+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3(1+2\sqrt{2})$, $8\sqrt{2}=(\sqrt{2})^7$,

rat.	irr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
8	2	3			1													-		
0	8	7																		
6	4	2	2																	
12	0	4		1																
4	6	3				1														
10	2	2								1										
2	8	2							1											
8	4	5	1																	
14	0	2										1								
0	10	3						1												
6	6	2	1	1																
12	2	3					1													
4	8	4			1															
10	4	2								1										
16	0	8																		
2	10	2									1									
8	6	3	2																	
14	2	2														1				
6	8	2												1						
12	4	4				1														
18	0	2		2																
4	10	3								1										
10	6	2	1		1															
16	2	3																1		
2	12	2													1					
8	8	8	1																	
14	4	2																	1	
0	14	3						1												
6	10	2															1			
12	6	3	1	1																
4	12	4					1													
10	8	2	1			1														
2	14	2																1		
8	10	3											1							
0	16	17																		
6	12	2		1	1															
4	14	3	_													1				
2	16	2	40	_					4		4	_	4	4						1
Total des e	exposants	130	10	6	4	3	2	2	1	3	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1

Tableau 3: Exposants des facteurs premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ dans la décomposition des différents périmètres des 16abolos (formes générales dans lesquels se trouvent les tangrams homogènes). Les nombres de la 1^{ère} ligne indiquent le numéro d'ordre du nombre premier (voir figure 153)

$$\begin{aligned} &6+4\sqrt{2}=2(3+2\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})^2\ ,\ 12=4\times 3=3(\sqrt{2})^4\ ,\\ &4+6\sqrt{2}=2(2+3\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3(3+\sqrt{2})\ ,\ 10+2\sqrt{2}=2(5+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2(5+\sqrt{2})\ ,\\ &2+8\sqrt{2}=2(1+4\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2(1+4\sqrt{2})\ ,\ 8+4\sqrt{2}=4(2+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^5(1+\sqrt{2})\ ,\\ &14=2\times 7=7(\sqrt{2})^2\ ,\ 10\sqrt{2}=2\times 5\sqrt{2}=5(\sqrt{2})^3\ ,\\ &6+6\sqrt{2}=2\times 3(1+\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})\ ,\ 12+2\sqrt{2}=2(6+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3(1+3\sqrt{2})\ ,\\ &4+8\sqrt{2}=4(1+2\sqrt{2})=(\sqrt{2})^4(1+2\sqrt{2})\ ,\ 10+4\sqrt{2}=2(5+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2(5+\sqrt{2})\ ,\\ &16=2^4=(\sqrt{2})^8\ ,\ 2+10\sqrt{2}=2(1+5\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2(1+5\sqrt{2})\ ,\\ &8+6\sqrt{2}=2(4+3\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3(1+\sqrt{2})^2\ ,\ 14+2\sqrt{2}=2(7+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2(7+\sqrt{2})\ ,\\ &6+8\sqrt{2}=2(3+4\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2(3+4\sqrt{2})\ ,\ 12+4\sqrt{2}=(\sqrt{2})^4(3+1\sqrt{2})\ ,\\ &18=2\times 3^2=3^2(\sqrt{2})^2\ ,\ 4+10\sqrt{2}=(\sqrt{2})^3(5+\sqrt{2})\ ,\\ &10+6\sqrt{2}=2(5+3\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\ ,\\ &16+2\sqrt{2}=2(8+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3(1+7\sqrt{2})\ ,\ 2+12\sqrt{2}=2(1+6\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2(7+2\sqrt{2})\ ,\\ &14\sqrt{2}=7(\sqrt{2})^3\ ,\ 6+10\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2(3+5\sqrt{2})\ ,\ 12+6\sqrt{2}=6(2+\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^3(1+\sqrt{2})\ ,\\ &2+14\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2(1+7\sqrt{2})\ ,\ 8+10\sqrt{2}=2(4+5\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3(5+2\sqrt{2})\ ,\ 16\sqrt{2}=(\sqrt{2})^{37}\ ,\\ &6+12\sqrt{2}=6(1+2\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^2(1+2\sqrt{2})\ ,\ 4+14\sqrt{2}=2(2+7\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3(7+\sqrt{2})\ ,\\ &2+16\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2(1+8\sqrt{2})\ .\end{aligned}$$

Pour synthétiser cette petite étude sur les périmètres des 16abolos, nous avons présenté ces résultats dans le tableau 3. On y voit que le premier facteur premier, $\sqrt{2}$, occupe à lui tout seul 75% des 173 exposants du tableau, les dix-huit nombres premiers suivants se répartissant les 25% restants. Ce qui paraît remarquable est qu'aucun des dix-neuf premiers nombres premiers n'est oublié dans cette répartition des longueurs.

Examinons maintenant comment les longueurs tronquées des segments de polycompacts peuvent s'exprimer à partir des nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$? Les longueurs contiennent des soustractions qui nous font sortir apparemment du champ des nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$. Le deuxième nombre premier de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$, $\sqrt{2}+1$, a cependant la propriété intéressante de diviser tous les nombres de cet ensemble respectable pour donner des quotients de la forme voulue $a\sqrt{2}-b$ ou $-a\sqrt{2}+b$ avec a et b entiers naturels (positifs). Cela tient au fait qu'en divisant par $\sqrt{2}+1$, on multiplie par l'opposé de la quantité conjuguée, c'est-à-dire par $\sqrt{2}-1$, car $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$. De même, chacun des nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$, divisé par ce nombre, va donner un nombre de la forme voulue. La division

de $\sqrt{2}$ par $\sqrt{2}+1$ ou sa multiplication par $\sqrt{2}-1$, donnent le même résultat $(\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$. La division de $\sqrt{2}+3$ par $\sqrt{2}+1$ donne $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-1$. La longueur $2\sqrt{2}-2$ s'obtient en divisant 2 par $\sqrt{2}+1$. Pour obtenir la longueur $3-2\sqrt{2}$, il faut diviser 1 deux fois par $\sqrt{2}+1$ car $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$. En continuant ainsi notre analyse de ces longueurs, on trouve les décompositions successives qui conviennent, n'utilisant que des produits de nombres premiers et, forcément, une ou plusieurs divisions par $\sqrt{2}+1$. Ces divisions par $\sqrt{2}+1$ revenant à des multiplications par $\sqrt{2}-1$, il semble que l'on pourrait considérer qu'avec ce « nombre premier » additionnel, on puisse exprimer tous les nombres positifs de la forme $a\sqrt{2}-b$ ou $-a\sqrt{2}+b$ avec a et b entiers naturels (positifs). Mais cette conjecture reste à démontrer...

natoreis (positii	3). Ividis cette conject	ore reste a demontrer	
Quotients de	par 1+sqrt(2)	par (1+sqrt(2)) ²	par (1+sqrt(2)) ³
0 + 1.sqrt(2)	2.0 - 1.0.sqrt(2)	-4.0 + 3.0.sqrt(2)	10.0 - 7.0.sqrt(2)
1 + 1.sqrt(2) 3 + 0.sqrt(2)	1.0 - 0.0.sqrt(2) -3.0 + 3.0.sqrt(2)	-1.0 + 1.0.sqrt(2) 9.0 - 6.0.sqrt(2)	3.0 - 2.0.sqrt(2)
1 + 2.sqrt(2)	3.0 - 1.0.sqrt(2)	-5.0 + 4.0.sqrt(2)	-21.0 + 15.0.sqrt(2) 13.0 - 9.0.sqrt(2)
3 + 1.sqrt(2)	-1.0 + 2.0.sqrt(2)	5.0 - 3.0.sqrt(2)	-11.0 + 8.0.sgrt(2)
1 + 3.sqrt(2)	5.0 - 2.0.sqrt(2)	-9.0 + 7.0.sqrt(2)	23.0 - 16.0.sqrt(2)
5 + 0.sqrt(2)	-5.0 + 5.0.sqrt(2)	15.0 - 10.0.sqrt(2)	-35.0 + 25.0.sqrt(2)
1 + 4.sqrt(2)	7.0 - 3.0.sqrt(2)	-13.0 + 10.0.sqrt(2)	33.0 - 23.0.sqrt(2)
5 + 1.sqrt(2) 1 + 5.sqrt(2)	-3.0 + 4.0.sqrt(2) 9.0 - 4.0.sqrt(2)	11.0 - 7.0.sqrt(2) -17.0 + 13.0.sqrt(2)	-25.0 + 18.0.sqrt(2)
7 + 0.sqrt(2)	-7.0 + 7.0.sqrt(2)	21.0 - 14.0.sqrt(2)	43.0 - 30.0.sqrt(2) -49.0 + 35.0.sqrt(2)
5 + 2.sqrt(2)	-1.0 + 3.0.sgrt(2)	7.0 - 4.0.sqrt(2)	-15.0 + 11.0.sqrt(2)
3 + 4.sqrt(2)	5.0 - 1.0.sqrt(2)	-7.0 + 6.0.sqrt(2)	19.0 - 13.0.sqrt(2)
1 + 6.sqrt(2)	11.0 - 5.0.sqrt(2)	-21.0 + 16.0.sqrt(2)	53.0 - 37.0.sqrt(2)
7 + 1.sqrt(2)	-5.0 + 6.0.sqrt(2)	17.0 - 11.0.sqrt(2)	-39.0 + 28.0.sqrt(2)
3 + 5.sqrt(2) 1 + 7.sqrt(2)	7.0 - 2.0.sqrt(2) 13.0 - 6.0.sqrt(2)	-11.0 + 9.0.sqrt(2) -25.0 + 19.0.sqrt(2)	29.0 - 20.0.sqrt(2)
7 + 2.sqrt(2)	-3.0 + 5.0.sqrt(2)	13.0 - 8.0.sqrt(2)	63.0 - 44.0.sqrt(2) -29.0 + 21.0.sqrt(2)
1 + 8.sqrt(2)	15.0 - 7.0.sqrt(2)	-29.0 + 22.0.sqrt(2)	73.0 - 51.0.sqrt(2)
9 + 1.sqrt(2)	-7.0 + 8.0.sqrt(2)	23.0 - 15.0.sqrt(2)	-53.0 + 38.0.sqrt(2)
7 + 3.sqrt(2)	-1.0 + 4.0.sqrt(2)	9.0 - 5.0.sqrt(2)	-19.0 + 14.0.sqrt(2)
3 + 7.sqrt(2)	11.0 - 4.0.sqrt(2)	-19.0 + 15.0.sqrt(2)	49.0 - 34.0.sqrt(2)
1 + 9.sqrt(2)	17.0 - 8.0.sqrt(2)	-33.0 + 25.0.sqrt(2)	83.0 - 58.0.sqrt(2)
11 + 0.sqrt(2) 9 + 2.sqrt(2)	-11.0 + 11.0.sqrt(2) -5.0 + 7.0.sqrt(2)	33.0 - 22.0.sqrt(2) 19.0 - 12.0.sqrt(2)	-77.0 + 55.0.sqrt(2)
5 + 6.sqrt(2)	7.0 - 1.0.sqrt(2)	-9.0 + 8.0.sqrt(2)	-43.0 + 31.0.sqrt(2) 25.0 - 17.0.sqrt(2)
3 + 8.sqrt(2)	13.0 - 5.0.sqrt(2)	-23.0 + 18.0.sqrt(2)	59.0 - 41.0.sqrt(2)
1 + 10.sqrt(2)	19.0 - 9.0.sqrt(2)	-37.0 + 28.0.sqrt(2)	93.0 - 65.0.sqrt(2)
11 + 1.sqrt(2)	-9.0 + 10.0.sqrt(2)	29.0 - 19.0.sqrt(2)	-67.0 + 48.0.sqrt(2)
5 + 7.sqrt(2)	9.0 - 2.0.sqrt(2)	-13.0 + 11.0.sqrt(2)	35.0 - 24.0.sqrt(2)
1 + 11.sqrt(2)	21.0 - 10.0.sqrt(2)	-41.0 + 31.0.sqrt(2)	103.0 - 72.0.sqrt(2)
13 + 0.sqrt(2) 11 + 2.sqrt(2)	-13.0 + 13.0.sqrt(2) -7.0 + 9.0.sqrt(2)	39.0 - 26.0.sqrt(2)	-91.0 + 65.0.sqrt(2)
5 + 8.sqrt(2)	11.0 - 3.0.sqrt(2)	25.0 - 16.0.sqrt(2) -17.0 + 14.0.sqrt(2)	-57.0 + 41.0.sqrt(2) 45.0 - 31.0.sqrt(2)
3 + 10.sqrt(2)	17.0 - 7.0.sqrt(2)	-31.0 + 24.0.sqrt(2)	79.0 - 55.0.sqrt(2)
1 + 12.sqrt(2)	23.0 - 11.0.sqrt(2)	-45.0 + 34.0.sqrt(2)	113.0 - 79.0.sqrt(2)
			_ =

Illustration 2: Quotients des premiers nombres premiers par les premières puissances de $\sqrt{2}+1$

Notons, pour ce qui nous concerne, que :

$$\begin{split} &2-\sqrt{2} = (\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \text{, } 3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 \text{, } 3\sqrt{2} - 4 = (\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2 \text{, } \\ &3\sqrt{2} - 3 = 3(\sqrt{2}-1) \text{, } 5 - 3\sqrt{2} = (\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)^2 \text{, } 4 - 2\sqrt{2} = 2(2-\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3(\sqrt{2}-1) \text{, } \\ &4\sqrt{2} - 5 = (2\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^2 \text{, } 6 - 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2(\sqrt{2}-1)^2 \text{, } \\ &5\sqrt{2} - 6 = (\sqrt{2})(3+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2 \text{, } 5\sqrt{2} - 7 = (\sqrt{2}-1)^3 \text{, } 7 - 4\sqrt{2} = (2\sqrt{2}+5)(\sqrt{2}-1)^2 \text{, } \\ &8 - 5\sqrt{2} = (\sqrt{2})(-5+4\sqrt{2}) = (\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2 \text{, } \end{split}$$

$$6\sqrt{2}-8=2(3\sqrt{2}-4)=(\sqrt{2})^3(3-2\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3(\sqrt{2}-1)^2,$$

$$9-6\sqrt{2}=3(3-2\sqrt{2})=3(\sqrt{2}-1)^2,$$

$$7\sqrt{2}-9=(1+3\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2,$$

$$10-7\sqrt{2}=(\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^3,$$
 etc.

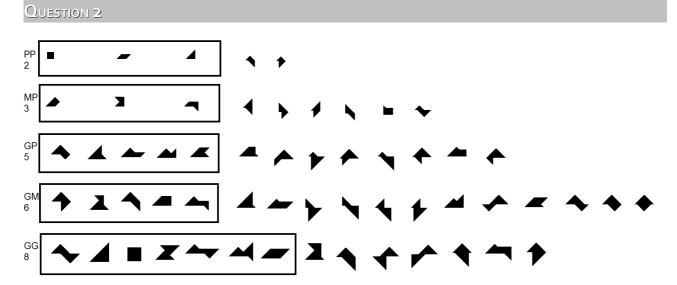


Illustration 3: Formes hétérogènes réalisées avec deux triangles du Tangram. Les formes homogènes sont encadrées

a) Voici les formes homogènes (encadrées à gauche) et hétérogènes (à droite) que l'on peut constituer. Il y en a 3+3+5+5+7=23 homogènes et 2+6+8+12+7=35 hétérogènes non-homogènes, soit 58 en tout. Le détail par type est donné dans le tableau qui suit, réparti selon le nombre de côtés.

Il y a cinq types d'assemblages PP, MP, GP, GM et GG qui totalisent respectivement

PP					
Côtés	3	4	5	6	Total
hetero	1	2	2	0	5
dont homo	1	2	0	0	3
MP					
Côtés	3	4	5	6	Total
hetero	0	2	6	1	9
dont homo	0	1	2	0	3
GP					
Côtés	3	4	5	6	Total
hetero	0	1	8	4	13
dont homo	0	1	4	0	5
GM					
Côtés	3	4	5	6	Total
hetero	0	2	6	9	17
dont homo	0	1	2	2	5
GG					
Côtés	3	4	5	6	Total
hetero	1	2	2	9	14
dont homo	1	2	0	4	7

Tableau 4: Répartitions des formes hétérogènes réalisées avec 2 triangles du Tangram

des aires de 2, 3, 5, 6 et 8 triangles. Si on observe ces valeurs, il ne se trouve que les assemblages MP et GM pour avoir leurs aires dans le rapport un sur deux, ce qui a pour conséquence que certaines formes obtenues avec GM sont semblables à celles obtenues avec MP, le facteur d'agrandissement des longueurs étant égal à $\sqrt{2}$. En fait, toutes les formes MP se trouvent dans GM (au coefficient d'agrandissement près), mais il s'en trouve huit autres, obtenues en réalisant l'assemblage par les milieux (la pièce M possède un point de référence au milieu de son hypoténuse et la pièce G en possède trois aux milieux de chacun de ses côtés). Dans le même ordre d'idée, les assemblages PP et GG ont des aires qui sont dans un rapport de un sur quatre, et donc les formes PP sont toutes agrandies d'un facteur 2 dans GG. Il se trouve neuf formes de l'assemblage GG qui ne se trouvent pas dans PP car obtenues par les milieux.

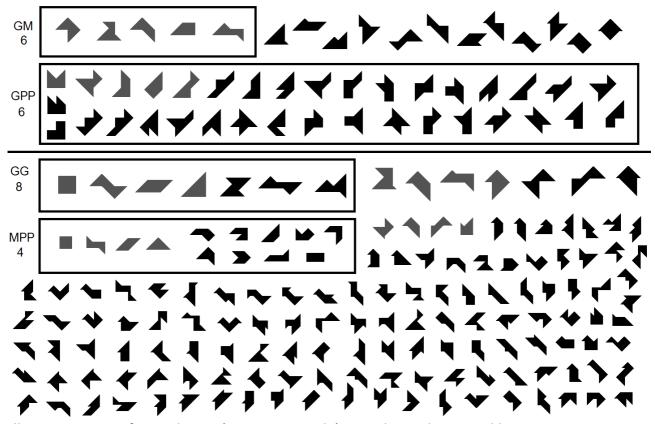


Illustration 4: Les formes homogènes sont encadrées. En haut : les assemblages GM et GPP ont 5 formes homogènes en commun (en gris). En noir, les formes hétérogènes de GM et les 30 homogènes originales de GPP. En bas : les assemblages GG et MPP ont 4 formes homogènes et 4 formes hétérogènes en commun (en gris)

b) Il n'y a que quatre formes homogènes et quatre formes hétérogènes non-homogènes en commun (au facteur d'agrandissement près) entre les assemblages GG et MPP (voir le bas de l'illustration). Les points de référence de la pièce G sont plus variés que ceux de la pièce M (il y a des points de référence aux milieux de tous les côtés de G, mais il y en a seulement un au milieu de l'hypoténuse de M).

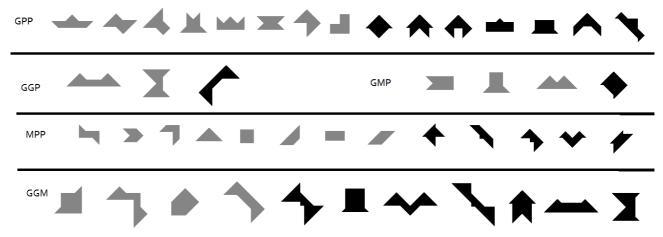


Illustration 5: Formes symétriques réalisées avec 3 triangles du jeu (formes homogènes en gris)

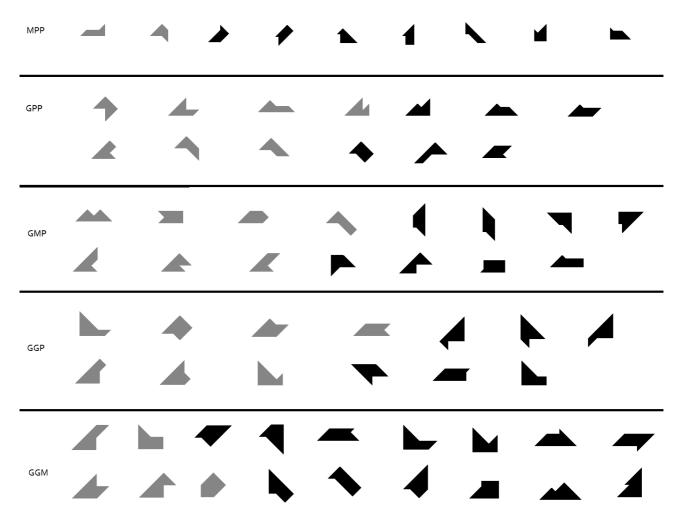


Illustration 6: Les pentagones hétérogènes réalisés par les assemblages MPP, GPP, GMP, GGP et GGM. Les formes homogènes sont en gris

Contrairement au cas précédent, tous les assemblages GM sont réalisables avec GPP, les points de références étant identiques dans les deux cas. Cela fait cinq

formes homogènes et douze non-homogènes. L'assemblage GPP ajoute aux formes communes, des formes originales due à la division de M en deux fois P. Il y a ainsi trente formes homogènes originales et 213 non-homogènes (non représentées).

	assemblage	3	4	5	6	7	8	9	Total
MPP	hetero	1	4	9	44	66	13	0	132
IVIFF	dont homo	1	4	2	6	0	0	0	13
GPP	hetero	0	2	13	49	111	75	10	248
GFF	dont homo	0	1	7	15	12	0	0	35
GMP	hetero	0	1	15	96	237	261	51	609
GIVIF	dont homo	0	1	7	18	27	10	0	63
GGP	hetero	0	1	13	46	121	253	76	433
GGF	dont homo	0	0	7	14	17	26	0	64
GGM	hetero	0	2	18	51	127	261	171	457
GGIVI	dont homo	0	2	5	8	11	22	9	48
Total	hetero	1	10	68	286	662	863	308	1879
TOLAI	dont homo	1	8	28	61	67	58	9	223

Tableau 5: Répartitions selon le nombre de côtés des formes hétérogènes réalisées avec les 5 types de triplet de triangles du jeu

c) Les assemblages homogènes de trois triangles ont été étudiés dans le corps du chapitre, mais partiellement, le propos étant davantage d'expliquer la méthode suivie pour numériser les assemblages homogènes. Voici donc des résultats plus complets concernant les assemblages hétérogènes des cinq types de triplets de triangles que l'on peut faire avec les pièces du jeu. Nous constatons qu'il y a en tout 1879 formes hétérogènes possibles contenant les 232 formes homogènes déjà mentionnées dans le corps du texte. Le nombre de côtés va généralement jusqu'à neuf pour les assemblages hétérogènes (alors que seul GGM parvient à faire des ennéagones homogènes), sauf pour MPP qui s'arrête à 8. Mais MPP compense cette faiblesse en offrant le seul triangle et quatre quadrilatères sur un total de 10.

La considération de ce tableau nous donne la réponse à la question posée dans la légende de la figure 16 : le seul ensemble de trois triangles capable de générer 78 hexagones hétérogènes-non-homogènes est GMP (tous les autres en génèrent moins de 78, formes homogènes comprises). Cet ensemble génère par ailleurs quinze pentagones dont huit sont hétérogènes non-homogènes. Évidemment, la réponse à cette question pouvait être trouvée sans ce tableau, par la seule considération des aires que l'on pouvait inférer de la figure.

Les assemblages de quatre triangles sont de trois sortes : GGMP, GGPP et GMPP. L'assemblage GGMP est celui qui a la plus grande aire puisqu'il rassemble onze triangles (4+4+2+1=11). Cet assemblage réalise 39 270 formes hétérogènes pleines dont 1169 sont homogènes. Les assemblages GGPP et GMPP rassemblent respectivement dix et huit triangles. Ils réalisent respectivement 15 433 formes et

Tangram Évolutif (solutions)

17 467 formes hétérogènes pleines dont 648 et 446 sont homogènes (l'illustration ci-dessous ne montre que les pentagones).

