à Ronald Read,
pionnier de l'univers du Tangram
sans qui ce livre n'existerait pas

La nature a une perfection à elle, surprenante, et qui résulte d'une addition de limites. La nature est parfaite parce qu'elle n'est pas infinie. Si on comprend les limites, on comprend comment le mécanisme fonctionne. Le tout est de comprendre les limites.

Alessandro Baricco,

Océan mer

Le Tangram est un drôle de jeu. Son apparence est simple mais l'objet est insolite avec ses pièces géométriques qui se ressemblent et s'assemblent. Le manuel de jeu est un catalogue de formes variées – des silhouettes noires de bonshommes, des chats, des théières, etc. – que l'on doit reconstituer. De prime abord, il s'agit d'une sorte de puzzle destiné à un public assez jeune. Personnellement, je n'ai pas vraiment été attiré par cet aspect traditionnel du jeu mais j'en aimais le concept au point de vouloir m'en fabriquer en bois, en carton... Plus tard, un professeur de technologie de mon entourage qui voulait le faire fabriquer à ses élèves me posa une question au sujet de ce jeu et je commençais, pour lui répondre, à m'intéresser aux formes convexes qui étaient réalisables. Je m'étonnais qu'il n'en existait que treize, et me demandais si avec d'autres pièces on aurait pu en obtenir davantage. Je crayonnais des découpages de carrés et commençais des inventaires, puis je me dis que ce serait plus commode de chercher les formes convexes réalisables avec un jeu en programmant un ordinateur pour cela. Comme je ne savais pas programmer, je dus me former en lisant tout d'abord un livre[1] et en me faisant la main sur d'autres sujets (mes élèves se souviennent de mes programmes d'entraînement au calcul mental...). Enfin je pus concentrer mes efforts sur les tangrams. Les versions de mes programmes se succédant, j'obtins progressivement quelques résultats : ce que je savais faire en trente minutes, le programme le faisait en trente dixièmes de seconde. Bien sûr, il m'avait fallu deux ans pour en arriver là mais, en seulement deux jours, je pouvais passer en revue tous les jeux possibles de la famille du Tangram ayant sept pièces polyaboliques et une aire égale à seize triangles (voir plus loin pour le mot polyabolique). À l'occasion, je prenais contact avec des personnes qui avaient travaillé sur le sujet : l'américain Sergio Antoy, auteur d'une superbe applet pour jouer avec le Tangram et des jeux voisins ; l'anglais Eric Warsop, auteur d'un ingénieux programme recherchant des formes réalisables avec le Tangram ; le canadien Ronald Read qui fut à l'avant-garde pendant une cinquantaine d'années et rédigea plusieurs articles et un livre sur le sujet (il travaillait à l'époque, et malgré son âge avancé, à la génération des tangrams hétérogènes qu'il avait lui-même initiée) ; le français Jean-Paul Delahaye, auteur d'une rubrique dans le journal « Pour la Science » et de livres/compilations sur bien des sujets passionnants, véritable passeur d'informations éveillant la curiosité. En partageant idées et résultats avec ces personnes , je me lançais petit à petit dans la rédaction de textes et de tableaux ainsi que dans la confection d'images. Mon compte-rendu à usage personnel passa de deux à cinq pages, puis devint un article de vingt pages que je mis sur mon site internet ; sous l'impulsion de J.-P. Delahaye, ce texte fut étendu et enrichi aux dimensions d'un livre que les Éditions « Pour la Science » acceptèrent de publier. Pour d'obscures raisons que j'ignore, ce livre que je souhaitais appeler « L'univers du Tangram » ne vit pas le jour. Je ne voulus pas m'arrêter là, surtout que j'avais d'autres résultats à consigner par écrit, dont ceux qui concernaient les tangrams hétérogènes. Je me lançais dans un deuxième livre, réécrivant tout comme si le premier livre n'existait pas. Ce nouveau livre devint progressivement la somme qui est ici et qui représente un état de la recherche. Le quinzième chapitre inventorie quelques-unes des pistes que j'aimerais encore suivre où tout ou presque reste encore à faire, le seizième est un ajout récent qui développe une nouvelle idée de R. Read.

1« Programmer en Java » de Claude Delannoy aux Éditions Eyrolles.

On peut croire qu'il faut beaucoup aimer les nombres pour écrire un tel livre, car il y en a beaucoup, en vérité, dans toutes les pages. Ils sont un peu comme les nuages où, certaines fois, on distingue un visage ou une fée. Parfois ils m'impressionnent par leur taille ou leur régularité, parfois les chiffres se répètent ou se suivent de façon intrigante. Jamais ils ne me paraissent déplacés : ils font partie du tableau et je les recopie de mes programmes comme un jardinier arrachant les mauvaises herbes et valorisant les bonnes…

Plus je m'aventure dans les recoins de cet univers combinatoire, plus je suis confronté à mes propres limites (manque de compétences ou de temps pour les acquérir). Je mets en forme les éléments qui se dégagent et souhaite les faire parler pour qu'ils nous livrent leurs secrets ultimes. J'ai parfois l'impression de survoler certains sujets qui méritent un arrêt ou, au contraire, d'aller trop en profondeur sur des points de détails. Quand je pense au lecteur éventuel qui, par manque de familiarité avec le sujet, peine à suivre mes descriptions de ces paysages combinatoires, je veux lui rester accessible et continue à nager en surface. Mais parfois je me laisse absorber par le sujet et plonge un peu plus profond pour chercher les perles qui se cachent… Jamais le sujet ne me lasse et, malgré la diversité des thèmes abordés, il me semble qu'il n'a été qu'à peine effleuré…

J'espère que certains trouveront autant de plaisir que j'en ai eu à dresser les colonnes de chiffres de ce jeu universel et à écrire ces lignes. Comme le sujet est loin d'être clôt, je serais tenté d'appeler ce livre « Tangram, tome 1 » car il me paraît évident qu'un 2ème tome au moins devrait s'y ajouter. Sam Lloyd avait eu cette idée il y a un siècle, quand il inventa des racines légendaires au jeu. Il écrivit une histoire où la tension évolutive amenait des êtres supérieurs, plus spirituels que les hommes de son temps, qui sauraient combiner les pièces du jeu d'une manière nouvelle. Il s'agissait peut-être d'une vision prophétique de la recherche avec les ordinateurs, mais il reste encore beaucoup à faire pour aller au-delà de nos premiers résultats.

Il me plaît d'imaginer qu'en d'autres temps et en d'autres espaces, des êtres plus évolués que nous manipulent aussi les sept pièces ingénieuses. Ce jeu universel est intemporel. Mais que font-ils avec ? Quelle facétie géométrique traquent-ils et de quels moyens usent-ils ? Avec votre concours, nos connaissances sur le sujet peuvent encore s'accroître et revigorer l'intérêt qu'on lui porte et qu'il mérite.

Philippe Moutou

Septembre 2014

Chapitre 1 : Rencontre avec le Tangram

Avec ses pièces géométriques, le Tangram appartient à la catégorie des jeux de dissection géométrique : on découpe une silhouette en pièces et, avec ces pièces, sans chevauchement, on reconstitue une multitude de silhouettes

Le *Tangram* est un jeu constitué de sept pièces très simples. Cinq triangles isocèles rectangles – des demi-carrés – de trois tailles différentes : deux petits, un moyen et deux grands. Le triangle moyen pourrait être formé avec les deux petits. Assemblés autrement, ces deux petits triangles peuvent former les deux autres pièces du jeu : un carré et une autre figure appelée parallélogramme. Techniquement, le carré est aussi un parallélogramme – car il suffit à un quadrilatère d'avoir ses côtés opposés parallèles pour en être un – mais, faute de mieux, nous appellerons ainsi l'unique parallélogramme du jeu qui n'est pas carré. Les grands triangles, quant à eux, sont constitués de quatre petits triangles, ou deux moyens.