	Côtés	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total	Sym
CMDD	hetero	1	5	19	155	857	3 264	6 054	5 480	1 545	87	17467	58
GMPP	dont homo	1	5	6	39	104	158	123	10	0	0	446	24
CCNAD	hetero	О	О	26	212	1064	3 819	8 873	14 182	9 556	1 538	39270	20
GGMP	dont homo	0	0	10	53	121	265	314	339	67	0	1169	7
GGPP	hetero	О	2	24	137	564	1 949	4 063	5 7 ⁸ 5	2 620	289	15433	160
GGFF	dont homo	0	2	8	37	104	190	200	107	0	0	648	60
Total	hetero	1	7	69	504	2485	9032	18990	25447	13721	1914	72170	238
Total	dont homo	1	7	24	129	329	613	637	456	67	0	2263	91

Tableau 6: Répartitions selon le nombre de côtés des formes hétérogènes réalisées avec les 3 types de quadruplet de triangles du jeu

On pourrait, pour compléter davantage ce travail, enrichir la description de ces formes à l'aide de paramètres variés tels que ceux qui figurent dans ce chapitre (nombre d'angles rentrants, aire du rectangle minimum contenant la forme, éléments de symétrie) ou d'autres que nous abordons progressivement dans cet ouvrage. Nous avons juste mentionné les nombres de formes symétriques en omettant de détailler les éléments de symétrie et en illustrant ces nombres par les figures symétriques homogènes correspondantes. On peut s'étonner de la disparité du nombre total de formes et du nombre de formes symétriques. GGPP reconstitue moins de formes que les autres et c'est lui qui, de loin, dépasse les autres en matière de figures symétriques. Réciproquement, GGMP est le plus prolifique en formes et le plus pauvre en formes symétriques. Une des raisons de cette distribution paradoxale tient dans le fait que GGMP est le seul à avoir une aire impaire (exprimée en triangles) et que les formes constituées d'un nombre impair de triangles ne peuvent pas former de figure ayant un centre de symétrie (GGPP étant constitué de dix triangles, peut en reconstituer et il ne s'en prive pas puisque 39 formes sur 60 ont un centre de symétrie).

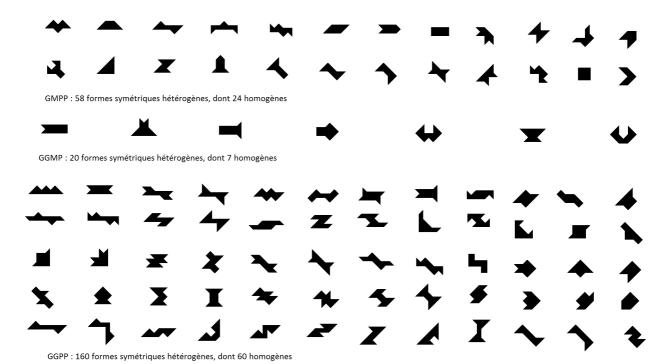


Illustration 7: Formes symétriques homogènes réalisées avec 4 triangles du jeu

QUESTION 3

a) La génération de ces formes ne semble pas si facile que celle des tangrams en étoile et mérite une petite analyse préliminaire. Comment doit se présenter ce segment central? Notre illustration en montre un séparant deux pièces adjacentes (le parallélogramme et un petit triangle) avec, à ces deux extrémités, deux groupes de pièces qui assurent un enfouissement total de ce segment au sein de la forme. Doit-on toujours avoir ainsi, un groupe de deux pièces central qui réalise ce segment de longueur 1, et les autres pièces qui se divisent en deux groupes assurant la fermeture de l'ensemble ? Si le segment unitaire central est réalisé autrement, il va former un segment plus long que l'unité, et ceci est rejeté par la contrainte

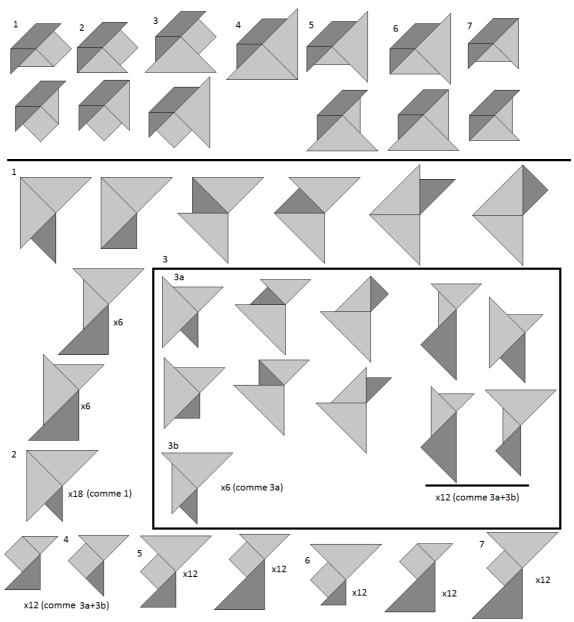


Illustration 8: Les assemblages de deux et trois pièces qu'il faut adjoindre au bloc central pour enfouir le segment unitaire

essentielle de notre collection. On ne peut en particulier avoir un segment de longueur 1 qui se prolonge, sans changer de direction, sur une plus grande longueur. On ne peut pas non plus avoir un segment de longueur $\sqrt{2}$ (c'est le sujet de la question suivante).

Dans ces conditions, il est facile de faire la liste des pièces pouvant s'accoler pour former ce segment central. Avec les mêmes conventions de notation que dans la question 2 (G: Grand triangle, M: Moyen triangle, P: Petit triangle, Q: parallélogramme, K: carré), on a seulement quatre sortes d'assemblages : PP, PQ, PK, QK qui conduisent à six formes différentes.

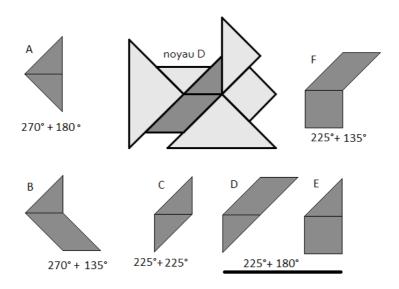


Illustration 9: Les 6 différents noyaux pouvant constituer une crypte de longueur 1

Examinons cela sur une figure. Nous y avons ordonné les formes selon la valeur du plus grand angle externe aux extrémités du segment unitaire qui ne prend que deux valeurs : 270 et 225°. Nous les avons ensuite classées selon la valeur de l'autre angle externe. Nous avons ainsi cinq couples d'angles : 270-180 (assemblage PP noté A), 270-135 (assemblage PQ noté B), 225-225 (assemblage PP noté C), 225-180 (les assemblages PQ noté D et PK noté E) et enfin 225-135 (assemblage QK noté F). Il nous reste à lister, pour un assemblage donné, les différentes façons de réaliser les deux angles. Pour la figure de notre illustration, par exemple, l'assemblage utilisé est le D et le couple des angles est 225-180. Pour cet assemblage, les pièces restantes sont G, G, M, K et P. On peut faire 225° avec trois pièces en assemblant deux angles droits et un angle de 45° et, avec les pièces disponibles, on ne peut pas faire autrement. Pour l'autre angle, les deux pièces restantes doivent mettre en commun leurs angles droits. On peut répartir les cinq pièces en sept couples comme on peut le voir sur notre figure. Ces couples ont été numérotés 1 : GGM – KP, 2 : GGP – KM, 3 : GMP – GK, 4 : KMP – GG, 5 : GKM – GP, 6 : GKP – GM, 7 : GGK – MP.

Pour obtenir toutes les variantes, il faut disposer les trois pièces de toutes les façons possibles afin de réaliser le premier angle (225°) et les deux pièces pour réaliser le deuxième angle (180°). Pour ce dernier, il y a treize façons de réaliser les assemblages, comme nous le voyons sur la figure. Pour l'angle de 225°, les possibilités sont plus nombreuses, du fait du nombre de pièces plus important (3 au lieu de 2), mais aussi de l'angle de 45° qui conduit à envisager les réflexions du triangle qui donnent cet angle ainsi que leur place au sein des deux autres pièces. Du fait de la dissymétrie de l'assemblage central, chacun des arrangements peut être retourné par réflexion pour remplir l'espace angulaire. Pour cette première approche de la question, nous n'avons pas tenu compte de la contrainte mentionnée plus haut : « on ne peut avoir un segment de longueur 1 qui se prolonge, sans changer de direction, sur une plus grande longueur ». Nous rectifierons ultérieurement la surestimation que nous allons ainsi obtenir.

Notre dénombrement manuel est expliqué sur la figure : pour l'assemblage 1 nous avons six variantes où c'est P qui offre son angle de 45°et six où c'est G mais, dans ce cas, l'autre G et P peuvent être intervertis, cela fait donc 18 variantes à multiplier par les deux façons d'assembler KP, donc 36 assemblages de type 1. Pour les assemblages de type 2, il y en a aussi 36. Les groupes de trois pièces des assemblages de type 3 sont déjà 36 (3×12), cela est doublé avec les deux façons de disposer les deux dernières pièces, donc il y a 72 formes de type 3. Pour les assemblages de type 4, il y en a 24 en tout (une seule dispositions des deux G et 2×12). Les assemblages de type 5 et de type 6 sont au nombre de 48 chacun, et les assemblages de type 7 sont 24. Cela fait donc 36+36+72+24+48+48+24=4×72=294 formes différentes, seulement pour le bloc central D. Non seulement notre raisonnement « manuel » n'est pas à l'abri d'une erreur, et il faudrait aussi y regarder de plus près pour identifier d'éventuels doublons (des pièces différentes qui conduisent à une silhouette extérieure identique que l'on ne doit comptabiliser qu'une fois), mais il faut faire le même travail pour les cinq autres blocs centraux...

C'est là que l'on comprend tout l'intérêt d'avoir consacré un peu de temps à l'écriture d'un programme : c'est un peu long, mais au moins il peut balayer toutes les éventualités et détecter facilement les doublons (avec une forme canonique). Notre raisonnement nous a tout de même permis de comprendre la démarche à adopter pour écrire l'algorithme de résolution de cette question ; il nous fournit également des éléments de réponse pour le tester (car une erreur dans l'algorithme, où toutes les formes sont codifiées par des nombres, est plus difficile à détecter qu'une erreur dans une image). Pour pousser ce raisonnement plus loin, car cette question reste faisable en procédant avec la méthode indiquée, nous avons déterminé les nombres de formes pour les six sortes d'assemblage. Voici nos valeurs brutes, dans lesquelles nous avons très certainement des doublons et aussi des

Question 3

formes ne respectant pas totalement la contrainte d'enfouissement.

А	В	С	D	E	F
270-180	270-135	225-225	225-180	225-180	225-135
PP	PQ	PP	PQ	PK	QK
240	144	216	294	1224	720

La programmation d'un algorithme calculant ces formes nous conduit assez rapidement à un résultat bien supérieur à celui que nous venons d'estimer. Au lieu de trouver un total proche des 2 838 formes prévues (nombre duquel il fallait encore retirer les doublons et les formes mal contraintes), nous arrivons à 10 926! Bien sûr, la différence peut venir d'une erreur dans l'algorithme, mais en observant les figures obtenues, nous réalisons que nous avions oublié de comptabiliser certains types de formes. L'illustration suivante nous en donne un aperçu. Nous voyons que certaines pièces se sont insérées au segment intérieur par le milieu d'un côté. Les milieux des côtés des grands triangles et de l'hypoténuse du moyen contiennent en effet un point de référence qui peut servir aux assemblages hétérogènes. La prise en compte de ce type d'assemblage fait quadrupler le nombre des combinaisons car, en ajoutant ces angles de 180°, on est conduit à utiliser beaucoup d'angles de 45° qui sont la principale source de richesse combinatoire.

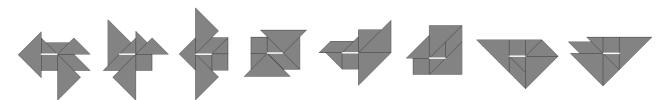


Illustration 10: Quelques formes englobant un segment de longueur 1 mais ne respectant pas la contrainte forte de l'enfouissement (non prolongement du segment enfoui)

Puisque nous avons obtenu les codes de ces formes, nous pouvons en détailler les caractéristiques. Tout d'abord, rectifions les nombres avancés à l'issue de notre analyse manuelle. Nous donnons les résultats bruts (avant l'expurgation des doublons qui se fait à la dernière étape, par fusion des six fichiers) qui ont un total de 11 443 formes. On en conclut qu'il y a 517 doublons qui ont été éliminés.

А	В	С	D	E	F
740	1242	625	1623	5231	1982

Parmi ces formes, 319 sont homogènes, et on trouve même une forme convexe (à droite de notre illustration 162)! Les formes symétriques sont présentes,

contrairement à ce qui se passe pour les assemblages en étoile, et on en trouve 22 dont une seule a deux axes et une autre un centre d'ordre 2.

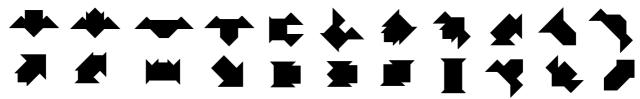


Illustration 11: Les formes symétriques englobant un segment de longueur 1

Maintenant, nous pouvons adjoindre la contrainte plus forte d'enfouissement total : il ne doit y avoir aucun segment qui prolonge vers l'extérieur le segment enfoui de longueur unité. Un peu comme pour la crypte funéraire d'une pyramide égyptienne, il faut que ce segment soit dérobé au regard de l'extérieur... Notre programme modifié fournit alors les valeurs corrigées brutes : 2 745 formes. Après l'expurgation, il ne reste plus que 2 655 formes (90 doublons ont été exclus), ce qui montre que 8 271 formes sur les 10 926 trouvées précédemment ne respectaient pas cette contrainte forte de l'enfouissement.

А	В	C	D	E	F
192	392	185	442	1424	110

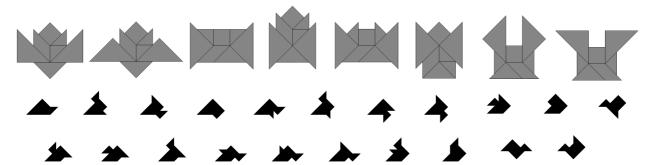


Illustration 12: Les 8 cryptes symétriques et les 21 formes homogènes respectant la contrainte forte d'enfouissement d'un segment unité

Parmi ces 2 655 cryptes, 21 sont homogènes. On ne retrouve pas la forme convexe, le pentagone de notre illustration ne respectant pas la contrainte forte (comme d'ailleurs toutes les figures représentées), et il n'y a aucune autre façon de le réaliser qui respecte cette contrainte. Il n'y a plus que huit formes symétriques présentes, dont la forme à deux axes; celle possédant un centre d'ordre 2 n'existant pas en version cryptée a disparu de la liste. Le nombre maximum de côtés est seize.

b) Après avoir fait tout ce travail (recherche méthodologique et programmation), il serait regrettable de ne pas répondre à cette question qui est très voisine de la précédente. Il faut bien sûr adapter le programme, à commencer par le noyau

central qui réalise le segment de longueur $\sqrt{2}$ à enfouir. Il y a cette fois, cinq types d'assemblages : PP, PM, PQ et deux MQ différents.

G	Н	I	J	K
270-270	270-225	270-180	225-180	270-135
PP	PM	PQ	MQ	MQ
347	456	837	264	262

Il n'y a que 2 043 formes présentant une crypte de longueur $\sqrt{2}$ complètement enfouie (123 doublons ont été éliminés). Parmi ces formes, 253 sont homogènes. Comparé aux cryptes de longueur unité où les formes homogènes étaient assez rares (21 sur 2 655, soit 1 pour 126 environ), il y en a ici une proportion importante (un sur huit environ). On trouve cette fois dix formes symétriques ; le nombre maximum de côtés est quinze.

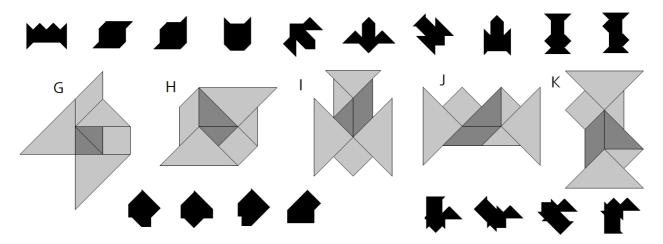


Illustration 13: Les 5 types d'assemblages conduisant à des cryptes de longueur $\sqrt{2}$, les formes symétriques, celles les plus denses et celles qui ont le plus de côtés

Tant que nous y sommes, par curiosité, nous avons voulu chercher les cryptes de longueur 2. Nous nous sommes restreint à celles dont le segment de longueur 2 est réalisé par l'assemblage de deux pièces uniquement, car il est aussi possible d'en assembler trois ou quatre à cette fin, mais cela complique notre approche. Il s'ensuit que seulement trois types de noyau central sont possibles : GM et deux noyaux GG.

Les formes produites selon ces contraintes sont au nombre de 450, dont le détail est dans le tableau ci-dessous. Ce qui est remarquable déjà, sans parler du faible nombre de ces formes, est qu'il n'y a pas de doublon à supprimer : chacune de ces 450 formes ne peut réaliser qu'un seule forme de crypte. Ces deux caractéristiques premières indiquent la grande difficulté qu'ont les cinq autres pièces à réaliser

l'enfouissage correct de ce long segment.

L	М	N
270-225	270-180	225-225
GM	GG	GG
322	61	67

D'autres caractéristiques remarquables : aucune forme homogène pour ces longues cryptes et aucune forme symétrique. Pour donner une idée des formes obtenues, voici les 38 formes ayant une convexité comprise entre 3 et 4. Nous avons aussi montré sur notre illustration chacun des types de noyau.

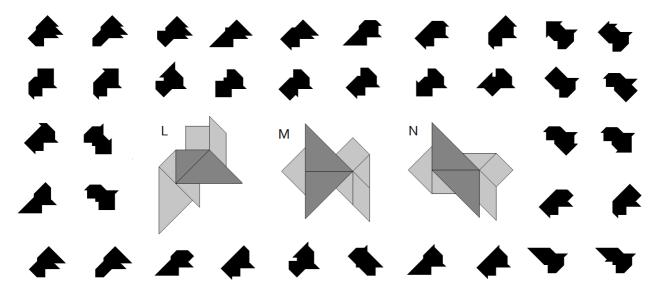


Illustration 14: Segments de longueur 2 enfouis dans les formes de convexité minimale

Dressons pour finir le tableau récapitulatif des ces quatre sortes de tangrams construits autour d'une partie centrale encryptée. On a considéré que la crypte est constituée par un segment (de longueur 0, 1, $\sqrt{2}$ ou 2), ce qui est une réduction : le point central des tangrams en étoile peut à la rigueur être vu comme un segment de longueur 0, mais les cryptes de longueur 2 sont constituées de deux segments unitaires. En donnant les répartitions de ces formes selon le nombre de côtés, notre attention est attirée par l'existence de pentagones et d'hexagones enfouissant des segments de longueur 1 ou $\sqrt{2}$. Il n'y en a que dix-neuf. Sauriez-vous y retrouver la crypte ?

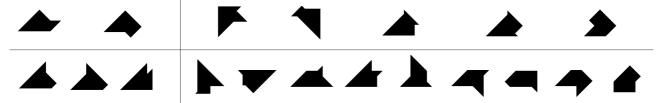


Illustration 15: Les 19 pentagones (à gauche) et hexagones (à droite) en étoile dont les cryptes sont des segments de longueur 1 (en haut) ou $\sqrt{2}$ (en bas)

Tangrams en étoile													
nbre de côtés	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
Segment o	0	0	2	11	37	151	332	673	972	1355	1039	948	5 520
Segment 1	2	5	10	53	97	232	398	530	739	428	161	0	2 655
segment sqrt2	3	9	40	83	239	360	542	425	290	48	4	0	2 043
Segment 2	0	0	0	0	5	32	66	121	140	70	16	0	450
	5	14	52	147	378	775	1 338	1749	2 141	1 901	1220	948	10 668

Tableau 7: Les 4 sortes de cryptes contenues dans les tangrams en étoile, selon la nature de l'élément central (un point ou un segment) et le nombre de côtés

QUESTION 4

a) Cette question n'a pas un rapport direct avec l'étude du mini-Tangram puisqu'on y manipule les sept pièces du jeu. Il s'agit de se familiariser avec les assemblages hétérogènes et les longueurs de segment qu'ils génèrent.

Lorsqu'on range les pièces du Tangram dans une boîte carrée de côté $2\sqrt{2}$, il n'y a plus d'espace libre. Dans la boîte carrée suivante, celle de côté 3, il y a de la place pour un trou ou une baie de deux triangles d'aire (1 unité carrée). Ce trou a une aire fixée mais son périmètre est variable. Le premier tangram de notre illustration est un assemblage homogène de périmètre $2+2\sqrt{2}\approx4.82843$. Celui du dessous est hétérogène, son périmètre est plus grand puisqu'il vaut $4+2\sqrt{2}\approx6.82843$. La $3^{\rm ème}$ forme est un assemblage propre (l'intérieur reste connecté par des portions de bords) de périmètre $4+4\sqrt{2}\approx9.657$. Le dernier assemblage montré dans cette boîte est impropre (intérieur non connexe, seul le bord peut être connecté en faisant tourner légèrement le parallélogramme comme le montre l'illustration), mais il couvre les bords.

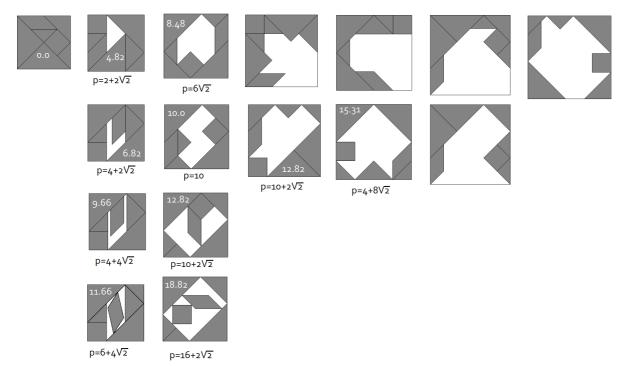


Illustration 16: Recherche des rangements du Tangram adhérant au maximum aux bords d'une boîte carrée et détermination des périmètres du trou. Dans certains cas illustrés, on n'y parvient pas sans sortir des contraintes de l'assemblage hétérogène (4ème et 5ème boîte)

Des trous plus grands sont possibles lorsqu'on utilise la $3^{\text{ème}}$ boîte carrée qui a pour côté $2+\sqrt{2}\approx 3.414$. Les trous ont alors pour aire $(2+\sqrt{2})^2-8=4\sqrt{2}-2\approx 3.657$, soit environ 7.3137 petits triangles. Notre illustration montre une forme hétérogène de périmètre maximum, égal à $6\sqrt{2}\approx 8.485$, puis trois formes impropres. Celle du bas a un périmètre de $16+2\sqrt{2}\approx 18.828$. La connexion des bords pouvant être réalisée

ici sans faire tourner le parallélogramme. Les bords des deux boîtes suivantes peuvent être couverts par les pièces si on accepte les assemblages impropres. Dans ce cas, le périmètre maximum d'une de ces formes connexes (lorsque les pièces ont toutes au moins un point de contact, on parle aussi de formes générales) est $4+2\sqrt{2}\approx15.314$.

Notre recherche n'ayant pas été menée de façon exhaustive (notre programme de génération des formes hétérogènes ne générant pas encore les formes ayant une baie ou un trou), on ne peut affirmer que ces réponses sont définitives. Il est cependant possible d'approfondir le sujet par des raisonnements, en envisageant les différents cas. Si on se limite aux assemblages hétérogènes, les grands triangles ne peuvent être disposés que symétriquement par rapport au centre du carré, les cathètes sur les bords du carré et les hypoténuses à l'intérieur de celui-ci. Cela laisse quatre segments des bords de la boîte carrée, chacun de longueur $\sqrt{2}$, à être couverts par les bords de trois ou quatre des pièces restantes. Si une de ces pièces est le triangle moyen, il peut couvrir deux de ces segments consécutifs, comme sur notre illustration (forme du haut de la 2ème colonne). Seul le carré ne peut occuper cette fonction et doit s'employer à créer les liaisons nécessaires entre les pièces. Le parallélogramme ne peut se mettre que d'une seule façon (aux rotations de la figure près), et les deux petits triangles ne peuvent se disposer l'un à côté de l'autre, sauf si l'un d'eux tourne son hypoténuse vers l'intérieur. Il n'y a par conséquent que trois formes possibles et le périmètre est à chaque fois de $6\sqrt{2}$.