Toutes ensembles, ces sept pièces couvrent une surface égale à seize fois celle d'un des petits triangles. Comme deux petits triangles forment un carré, on pourrait dire une surface égale à huit fois celle du carré. Habituellement on mesure plutôt les surfaces avec des carrés, mais l'unité d'aire naturelle avec un jeu dont les pièces se réduisent à des petits triangles est le triangle, aussi nous dirons indifféremment que l'aire totale du jeu est de huit carrés ou de seize triangles (sous-entendu seize petits triangles isocèles rectangles).

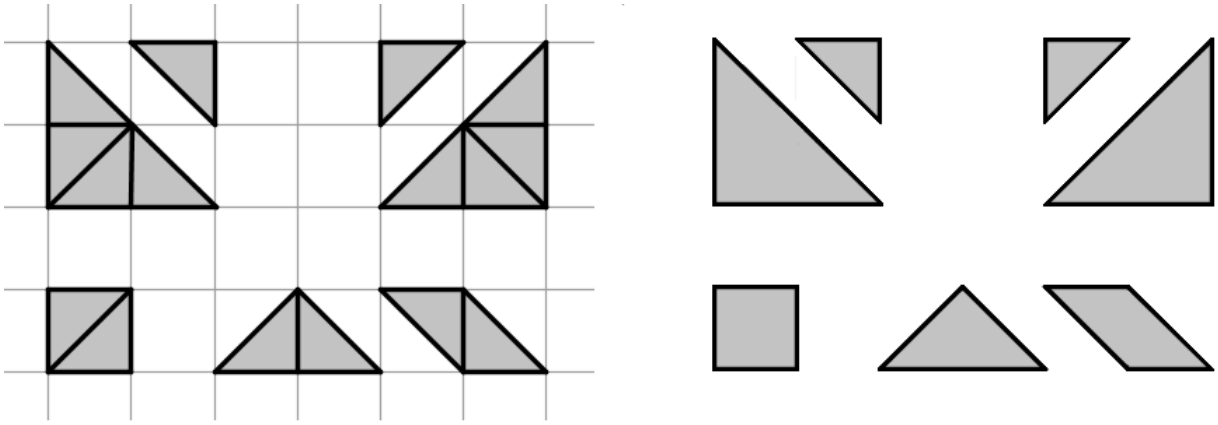


Illustration 1: Les sept pièces du jeu : 5 triangles, 1 carré et 1 parallélogramme non carré (appelé plus loin « le parallélogramme »). Ces pièces couvrent une aire totale égale à 16 petits triangles

Comme le montre notre illustration (à gauche), les sept pièces de ce jeu peuvent être dessinées dans un quadrillage, les sommets des pièces étant placés sur les nœuds du quadrillage (les intersections des droites perpendiculaires qui forment le quadrillage). Certains des côtés de ces pièces mesurent autant que l'écart entre les

lignes parallèles du quadrillage. Les quatre côtés du carré sont ainsi égaux à cet écart que nous choisissons comme unité de longueur. Les autres côtés des pièces peuvent mesurer deux unités de longueur (le triangle moyen a un côté mesurant deux unités, les grands triangles en ont deux chacun), mais on rencontre aussi une longueur intermédiaire, lorsque le côté est constitué par une diagonale du carré. Cette longueur intermédiaire mesure approximativement 1.414 fois celle du carré. La valeur exacte de ce nombre se note $\sqrt{2}$ et n'a pas d'écriture décimale finie. Cette valeur, multipliée par elle-même, doit être égale à 2, car un carré bâti sur cette longueur couvre une aire de deux carrés unitaires. Pour cette raison on dit que ce nombre est la *racine carrée* de deux. À l'exception du carré, toutes les pièces du jeu ont au moins un côté de longueur $\sqrt{2}$. Les grands triangles ont chacun un côté de longueur égale à $2\times\sqrt{2}$, soit 2.818 environ. Le triangle moyen a deux côtés consécutifs égaux à cette longueur tandis que le parallélogramme en a deux aussi, mais il s'agit de côtés opposés.

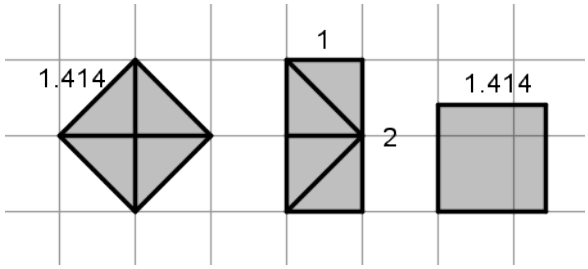


Illustration 2: Un carré de côté racine carrée de deux couvre la surface de deux petits carrés

Nous avons indiqué que les sommets des pièces coïncident avec des nœuds du quadrillage. Cette caractéristique des sommets est également partagée par quelques autres points : les milieux des côtés des grands triangles et aussi le milieu de l'hypoténuse du triangle moyen. Cela fait sept nouveaux points qui appartiennent aussi au quadrillage de référence sur lequel nous avons dessiné nos pièces. Nous mentionnons ces points car ils joueront le même rôle que les sommets lors des assemblages des pièces entre elles. Ces sept milieux, ajoutés aux vingt-trois sommets, forment l'ensemble des trente *points de référence* du jeu. Joignant les points de référence entre eux, les côtés des pièces du jeu sont constitués de trente segments de longueur unité ou de longueur $\sqrt{2}$ unités. Entre ces deux types de segments unitaires, la répartition n'est pas équitable : vingt segments ont une longueur unité alors que seulement dix ont une longueur égale à $\sqrt{2}$. La longueur totale du bord des sept pièces est donc égale à 34.14 environ : vingt unités pour les segments de longueur 1 et 14.14 environ pour les segments de longueur $\sqrt{2}$.

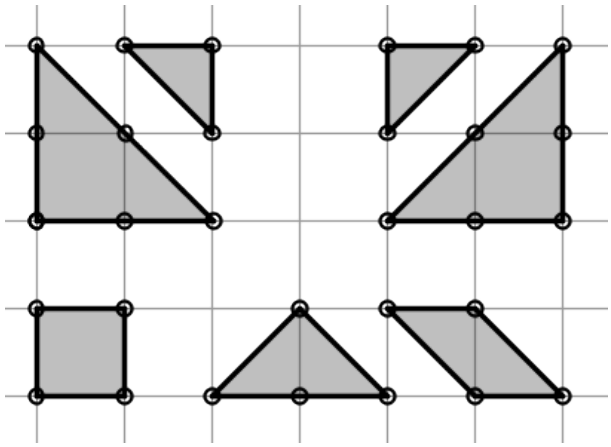


Illustration 3: Les trente points de référence du Tangram : 23 sommets et 7 milieux

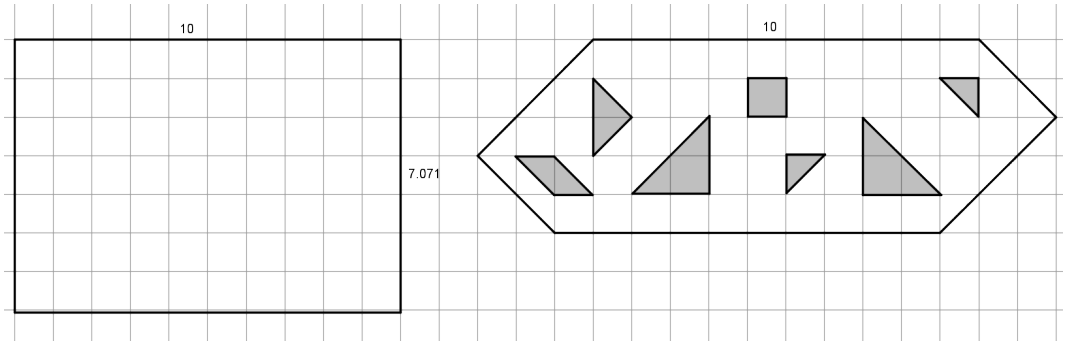


Illustration 4: Un rectangle et un hexagone dont les périmètres égalent le périmètre total des 7 pièces du jeu