La 4^{ème} boîte carrée, celle qui a pour côté $_{1+2}\sqrt{_2}\approx_{3.828}$, ne peut pas être remplie par un assemblage hétérogène. Les trous auraient alors eu pour aire $(_{1+2}\sqrt{_2})^2-8=_{1+4}\sqrt{_2}\approx_{6.657}$, soit environ 13.314 petits triangles. Les grands triangles ne peuvent être disposés qu'en présentant leur hypoténuse sur les bords de la boîte, constituant les parties irrationnelles de deux de ses côtés. Pour constituer les parties irrationnelles des deux autres côtés, il faut mobiliser les côtés irrationnels de trois (si l'on utilise conjointement les deux petits côtés du triangle moyen) ou quatre des pièces restantes. Cela ne laisse plus aucune marge de manœuvre pour assurer ensuite, d'une part le complément rationnel des longueurs de côtés (ils mesurent $_{1+2}\sqrt{_2}$ et nécessitent donc chacun trois segments, un de longueur 1 et deux de longueur $\sqrt{_2}$), et d'autre part le ciment entre les pièces pour que toutes réalisent ensemble une forme unique selon la règle hétérogène. C'est cette même dernière raison qui empêche un remplissage hétérogène des bords de la $_{5}$ boîte carrée qui mesure quatre unités rationnelles de côté.

Pour les assemblages impropres maximums, le raisonnement est encore plus simple. Il suffit de faire le compte des segments disponibles sans tenir compte des connections par les bords. Les bords de la $6^{\text{ème}}$ boîte ne peuvent être couvert de

cette façon car il faut douze segments irrationnels alors que le jeu ne peut en fournir que dix. La $7^{\rm ème}$ boîte (non représentée dans la question) a pour côté $3+\sqrt{2}\approx 4.414$. Pour couvrir ses bords, il faudrait disposer de douze segments unités et quatre segments irrationnels, ce qui est impossible. Notre essai montre qu'en sollicitant au mieux les triangles, ils peuvent apporter deux de leurs bords à la réalisation d'un coin de la boîte. Comme il n'y a que quatre coins, les trois autres pièces ne peuvent contribuer qu'avec un seul de leurs côtés. Au mieux, cela fait donc treize segments (4 pour les deux grand triangles dans les coins, 2 pour les autres coins et 3 pour les autres pièces) à disposer le long des bords alors qu'il en faudrait quatorze pour couvrir complètement les bords.

b) Nous pouvons déjà commencer par les plus petites boîtes, sachant que les trois premières, se remplissant selon le mode plus exigeant étudié à la question a), sont forcément des solutions à cette nouvelle question. Afin de donner d'autres solutions qui n'adhèrent pas complètement aux côtés de la boîte, nous pouvons exhiber des solutions pleines (sans baie). Ce n'est pas très difficile de trouver des exemples de formes remplissant les six premières boîtes. Quatre de ces boîtes ont des dimensions qui les rendent habitables par des formes homogènes (voir à ce sujet le chapitre 8).

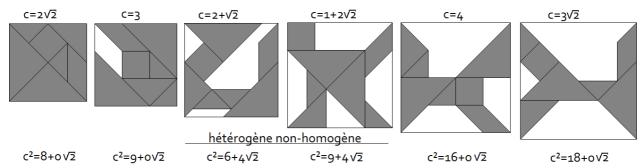


Illustration 17: Les quatre boîtes carrées enveloppant les tangrams homogènes et deux enveloppant des tangrams hétérogènes-non-homogènes

Nous pouvons continuer ainsi manuellement, la tâche étant de plus en plus difficile au fur et à mesure que la dimension de la boîte augmente. À un moment, on se demandera s'il est possible d'aller plus loin, de trouver une boîte plus grande qui enveloppe un tangram hétérogène. Un programme qui examine toutes les formes hétérogènes pleines sur ce critère saura nous donner une réponse exhaustive. Il suffit de disposer de l'enveloppe convexe et de tester si elle forme un carré. Nous avons pour cela utilisé des expressions exactes, en déterminant les coefficients entiers des carrés des longueurs. Cela permet de tester les angles droits (avec le théorème de Pythagore) et les égalités de longueurs. Voici nos résultats qui ne concernent que les tangrams hétérogènes pleins. Les résultats concernant spécifiquement les formes homogènes (pleines ou trouées) sont données au chapitre 8.

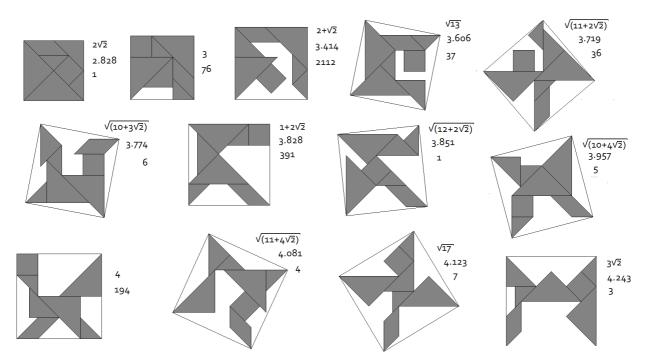


Illustration 18: Les 13 enveloppes convexes carrées possibles pour les tangrams hétérogènes

Il se trouve 2 873 formes hétérogènes pleines enveloppées dans treize carrés de dimensions distinctes allant de $2\sqrt{2}\approx2.828$ à $3\sqrt{2}\approx4.243$. Les dimensions des côtés de ces treize carrés sont parfois de la forme « habituelle » $a+b\sqrt{2}$, avec a et b entiers : ce sont les six boîtes que nous avons illustrées par des exemples, sans l'aide du programme. Pour les sept autres dimensions, les valeurs exactes sont des racines de cette formes habituelles : $\sqrt{11+2\sqrt{2}}\approx3.719$, $\sqrt{10+3\sqrt{2}}\approx3.774$, $\sqrt{12+2\sqrt{2}}\approx3.851$, $\sqrt{10+4\sqrt{2}}\approx3.957$ et $\sqrt{11+4\sqrt{2}}\approx4.081$, ou bien des racines d'un autre entier que 2 : $\sqrt{13}\approx3.606$ et $\sqrt{17}\approx4.123$. Les effectifs sont toujours très faibles (voir illustration) sauf pour la dimension $2+\sqrt{2}\approx3.414$ qui contient 2 112

tangrams hétérogènes-non-homogènes et aucun d'homogène. La catégorie suivante ne contient déjà plus que 391 formes hétérogènes-non-homogènes (aucun homogène non plus) : il s'agit de la dimension $1+2\sqrt{2}\approx 3.828$. Dans la $3^{\text{ème}}$ catégorie, celle de côté 4, on rencontre 42 formes homogènes et 152 hétérogènes-non-homogènes. Les dix autres catégories ne concernent plus que 176 tangrams hétérogènes, dont 23 seulement sont homogènes.

Le dernier point que nous avons exploré concernant ces formes d'enveloppes carrées est le nombre de parties rentrantes, dans le sens

parties rentrantes	total	homogènes
0	1	1
1	119	3
2	767	16
3	1406	18
4	555	27
5	25	0
	2 873	65

Tableau 8: répartition des formes hétérogènes ayant une enveloppe carrée, selon le nombre de parties rentrantes

que nous définirons plus précisément à la question 9. Disons qu'il s'agit de compter les entailles faites dans l'enveloppe carrée. Sur notre illustration, plus haut, nous avons des formes à 0, 1, 3 ou 4 parties rentrantes. Sur les treize exemples de notre illustration, la plus grande majorité des formes sont des formes à quatre parties rentrantes (8 sur 13). Voici la répartition des 2 873 formes pleines selon ce critère. Il y a donc davantage de formes ayant trois parties rentrantes, ou même 2, avant les formes qui en ont 4. Nous avons illustré partiellement les formes extrêmes, donnant toutes les formes ayant cinq parties rentrantes, toutes celles qui sont hétérogènes-non-homogènes avec une partie rentrante de côté 3 (il y en a 29) et douze parmi les 87 formes hétérogènes-non-homogènes avec une partie rentrante de côté $2+\sqrt{2}\approx 3.414$.

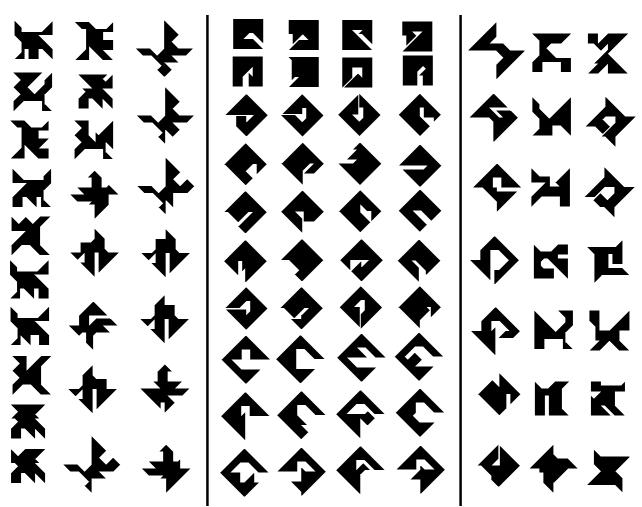


Illustration 19: Quelques formes hétérogènes d'enveloppes carrées : à gauche celles qui ont 5 parties rentrantes, au centre celles qui en ont une (non exhaustif), à droite quelques formes ayant 2, 3 ou 4 parties rentrantes

QUESTION 5

Le maximum de la convexité pour laquelle on rencontre des formes ayant une convexité sur quadrillage égale à la convexité réelle est 14. Il n'existe qu'une forme de convexité 14 ayant cette propriété. Ensuite, on rencontre une forme ayant cette propriété pour une convexité de 13, puis onze formes de convexité 12, etc. (voir notre premier tableau et aussi l'illustration). Au total on trouve 985 formes de ce type dont les convexités s'étalent entre zéro et 14.

ensemble des 5 triangles				polyabolos			côtés				enveloppe			
cvxréelle=cvx	nombre	dont plein	dont baie	dont sym	aire	Cvx	3	4	5	6	7	8	nbr	Pourcent.
0	9	9	0	8	12	14	0	6	1	1	1	0	9	64,3%
1	19	17	2	1	13	7	0	0	14	5	0	0	4	57,1%
2	124	104	20	6	14	16	0	48	68	8	0	0	8	50,0%
3	113	110	3	1	15	11	0	16	70	18	9	0	9	81,8%
4	200	192	8	15	16	20	4	131	15	50	0	0	15	75,0%
5	61	60	1	1	17	9	0	8	37	9	7	0	5	55 , 6%
6	166	166	О	1	18	17	1	4	29	132	0	0	8	47,1%
7	103	103	О	1	19	13	0	0	51	52	0	0	5	38 , 5%
8	86	86	О	5	20	22	0	3	62	21	0	0	8	36,4%
9	25	25	О	0	21	12	0	1	5	7	12	0	6	50,0%
10	54	54	О	5	22	25	0	0	38	16	0	0	5	20,0%
11	12	12	О	0	23	18	0	0	10	2	0	0	3	16,7%
12	11	11	О	4	24	27	0	6	2	3	0	0	4	14,8%
13	1	1	О	0	25	14	0	0	1	0	0	0	1	7,1%
14	1	1	О	0	26	24	0	0	1	0	0	0	1	4,2%
Total	985	951	34	48		249							91	

Tableau 9: Répartition des formes homogènes obtenues avec les 5 triangles réalisant l'égalité entre les 2 convexités (sur quadrillage et réelle) selon la valeur de la convexité, le type et le nombre de côtés de l'enveloppe convexe. Les colonnes « polyabolos » indique le nombre de formes convexes pour l'aire correspondante. Les colonnes « enveloppe» indique le nombre de formes pour les enveloppes convexes

Ce qui est assez étonnant est le fait que seulement la moitié des enveloppes convexes possibles (polyabolos convexes ayant l'aire correspondante) est utilisée (les vrais pourcentages sont indiqués dans le tableau, ils sont globalement décroissants lorsque la convexité augmente). Certaines formes convexes d'enveloppes ne conviennent pas du fait des contraintes combinatoires liées à la forme et à l'encombrement des pièces du jeu.

On remarque que plus la convexité augmente et plus diminue la proportion des formes ayant cette propriété par rapport à celles de même convexité. On passe ainsi de 100% des formes ayant cette propriété pour les formes convexes (convexité o) et les formes de convexité 1 à environ 0,1% des formes pour les formes de convexité 13 et 14 (voir le deuxième tableau et la dernière illustration qui donne aussi les formes convexes non utilisées). La moyenne de la convexité sur quadrillage est égale à 8.25, celle de la convexité réelle est 7.1 et la convexité des formes

réalisant l'égalité des deux convexités a pour moyenne 5.2.

Pour les tangrams homogènes (voir chapitre 8), les formes ayant cette propriété sont vingt fois plus nombreuses (il y en a 273 838) et les convexités s'étalent jusqu'à 24. On retrouve dans les distributions de ces formes, à une plus grande échelle et avec davantage de nuances, les mêmes caractéristiques que celles que nous venons d'évoquer.

cvxréelle=cvx	CVX	cvx réelle	cvx=cvx réelle	Pourcent.
0	9	9	9	100%
1	19	33	19	100%
2	138	256	124	90%
3	228	408	113	50%
4	352	964	200	57%
5	337	1363	61	18%
6	933	2391	166	18%
7	1070	1973	103	10%
8	1153	2167	86	7%
9	1448	1447	25	2%
10	1505	1060	54	4%
11	1424	496	12	1%
12	1017	286	11	1%
13	801	91	1	0,1%
14	1021	25	1	0,1%
15	659	12	0	ο%
16	306	0	0	ο%
17	120	0	0	ο%
18	223	0	0	ο%
19	137	0	0	ο%
20	30	0	0	ο%
21	38	0	0	ο%
22	4	0	0	ο%
23	9	0	0	0%
	12 981	12 981	985	

Tableau 10: Répartition des formes homogènes obtenues avec les 5 triangles selon la valeur des convexités (sur quadrillage et réelle). La colonne grise répartit les formes réalisant l'égalité de ces 2 types de convexité et, à droite, on voit le pourcentage de l'effectif total que cela représente

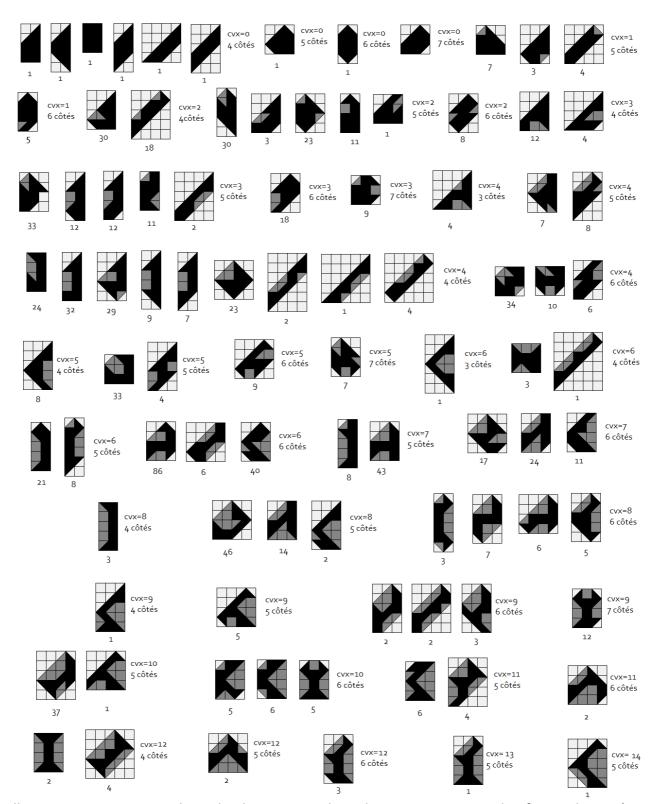


Illustration 20: Un exemplaire de chaque type d'enveloppe convexe pour les formes homogènes obtenues avec le jeu des 5 triangles qui ont une convexité réelle égale à la convexité sur quadrillage. Sous les formes, sont écrits les nombres de fois où l'enveloppe est utilisée (voir aussi la partie de droite du tableau 10)

Tangram Évolutif (solutions)

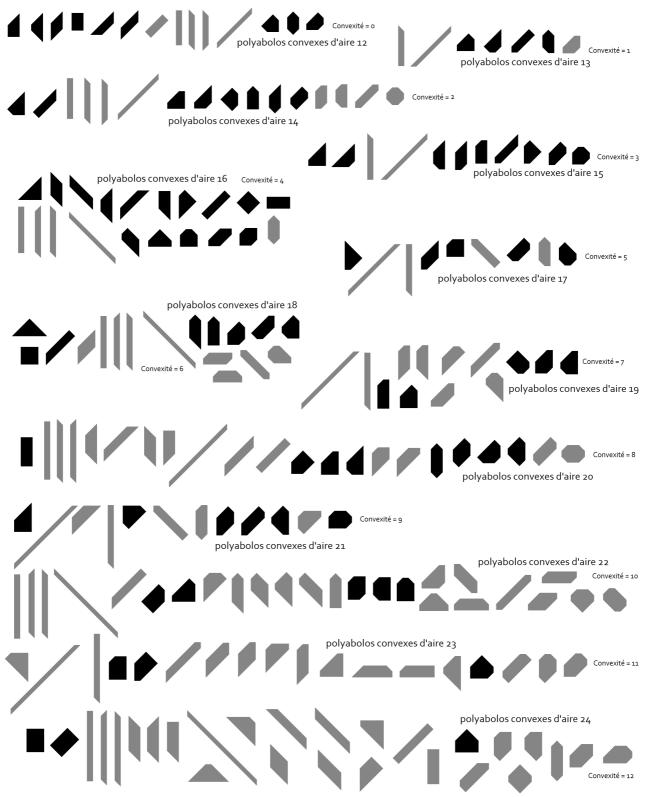


Illustration 21: Certains polyabolos convexes d'aire comprise entre 12 et 26 servent d'enveloppe convexe aux formes homogènes réalisées avec le jeu des 5 triangles pour lesquelles les convexités (réelles et sur quadrillage) sont égales. Les formes d'enveloppes utilisées sont en noir (pour les convexités 13 et 14, non représentées, 1 seule forme d'enveloppe est utilisée)

QUESTION 6

Voici les 138 formes à trou ou à baie ayant un élément de symétrie. Pour les cinquante formes ayant un trou, la répartition est la suivante : trois formes à huit côtés dont deux ayant un axe, une forme à neuf côtés ayant un axe, six formes à dix côtés ayant un axe, trois formes à onze côtés ayant un axe, seize formes à douze côtés dont 11 ayant un axe, 4 formes à treize côtés ayant un axe, quatorze formes à quatorze côtés dont 9 ayant un axe, aucune forme à quinze côtés et trois formes à seize côtés ayant un axe. Au total, il n'y a donc que onze formes ayant un centre de symétrie parmi les tangrams à trou symétriques dont la magnifique forme en « étoile de ninja », seule forme (avec le carré plein) ayant un centre d'ordre 4 réalisable avec le Tangram.

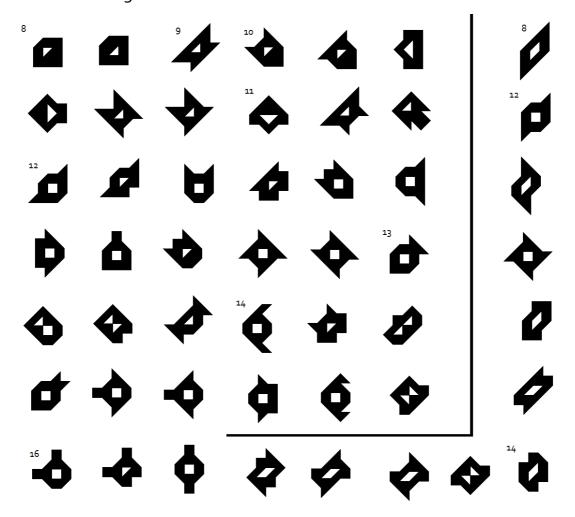


Illustration 22: Les 50 tangrams ayant un trou et au moins un élément de symétrie. Les formes ayant un axe de symétrie (à gauche) dépassent largement celles ayant un centre (à droite)

Pour les 88 formes ayant une baie, la répartition est : une forme à sept côtés ayant un axe, aucune forme à huit ou neuf côtés, cinq formes à dix côtés dont quatre ayant un axe, six formes à onze côtés ayant un axe, 22 formes à douze côtés dont 17

Tangram Évolutif (solutions)

ayant un axe, douze formes à treize côtés ayant un axe, 21 formes à quatorze côtés dont treize ayant un axe, cinq formes à quinze côtés ayant un axe et seize formes à seize côtés dont trois seulement ayant un axe. Au total, il n'y a donc que 27 formes ayant un centre de symétrie parmi les 88 tangrams à baie ayant un élément de symétrie. Les formes à baie ayant un centre sont mieux représentées que les formes à trou; leur baie est toujours double pour respecter la symétrie, même si on trouve des 16abolos à baie ayant un centre de symétrie qui n'aient qu'une seule et unique baie centrale.