Ce nombre trente (le nombre de segments unitaires sur le bord des pièces) est lié aux nombres 8 (le nombre de carré unitaires recouverts par les pièces) et 7 (le nombre de pièces) par une relation étonnante qui caractérise les polygones dessinés sur un quadrillage : $P=2\times(A-Q+N)$ où P désigne le nombre de segments unitaires sur le bord des polygones, A désigne le nombre de carrés unitaires recouverts par les polygones, Q désigne le nombre de nœuds du quadrillage recouverts par les polygones et N désigne le nombre de polygones. Dans notre cas, il y a sept polygones (N=7) qui ne recouvrent aucun nœud du quadrillage (Q=0) hormis les trente points de référence des bords (P=30) et qui couvrent une surface égale à huit fois celle du carré (A=8) : $30=2\times15=2\times(8-0+7)$.

Cette relation est vérifiée par tout polygone dessiné sur un quadrillage, à condition que ses sommets appartiennent au quadrillage. Pour un polygone unique, N=1 et la relation devient $P=2\times(A-Q+1)$. Les cinq formes différentes de pièces du jeu vérifient chacune cette relation, comme le montre le tableau ci-dessous.

	A (Aire)	*Q* (Nœuds intérieurs)	*P* (Nœuds sur le bord)
Grands triangles	2	0	6=2×(2–0+1)
Triangle moyen	1	0	4=2×(1–0+1)
Petits triangles	0,5	0	3=2×(0,5–0+1)
Carré	1	0	4=2×(1–0+1)
parallélogramme	1	0	4=2×(1–0+1)

L'hexagone de la figure 4 est inscrit correctement dans le quadrillage. Comme cette forme contient trente nœuds du quadrillage sur son bord, on a $30=2\times(A-Q+1)$ et donc $A=Q+14$. Vérifions cela en comptant les nœuds recouverts par cet hexagone : il y en a 2×(11+13)=48. Ce polygone doit donc avoir une aire égale à 48+14=62. Et, en effet, cet hexagone totalise 62 carrés, car, comme on le voit sur le découpage suivant 12×2+12×2+4.5×2+2×2+1=30.5×2+1=61+1=62.

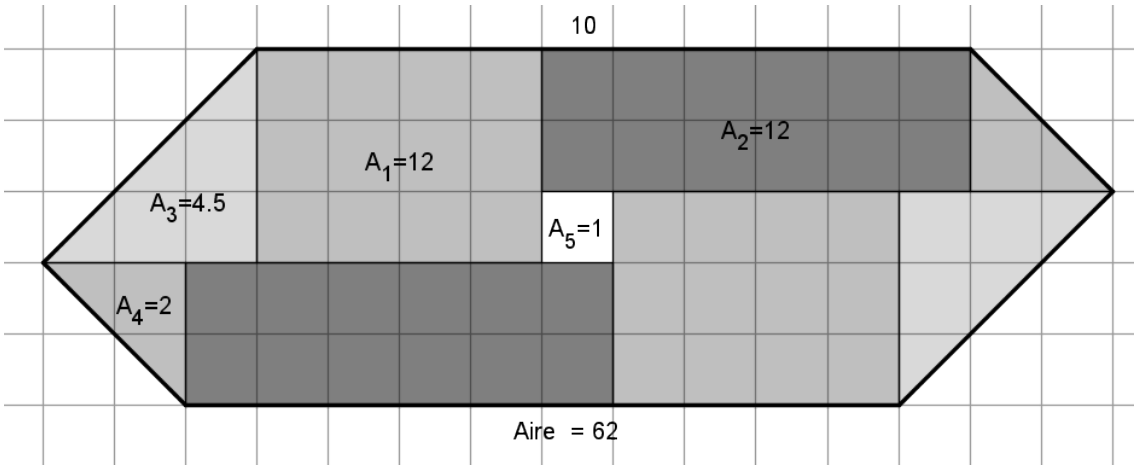


Illustration 5: Un hexagone sur quadrillage d'aire égale à 62 carrés, comptant dans son bord, autant de segments unitaires de chaque sorte que les 7 pièces du jeu réunies

Le rectangle de la figure 4, par contre, n'est pas inscrit correctement dans le quadrillage, car ses sommets inférieurs ne sont pas des nœuds du quadrillage. Il ne vérifie donc pas cette relation caractéristique. Il a un nombre P=25 de nœuds sur le bord, et les nœuds pris à l'intérieur sont au nombre de 7×9=63. La formule donnerait $25=2\times(A-63+1)$, soit une aire A égale à 12.5+62=73.5 alors qu'un petit calcul donne la valeur exacte de cette aire : $10\times5\sqrt{2}=50\sqrt{2}$, un nombre possédant une infinité de chiffres après la virgule, approximativement égal à 70.7 et pour ces deux raisons, différent de celui prévu par la formule.

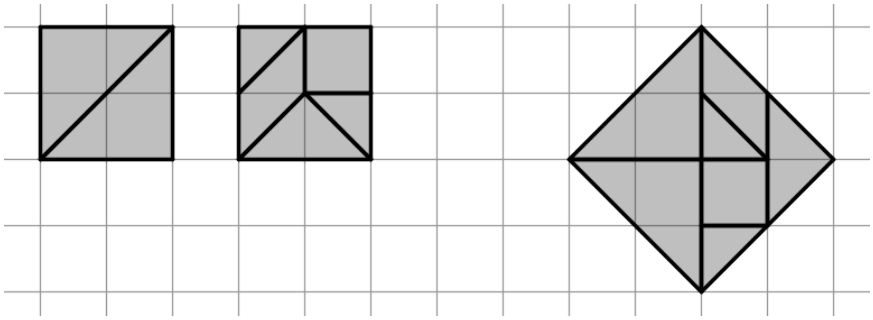


Illustration 6: Les deux carrés d'aire 4 qui permettent, en les superposant, de ranger le Tangram et le grand carré d'aire 8 parfois utilisé à cette même fin, mais sans superposition

Après cette petite digression à propos de la formule de Georges Pick caractérisant les polygones sur quadrillage – formule que nous réutiliserons bientôt – revenons à notre jeu des *sept pièces ingénieuses* (le nom chinois original du Tangram est 七巧板, *Ch'i ch'iao t'u,* signifiant quelque chose comme les sept planchettes ingénieuses). Nous avons fini d'en dresser le portrait. Celui-ci est on-ne-peut-plus-bref. Qu'ajouter de plus ? Le Tangram est comme une flûte à sept trous : une fois qu'on a décrit l'objet (sa longueur, son diamètre, l'écart entre les trous), on a tout dit. Il reste la musique que l'on peut jouer avec, une infinie variété de combinaisons de ces sept

notes. Un jeu de Tangram rangé dans sa boîte nous donne le *la*, en ce qui concerne cette musique géométrique qu'il recèle en puissance : c'est un carré, ou parfois deux plus petits (voir la figure 6). On comprend dans ces rangements que la raison d'être de ces segments est de pouvoir s'assembler côte-à-côte, pour fusionner les pièces ensemble et constituer des silhouettes extérieures pour lesquelles il n'est pas aisé de retrouver l'emplacement de chacune des pièces qui les constituent. Voilà donc notre jeu : il s'agit d'une sorte de puzzle où les combinaisons géométriques multiples et variées donnent naissance à un vaste monde de formes que nous nous proposons d'explorer.