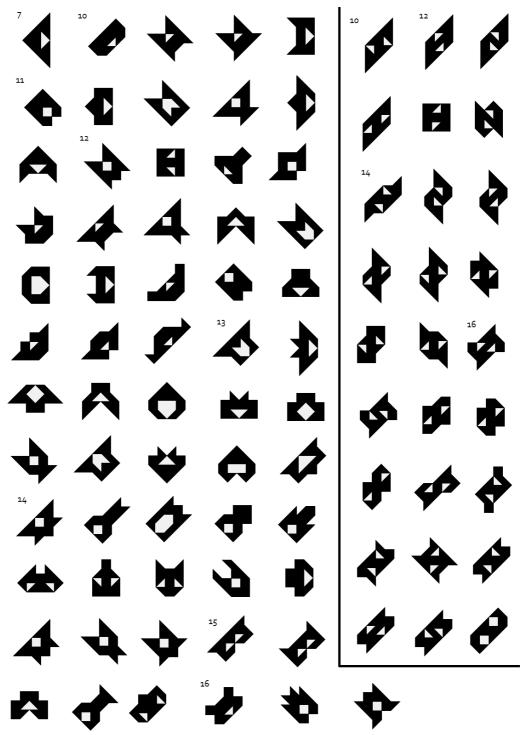


Illustration 23: Les 88 formes à baie ayant un élément de symétrie au moins Solutions-37

QUESTION 7

101/] /										
					rat						Sym
			8	10	12	14	16	18	Total	Tot.partiels	baie
		sym/baie	0	0	0	0	0	0		0	4
	6	sym/plein	0	0	0	2	2	0	4	4	7
	U	nosym/baie	0	0	0	0	0	0	7	0	0
		nosym/plein	0	0	0	0	0	0		0	
		sym/baie	0	0	0	0	0	0		0	0
	7	sym/plein	0	0	0	0	0	0	46	0	U
	•	nosym/baie	0	0	0	0	0	0	.0	0	0
		nosym/plein	0	4	9	10	23	0		46	
		sym/baie	0	0	0	0	0	0		0	11
	8	sym/plein	0	2	0	2	5	2	339	11	
		nosym/baie	1	2	3	0	2	0		8	8
		nosym/plein	1	30	63	148	73	5		320	
		sym/baie	0	0	0	0	0	0		0	0
	9	sym/plein	0	0	0	0	0	0	2531	0	
		nosym/baie	11	44	40	24	11	0		130	130
		nosym/plein	54	317	642	938	450	0		2401	
		sym/baie	0 1	1 20	0 14	1 40	0 16	0		2 91	93
	10	sym/plein nosym/baie	80	323	372	215	84	0 0	13590	1074	
		nosym/plein	653	2489	3884	4424	947	26		12423	1076
		sym/baie	1	0	1	0	0	0		2	
		sym/plein	1	3	10	2	1	0		17	19
	11	nosym/baie	634	2171	2422	1274	152	0	64682	6653	
		nosym/plein	4171	15026	20682	15834	2297	0		58010	6655
		sym/baie	1	5	2	2	3	0		13	
		sym/plein	6	80	69	70	31	2		258	271
	12	nosym/baie	2982	9914	10356	4439	400	1	226507	28092	
		nosym/plein	16394	62273	77309	38698	3451	19		198144	28105
		sym/baie	3	3	1	2	0	0		9	
	40	sym/plein	7	12	38	7	1	0	500070	65	74
	13	nosym/baie	9517	31516	30152	9358	476	0	583870	81019	04000
		nosym/plein	43510	178327	204576	72278	4086	0		502777	81028
		sym/baie	1	6	8	2	0	0		17	475
	14	sym/plein	20	142	157	114	25	0	1025200	458	475
	17	nosym/baie	18619	66214	57626	12704	339	0	1023200	155502	155519
		nosym/plein	72539	339440	361495	92810	2938	1		869223	100010
		sym/baie	2	0	0	1	0	0		3	49
	15	sym/plein	11	9	17	9	0	0	1140274	46	.0
		nosym/baie	20438	86453	66354	10666	114	0		184025	184028
		nosym/plein	70229	401285	406048	77484	1154	0		956200	
		sym/baie	2	8	3	2	0	0		15	209
	16	sym/plein	10	61	83	40	0	0	701334	194	
		nosym/baie nosym/plein	9874 29313	60241 256639	43721 262416	4481 34278	19 143	0 0		118336 582789	118351
		sym/baie	0	0	0	0	0	0		0	
		sym/plein	0	3	0	0	0	0		3	3
	17	nosym/baie	0	15957	13114	559	0	0	183102	29630	
		nosym/plein	0	69450	78735	5284	0	0		153469	29630
		sym/baie	0	09430	0	0	0	0		0	
		sym/plein	0	4	4	0	0	0		8	8
	18	nosym/baie	0	564	955	20	0	0	12276	1539	
		nosym/plein	0	4532	6097	100	0	0		10729	1539
		, p	299086	1603570	1647478	386322	17243	56			
									_		

Tableau 11: Répartition des tangrams homogènes ayant 18 segments sur le bord

Nous devons commencer par préciser les répartitions selon ces quatre catégories. Deux d'entre elles sont binaires : la symétrie ou l'absence de symétrie, le fait d'avoir une baie ou d'être plein. Nous noterons les quatre sous-catégories qui résultent de ces couples : sym/baie, sym/plein, nosym/baie et nosym/plein. La répartition des formes homogènes ayant 18 segments sur le bord se subdivise alors en 78 (13×6) quadruplets de ce genre. Nous avons tenu compte du fait que le nombre de segment rationnel sur le bord ne peut pas être impair, ainsi que nous l'avons déjà remarqué. Nous présentons le tableau complet, même s'il est un peu indigeste. Celui-ci nous permet de repérer les sous-catégories non vides susceptibles d'être illustrées par un exemplaire, ainsi que le réclame la question posée. Sur les 312 souscatégories (4×78), il y en a 136 qui sont vides, principalement au sein des formes symétriques (90) et des baies (79, dont 55 symétriques) évidemment. On pourrait chercher un exemplaire de chacune de ces 176 sous-catégories non-vides mais, afin d'en simplifier la présentation, nous allons nous restreindre un peu dans la réponse. Pour chacune des sous-catégories non vides correspondant à un certain nombre de côtés et une certaine valeur de la part rationnelle, nous avons cherché la forme la plus remarquable de la catégorie. Cela représente 61 sous-catégories à illustrer d'un exemple. Les critères examinés en priorité ont été la présence d'élément de symétrie et l'existence d'une baie, ainsi que le recommandait la question. Mais, en procédant ainsi, il se trouve de nombreuses catégories où le choix de la forme ne s'impose pas avec ces seuls critères. Nous avons alors cherché des critères additionnels qui pourraient faire ressortir la forme sélectionnée comme unique : par exemple, le fait d'avoir un centre de symétrie (s'il n'en existe qu'une) ou bien le fait d'avoir une enveloppe convexe triangulaire ou rectangulaire, etc. Parfois il n'est pas évident de trouver un tel critère additionnel, et nous avons alors tout simplement donné un critère subjectif, de nature descriptif, comme par exemple le fait de ressembler à une chaise ou à un escalier... Cela n'apparaît pas très rigoureux, mais la question était trop large, et nous avons ainsi trouvé un moyen, imparfait certes, de synthétiser les informations. Pour le lecteur, comment répondre à cette question sans savoir si des formes de cette nature existent, et sans disposer du fichier pour les sélectionner aisément? Nous aurions pu répondre strictement à la question en donnant les 176 formes qui apparaissaient en premier dans notre fichier, selon l'ordre du code canonique de la forme, mais ce type de réponse aurait été tout aussi indigeste que le tableau ci-dessus.

	part rationnelle = 8	part rationnelle = 10	part rationnelle = 12	part rationnelle = 14	part rationnelle = 16	part rationnelle = 18
6 côtés						
0.7				centre de symétrie	axe de symétrie	
7 côtés				1	, I	
)	enveloppe triangulaire		base symétrique	creux carré	
8côtés	4	_	4			
	plein	enveloppe trapezoïdale	baie maxi	axe de symétrie	symétrique enveloppe rectangulaire	centre de symétrie
9 côtés		4			-4	
	enveloppe convexe	baie enveloppe triangulaire	baie maxi	baie triangle moyen dimension 2x5	baie carrée	
	triangulaire					_
10 côtés	V		centre de symétrie		4	.
	baie pentagonale	baie symétrique	convexité réelle sur quadrillage	symétrique baie	dimension = 9	chaise
11 côtés	♦	Y	4		J	
	symétrique baie	symétrique forme coupe	symétrique baie	symétrique 2 angles droits consécutifs	symétrique	
12 côtés	*		4			
12 cotes	symétrique	baie unique	symétrique	symétrique	symétrique	baie
	baie	symétrique	baie enveloppe rectangulaire	baie d'aire 6 T	baie carrée	5515
13 côtés	4	4	♦		7	
	symétrique baie triangulaire	symétrique baie carrée	symétrique baie	symétrique baie carrée	symétrique	
14 côtés	*	A		.	J .	البو_
14 cotes	symétrique baie hexagonale	baie axe de symétrie	axe de symétrie 2 baies	symétrique escalier	baie parallélogramme	-
	A	▲ ▲	155.03	_	_	
15 côtés	symétrique	symétrique		symétrique		
	baie enveloppe rectangulaire	forme assiette	symétrique scie	baie •	baie parallélogramme	
16 côtés	♦				*	
	symétrique enveloppe rectangulaire	symétrique baie double carrée	centre de symétrie baie	symétrique arche pont	escalier	
17 côtés		•	4	4		
		baie carrée et parallélogramme	2 baies dont une carrée	baie escalier		
18 côtés		†	Y	4		
		symétrique	symétrique	baie presque symétrique		
111 - 1 -	<u>_</u>	pieds écartés	enveloppe rectangulaire bonhomme	,		

Illustration 24: Formes uniques des sous-catégories liées au nombre de côtés et à la part rationnelle du périmètre pour les tangrams ayant 18 segments sur le bord

QUESTION 8

a) Voici les sept enveloppes triangulaires pouvant contenir un tangram homogène. La première de ces formes est bien connue puisqu'elle est convexe. Il s'agit du triangle isocèle rectangle d'aire 8 (16 petits triangles). Viennent ensuite deux autres triangles isocèles rectangles, celui d'aire 9 qui peut contenir 73 tangrams homogènes et celui d'aire 12.5 (voir l'illustration) qui peut en contenir 88. Pour ces deux formes d'enveloppe, la convexité réelle est égale à la convexité sur quadrillage et vaut respectivement deux et neuf petits triangles.

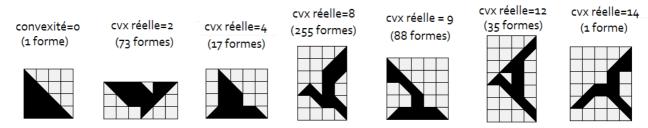


Illustration 25: Les 7 formes d'enveloppe triangulaire des tangrams homogènes

Les quatre autres formes d'enveloppe triangulaire sont des triangles acutangles de convexité réelle égale à 4, 8, 12 et 14 triangles qui peuvent contenir respectivement 17, 255, 35 et une formes. Ces triangles ont tous une convexité sur quadrillage supérieure à la convexité réelle, en raison d'un côté qui ne suit pas les côtés du quadrillage ni les directions de ses diagonales. Les deux autres côtés de ces triangles forment un angle de 45° et mesurent 5 et $4\sqrt{2}$ pour le premier, 6 et $4\sqrt{2}$ pour le second, 7 et $4\sqrt{2}$ pour le troisième, 6 et $5\sqrt{2}$ pour le dernier.

b) La réponse n'est pas facile à obtenir sans programme. Pour identifier ce genre de côté avec un programme, on peut calculer sa longueur. La forme de droite de la figure 64 (présente sur la figure 25, la 3ème en partant de la gauche) ayant un côté qui ne suit pas les côtés du quadrillage ni les directions de ses diagonales, ce côté mesure, d'après le théorème de Pythagore, $\sqrt{(1^2+4^2)} = \sqrt{17} \approx 4.1231056256$. Ensuite, on doit vérifier que cette longueur approximative (les programmes ne travaillent pas directement avec des valeurs exactes) n'est pas un multiple de $\sqrt{2}$. Comme $2\sqrt{2}\approx 2.828$ et $3\sqrt{2}\approx 4.243$, on peut comparer les valeurs approchées au millième pour conclure que cette longueur ne peut être obtenue en suivant les diagonales du quadrillage. Cette longueur n'étant pas non plus un entier, elle ne peut être obtenue en suivant le guadrillage. Il s'agit donc bel et bien d'une de ces longueurs « non conformes » que l'on recherche. Ce raisonnement est un peu difficile à tenir à cause de la comparaison que l'on effectue sur des longueurs nécessairement approchées. On n'est pas vraiment certain du résultat de notre comparaison: est-on sûr de ne pas détecter une égalité entre des valeurs différentes (faux positif) ou une différence entre des valeurs égales (faux négatif) ?

Afin d'éviter ce genre d'erreur, il convient de travailler avec le carré des longueurs. Dans notre cas, on obtient 17 et il suffit de remarquer que 17 n'est pas un carré d'entier (cas des côtés entiers) ni le double d'un carré d'entier (cas des côtés suivant une diagonale du quadrillage).

Ceci étant dit, rencontre-t-on des tangrams homogènes pour lesquels il y a plus d'un côté non conforme sur l'enveloppe convexe ? Avec les tangrams inscrits dans une enveloppe triangulaire, la réponse est non. Il faut reconnaître qu'ils sont peu nombreux. Avec les tangrams inscrits dans une enveloppe quadrangulaire, la réponse est oui, pour 32 522 formes qui présentent deux côtés non conformes sur l'enveloppe et 746 formes qui présentent trois côtés non conformes sur l'enveloppe. Parmi ces dernières, seize possèdent un centre de symétrie (voir figure 181), dont la fameuse « étoile de ninja » de notre couverture.

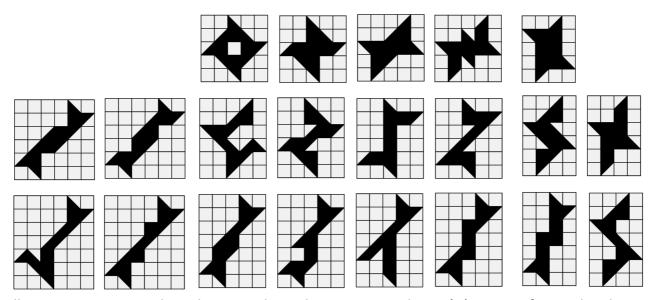


Illustration 26: Formes d'enveloppe quadrangulaire ayant tous leurs côtés non conformes dont les 16 qui ont un élément de symétrie (un centre)

Avec l'ensemble des tangrams homogènes, on rencontre jusqu'à six côtés non conformes. Il y a 179 tangrams homogènes présentant ainsi des enveloppes convexes avec six côtés non conformes. Ces formes, dont sept ont un élément de symétrie, se répartissent en 144 qui ont une enveloppe convexe à six côtés, 34 qui en ont une à sept côtés et une seule ayant une enveloppe octogonale (avant dernière forme de notre prochaine illustration). Incluant ces formes extrêmes (de ce point de vue), la plupart (très exactement 3 888 443) des tangrams homogènes ont des enveloppes convexes avec plus de un côté non conforme.

Tangram Évolutif (solutions)

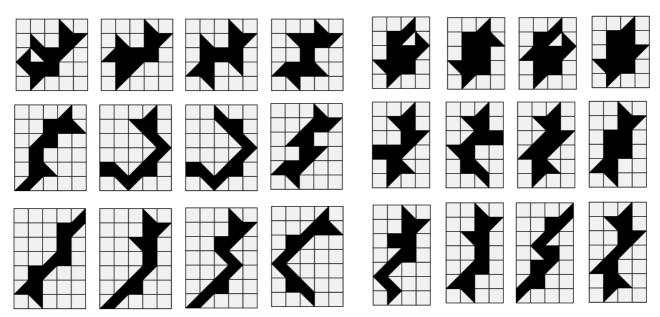


Illustration 27: Les formes qui ont des enveloppes convexes dont 6 côtés sont en dehors du quadrillage ou de ses diagonales se répartissent en 6 dimensions distinctes

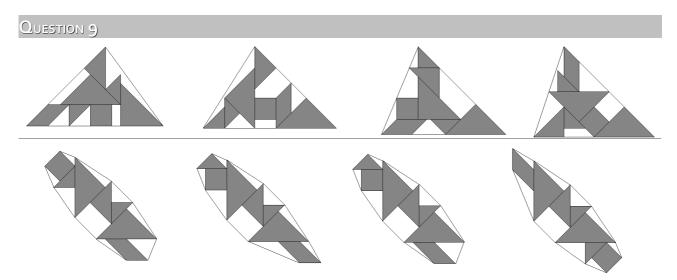


Illustration 28: Tangrams ayant une enveloppe triangulaire ou hendécagonale et comportant le maximum de "rentrants", dans le sens que nous lui avons donné dans le texte, soit 5 pour la ligne du dessus et 9 pour celle du dessus

a) Au sens strictement géométrique, un angle rentrant est un angle de plus de 180°. Dans cette acception du terme, la forme du haut à gauche de la figure ci-dessus comporte huit rentrants, celle qui est à sa droite en comporte 9, la suivante 7, etc. Il n'est pas difficile de compter les rentrants de ce type lorsqu'on dispose du fichier des formes : il suffit de calculer l'écart entre les directions des segments consécutifs et de comptabiliser pour chaque forme le nombre de fois où cet écart dépasse 180°.

Une partie de la silhouette est rentrante si elle se démarque en creux dans l'enveloppe convexe qui contient la forme. C'est ainsi que l'on peut dénombrer cinq parties rentrantes dans les quatre formes de la ligne supérieure de notre illustration. Chaque partie rentrante contient un ou plusieurs angles rentrants. L'identification d'une partie rentrante nécessite la prise en compte de l'enveloppe convexe car, lorsqu'on parcourt les sommets de la silhouette, il faut pouvoir détecter et comptabiliser les endroits où celle-ci s'écarte de son enveloppe et ceux où elle la retrouve.

Nous avons ainsi deux questions en une seule. L'illustration ci-dessus nous donne quelques éléments de solution pour la deuxième acception : lorsque l'enveloppe est triangulaire, les parties rentrantes ne peuvent avoir plus de cinq rentrants. Il y a 92 formes qui possèdent ainsi cette particularité, et la figure nous en montre quatre. En anticipant un peu sur des résultats énoncés au chapitre suivant, la distribution du nombre de parties rentrantes au sein des tangrams hétérogènes d'enveloppe triangulaire est la suivante :

o rentrant	1 rentrant	2 rentrants	3 rentrants	4 rentrants	5 rentrants
1	865	11 409	10 553	2 065	92

Tangram Évolutif (solutions)

La particularité que nous venons d'identifier ne concerne pas uniquement les formes hétérogènes-non-homogènes. Parmi les 92 formes possédant cinq parties rentrantes, il y en a seize qui sont homogènes ainsi que le montre l'illustration suivante.

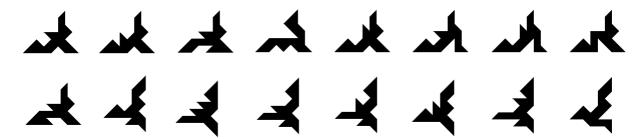


Illustration 29: Les 16 tangrams homogènes d'enveloppe triangulaire possédant 5 parties rentrantes

Lorsque l'enveloppe convexe a onze côtés (un maximum pour les tangrams hétérogènes), les parties rentrantes ne peuvent avoir plus de neuf parties rentrantes. Il y a seulement quatre formes qui possèdent cette particularité, et la première illustration nous les montre toutes les quatre. La distribution du nombre de parties rentrantes au sein des tangrams hétérogènes d'enveloppe hendécagonale est la suivante :

4 rentrants	5 rentrants	6 rentrants	7 rentrants	8 rentrants	9 rentrants
68	4 156	13 458	7 403	585	4

Les formes homogènes participent-elles aussi à cette particularité maximale ? On le voit sur la première figure, aucune forme hendécagonale possédant neuf parties rentrantes n'est homogène. Au sein des 585 formes ayant huit rentrants, il n'y a pas non plus de forme homogène. En réalité, aucun des 25 674 tangrams d'enveloppe hendécagonale n'est homogène.

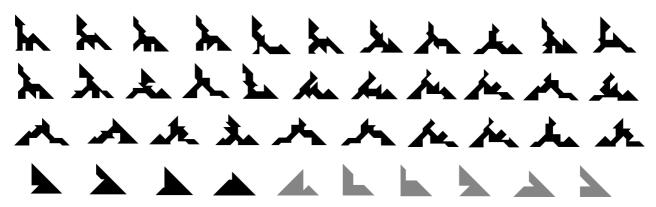


Illustration 30: Formes d'enveloppe triangulaire ayant 9 angles rentrants (les 3 lignes du dessus) et celles qui n'en ont qu'un seul (en bas) parmi lesquelles les formes homogènes sont en gris

Pour ce qui est du nombre d'angles rentrants dans une forme, au sens strictement géométrique du terme, les enveloppes triangulaires peuvent avoir de zéro à neuf rentrants, tandis que les formes d'enveloppe hendécagonale en ont entre cinq et 11. Les détails de ces répartitions sont donnés ci-dessous ainsi qu'une illustration montrant les 36 formes triangulaires possédant neuf rentrants ainsi que celles n'en possédant qu'un seul. Parmi ces dix dernières formes, six sont homogènes. Les formes homogènes d'enveloppe triangulaire ont, au maximum, six angles rentrants.

Angles rentrants	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Enveloppe triangulaire	1	10	75	687	2 822	7 335	8 688	4 408	923	36	0	0
Dont homogènes	1	6	33	36	125	118	59	0	0	0	0	0
Enveloppe hendécagonale	0	0	0	0	0	4	442	5 423	11 272	6 922	1 488	123

Les formes d'enveloppe hendécagonale de notre première illustration, même si elles ont le plus grand nombre de parties rentrantes, n'ont que dix angles rentrants, ce qui ne constitue pas un maximum. Les formes hendécagonales qui ont onze angles rentrants sont trop nombreuses (il y en a 123) pour être toutes données en illustration, mais elles ont toutes 22 côtés, aucune n'est homogène et aucune n'est symétrique. Le périmètre de ces formes peut prendre différentes valeurs dont deux ont des parts rationnelles égales à 6; 78 une part rationnelle égale à 8; 8, 29 et 6 ont respectivement des parts rationnelles égales à 10, 12 et 14. L'illustration suivante donne deux exemplaires de chacune de ces catégories de formes maximales.

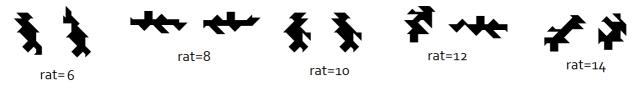


Illustration 31: formes d'enveloppe hendécagonale ayant 11 angles rentrants et des parts rationnelles du périmètre égales à 6, 8, 10, 12 ou 14

En cherchant dans l'ensemble des tangrams hétérogènes, ne s'en trouve t-il aucun pour avoir dix parties rentrantes? Ne s'en trouve-t-il aucun pour avoir douze angles rentrants? Les formes d'enveloppe hendécagonale contiennent-elles les champions de ces deux caractéristiques? La répartition des tangrams hétérogènes selon le nombre de parties rentrantes est donné par le tableau suivant, où l'on constate qu'il y a 8 876 formes ayant la caractéristique d'avoir neuf parties rentrantes dont seulement quatre ont une enveloppe hendécagonale. Aucune n'a donc dix parties

rentrantes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	1 429 869	97 788 691	1 081 351 740	2 630 447 683	1 989 789 369	529 522 425	48 478 215	1 320 937	8 876

Si on regarde de plus près ces 8 876 formes ayant neuf parties rentrantes, on n'en trouve aucune qui soit homogène ou même symétrique. Ce sont des formes qui ont entre 18 et 22 côtés, forcément très découpées, avec des parts rationnelles du périmètre allant de 4 à 14. Notre illustration montre les sept formes ayant 18 côtés et une part rationnelle minimale égale à 4 ainsi que quelques unes des 68 formes à 18 côtés ayant une part rationnelle égale à 12. Nous donnons aussi (ligne du milieu) les deux formes ayant 22 côtés et une part rationnelle égale à 12, ainsi que quelques unes des 143 formes ayant une part rationnelle égale à 8. Les enveloppes convexes peuvent avoir de cinq à onze côtés. Les onze formes ayant une enveloppe pentagonale sont données sur notre illustration (ligne du bas).

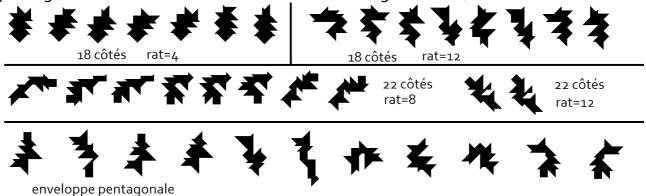


Illustration 32: Formes extrêmes parmi les 8876 tangrams hétérogènes ayant 9 parties rentrantes

Le nombre maximum d'angles rentrants dans un tangram hétérogène n'est pas de onze (comme c'est le cas dans le sous-ensemble des formes d'enveloppe hendécagonale) mais 12. Il y a 162 287 formes ayant cette caractéristique qui n'est donc pas si rare. Ces formes ont entre 21 et 23 côtés, aucune n'est homogène et aucune n'est symétrique. La figure suivante donne quelques exemplaires extrêmes (à commencer par les cinq ayant 21 côtés et une part rationnelle égale à 14).



Illustration 33: Formes extrêmes parmi les 162 287 tangrams hétérogènes ayant 12 angles rentrants

b) La figure donnée en exemple a t-elle vraiment quatre points alignés ? Il faut se méfier de l'observation visuelle qui suggère cet alignement. Il pourrait s'agir d'une approximation comme lorsqu'on dit que le nombre π vaut 3.14 (ce nombre n'a pas d'écriture décimale exacte). Un alignement géométrique se doit d'être rigoureusement prouvé. Déterminons les coordonnées des points A, B, C et D dans

un repère lié au quadrillage (5 pièces de ce tangram étant associées par des liaisons homogènes, le repère choisi suit naturellement le quadrillage sous-jacent) :

$$A(0, 2\sqrt{2}); B(1, 1+\sqrt{2}); C(2,2); D(2+\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Pour montrer que les points sont alignés, on peut déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BD} et \overrightarrow{AB} :

$$\overrightarrow{AC}(2,2-2\sqrt{2}); \overrightarrow{BD}(1+\sqrt{2},-1); \overrightarrow{AB}(1,1-\sqrt{2})$$

On remarque tout de suite que $\overline{AC} = 2 \overline{AB}$ et donc A, B et C sont alignés. Pour le point D, calculons le déterminant des vecteurs \overline{AC} et \overline{BD} :

$$det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 2 \times (-1) - (1 + \sqrt{2})(2 - 2\sqrt{2}) = -2 - (2 - 4) = -2 + 2 = 0$$

Ainsi, \overrightarrow{BD} étant colinéaire à \overrightarrow{AC} , le point D est sur la droite (AC) contenant aussi B.

Ce petit exercice (aujourd'hui du niveau des classes de seconde) nous ayant mis en appétit, nous pouvons aborder la 2^{ème} partie de la question : se peut-il que cinq points soient alignés, créant quatre parties rentrantes ?