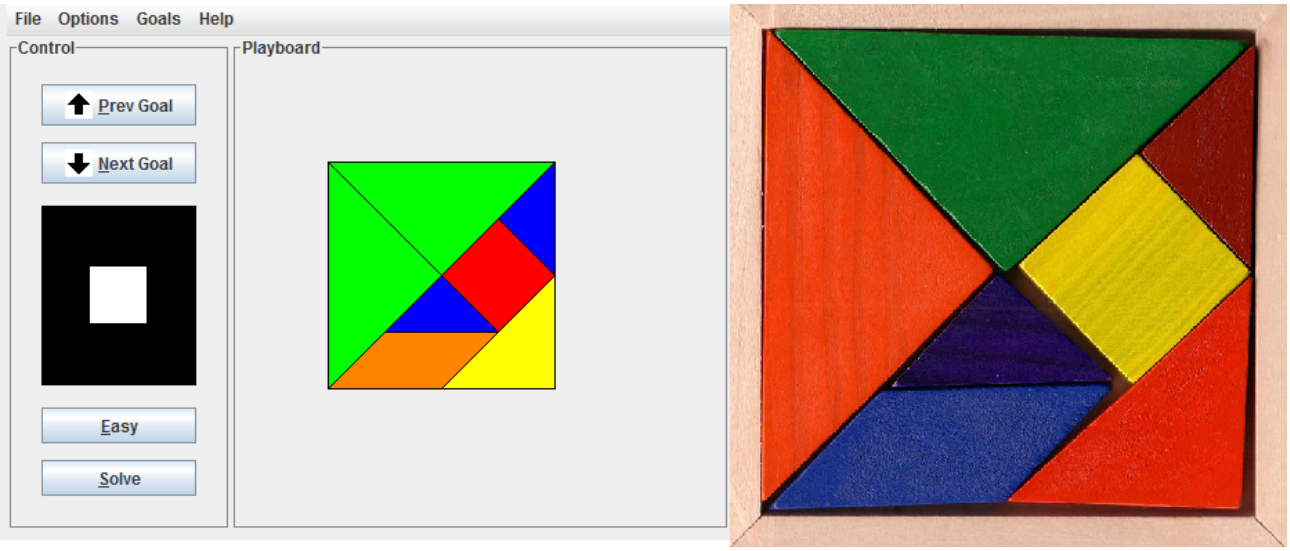


Photo 1: Un plateau de jeu sur ordinateur (ici l'applet de S. Antoy) offre des ajustements impeccables et des formes parfaites, comparés à ceux d'un jeu traditionnel en bois

Le jeu se dessine sur un quadrillage et se découpe éventuellement dans une feuille de papier mais comme il faudra en manipuler les pièces, mieux vaut prendre un carton assez rigide. On peut aussi utiliser des matériaux plus épais. À l'origine, les pièces étaient découpées dans du bois ou des plaques d'ivoire, puis ciselées. Aujourd'hui on trouve des Tangrams en plastique ou aussi parfois encore en bois, mais très simples, plus rarement en céramique ou en métal. Dans tous les cas, les formes des pièces doivent être très soigneusement tracées et découpées. Les versions modernes du jeu utilisent la technologie informatique : un petit logiciel sur un ordinateur, une tablette, un *smartphone* ou une plateforme de jeu vidéo. Nous utilisons personnellement l'excellente *applet Java* de Sergio Antoy qui est disponible[2] sur internet et permet de jouer avec le Tangram aussi bien qu'avec d'autres jeux de la même famille. Manipuler ces Tangrams numériques est aisé car il suffit de cliquer pour tourner les pièces d'un huitième de tour (les petits angles des triangles isocèles rectangles), et de déplacer la souris pour bouger les pièces. Les ajustements entre pièces sont programmés pour être impeccables : l'applet simule

2http://web.cecs.pdx.edu/~antoy/private/Tangram-dir/Applet.html

une sorte d'attraction magnétique et produit un son lorsque deux pièces entrent en contact en fusionnant un côté. Les figures réalisées avec ce type de Tangram sont précises, ce qui n'est pas forcément le cas avec un jeu traditionnel pour lequel la matérialité des pièces entraîne souvent quelques fluctuations dans les dimensions (longueurs, angles) et les ajustements. Signalons aussi que cette applet peut être téléchargée et utilisée hors connexion internet ; dans cette version autonome, il est possible d'ajouter des jeux de pièces à ceux proposés par défaut (il suffit de créer les fichiers *xml* sur le modèle de ceux qu'utilisent le programme) et il est aussi possible d'enregistrer de nouvelles figures pour un jeu donné.