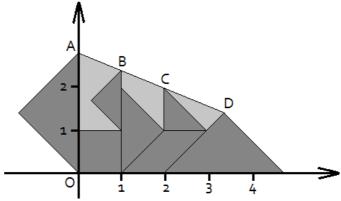
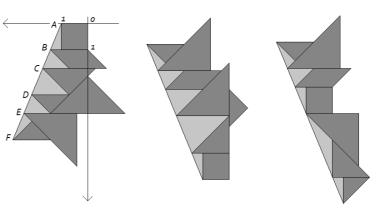


Illustration 34: La figure de l'exemple dans un repère

Commençons par observer les figures de nos précédentes illustrations. Il semblerait que nous trouvions mieux : pour les trois candidats, trouvés parmi les formes d'enveloppe pentagonale ayant neuf parties rentrantes (formes n°1, 2 et 6 en partant de la gauche), on observe un alignement de six points qui crée cinq parties



observe un alignement de six Illustration 35: Trois des formes d'enveloppe pentagonale semblent avoir 5 points alignés créant 4 parties rentrantes

rentrantes! Mais cela reste à prouver. L'exercice que nous avons fait avec les coordonnées doit être réalisé encore ici, même si les coordonnées des points sont plus difficiles à déterminer. Nous serions tenté de dire au lecteur, selon la formule consacrée : « nous vous laissons le soin de vérifier que ces points sont bien alignés ». Mais ce ne serait pas très fair-play dans un chapitre dénommé « solutions ». Dans un repère lié au carré de la figure de gauche, déterminons donc les coordonnées des six

points:

 $A(1,0); B(\sqrt{2},1); C(1+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}); D(\frac{3\sqrt{2}}{2},2+\frac{\sqrt{2}}{2}); E(1+\sqrt{2},2+\sqrt{2}); F(2\sqrt{2},3+\sqrt{2})$ $M(x,y) \in (AB)$ lorsque $\overrightarrow{AB}(\sqrt{2}-1,1)$ et $\overrightarrow{AM}(x-1,1)$ sont colinéaires. On doit donc avoir $y(\sqrt{2}-1)-(x-1)=0$, c'est-à-dire $y=(x-1)(\sqrt{2}+1)$.

C est-il sur (AB) ? Oui, car $((1+\frac{\sqrt{2}}{2})-1)(\sqrt{2}+1)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Idem pour *D*, *E* et *F* car $((\frac{3\sqrt{2}}{2})-1)(\sqrt{2}+1)=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $((1+\sqrt{2})-1)(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$ et $((2\sqrt{2})-1)(\sqrt{2}+1)=3+\sqrt{2}$. *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F* étant alignés, les cinq parties rentrantes consécutives sont bien individualisées.

QUESTION 10

La question propose trois méthodes différentes. La méthode que nous utilisons avec notre algorithme est bien sûr la deuxième. Nous décodons la forme canonique pour obtenir les valeurs exactes des sommets de la forme. Ensuite, il suffit de calculer l'aire de l'enveloppe convexe et de lui soustraire l'aire de la forme. La réponse tient en une image.

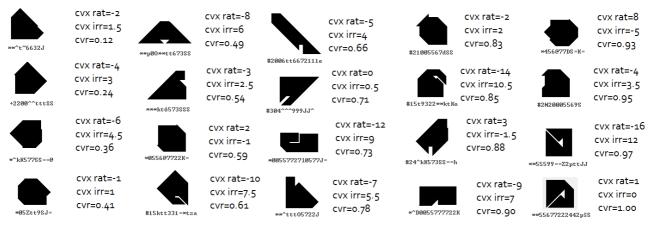


Illustration 36: Les valeurs exactes de la convexité réelle (cvr) comportent une partie rationnelle (cvx rat) et une partie irrationnelle (cvx irr) qui est multipliée par $\sqrt{2}$

Pour restituer sous leurs formes exactes ces convexités réelles, écrivons-les sur le modèle de l'énoncé. Les effectifs concernés sont par ailleurs donnés à titre indicatif.

				•		
Convexité n°	7	8	9	10	11	12
Exacte	$-3+\frac{25}{2}\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$-4+3\sqrt{2}$	$-5+4\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-12+9\sqrt{2}$
Approchée	0.5355339	0.5857864	0.6066017	0.6568542	0.7071068	0.7279221
Effectif	11	15	8	166	18	13
Convexité n°	13	14	15	16	17	18
Exacte	$-7+\frac{11}{2}\sqrt{2}$	$-2+2\sqrt{2}$	$-14 + \frac{21}{2}\sqrt{2}$	$3 + \frac{-3}{2}\sqrt{2}$	$-9+7\sqrt{2}$	$8-5\sqrt{2}$
Approchée	0.7781746	0.8284271	0.8492424	0.8786797	0.8994949	0.9289322
Effectif	56	294	5	3	150	1
Convexité n°	19	20	21	22	23	24
Exacte	$-4+\frac{7}{2}\sqrt{2}$	$-16+12\sqrt{2}$	1	$-11 + \frac{17}{2}\sqrt{2}$	$-6+5\sqrt{2}$	$-18+27\sqrt{2}$
Approchée	0.9497475	0.9705627	1.0000000	1.0208153	1.0706781	1.0918831
Effectif	162	18	282	282	49	681

Tangram Évolutif (solutions)

					/	/ 11	
on passe sur	Ies 1 c	no val	eurs suivant	es de la	a convexite	reelle	pour arriver sur :
on passe son	103 + 9	107 V U I	COID DOIVAIL	C3 GC IC	a COTTV CATCO	· CCIIC	poor arriver sor.

Convexité n°	1934	1935	1936	1937	1938	1939
Exacte	$18 + \frac{17}{2}\sqrt{2}$	$4 + \frac{37}{2}\sqrt{2}$	9+15√2	$7 + \frac{33}{2}\sqrt{2}$	$10 + \frac{29}{2}\sqrt{2}$	$6 + \frac{35}{2} \sqrt{2}$
Approchée	30.0208153	30.1629509	30.2132034	30.3345238	30.5060967	30.7487373
Effectif	1	1	2	2	3	1



Illustration 37: Les 6 valeurs exactes supérieures à 30 triangles de la convexité réelle

Quelques mots peut-être sur les autres méthodes proposées: la première d'utiliser valeurs suggère les approchées données sur la figure. Pour retrouver les coefficients de l'écriture exacte à partir de la valeur approchée, procéder on peut par identification/déduction à partir d'une table de valeurs. Par exemple, pour la conversion de la valeur approchée 30.74873734 sous la forme d'une combinaison $a\sqrt{2}+b$ où a et b sont des nombres rationnels : on examine la partie décimale de $a\sqrt{2}$ lorsque adécrit le début de l'ensemble des entiers, puis des moitiés d'entier, puis des quarts, etc. Dans notre exemple, repère décimales les 30.74873734 dans $\frac{35\sqrt{2}}{2} \approx 24.74873734$,

Α	A sqrt(2) approx	A/2 sqrt(2) approx	A/4 sqrt(2) approx
0	0,00000000	0,00000000	0,00000000
1	1,41421356	0,70710678	0,35355339
2	2,82842712	1,41421356	0,70710678
3	4,24264069	2,12132034	1,06066017
4	5,65685425	2,82842712	1,41421356
5	7,07106781	3,53553391	1,76776695
6	8,48528137	4,24264069	2,12132034
7	9,89949494	4,94974747	2,47487373
8	11,31370850	5,65685425	2,82842712
9	12,72792206	6,36396103	3,18198052
10	14,14213562	7,07106781	3,53553391
11	15,55634919	7,77817459	3,88908730
12	16,97056275	8,48528137	4,24264069
13	18,38477631	9,19238816	4,59619408
14	19,79898987	9,89949494	4,94974747
15	21,21320344	10,60660172	5,30330086
16	22,62741700	11,31370850	5,65685425
17	24,04163056	12,02081528	6,01040764
18	25,45584412	12,72792206	6,36396103
19	26,87005769	13,43502884	6,71751442
20	28,28427125	14,14213562	7,07106781
21	29,69848481	14,84924240	7,42462120
22	31,11269837	15,55634919	7,77817459
23	32,52691193	16,26345597	8,13172798
24	33,94112550	16,97056275	8,48528137
25	35,35533906	17,67766953	8,83883476
26	36,76955262	18,38477631	9,19238816
27	38,18376618	19,09188309	9,54594155
28	39,59797975	19,79898987	9,89949494
29	41,01219331	20,50609665	10,25304833
30	42,42640687	21,21320344	10,60660172
31	43,84062043	21,92031022	10,96015511
32	45,25483400	22,62741700	11,31370850
33	46,66904756	23,33452378	11,66726189
34	48,08326112	24,04163056	12,02081528
35	49,49747468	24,74873734	12,37436867

30.74873734 dans $\frac{32}{2} \approx 24.74873734$, Tableau 12: Table des multiples de $\sqrt{2}$, de la moitié ou décalées d'un rang dans de $\sqrt{2}$, etc. permettant d'identifier une valeur $\frac{7\sqrt{2}}{L} \approx 2.47487373$, etc. Cela nous exacte par le début de son développement décimal

conduit à la valeur exacte cherchée $6+\frac{35}{2}\sqrt{2}\approx 30.74873734$. Bien sûr, cette méthode a ses limites : on ne reconnaîtra pas forcément des valeurs qui ne se distinguent qu'à partir du $8^{\text{ème}}$ rang décimal si l'on n'examine que huit ou même dix décimales... Et si l'on ne connaît que les deux premières décimales, comme ce qui était donné sur la figure, la difficulté s'accroît, et l'on aura pas une certitude absolue

que notre réponse est correcte. La dernière méthode préconisée est très différente : en reconstituant la forme précisément, on peut déterminer par le calcul les aires élémentaires impliquées dans la convexité. Ainsi, pour la première valeur non nulle de la convexité (la valeur 0.12), on voit sur notre reconstitution de la forme donnée, que la convexité est uniquement due à un petit triangle de côté 1. La hauteur h est un peu délicate à déterminer, mais cela reste à la portée d'un élève de troisième. On peut remarquer, par exemple, que le petit côté de ce triangle mesure $3-2\sqrt{2}$ (il suffit de se rappeler des dimensions des pièces) et d'utiliser le cosinus de l'angle de 45° qui vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi on obtient $h=(3-2\sqrt{2})\times(\frac{\sqrt{2}}{2})=3\frac{\sqrt{2}}{2}-(\sqrt{2})^2=-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$. Pour obtenir la convexité, l'unité d'aire étant le triangle, il suffit de multiplier par 2 l'aire de ce triangle (h divisé par 2), donc la convexité vaut ici h. Bien sûr, l'exercice est beaucoup plus difficile avec une forme complexe comme celle qui a la convexité maximale de 30.75, mais cela reste faisable.

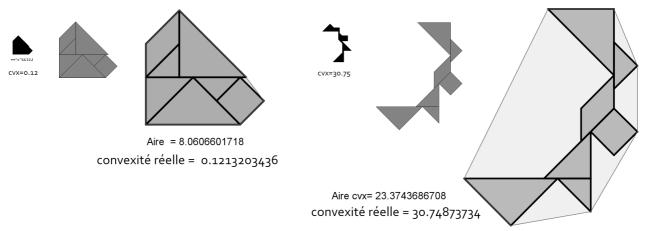


Illustration 38: Détermination de valeurs plus précises de la convexité à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique : l'unité d'aire donnée par le logiciel étant le carré, pour trouver la convexité il faut multiplier cette aire par 2 et soustraire 16

Une autre variante de cette méthode est de reconstituer la forme des pièces et leurs emplacements sur un logiciel de géométrie dynamique, et d'utiliser ce logiciel pour obtenir une meilleure approximation décimale que celle qui était proposée (GeoGebra donne jusqu'à quinze décimales). Cette méthode complète ainsi la précédente au cas où les décimales utiles pour trancher entre plusieurs valeurs possibles pour les coefficients rationnels α et b feraient défaut.

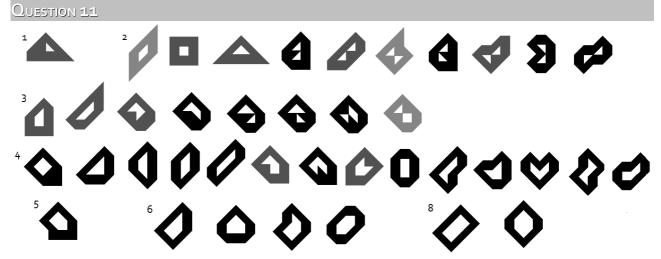


Illustration 39: Les 40 formes de trou que l'on rencontre chez les 16abolos. En gris clair, les formes rencontrées avec le Tangram, en gris foncé les formes dont les trous se rencontrent avec le Tangram (mais pas la forme présentée qui a un nombre de bord minimal)

Il y a bien d'autres formes et dimensions de trou chez les 16abolos que les treize rencontrés avec le Tangram. Notre illustration présente ces quarante formes de trou dont les aires s'étalent entre un et huit triangles. Nous avons la collection complète des polyabolos d'aire 1, 2, 3 et 4. À partir de cinq triangles d'aire, la collection est incomplète : un seul pentabolo sur les trente existants, quatre hexabolos sur 107, aucun heptabolos et deux octobolos très symétriques. Pour les trous d'aire 2 et 3, il se rajoute aux polyabolos des formes de trou ayant un isthme : sept formes à isthme d'aire 2 représentant toutes les dispositions possibles de deux triangles ayant juste un sommet en commun ; quatre formes à isthme d'aire 3 représentant un petit échantillon des dispositions possibles de trois triangles joints par un sommet au moins. Nous avons compté les 16abolos ayant un trou d'aire n, pour déterminer la taille moyenne d'un trou. Celle-ci ne dépasse pas de beaucoup un triangle (aire moyenne=1.19), car les trous d'aire 1 sont largement majoritaires (ils représentent 86% des trous, les trous d'aire 2 représentant 12% font presque tout le reste). Nous avons effectué ces dénombrements partiellement à l'œil (ce n'est pas

							Côtés					
aire TROU	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
1	0	3	16	96	441	1 395	3 278	6 013	7 171	4 464	1 157	24 034
2	1	0	12	25	133	297	683	972	806	290	58	3 277
3	0	0	0	1	12	45	112	119	113	28	1	431
4	0	0	0	4	11	18	64	103	91	21	1	313
5	0	0	0	0	0	6	13	15	10	2	0	46
6	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	4
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2
Total	1	3	29	127	597	1 761	4 152	7 223	8 192	4 805	1 217	28 107

Tableau 13: Répartition des 16abolos à trous selon l'aire du trou et le nombre de côtés (intérieur et extérieur) du bord

une mince affaire, vu qu'il y a tout de même 28 107 formes à trou), et nous avons pu ainsi introduire quelques erreurs minimes, mais l'ordre de grandeur de nos résultats reste fiable à quelques unités près. Le tableau 13 donne cette répartition qui distingue les 16abolos en fonction de leur nombre de côtés.

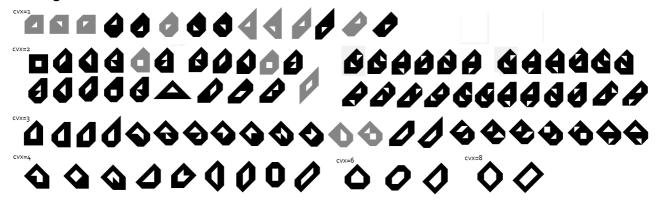


Illustration 40: Les 96 16abolos ayant un trou (ou un trou et une baie sur la droite) et un bord externe convexe. En gris, les 13 formes rencontrées avec le Tangram

b) Commençons par la dernière proposition : dénombrer les polyabolos ayant un bord externe convexe. Dans cette recherche, il faut distinguer les polyabolos qui ont seulement un trou et ceux qui, en plus d'avoir un trou, ont une baie. Avec une baie et un trou simultanément, l'enveloppe convexe peut adhérer au bord externe, comme si la baie était un 2^{ème} trou. Notre illustration concernant les tangrams à trou en a montré quelques avatars. Dans le cas des 16abolos, nous avons trouvé 64 formes à trou unique et 32 formes ayant un trou et une baie qui ont une enveloppe convexe présentant cette particularité. Pour les formes ayant un trou et une baie, il s'agit uniquement de polyabolos de convexité 2 ou 3, donc avec un trou d'aire 1 ou 2 et, également, une baie d'aire 1 ou 2 (mais pas 2 si le trou fait deux triangles d'aire). Beaucoup de ces formes ont été présentées dans la figure précédente mais nous les redonnons toutes ci-dessous. On remarquera que les enveloppes convexes de cette sorte de polyabolos sont peu nombreuses : seulement trente sortes possibles pour ces 96 formes. Nous avons donné tout d'abord ces formes, qui sont des n-abolos convexes avec *n* variant entre 17 et 24. Évidemment, tous les 24abolos convexes ne sont pas présents dans cette collection car, pour y figurer, il faut que l'on puisse faire entrer un vrai trou d'aire 8, ce qui revient à inscrire sans toucher les bords un octobolo dans ce 24abolo. Seulement deux 24abolos offrent cette possibilité (dernière ligne à droite) sur les 27 qui sont convexes. Aucun heptabolo n'entre dans un des 18 23abolos possibles; dans seulement trois des 25 22abolos entre un hexabolo; etc. jusqu'aux 17abolos convexes qui ne sont que cinq sur neuf à accueillir ainsi, sans toucher les bords, le petit monoabolo.

Tangram Évolutif (solutions)

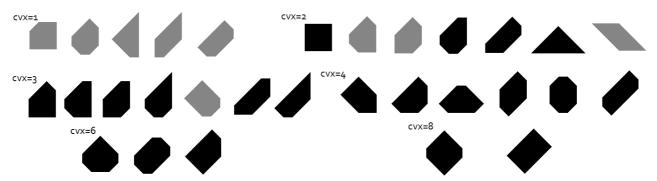


Illustration 41: Enveloppe convexe des 16abolos ayant un trou et un bord externe convexe. En gris, les formes présentes avec le Tangram

Ce qui serait intéressant, pour répondre plus amplement à la question concernant les trous dans les *n*-abolos, serait de dresser la table des rangs d'apparition d'une sorte de trou. Nous savons que le premier trou, de forme monoabolique, apparaît dans un décabolo. Lorsque 11<*n*<17, apparaissent donc les 39 autres formes de trou restantes. Nous savons aussi que nous allons voir apparaître, pour *n*=17, le premier représentant de la famille des polyabolos ayant deux trous. Pour *n*<17, on va donc voir apparaître les combinaisons trous+baie qui sont les véritables précurseurs de ces formes à deux trous. L'illustration précédente en a montré la partie qui avaient un bord externe convexe, mais il y en a d'autres parmi les formes dont l'enveloppe externe n'est pas convexe. Passons donc en revue les trous des *n*-abolos et dressons le début de cette table qui va s'agrandir de façon exponentielle lorsque *n* augmentera (on peut imaginer la diversité immense des combinaisons de trous multiples lorsque *n* dépasse 17).

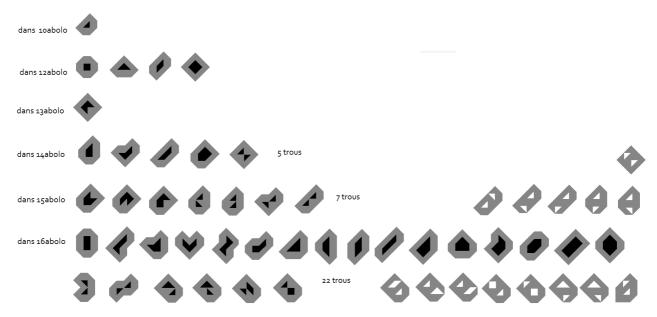


Illustration 42: Rang d'apparition des différentes formes de trou rencontrées dans les n-abolos pour n<17. À droite, quelques combinaisons trou+baie qui conduiront, dès n=17 aux formes ayant deux trous

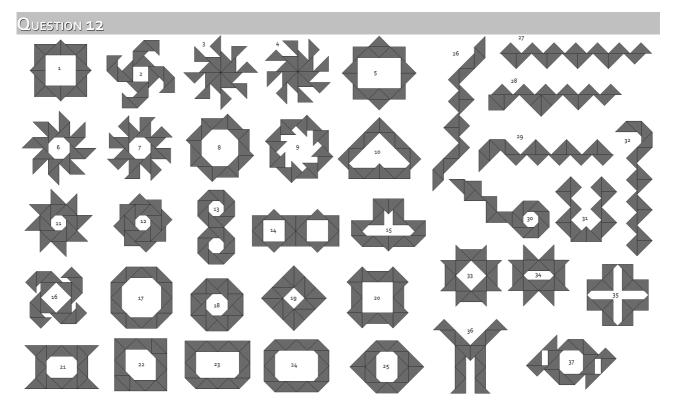


Illustration 43: Formes réalisées avec 16 triangles identiques, selon la règle d'assemblage hétérogène

a) Pour répondre simplement à la dernière question posée : non. Aucune de ces formes n'est réalisable avec le Tangram. Si l'on consulte attentivement l'image solution ci-dessus, on constate qu'aucune de ces formes n'est homogène. Cependant toutes ne sont pas hétérogènes, même si elles semblent l'être. La règle d'assemblage hétérogène impose en effet que les pièces s'assemblent par des points de référence et ces points sont, pour les triangles de ce jeu, les sommets des pièces. Ainsi la forme n°2 n'est pas un assemblage hétérogène valide, même si le trou carré a pour côté 1, car les quatre branches symétriques ne s'assemblent pas selon un point de référence. La forme n°7 n'est pas un assemblage hétérogène valide non plus, même si elle ressemble beaucoup à la forme n°6 (même trou octogonal) qui elle est valide, car on ne peut pas réaliser l'assemblage de trois pièces consécutives selon un point de référence. C'est ensuite la forme n°9 qui n'est pas un assemblage hétérogène, pour le même genre de raison (on ne peut pas réaliser l'assemblage de trois pièces consécutives selon un point de référence). Il y a encore deux formes qui ne sont pas des assemblages hétérogènes valides : la forme n°35 et la forme n°37. Pour la première, la raison est bien visible : les quatre paquets de quatre triangles s'assemblent par des points de référence, mais ne mettent pas un morceau de côté en commun, ce qui est interdit par la règle hétérogène, les intérieurs n'étant pas connectés entre eux. Pour la dernière, il y a deux assemblages qui ne se font pas à partir des points de référence. Pour les formes en serpent représentées dans le coin supérieur droit, il s'agit d'assemblages hétérogènes valides réalisant des longueurs peu usitées. Pour ces formes, il suffit de repérer le point de référence sur l'image-solution où commence l'assemblage, de part et d'autre d'une même ligne de démarcation. Par exemple, dans la forme n°27, ce point de référence se trouve entre le 5^{ème} et le 6^{ème} triangle du haut, en partant de la gauche.

b) Nous avions remarqué que les enveloppes convexes des tangrams hétérogènes pouvaient avoir jusqu'à onze côtés. Nous nous demandions pourquoi onze ? Comme pour les formes convexes, nous nous demandions pourquoi treize? L'explication est combinatoire et, concernant les formes convexes, nous pouvions en convenir lorsque nous considérions les vingt formes convexes théoriquement réalisables avec des 16abolos (la démonstration historique de Wang et Hsiung utilise un raisonnement de nature algébrique). Ici, ce sera plus difficile d'avoir le même genre d'argument, car nous ne connaissons pas l'ensemble des 16compacts qui contient les tangrams hétérogènes, et nous connaissons encore moins les 16compacts qui ont des enveloppes convexes possédant un maximum de côtés. Par contre, il n'est pas interdit de manipuler un jeu de seize triangles pour fabriquer une forme hétérogène dont l'enveloppe convexe a le plus de côtés possibles. Nous sommes arrivé facilement à douze, avec des formes d'allure scorpioïde, et en arrangeant bien les corps de nos scorpions, il s'en est trouvé un pour tenir dans une enveloppe à treize côtés! Cela semble un maximum, mais il faudra attendre la confirmation ultérieure d'un programme pour établir ce résultat (ou l'intervention d'un bon algébriste). Nos efforts pour obtenir cette ébauche de forme maximum ont abouti à cette belle couronne réalisée avec un jeu de 24 triangles dont l'enveloppe a seize côtés. Nous pouvons donc affirmer que le maximum cherché pour le nombre de côtés de l'enveloppe convexe des 16compacts est au moins égal à 13 et, pour les 24compacts, il est au moins égal à 16.

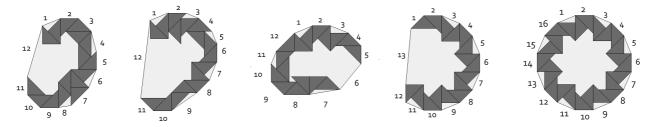


Illustration 44: Quelques 16compacts tenant dans des enveloppes convexes à 12 ou 13 côtés et un 24compacts enveloppé dans un polygone à 16 côtés et 8 axes de symétrie

Avec les fichiers de *n*-compacts que nous avons obtenus, la répartition des nombres de côtés des enveloppes convexes suit une progression qui semble indiquer des valeurs plus importantes que 13 pour le maximum des enveloppes de 16 compacts.

Nous avons une augmentation de un côté à chaque triangle supplémentaire, ce qui nous conduirait à 18 pour n=16, un nombre bien supérieur au nombre trouvé. On

peut s'attendre à un léger infléchissement de la croissance, car les nombres de ncompacts qui ont leur enveloppe convexe avec un maximum de côtés se raréfient
(77 pour n=8, et 11 pour n=9). Mais même s'il faut attendre n=11 pour avoir des
enveloppes dodécagonales, il est peu probable que pour n=16 on ne dépasse pas les
enveloppes à treize côtés. Cela suggère que notre recherche manuelle n'a pas
décelé les agencements qui maximisent ce facteur.

n/C	_ 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1															
2	1	4														
3	1	15	16													
4	2	78	199	74												
5	2	351	1 907	1 587	177											
6	11	1 813	16 305	24 119	6 433	276										
7	50	10 531	135 214	301 070	144 528	13 986	198									
8	187	68 525	1 138 944	3 439 849	2 503 561	441 665	15 313	77								
9	965	473 905	9 836 761	37 734 369	37 483 814	10 257 122	684 362	8 397	11							
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16											ici		ou		là	??

Tableau 14: Répartition des n-compacts selon le nombre de sommets de leur enveloppe convexe, pour n allant de 1 à 9, et prévision jusqu'à n=16

En ce qui concerne les côtés des 16compacts, nous pouvons peut-être déjà examiner le début de la progression du nombre maximum de côtés dans les ncompacts. On peut extraire ces valeurs du tableau plus général que nous avons pu établir avec nos fichiers exhaustifs de n-compacts pour n<10 (voir le texte). Nous avons reporté dans le tableau suivant ces nombres de côtés maximums obtenus pour les n-compacts (assemblages hétérogènes de n triangles), parallèlement aux nombres correspondants chez les *n*-abolos (assemblages homogènes de *n* triangles). Le nombre maximum de côtés chez les *n*-compacts suit une progression arithmétique de raison 2 (ce nombre augmente de 2 à chaque fois que n augmente de 1). Si bien que, chez les 16compacts, il y aura au maximum 33 côtés. C'est une chose de prévoir cela, c'en est une autre d'exhiber au moins une de ces formes à 33 côtés. Mais cela ne devrait pas être trop difficile tout de même, puisqu'il en existe vraisemblablement au moins deux mille milliards! Pour prévoir cet effectif, nous nous sommes basé sur l'observation suivante : le coefficient multiplicateur à chaque nouvelle valeur de n tend à se stabiliser assez rapidement autour d'une valeur égale à 7.30 (ou 7.31, peu importe). Nous pouvons ainsi faire une première estimation des nombres de côtés maximum dans les n-compacts, pour n>9 et en particulier pour n=16 (l'aire du Tangram) : avec un coefficient de 7.30, on trouve 2 032 891 457 451 et, avec un coefficient de 7.31, on trouve 2 052 465 230 521. La différence n'est pas grande (juste vingt milliards..., soit moins de 1%) entre ces deux valeurs.

C'est donc juste pour le plaisir que nous recherchons une de ces deux mille milliards de formes à 33 côtés. Nous en trouvons quelques-une sans difficulté, et

commençons à comprendre d'où vient cette formidable prolixité. Nous nous interrogeons sur la possibilité d'obtenir une forme à 33 côtés qui soit symétrique quand, par surprise, nous (re)découvrons les étoiles qui sont tout de même très remarquables pour leur exceptionnelle symétrie (centre de rotation d'ordre 8). Les étoiles pleines totalisent rapidement 24 ou 32 côtés mais, lorsqu'elles ont un trou, le nombre de 33 est vite dépassé : nous en trouvons une à 36 côtés (32+4), et enfin deux à quarante côtés (24+16 ou 32+8). Nous n'avons pas trouvé mieux, mais nous restons un moment abasourdi par ce nombre qui dépasse tellement celui que nous avions obtenu par un raisonnement aussi simple que solide, mais qui ne prenait pas en considération les formes à trou. Sur l'élan de notre génération des *n*-compacts qui ne construisait que des formes pleines, nous avions court-circuité l'existence des trous!

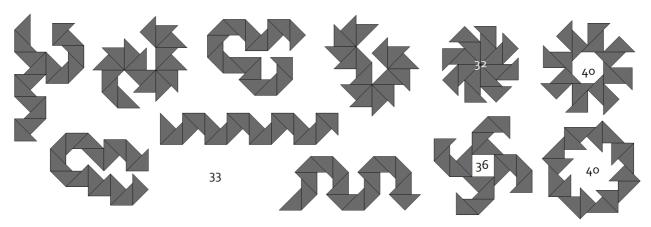


Illustration 45: Recherche des 16compacts ayant le maximum de côtés (voir le texte)

Pour les formes homogènes, l'existence d'un trou entraîne une diminution du nombre maximum de côtés (2 segments supplémentaires sont mobilisés dans la formation du trou, ce qui limite le nombre de côtés à 16 au lieu de 18). Comment se fait-il que chez les formes hétérogènes, le phénomène soit inverse ? Ce n'est pas difficile de comprendre pourquoi, dans un n-compact plein, le nombre de côtés augmente au mieux de 2 à chaque triangle supplémentaire : il suffit d'ajouter le triangle supplémentaire sur un côté de manière à superposer un côté de longueur 1 avec un côté de longueur $\sqrt{2}$ (cela fait disparaître le côté de longueur 1 et apparaître trois côtés dont deux de longueur 1 et un de longueur $\sqrt{2}-1$). Si l'on crée un trou au $n^{\text{ième}}$ triangle ajouté, on fait disparaître un côté supplémentaire, ce qui ramènerait plutôt le nombre maximum à 32 au lieu de 33 pour les 16compacts troués. Alors qu'est-ce qui explique les nombres de côtés allant jusqu'à 40, trouvés pour ces formes? Vous avez une idée? C'est que, tout simplement, comme nous l'avons écrit un peu plus haut, les formes que nous venons d'exhiber ne sont pas des formes hétérogènes! Si l'on s'autorise d'autres règles d'assemblage que la règle hétérogène, on peut, à chaque nouveau triangle, ajouter non pas deux, mais trois

côtés à la forme. Ce qui fait que dans une forme propre pleine (assemblée par les côtés, mais sans les attacher par des points de référence) à seize triangles (ce ne sont plus des 16compacts), il peut y avoir jusqu'à 16×3=48 côtés, et c'est bien ce que l'on trouve lorsqu'on se permet des assemblages réglés par les milieux (voir chapitre 14) comme ce « dragon » à 48 côtés ou cette rosace à trou octogonal qui a 48 côtés également. Voilà, les formes trouées à 36 ou 40 côtés n'atteignent ces valeurs que par leur mode d'assemblage, plus souple que la règle hétérogène.

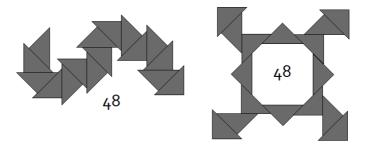


Illustration 46: Formes obtenues avec 16 triangles selon des assemblages propres mais non-hétérogènes

QUESTION 13

a) Pour répondre à la question du dénombrement, il faut déjà compter tous les jeux possibles à cinq pièces. Cela nécessite, au préalable, de faire l'inventaire des différentes structures de jeux à cinq pièces polyaboliques (même chose si l'on veut répondre aussi pour les jeux à six pièces). Nos réponses à cette question préalable ont été obtenues « à la main », avec une possibilité non négligeable d'erreur et d'omission, pour se donner une idée de l'ordre de grandeur des résultats. Pour entrer dans le détail de nos calculs de dénombrement des jeux d'une structure ayant des pièces en doubles, il y a parfois plusieurs configurations différentes de ces doubles. L'effectif est alors la somme de plusieurs dénombrements partiels.

0	1.2.2.2.3.6	428	2	1.1.1.2.2.9	9	3	1.1.1.1.2.10	39 720
- 0			-	1.1.1.2.2.9	96			
	1.2.2.2.4.5	420			168		1.1.1.1.3.9	14 972
	1.2.2.3.3.5	540		1.1.1.2.4.7			1.1.1.2.2.9	11 229
	1.2.3.3.3.4	1 092		1.1.1.2.5.6	9 630		1.1.1.1.4.8	15 624
	1.2.2.3.4.4	168		1.1.1.3.3.7	24		1.1.2.2.2.8	1 116
	2.2.2.3.3.4	84		1.1.1.3.4.6	5 992		1.1.1.1.5.7	9 540
	2.2.3.3.3.3	3		1.1.1.3.5.5	1740		1.2.2.2.2.7	954
1	1.1.2.2.2.8	1 116		1.1.1.4.4.5	2 730		1.1.1.1.6.6	5 671
	1.1.2.2.3.7	3816		1.1.2.2.2.8	48		2.2.2.2.2.6	642
	1.1.2.2.4.6	4 496		1.1.2.2.3.7	48		1.1.1.3.5.5	120
	1.1.2.2.5.5	1305		1.1.2.2.4.6	4 494		1.1.1.4.4.5	420
	1.1.2.3.3.6	1 926		1.1.2.2.5.5	1395		1.1.2.2.5.5	90
	1.1.2.3.4.5	5 040		1.1.2.3.3.6	1 284		1.1.3.3.3.5	120
	1.1.2.4.4.4	1 0 9 2		1.1.2.4.4.4	546		2.2.2.2.3.5	360
	1.1.3.3.3.5	120		1.1.3.3.3.5	360		1.1.3.3.4.4	56
	1.1.3.3.4.4	546		1.1.3.3.4.4	448		2.2.2.3.3.4	168
	1.2.2.2.2.7	954		1.2.2.2.2.7	36		1.3.3.3.3.3	12
	1.2.2.2.3.6	2 568		1.2.2.2.3.6	1 284		2.2.3.3.3.3	66
	1.2.2.2.4.5	2 520		1.2.2.2.4.5	1 260	4	1.1.1.1.1.11	46 476
	1.2.2.3.3.5	900		1.2.2.3.3.5	360		2.2.2.2.2.6	321
	1.2.2.3.4.4	1 260		1.2.2.3.4.4	168		1.3.3.3.3.3	4
	1.2.3.3.3.4	504		1.2.3.3.3.4	168	5	-	Ö
	1.3.3.3.3.3	4		1.3.3.3.3.3	24		al 6 pièces	215 388
	2.2.2.2.3.5	360		2.2.2.2.2.6	642			
	2.2.2.2.4.4	273		2.2.2.2.3.5	1 080			
	2.2.2.3.3.4	560		2.2.2.2.4.4	861			
	2.2.3.3.3.3	39	1	2.2.2.3.3.4	588			
	£.£.j.j.j.j	23	'	2.2.3.3.3.3	90			

Tableau 15: Les différentes structures de jeux à 6 pièces. La colonne de gauche indique le nombre de pièces en double, celui de droite indique le nombre de jeux de cette structure

Pour les jeux de six pièces, on peut ainsi donner quelques explications : la structure 2.2.3.3.3.3 des jeux à trois doubles (18ème ligne de la 3ème colonne) est rencontrée dans 66 jeux. Pour trouver 66, il faut distinguer comment sont distribués les doubles. Notre formule de calcul est : 3×4+3×4×3+3×2×3=12+36+18=66, ce qui indique que l'on a distingué trois cas. Le premier correspond aux doubles dans les pièces d'aire 3 : il faut choisir les deux pièces d'aire 2 qui ne sont pas doublées (3 possibilités), et ensuite la pièce d'aire 3 qui est quadruplée (4 possibilités). Le deuxième cas correspond à un double pour la pièce d'aire 2 (3 possibilités) et deux doubles pour une même pièce d'aire 3 qui est ainsi triplée (4 possibilités), et il faut choisir la 2ème pièce d'aire 3 (trois possibilités). Le troisième cas correspond à un double pour la pièce d'aire 2 (trois possibilités) et deux pièces d'aire 3 doublées (4

possibilités pour la 1ère, 3 pour la 2ème et une division par 2 car les deux pièces sont alors interchangeables). Voilà expliqué un des résultats les moins évidents. Pour les autres, c'est souvent plus simple : la structure 1.2.2.2.3.6 des jeux sans double (1ère ligne de la 1ère colonne) est rencontrée dans 428 jeux. Cette structure ne prête pas à confusion car, les pièces n'étant pas doublées, il n'y a qu'une seule possibilité pour le groupe de trois pièces d'aire 2 (on choisit obligatoirement les trois diabolos). Il suffit alors de choisir la pièce d'aire 3 (il y en a quatre de possibles) et la pièce d'aire 6 (107 possibilités). Le calcul est donc 4×107=428.

0	1.2.2.2.9	3 743
	1.2.2.3.8	13 392
	1.2.2.4.7	13 356
	1.2.2.5.6	9 630
	1.2.3.3.7	5 724
	1.2.3.4.6	17 976
	1.2.3.5.5	5 220
	1.2.4.4.5	8 190
	1.3.3.3.6	428
	1.3.3.4.5	2 520
	1.3.4.4.4	1 456
	2.2.2.3.7	1 272
	2.2.2.4.6	1 498
	2.2.2.5.5	435
	2.2.3.3.6	1 926
	2.2.3.4.5	5 040
	2.2.4.4.4	1 092
	2.3.3.3.5	360
	2.3.3.4.4	1 638
	3-3-3-3-4	14

1	1.1.2.2.10	39 720
	1.2.2.2.9	22 458
	1.2.2.3.8	13 392
	2.2.2.2.8	3 348
	1.2.2.4.7	13 356
	1.2.3.3.7	3 816
	2.2.2.3.7	7 632
	1.2.2.5.6	9 630
	1.3.3.3.6	1 284
	2.2.2.4.6	8 988
	2.2.3.3.6	3 210
	1.2.3.5.5	360
	1.2.4.4.5	1 260
	1.3.3.4.5	1 680
	2.2.2.5.5	2 640
	2.2.3.4.5	5 040
	2.3.3.3.5	1 080
	1.3.4.4.4	728
	2.2.4.4.4	1 638
	2.3.3.4.4	1344
	3.3.3.3.4	168

2	1.1.1.2.11	139 428
	1.1.2.2.10	39 720
	1.2.2.2.9	11 229
	2.2.2.2.8	10 044
	2.2.2.3.7	3 816
	1.3.3.3.6	428
	2.2.2.4.6	4 494
	2.2.3.3.6	1 284
	2.2.2.5.5	270
	2.3.3.3.5	360
	1.3.4.4.4	56
	2.2.4.4.4	588
	2.3.3.4.4	168
	3.3.3.3.4	252
3	2.2.2.2.8	3 348
	2.2.2.5.5	180
	2.2.4.4.4	42
	3.3.3.3.4	56
4	-	0
Total	5 pièces	453 445

Tableau 16: Les différentes structures de jeux à 5 pièces.

Pour les jeux de cinq pièces, on en trouve davantage (453 445 jeux) que des jeux à six pièces (215 388 jeux). Pourtant, il y a moins de structures à cinq pièces possibles (59 structures seulement alors que pour les jeux à six pièces, on a 76 structures différentes). L'abondance des polyabolos de grandes aires joue en faveur des jeux à cinq pièces qui nécessitent des pièces plus grandes car moins nombreuses. La seule structure 1.1.1.2.11 qui nécessite deux doubles contient à elle seule près du tiers des jeux à cinq pièces, en raison de la très grande abondance des 11abolos (46 476 formes). Les structures contenant des nombres très impressionnants de jeux ont, la plupart du temps, des capacités combinatoires décevantes. Cela conduit à une simplification de la recherche du meilleur jeu, car on peut exclure de la compétition les jeux extrêmes ayant des distributions pas assez ou trop équilibrées.

Pour illustrer cela, nous montrons une partie de notre tableau présentant les résultats de la compétition pour reconstituer le plus de formes symétriques remarquables des jeux de six pièces ayant un double. Les structures qui réussissent le mieux sont 1.1.2.3.4.5 et 1.2.3.3.3.4 qui ne présentent pas de polyabolo d'aire supérieure à 5. Pour les jeux ayant une pièce d'aire 6, qui sont pourtant nombreux,

Tangram Évolutif (solutions)

les résultats ne dépassent pas 17 formes symétriques remarquables. Pour cette raison, nous avons négligé l'étude des jeux contenant une pièce d'aire 7 ou 8. Ces jeux sont trop nombreux et pas assez prometteurs, nous y passerions beaucoup de temps pour rien. Notre programme est par ailleurs bridé, en ce sens qu'il ne contient pas l'ensemble des polyabolos d'aire 7 et 8 (il ne contient les ensembles de polyabolos au complet que pour les aires inférieures ou égales à 6). Cela pourrait nous handicaper pour d'autres recherches que celles-là (pour des jeux d'aire 32 ou 36, l'absence de certains octobolos peut conduire à la non-détection de certains jeux très performants), mais ici, comme il n'y a pas de belle performance à attendre, cela nous empêcherait juste d'avoir un résultat médiocre mais exhaustif.

Comme nous avons dénombré différents jeux à cinq pièces possibles, il ne nous reste plus qu'à déterminer, pour un jeu moyen, le nombre de tests à effectuer. Nous devons tester si une forme remarquable (il y en a 69) est reconstituable avec un jeu donné et, pour cela, nous plaçons une des pièces dans une des seize positions possibles (il y en a 4×4=16 pour une forme moyenne entrant dans un carré de 4 sur 4), et nous plaçons les quatre autres pièces dans les 15×14×13×12=32 760 combinaisons de places restantes possibles. Il faut essayer chacune des pièces dans toutes les orientations possibles, ce qui dépend de la symétrie de la pièce : si la pièce n'a aucune symétrie, elle se présente dans huit orientations différentes (les alias), avec un axe de symétrie ou un centre R2, le nombre d'alias est divisé par 2. Comme la plupart des pièces d'aire inférieure à 6 n'ont pas d'élément de

	formes sym.
structure nbr jeux	Remarquables
1.1.2.2.2.8 1 116	-
1.1.2.2.3.7 3 816	-
1.1.2.2.4.6 4 496	12
1.1.2.2.5.5 1 305	14
1.1.2.3.3.6 1 926	17
1.1.2.3.4.5 5 040	19
1.1.2.4.4.4 1 092	15
1.1.3.3.3.5 120	12
1.1.3.3.4.4 546	16
1.2.2.2.2.7 954	-
1.2.2.2.3.6 2 568	17
1.2.2.2.4.5 2 520	12
1.2.2.3.3.5 900	15
1.2.2.3.4.4 1 260	17
1.2.3.3.3.4 504	19
1.3.3.3.3.3 4	-
2.2.2.2.3.5 360	-
2.2.2.2.4.4 273	-
2.2.2.3.3.4 560	-
2.2.3.3.3.3 39	-

Tableau 17: Résultats de la compétition concernant les formes symétriques remarquables pour les jeux à 6 pièces ayant un double

symétrie, nous devons compter huit alias par pièce. Au mieux, la 1ère position testée reconstitue la forme, l'algorithme arrête la recherche pour cette forme et passe à la suivante. Au pire, il faut essayer toutes les combinaisons de place et il y en a 16×32 760=524 160 pour chaque alias (8×524 160=4 193 280) avant de conclure que la forme n'est pas reconstituable et passer à la suivante. C'est malheureusement le cas général, les formes remarquables sont reconstituables de manière

exceptionnelle: pour la plupart des jeux qui en reconstituent, disons une douzaine, il y en a 69–12=57, soit 83% qui ne sont pas reconstituables. Restons donc sur cette évaluation haute du nombre de tests à effectuer : 4 193 280 combinaisons de place et d'orientation pour 69 formes, tout cela à recommencer pour 453 445 jeux différents, cela fait 131 198 107 622 400 vérifications! Bon, nous avons dit que certains jeux pouvaient être évités, car peu prometteurs. Même avec la moitié des jeux à tester, cela fait tout de même près de 66 ooo milliards de vérifications à faire. Il est vrai que l'algorithme peut être optimisé pour améliorer au maximum ses performances. On peut prendre, par exemple, en considération certains épiphénomènes comme le fait qu'une des formes remarquables (la forme convexe très effilée de dimension 72) peut être exclue de la procédure de vérification générale dès lors que certaines pièces ne sont pas correctement profilées. L'ordinateur effectue par ailleurs ces vérifications en une fraction infime de seconde (la fréquence des horloge qui synchronise les calculs des processeurs se mesure en GHz, il peut donc y avoir des milliards d'opérations chaque seconde). Mais même à ce rythme surhumain, cela fait tout de même un certain temps de calcul...

Nous voudrions maintenant obtenir quelque ordre de grandeur concernant les temps de calcul. Car nous parlons de « vérification » ou de « test » sans pouvoir véritablement quantifier le traitement réel que ces opérations, nécessairement

```
structure d'origine (1 double): 1 2 3 3 3 4
                                                 MatchedShapes=13 Best=13 TotalBestSets=1
MatchedShapes=15 Best=15 TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=13 Best=15 TotalBestSets=1
MatchedShapes=12 Best=15 TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=12 Best=15 TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=15 Best=15 TotalBestSets=2
MatchedShapes=13 Best=15 TotalBestSets=2
                                                MatchedShapes=14 Best=15 TotalBestSets=2 MatchedShapes=16 Best=16 TotalBestSets=1
                                                 MatchedShapes=15 Best=16 TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=11 Best=16 TotalBestSets=1
MatchedShapes=14 Best=16 TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=13 Best=16 TotalBestSets=1
MatchedShapes=13 Best=16 TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=13 Best=16 TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=12 Best=16 TotalBestSets=1
MatchedShapes=13 Best=16 TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=12 Best=16 TotalBestSets=1
MatchedShapes=13 Best=16 TotalBestSets=1
                                                 MatchedShapes=14 Best=16 TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=13 Best=16 TotalBestSets=1
MatchedShapes=12 Best=16 TotalBestSets=1
                                                 MatchedShapes=14 Best=16 TotalBestSets=1
                                                 MatchedShapes=14 Best=16
                                                                                        TotalBestSets=1
                                                MatchedShapes=12 Best=16 TotalBestSets=1
MatchedShapes=12 Best=16 TotalBestSets=1
MatchedShapes=12 Best=16 TotalBestSets=1
MatchedShapes=12 Best=16 TotalBestSets=1
                                                 MatchedShapes=12 Best=16 TotalBestSets=1
 Fin de la recherche : 504 tansets pris en compte.
```

Illustration 47: La recherche de reconstitution des 20 formes convexes à l'aide des 504 jeux de la structure 1.2.3.3.3.4 (1 double) demande 35 secondes de traitement. Le meilleur jeu, composé des pièces 1 2 5 5 7 9, est le 29^{ème} examiné par notre algorithme et le 9^{ème} affiché sur cette sortie (qui n'affiche que les jeux dont le « MatchedShapes », le nombre de formes reconstituées, atteint ou dépasse 14). Le compteur « TotalBestShapes » indique que 1 seul jeu atteint ce meilleur score

complexes, entraînent. La plupart de mes programmes sur le Tangram tournent sur des machines très modestes (l'appréciation de la puissance d'une machine est toute relative, dans vingt ans ont rira sans doute des ordinateurs des années 10) dans de bonnes conditions. Il n'y a que lorsqu'une grande quantité de mémoire est nécessaire que la machine peine. La solution consiste alors souvent à fragmenter les ensembles, quitte à allonger les temps de traitement (lecture/écriture sur le disque).

Pour donner un exemple concret, nous allons demander au petit notebook de ma fille (équipé d'un système d'exploitation de 32 bits avec un seul cœur de processeur tournant à 1.83 GHz et d'une mémoire vive de 1 Go), la tâche de déterminer lequel des 504 jeux de la structure 1.2.3.3.3.4 avec un double, obtient la meilleure performance pour reconstituer les vingt polyabolos convexes d'aire moyenne 16 (c'est un peu plus en réalité). Avec les jeux de six pièces, il y a 524 160×11=5 765 760 combinaisons de place (le facteur 11 correspond aux choix possibles de l'emplacement de la 6^{ème} pièces, car sur seize places il y en a déjà cing d'occupées), ce qui conduit à 46 126 080 combinaisons de place et d'orientation pour vingt formes, tout cela à recommencer pour 504 jeux différents, cela fait 464 950 886 400 vérifications. Combien de temps faut-il à notre petite machine? Le temps de traitement pour cette recherche est de 35 secondes, ce qui conduit à une vitesse de traitement d'environ 13 284 000 000 tests par seconde! À cette vitesse, pour explorer l'ensemble des 453 445 jeux à cinq pièces d'aire 16 sur les 69 formes remarquables (131 198 107 622 400 vérifications), il faut moins de trois heures de traitement, ce qui est très raisonnable.

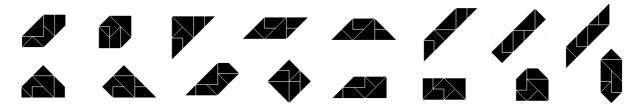


Illustration 48: Les 16 formes convexes réalisables avec le jeu 1 2 5 5 7 9 qui est le meilleur dans sa structure (une des 3 pièces d'aire 3 est doublée, ici il s'agit du trapèze convexe de numéro 5)

b) Récapitulons les capacités des jeux de cinq et six pièces : on savait déjà que parmi les jeux à six pièces, le record pour les formes symétriques remarquables est 25 (jeu nommé pour cette raison Win25). Il nous manque le record pour les jeux à cinq pièces. Pour la reconstitution des formes convexes, on sait que Penta a le record des jeux à cinq pièces avec (15 formes) et Heptex, avec ses deux doubles, a celui des jeux à six pièces (19 formes). En ce qui concerne la reconstitution des formes homogènes, on connait les scores pour les jeux de cinq pièces de Regulus (100 067 formes, soit 0.35%) et de Penta (232 904 formes, soit 0.81%) et pour les jeux de six pièces, on connait celui de Cocogram (1 287 383 formes, soit 4.5%), mais c'est tout.

On peut aussi rappeler qu'on ne sait rien de ces jeux pour la reconstitution des formes symétriques, et pour celle des formes remarquables (convexes+symétriques remarquables). Cela fait beaucoup de recherches à mener, sur ces ensembles très vastes de jeux : avec les lacunes déjà mentionnées, notre programme ne prenant pas toutes les pièces de plus de six triangles d'aire, cela fait 156 459 jeux à cinq pièces et 71 518 jeux à six pièces. Nous avons omis la plupart du temps l'examen des structures contenant de trop grandes pièces car ces jeux sont jugés peu prometteurs (mais c'est peut-être une erreur). Les résultats sont récapitulés dans le tableau ci-dessous. Il se trouve qu'il y a peu de champions pour toutes ces catégories : ce sont souvent les mêmes jeux qui gagnent à plusieurs catégories.

QUESTION 14

Le plus simple est, sans doute, de partir de la table des longueurs réelles (égales à $a\sqrt{2}-b$ ou $-a\sqrt{2}+b$, celle des deux valeurs qui est positive, où a est la partie irrationnelle et b la partie rationnelle). Par contre, puisque nous avons comme projet de diviser par deux ces longueurs, il nous faut revenir au développement du polynôme caractéristique du Tangram (chapitre 9) qui indique qu'on peut disposer sur une ligne jusqu'à huit segments irrationnels et dix segments rationnels. La partie noire du tableau ci-dessous indique des valeurs impossibles à réaliser avec le Tangram alors que la partie grisée indique des valeurs supérieures au maximum possible pour le double d'un segment ($2\sqrt{2}$).

b=partie		a= partie irrationnelle							
rationnelle	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.000	1.414	2.828	4.243	5.657	7.071	8.485	9.899	11.314
1	1.000	0.414	1.828	3.243	4.657	6.071	7.485	8.899	10.314
2	2.000	0.586	0.828	2.243	3.657	5.071	6.485	7.899	
3	3.000	1.586	0.172	1.243	2.657	4.071	5.485	6.899	
4	4.000	2.586	1.172	0.243	1.657	3.071	4.485		
5	5.000	3.586	2.172	0.757	0.657	2.071			
6	6.000	4.586	3.172	1.757	0.343				
7	7.000	5.586	4.172	2.757					
8	8.000	6.586	5.172						
9	9.000	7.586							
10	10.000								

Tableau 18: Les doubles des nouvelles longueurs de segments arrondies au millième. Sur fond gris foncé, les valeurs trop grandes et sur fond gris clair les valeurs connues. La partie noircie est inaccessible au Tangram

Nous y identifions douze valeurs comprises entre $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ (sur fond blanc), dont les moitiés conviendraient. Cela fait donc, au total, vingt-quatre valeurs à diviser par deux. Les moitiés de ces vingt-quatre longueurs peuvent constituer, à priori, des valeurs possibles pour les longueurs de segment des formes réglées.

On voit dans le tableau 19 que, finalement, il n'y a plus que dix-huit nouvelles longueurs (six moitiés étant déjà connues) que l'on va maintenant numéroter pour les identifier, de n1 à ng pour les moitiés de longueurs supérieures à 2√2 (dans l'ordre croissant de leur valeur décimale) et de m1 à m9 pour les moitiés des Tableau 19: Les moitiés des longueurs précédentes longueurs connues (lorsque celles-ci sont égales à des longueurs connues, nous n'avons pas changé le nom).

b=partie	a= partie irrationnelle								
rationnelle	0	1	2	3	4	5			
0		0.707	1.414						
1	0.500	0.207	0.914						
2	1.000	0.293	0.414	1.121					
3		0.793	0.086	0.621	1.328				
4		1.293	0.586	0.121	0.828				
5			1.086	0.379	0.328	1.036			
6				0.879	0.172				
7				1.379					

offrent 18 nouvelles longueurs (sur fond gris les valeurs déjà connues) réparties en 2 groupes de 9

Pour résumer, classons les dix-huit longueurs par ordre croissant en leur donnant leur écriture exacte explicitement, sans la simplification qui est parfois possible (afin de mieux reconnaître les longueurs de segment à utiliser) :

Tableau 20: Les noms utilisés pour les nouvelles longueurs de segments. Sur fond gris, les segments déjà connus ; sur fond gris clair, les moitiés de segments connus et sur fond blanc les moitiés des longueurs supérieures à $2\sqrt{2}$

Pour savoir si les valeurs obtenues théoriquement sont réalisables, il nous faut exhiber au moins une forme réglée par nouvelle longueur. Commençons par examiner les figures données en exemple dans le texte.

Pour chacune de ces nouvelles longueurs nous avons trouvé un exemple de Tangram réglé par les milieux qui conviennent, sauf pour les longueurs n_4 , n_5 et n_9 qui ne semblent pas réalisables. Un lecteur trouvera t-il une possibilité ? La forme proposée pour n_4 n'est pas un tangram (le triangle moyen a été changé en parallélogramme et on a ajouté un petit triangle) et la partie du haut n'est pas assemblée de façon propre ; celle proposée pour n_5 est un tangram mais le groupe des cinq pièces inférieures n'est pas assemblé proprement par les côtés (il s'agirait, dans ce cas plutôt, d'une forme à baie réglée par la butée) ; le tangram proposé pour n_9 a le même défaut que le précédent, et en plus, les segments ayant la bonne longueur sont, en fait, constitués de deux segments de longueurs n°9 et m_6 . Pour certaines longueurs, il faut un peu de ruse pour réussir à les matérialiser : la longueur n_7 par exemple doit se détacher sur un segment de longueur $\sqrt{2}$, car elle est supérieure à 1. Or, elle vaut $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$ ce qui suggérerait plutôt de poser un segment

de longueur $\sqrt{2}$ sur un groupe dont le côté a pour longueur 4. Mais, ce faisant, nous créerions deux segments adjacents de longueurs n°9 et m_5 ...

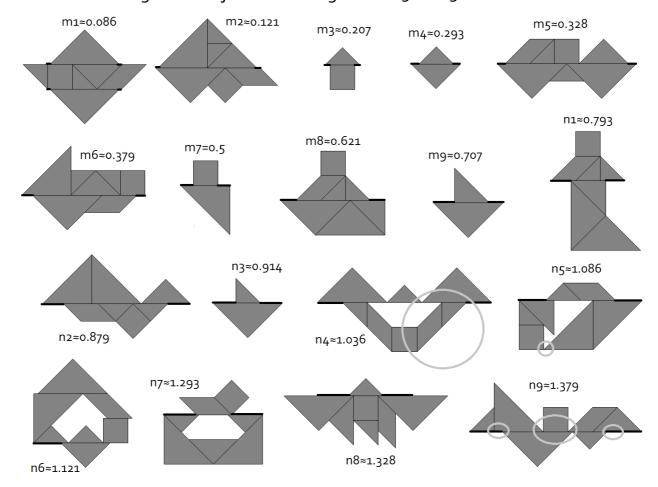


Illustration 49: Un exemple de chacune des 18 nouvelles longueurs qui peuvent se rencontrer avec les tangrams réglés par les milieux. Certains exemples n'étant pas corrects (nous en avons cerclé la ou les parties invalides) il n'en reste que 15

Pour les longueurs m_5 et n_2 , nous avons réalisé des assemblages qui ne semblent pas valides (pour la même raison que pour n_5), mais qui le sont en réalité car, si l'on examine leur construction, elle commence par un assemblage réglé par les milieux au centre de la forme, les autres pièces s'agrégeant ensuite de façon hétérogène. Même chose pour l'assemblage matérialisant la longueur n_6 , on commence par l'assemblage réglé du bas, entre le petit et le moyen triangle. Les longueurs m_1 à m_{12} ne posent, quant à elles, aucun problème de réalisation.

Il est évident que certaines de ces longueurs seront très fréquentes chez les tangrams réglés par les milieux car on peut les réaliser avec très peu de pièces. Ce sera le cas, notamment, de m3, m4, m7, m9 et n3 qui peuvent être réalisées avec deux pièces seulement. Inversement, certaines longueurs seront rares comme m5 qui ne peut se passer de mobiliser les sept pièces du jeu. Trois de ces longueurs, au plus, seront même absentes car on ne peut vraisemblablement pas les réaliser (n4,

n5 et n9).

Nous avons dit que ces nouvelles longueurs pouvaient se rencontrer aussi avec des assemblages réglés par butée. Ce devrait être instructif, pour se familiariser avec ce type d'assemblage dont nous n'avons donné qu'un seul exemple non-symétrique, de les produire réellement. Nous avions remarqué que ce serait sans doute plus difficile d'évaluer les longueurs pour ce type d'assemblage, mais rien n'interdit d'essayer. L'exemple non symétrique du texte nous fournit déjà les longueurs m_2 (la longueur notée L4 dans le texte), m_4 (les longueurs notées L3 et L5) et m_9 (la

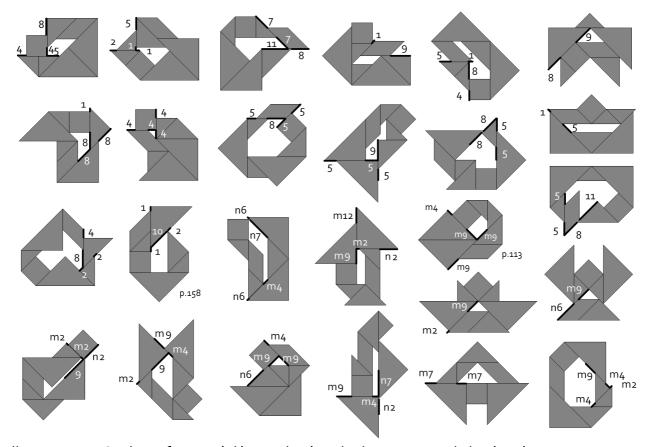


Illustration 50: Quelques formes réglées par butée et les longueurs que la butée crée

longueur notée L2 et une partie de celle notée L1). Il reste à produire les quatorze autres nouvelles longueurs. Nous sommes parti vraiment au hasard, créant des assemblages réglés par butée aussi variés que possible, mais cette marche au hasard ressemble beaucoup à celle d'une personne sans boussole (et sans GPS) dans un désert qu'il ne connaît pas... Nous avons aussi trouvé deux autres exemples dans le livre de J. Slocum (p.113 et 158). Chemin faisant, nous avons trouvé des échantillons de quelques-unes des longueurs souhaitées, mais il en manque beaucoup. Cette mini-exploration nous permet de manipuler et d'observer la formation des butées, qui peuvent survenir de l'intérieur (la forme du bas à droite) ou créer une baie (2ème et 3ème formes de la 3ème ligne). Nous ne nous sommes pas

Tangram Évolutif (solutions)

beaucoup aventuré dans l'idée de former deux blocs hétérogènes avec les pièces que l'on veut faire buter, et pourtant c'est cela qui amènera sans doute les longueurs les plus rares. Une des bonnes choses (sous l'angle de la recherche des nouvelles longueurs) est qu'à chaque fois qu'une butée est réalisée, ce sont quatre longueurs qui sont créées.

Pour les moitiés de segments connus, nous n'avons trouvé que m_2 , m_4 , m_7 et m_9 et pour les nouvelles longueurs, nous avons des échantillons de n_2 , n_6 et n_7 . Il reste donc à trouver des formes réglées par butée qui réalisent des segments de onze longueurs différentes m_1 , m_3 , m_5 , m_6 , m_8 , n_1 , n_3 , n_4 , n_5 , n_8 et n_9 ... Au travail, cher lecteur! La méthodologie que nous avons employé : recherche au petit bonheur avec l'applet de S. Antoy – pas très adaptée à cause du mécanisme d'aimantation des sommets des pièces lorsque ceux-ci sont proches – et construction de la forme trouvée sur un logiciel de géométrie dynamique qui affiche les longueurs des segments avec une grande précision (ici trois décimales suffisent). Cette méthodologie n'est pas assez efficace, à notre avis, pour espérer trouver, si elles existent, les longueurs manquantes.

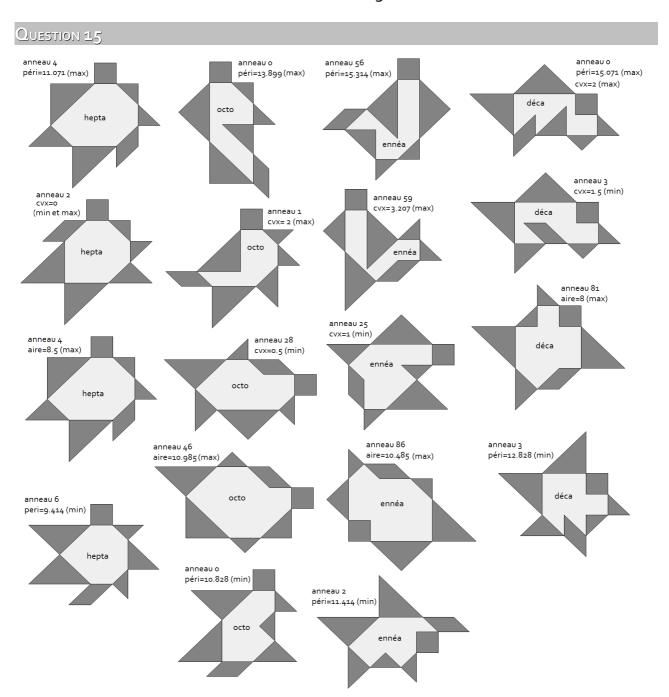


Illustration 51: Les fermes détenant les valeurs minimales ou maximales recherchées, classées selon leur nombre de côtés

Mis à part la question concernant la convexité2 qui relève d'un algorithme trop compliqué, nous avons analysé par un programme spécifique l'ensemble des fermes « complètement impropres » constitué lors de notre recherche de la ferme propre d'aire maximum. Cette analyse gagnerait à être complétée par l'étude des fermes propres n'entrant pas dans cette catégorie.

a) La ferme de périmètre minimal de cette collection des fermes impropres a la forme d'un heptagone (figure 51, en bas à gauche) de périmètre $8+\sqrt{2}\approx 9.414$. En dehors des fermes impropres, le périmètre minimal d'une ferme n'existe pas car une

forme propre peut avoir un périmètre aussi faible que l'on veut (voir la figure 52, ligne du bas) et une ferme de périmètre nul n'est plus une ferme. La ferme de périmètre maximum est un ennéagone dont le périmètre vaut $4+8\sqrt{2}\approx 15.314$ (figure 51, $3^{\text{ème}}$ forme de la ligne du haut).

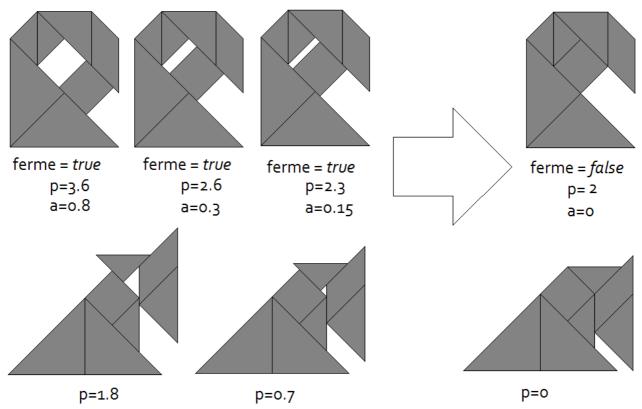


Illustration 52: Une ferme de périmètre ou d'aire minimale n'existe pas car on peut réduire le trou de certaines formes propres, comme ici le trou triangulaire, jusqu'à le faire disparaître complètement, annulant le périmètre et l'aire. Pour le trou rectangulaire du haut, seule l'aire est annulée

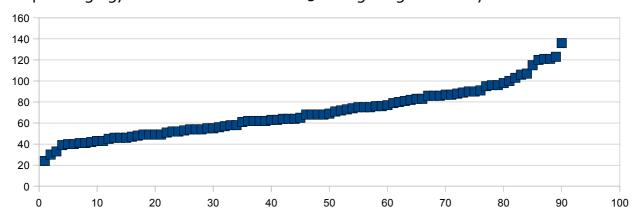
- b) Passons en revue la collection des fermes impropres, en balayant les différentes valeurs que prend le nombre des côtés de la ferme :
 - 7. Seulement 63 des 6 281 fermes impropres sont des heptagones. Il apparaît que ces fermes à sept côtés sont toutes convexes; elles contiennent les fermes de périmètre minimal de cette collection et leur périmètre peut aller jusqu'à la valeur $4+5\sqrt{2}\approx_{11.071}$; l'aire maximum de ces fermes heptagonales est de 8.5.
 - 8. Les fermes à huit côtés sont les plus nombreuses car il y en a 3 381. Leur convexité1 ne descend pas en dessous de 0.5 aucune n'est donc convexe et peut aller jusqu'à 2 ; leur périmètre varie de $8+2\sqrt{2}\approx 10.828$ à $4+7\sqrt{2}\approx 13.899$; rappelons que c'est parmi ces fermes octogonales que l'on trouve celle d'aire maximale (la ferme de Gardner) qui a pour aire $2.5+6\sqrt{2}\approx 10.985$.
 - 9. Les fermes à neuf côtés sont encore très nombreuses puisqu'il y en a 2 732.

Question 15

Cet ensemble contient les fermes de périmètre maximum et aussi celles de convexité1 maximum, égale à $2.5+0.5\sqrt{2}\approx3.207$; cette convexité ne descend pas en dessous de 1 et le périmètre ne descend pas en dessous de $10+\sqrt{2}\approx11.414$; pour ces fermes ennéagonales, l'aire maximale est de $2+6\sqrt{2}\approx10.485$.

10. Il n'y a que 105 des fermes impropres qui soient des décagones. Parmi ces fermes à dix côtés, aucune n'est maximale, sauf pour leur nombre de côtés. Certaines fermes propres peuvent dépasser ce nombre pour atteindre au moins la valeur de 12 (Gardner disait que l'on peut *surely* atteindre 13); le périmètre varie entre $10+2\sqrt{2}\approx12.828$ et $8+5\sqrt{2}\approx15.071$; la convexité ne descend pas en dessous de 1.5 et ne monte pas au-dessus de 2; pour ces fermes décagonales, l'aire maximale est de 8.

Si on examine la répartition des fermes, anneau par anneau (les anneaux sont les 90 ordres des pièces différents), il y a environ 70 fermes par anneau. L'anneau qui contient le moins de fermes est l'anneau 65 constitué par l'ordre 4912391 (1, 2 et 9 sont les petits, le moyen et les grands triangles, 3 est le parallélogramme et 4 le carré). Cet anneau contient seulement 24 fermes dont l'aire ne dépasse pas $2+4\sqrt{2}\approx7.657$, le périmètre variant entre $8+2\sqrt{2}\approx10.828$ et $4+7\sqrt{2}\approx13.899$ et la convexité entre 0.5 et 2.5. L'anneau qui contient le plus de fermes est l'anneau 48 constitué par l'ordre 4329911. Cet anneau contient 136 fermes dont l'aire ne dépasse pas $3.5+5\sqrt{2}\approx10.571$, le périmètre variant entre $8+2\sqrt{2}\approx10.828$ et $8+4\sqrt{2}\approx13.657$ et la convexité entre 0.5 et $1.5+0.5\sqrt{2}\approx2.207$.



Graphique 2: Nombres de fermes par anneau (ordre des pièces) après les avoir rangées dans l'ordre

Nous n'allons pas donner le détail pour chaque anneau, mais en plus des anneaux remarquables qui se distinguent pour les faits que nous avons déjà mentionnés, il peut s'en distinguer encore d'autres, sur d'autres faits. L'anneau 33 (4199312) pourrait déjà être mentionné car, sur les 54 fermes qu'il contient, il y a déjà une ferme de périmètre minimal (comme d'ailleurs l'anneau 6, le 7 et le 32) mais, en plus

de cela, il détient le record du plus grand écart en matière de périmètre : de $8+\sqrt{2}\approx 9.414$, celui-ci s'étend jusqu'à $8+5\sqrt{2}\approx 15.071$ (presque le maximum!). Le plus petit écart de périmètre est rencontré dans l'anneau 89 (993112) puisque, sur les 58 fermes de cet anneau, les périmètres ne s'étalent qu'entre $10+\sqrt{2}\approx 11.414$ et $2+8\sqrt{2}\approx 13.314$. Pour les écarts de convexité, le maximum est obtenu dans l'anneau 4 (4113929) qui contient 103 fermes dont les convexités s'étalent entre zéro et trois (le maximum est environ de 3.207). Il y a aussi un anneau qui se caractérise par son écart minimum de convexité : l'anneau 42 (4311299) possède 96 fermes, et pourtant les convexités ne s'étalent pas davantage qu'entre 0.5 et $1+0.25\sqrt{2}\approx 1.354$. Cette dernière valeur n'est pas la plus faible que l'on puisse trouver parmi les valeurs maximales de la convexité1 : dans l'anneau 44 (4312991) qui contient 75 fermes, il ne s'en trouve pas qui ait une convexité supérieure à 1!

QUESTION 16

L'adaptation de notre programme de génération des tangrams simples a été très aisée à réaliser. Fonctionnant sur le même principe que celui qui nous a permis de générer les tangrams hétérogènes, il suffit de déclarer les différentes longueurs admises pour les segments : avec les tangrams naturels comme avec les simples, on ne peut avoir que des longueurs de 1, 2, $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$. Alors que pour ces derniers, on ne pouvait avoir qu'une différence de longueur nulle à chaque agrégation, avec les naturels on admet en plus les différences 1 et $\sqrt{2}$.

Les tangrams naturels pleins sont 3 775 336, ce qui représente environ 78% des formes homogènes. Plus d'un million de tangrams homogènes ne respectent donc pas cette règle d'assemblage naturelle qui se passe des milieux de grands côtés pour réaliser les assemblages. C'est principalement au sein des formes ayant le moins de côtés que l'on trouve les tangrams naturels : toutes les formes homogènes de trois à sept côtés sont naturelles. À partir des octogones on observe quelques manques : quarante octogones homogènes ne sont pas naturels, puis les effectifs des formes homogènes non-naturelles augmentent et surtout leurs parts relatives au sein des homogènes. Inversement, la part des naturels devient de plus en plus faible jusqu'à s'annuler totalement pour les formes à 18 côtés : aucun des 10 737 tangrams homogènes à 18 côtés ne sont naturels. Tous utilisent obligatoirement un assemblage par les milieux de grands côtés !

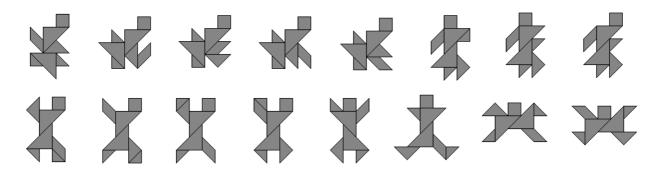


Illustration 53: Qu'elles soient symétriques (en bas) ou non symétriques (en haut), aucune des 10 737 formes homogènes à 18 côtés ne sont naturelles

côtés	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	total
Naturels	1	6	22	200	1 245	6 352	26 710	88 426	235 142	491 387	800 800	964 776	768 731	338 593	53 145	0	3 775 536
Homos pleins	1	6	22	200	1 245	6 392	27 113	90 860	247 255	535 302	915 949	1 184 701	1 073 018	595 932	153 472	10 737	4 842 205
Naturels sym	1	4	2	27	8	83	35	239	76	409	85	434	18	57	0	0	1 478
Homos sym	1	4	2	27	8	83	35	263	78	456	97	571	51	197	3	8	1884
Tordues	0	0	0	0	0	40	403	2 434	12 113	43 915	115 149	219 925	304 287	257 339	100 327	10 737	1 066 669
Tordues en %	0%	0%	0%	0%	0%	0.63%	1.5%	2.7%	4.9%	8.2%	13%	19%	28%	43%	65%	100%	22%

Tableau 21: Répartitions des tangrams naturels selon le nombre de côtés. Distribution des formes symétriques, et fréquence des tordus dans les homogènes

L'ensemble des formes homogènes non-naturelles contient 1 066 669 tangrams pleins. Nous les avons isolés en soustrayant les deux fichiers (les homogènes et les naturels) et baptisés les *tordus* ou *twisted*, pour rappeler l'aspect de leur base. En

effet, à l'instar des tangrams simples, une forme tordue doit associer nécessairement au moins deux des trois pièces ayant des grands côtés (les grands triangles et le triangle moyen). Les bases obtenues sont plus compliquées que celles des formes simples : certaines possèdent deux assemblages tordus (ligne du haut de notre figure 54) et d'autres peuvent n'en avoir qu'un (ligne du milieu). Certaines configurations tordues peuvent être réalisées autrement (naturellement), occasionnant la perte du caractère tordu en partie ou totalement (voir nos deux exemples ligne du bas).

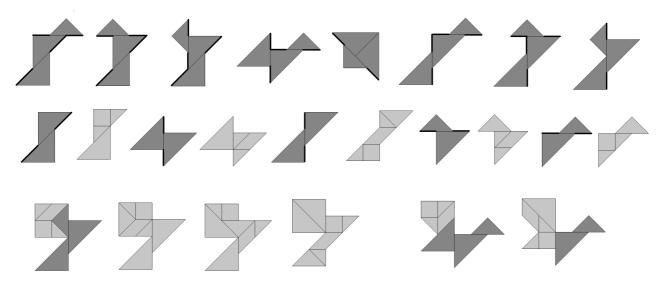


Illustration 54: Les bases des tangrams tordus comprennent 2 ou 3 grosses pièces (gris foncé) associées uniquement par des milieux de côtés. Les gros segments noirs indiquent des emplacements interdits si l'on veut conserver l'aspect tordu du tangram. Certains assemblages tordus perdent ce caractère si on peut les réaliser naturellement (gris clair)

Notre décompte des tangrams tordus ne retient donc que les formes ne pouvant être réalisées naturellement. C'est une collection importante de formes (22% des formes homogènes) qui possède une assez grande diversité. Il y a, pour commencer 406 formes symétriques (8, 140, 137, 47 et 24 ont 18, 16, 14, 12 et 10 côtés tandis que 3, 33, 12 et 2 en ont 17, 15, 13 et 11). La répartition de ces formes selon le nombre de segments rationnels sur le bord est 161 (rat=4), 9 630 (rat=6), 122 145 (rat=8), 452 158 (rat=10), 404 719 (rat=12), 75 461 (rat=14) et 2 395 (rat=16); leur répartition selon le nombre de segments irrationnels est 3 045 (irrat=2), 91 273 (irrat=4), 468 751 (irrat=6), 445 049 (irrat=8) et 58 551 (rat=10). Le périmètre moyen des formes tordues (20.51) est plus élevé que celui des formes naturelles (20.01), celles-ci contenant toutes les formes homogènes les plus compactes alors que celles-là (les tordues) contiennent toutes celles qui ont 18 côtés. Le tableau de répartition des périmètres précise cela et montre, de plus, qu'ils ne prennent que 17 des 29 valeurs. Le groupe des formes naturelles déclinent, quant-à lui, l'ensemble des 29 valeurs.

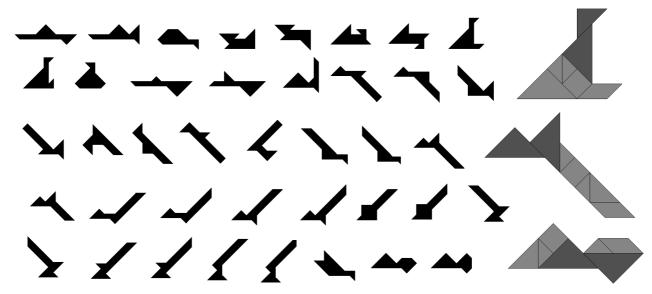


Illustration 55: Les 40 octogones tordus et 3 solutions révélant des associations tordues à 2 pièces

La particularité des formes naturelles (ne pas utiliser les points de référence situés aux milieux des grands côtés) est transposable aux formes hétérogènes. On peut supposer qu'une grande partie de cette immense collection de formes est obtenue sans les milieux, ces points de références non-naturels. Cela constitue la trame d'un nouveau défi : séparer les formes hétérogènes naturelles des formes hétérogènes tordues.

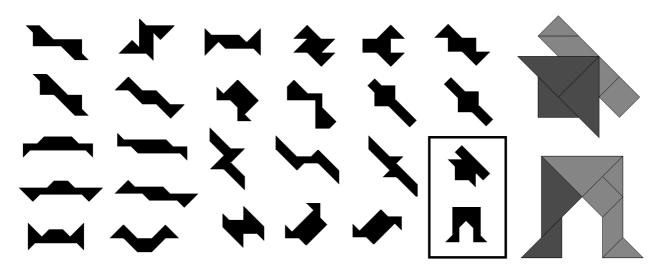


Illustration 56: Les formes tordues et symétriques ayant le moins de côtés en ont 10 et 11 côtés (les 2 formes encadrées et solutionnées)

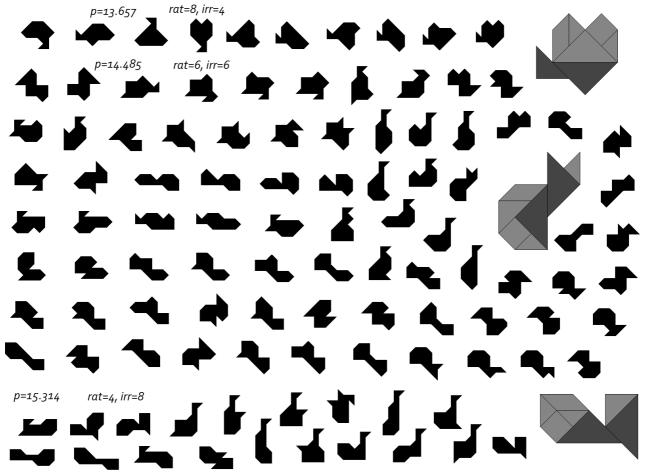


Illustration 57: Les 106 tangrams tordus les plus compacts ont 12 segments sur leur bord

Question 17:

QUESTION 17:

a) Au fur et à mesure que croît le nombre n de triangles constitutifs des n-abolos, ceux-ci s'inscrivent dans des cercles de plus en plus grands et de plus en plus variés. Nous avons examiné les premières valeurs des diamètres, qui sont trop petites pour être accessibles au Tangram : le monoabolo a un diamètre de $\sqrt{2}\approx 1.414$. Deux diabolos ont des diamètres qui dépassent cette valeur : le triangle moyen (diamètre=2) et le parallélogramme (diamètre= $\sqrt{5}\approx 2.236$). Puis, deux triabolos ajoutent deux nouveaux diamètres : $\frac{\sqrt{50}}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\approx 2.357$ (le pentagone non-convexe) et $\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2.828$ (le trapèze isocèle).

En prenant les diamètres de tous les n-abolos jusqu'à n=6 (il n'y en a que 159), on a couvert la gamme des treize valeurs inférieures inaccessibles au Tangram (voir figure 58): $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{50}}{3}$, $\frac{5}{2}$ =2.5, $\sqrt{8}$, 3, $\sqrt{10}\approx3.162$, $\frac{10}{3}\approx3.333$, $\frac{5\sqrt{2}}{2}\approx3.536$,

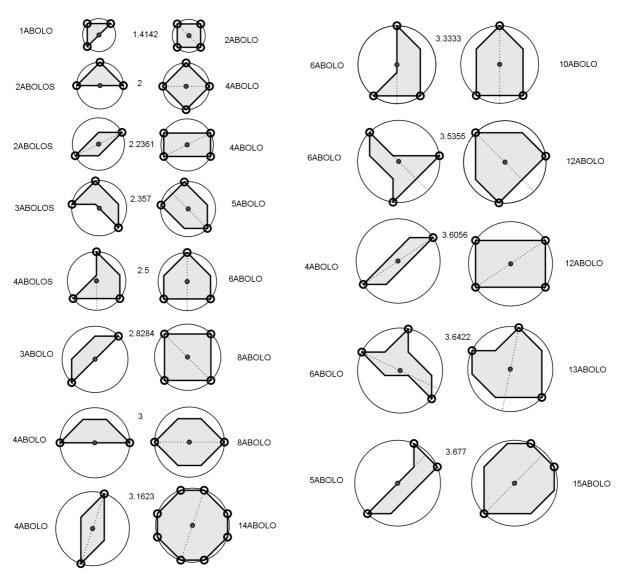


Illustration 58: Les 13 diamètres inférieurs inaccessibles au Tangram. La forme de gauche montre dans quel groupe de polyabolo apparaît le diamètre et la forme de droite montre celui où il disparaît

 $\sqrt{13}\approx 3.606$, $\frac{\sqrt{650}}{7}\approx 3.642$ et $\frac{\sqrt{338}}{5}\approx 3.677$. La dernière de ces valeurs est celle qui se maintient le plus longtemps parmi les n-abolos, puisqu'on la trouve encore (en un seul exemplaire) au sein des 15abolos.

Dans le groupe des 13abolos nous trouvons la 1ère valeur à être supérieure au plus grand diamètre des tangrams (9.43) : $\sqrt{98} \approx 9.899$. Mais ce n'est pas la plus petite des grandes valeurs inaccessibles au Tangram. Cette valeur est $\frac{\sqrt{47170}}{23} \approx 9.443$, et elle ne se rencontre même pas dans le groupe des 16abolos – ce grand ensemble de 28 millions de formes dans lequel sont tous les tangrams homogènes. Les diamètres des 16abolos commencent à $\frac{\sqrt{130}}{3} \approx 3.801$ (une seule forme qui est réalisable avec le Tangram), et s'achèvent, ainsi que nous l'avions déjà remarqué, à cette plus grande valeur inaccessible au Tangram qui est $\sqrt{145} \approx 12.042$ (celle du long parallélogramme de la figure 99).

De nombreux diamètres supérieurs de 16abolos manquent ainsi aux tangrams :

- de la 1ère grande valeur inaccessible, qui est $\frac{\sqrt{15130}}{13} \approx 9.462$, jusqu'à la plus grande (12.042), il n'y a pas moins de treize grandes valeurs inaccessibles au Tangram.
- de très nombreux diamètres de 16abolos sont inférieurs à la valeur maximum des tangrams (9.434) mais lui restent inaccessibles. La mobilité des seize petits triangles est totale pour les 16abolos mais, pour le Tangram, ils sont précontraints dans les sept pièces. La plus petite de ces valeurs inaccessibles est $\frac{\sqrt{6290}}{11} \approx 7.210$. On trouve déjà quatorze 15abolos qui présentent ce diamètre (un seul est représenté en haut à gauche de la figure 59) et 364 16abolos, mais aucun tangram. Les valeurs lacunaires se multiplient quand les diamètres augmentent : après 7.210, on trouve d'abord $\frac{\sqrt{15170}}{17} \approx 7.245$,

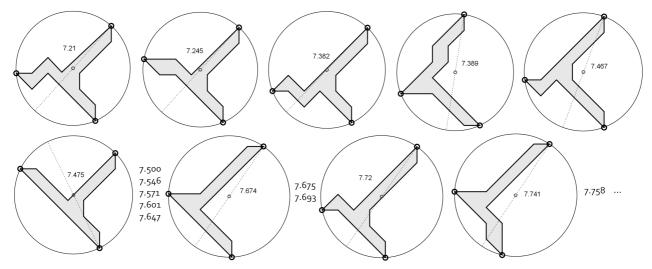


Illustration 59: Les 15abolos réalisent les 6 premiers diamètres consécutifs inaccessibles au Tangram puis beaucoup d'autres, les 3 suivants étant illustrés sur la ligne du bas

Question 17:

puis $\frac{\sqrt{13949}}{16} \approx 7.382$, $\frac{\sqrt{59450}}{33} \approx 7.389$, $\frac{\sqrt{1394}}{5} \approx 7.467$, $\frac{\sqrt{2738}}{7} \approx 7.475$, etc. une longue série de 55 valeurs qui manquent au Tangram.

Finalement, la série des diamètres de tangrams homogènes pleins n'a aucune lacune entre 3.801 et $\frac{\sqrt{205}}{2} \approx 7.159$ (91 valeurs consécutives), soit jusqu'aux deux tiers des valeurs approximativement. La valeur moyenne des diamètres de tangrams homogènes est 6.02 environ. Cette valeur coupe en deux parties le bloc sans lacune des diamètres car il équivaut à la 45 ème valeur du diamètre. Le dernier tiers s'étend entre 7.211 et 9.434. Situés dans le domaine des valeurs lacunaires, les diamètres accessibles correspondent majoritairement à des formes ayant deux points diamétralement opposés. Ces formes, qui ne supposent que deux sommets éloignés, prennent plus facilement des valeurs élevées. À contrario, les diamètres inaccessibles de ce domaine correspondent presque tous à des formes n'ayant pas deux points diamétralement opposés. Comme il faut alors au moins trois sommets pour définir le cercle, cela empêche les étirements supérieurs. Les seuls diamètres inaccessibles de cet intervalle correspondant à des formes ayant deux points diamétralement opposés sont 9 et $\sqrt{82} \approx 9.055$. On trouve ces deux valeurs inaccessibles au Tangram à partir des 16abolos seulement (voir la figure 6o), les 15abolos ne parvenant pas non plus à réaliser ces formes très allongées dans le sens du quadrillage.

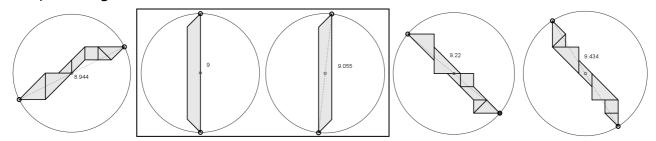


Illustration 60: Encadrées, les 2 formes ayant deux points diamétralement opposés qui sont inaccessibles au Tangram dans son domaine de valeurs

b) La question, ramenée à des considérations théoriques, indépendamment de toute la combinatoire géométrique des 16abolos, a t-elle des informations à nous livrer? Le sujet des cercles possédant n points du quadrillage exactement a été traité dans le cadre du théorème de Schinzel (existence d'un cercle passant par n points à coordonnées entières, quel que soit l'entier n). Ed Pegg¹ donne ainsi, sur le site Wolfram.com, la liste des diamètres minimums de cercles contenant exactement de quatre à douze points (il donne les rayons, nous avons doublé les valeurs). Nous retrouvons le cercle de diamètre $\sqrt{10} \approx 3.16$ contenant huit points du quadrillage qui n'est plus accessible aux 16abolos (la dernière forme inscrite dans ce cercle est un 14abolo, voir la figure 58 en bas à gauche).

¹ http://demonstrations.wolfram.com/LatticeCircles/

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
exact	$\sqrt{2}$	$\frac{25\sqrt{2}}{3}$	5	25 √442 11	√ 10	$\frac{65\sqrt{2}}{3}$	25	<u>5√64090</u> 11	5√2
approx	1.414214	11.78512	5	47.7814	3.16228	30.6412	25	115.0728	7.07106

Tableau 22: Diamètres de cercle contenant exactement n points du quadrillage d'après Ed Pegg

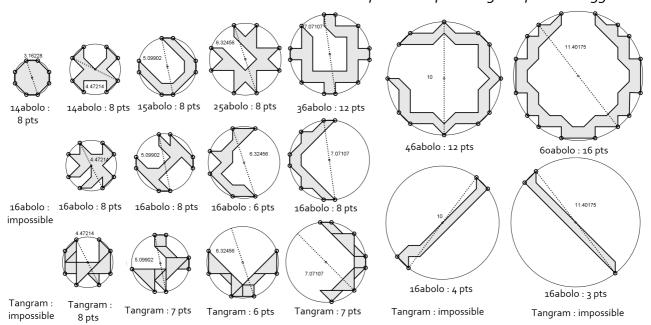


Illustration 61: Quelques-uns des cercles offrant la possibilité de circonscrire au moins 8 sommets d'un polyabolo. Ligne du haut, polyabolos bien circonscrits dans ces cercles (pas systématiquement d'aire minimum) ; 2^{ème} et 3^{ème} lignes, maximums atteints par les 16abolos et par le Tangram

Il ne faut donc pas s'attendre à trouver des tangrams inscrits dans des cercles contenant exactement 5, 7, 9, 10 et 11 points du quadrillage. Par contre, on peut théoriquement rencontrer des cercles contenant 4, 6, 8 et 12 points du quadrillage exactement. Les formes peuvent éventuellement ne contenir qu'une partie de ces points comme sommets. Dans cette liste de valeurs, la valeur $5\sqrt{2}$ attire tout de suite mon attention car c'est une valeur très commune pour les tangrams (168 801 tangrams homogènes pleins ont cette valeur) sans qu'aucun ne contienne jamais plus de sept sommets sur le cercle (deux formes). Les 16abolos réussissent naturellement un peu mieux que le Tangram : pour cette valeur du diamètre, on peut avoir jusqu'à huit points sur le cercle. Mais, pour l'ensemble des 16abolos, on ne va jamais au-delà de huit points sur le cercle. En cherchant un peu plus loin que cette liste de Ed Pegg, nous avons le cercle de diamètre $\sqrt{130} \approx 11.402$ qui n'est pas accessible au Tangram, mais que l'on rencontre chez les 16abolos (cing formes). Ce cercle contient seize points aux coordonnées entières qui pourraient tous faire partie des sommets d'un 60abolo (voir figure 61). Pour ce qui est des 16abolos, le diamètre est réalisable mais le cercle ne contient alors, au mieux, que trois points

Question 17:

sur le cercle (car il est presque à la limite des possibilités d'extension de ces formes). Revenons sur des diamètres plus modestes et faisons le bilan des possibilités de placement d'un maximum de sommets sur le cercle : les seuls tangrams à présenter huit sommets sur le cercle ont un diamètre égal à $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$. Pour les 16abolos, il y a trois diamètres de cercle pouvant accueillir huit sommets : $\sqrt{20}$, $\sqrt{26} \approx 5.099$ et $\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7.07$.

D'une façon générale les 16abolos s'inscrivent dans 41 diamètres différents lorsqu'il y a deux points diamétralement opposés, et 167 diamètres lorsqu'il n'y a pas deux points opposés. Comme il y a dix diamètres communs aux deux types de cercle, cela fait un total de 198 diamètres différents. Les diamètres communs qui s'ajoutent à notre liste des sept rencontrés avec le Tangram, sont $\sqrt{58} \approx 7.62$, $\sqrt{65} \approx 8.06$ et $\sqrt{68} \approx 8.25$. Ce ne sont pas des diamètres inaccessibles au Tangram mais dans le cas de ce jeu, les formes ont toujours deux points diamétralement opposés. Il s'agit de diamètres pour lesquels il peut y avoir jusqu'à six ou huit points sur le cercle, diamétralement opposés par groupe de deux, trop grands pour que la possibilité de n'avoir que trois ou quatre points sans leurs alter-egos diamétralement opposés se manifeste. Parmi les diamètres réalisables avec les 16abolos, il y en a d'autres de ce type qui n'ont pas encore révélés ce caractère, malgré la grande malléabilité de ces formes: $\sqrt{74} \approx 8.60$, $\sqrt{80} \approx 8.94$, $\sqrt{82} \approx 9.06$, $\sqrt{85} \approx 9.22$, $\sqrt{90} \approx 9.49$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{106} \approx$ 10.30 et $\sqrt{130} \approx$ 11.40 . Le Tangram réalise toutes ces valeurs qui sont dans son domaine lacunaire sauf $\sqrt{82}$; les quatre dernières lui sont également inaccessibles car elles sortent de son domaine d'extension.

La dernière partie de la question concerne les diamètres inaccessibles aux 16abolos eux-mêmes. Pour explorer ce domaine, nous avons utilisé un algorithme très simple qui répertorie tous les diamètres de cercle possibles à l'intérieur d'un quadrillage carré de neuf unités de côté (afin de contenir le plus grand diamètre accessible aux 16abolos qui est la diagonale d'un triangle rectangle de 8 sur 9) en balayant les sommets par groupe de deux ou trois. Nous n'obtenons donc pas tous les diamètres inaccessibles car certains n'apparaîtront qu'en cherchant dans un carré de dix unités de côté, cependant nous en obtenons beaucoup, et nous obtenons tous les plus petits. Les plus petits diamètres inaccessibles aux 16abolos sont $\frac{\sqrt{22100}}{19} \approx 7.824$ (le premier diamètre inaccessible au Tangram est environ de 7.210), $\frac{\sqrt{3074}}{7} \approx 7.921$, $\frac{\sqrt{10730}}{19} \approx 7.968$, $\frac{\sqrt{25493}}{20} \approx 7.983$, $\frac{\sqrt{24050}}{19} \approx 8.162$, etc. Plus de cent valeurs inférieures à 9.433 (le plus grand diamètre des tangrams)!

Les cercles passant par deux sommets au moins contenus dans un carré de neuf unités de côtés sont au nombre de 462 dont 48 contiennent au moins deux points diamétralement opposés. Si on enlève les treize diamètres inaccessibles inférieurs à 3.8 (ils contiennent sept valeurs qui caractérisent des cercles ayant deux points

diamétralement opposés), il reste 157 valeurs inaccessibles supérieures à 7.82 et aucune de ces valeurs ne correspond à un cercle ayant des points diamétralement opposés. Les cinq plus petits de ces diamètres absents chez les 16abolos, déjà cités, se rencontrent déjà dans des carrés de sept unités de côté.

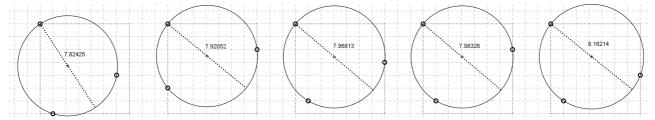


Illustration 62: Les 5 premiers diamètres inaccessibles aux 16abolos caractérisent des cercles dont 3 points sont sur un quadrillage de 7 unités de côtés

Version numérique 3.1 28 octobre 2014

ISBN 978-2-9550889-2-0