Puisque nous sommes dans l'énoncé des généralités concernant les pièces du Tangram, remarquons quelques propriétés en rapport avec l'omniprésence du nombre $\sqrt{2}$ dans ces pièces. Cette partie peut être sautée en première lecture, car elle vient préciser, de façon sans doute prématurée, des points techniques qui auraient pu être traités en annexe de cet ouvrage ou parsemés dans les autres chapitres. Afin d'assumer complètement l'aspect facultatif de ce complément, nous utiliserons une police de caractère de taille inférieure. Notre objectif est de montrer que, lorsque les pièces du Tangram sont assemblées en respectant certaines règles, les principales caractéristiques d'une forme (coordonnées, longueurs de côtés, périmètre, aire, convexité) s'expriment à l'aide des seuls nombres entiers et de l'auxiliaire irrationnel (le nombre $\sqrt{2}$). Cette remarque a un grand intérêt pour la programmation car les nombres entiers se laissent manipuler très simplement, ce qui n'est pas le cas des nombres irrationnels en général.

Tout d'abord, remarquons que les trois formes différentes de pièces triangulaires sont semblables (elles ont la même succession d'angles). Le triangle moyen est un agrandissement du petit d'un facteur égal à la racine carrée de deux. En multipliant les longueurs du petit triangle ($1 - 1 - \sqrt{2}$) par ce coefficient $\sqrt{2}$, on trouve les longueurs du triangle moyen ($\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2$). De même, pour passer au grand triangle ($2 - 2 - 2\sqrt{2}$), il suffit de multiplier les longueurs du moyen par ce même nombre $\sqrt{2}$. Si l'on considère les agrandissements des aires correspondant à ces agrandissements des longueurs, le triangle moyen contenant deux petits triangles et le grand en contenant quatre, le coefficient multiplicateur pour passer d'un triangle à celui qui lui est immédiatement supérieur (du petit au moyen ou du moyen au grand) est égal à $(\sqrt{2})^2 = 2$. Lorsque nous disposons les pièces du Tangram côte à côte, pour réaliser des assemblages et constituer ainsi des formes, les différents côtés vont se placer selon les directions du quadrillage ou celles de ses diagonales. Il est bien sûr possible de disposer les pièces plus librement, mais les assemblages que nous étudions peuvent tous se réaliser ainsi : une des pièces étant posée, les autres viennent s'assembler à ses bords de diverses façons en faisant coïncider un sommet ou un point de référence. Si on considère le quadrillage sous-jacent au placement de la première pièce, les autres inscrivent leurs bords relativement à ce quadrillage. Ce que nous voulons indiquer ici concerne les coordonnées des sommets (ou plus largement des points de référence) des pièces lorsque ces assemblages se réalisent. Lorsqu'une pièce est inscrite dans le quadrillage, les coordonnées de ses sommets ou de ses points de référence sont des nombres entiers. Par

exemple, le petit triangle peut être placé de manière à ce que ses sommets aient pour coordonnées (0;0), (1;0) et (0;1). En réalisant un assemblage avec cette pièce, les bords de la nouvelle pièce peuvent se placer de diverses façons, mais si on veille toujours à faire coïncider un côté et un point de référence, alors les sommets de toutes les pièces pourront toujours se mettre sous la forme $\frac{a\sqrt{2}}{2}+b=\frac{a}{\sqrt{2}}+b$ où *a* et *b* sont des entiers. C'est ce que nous voulons prouver ici.

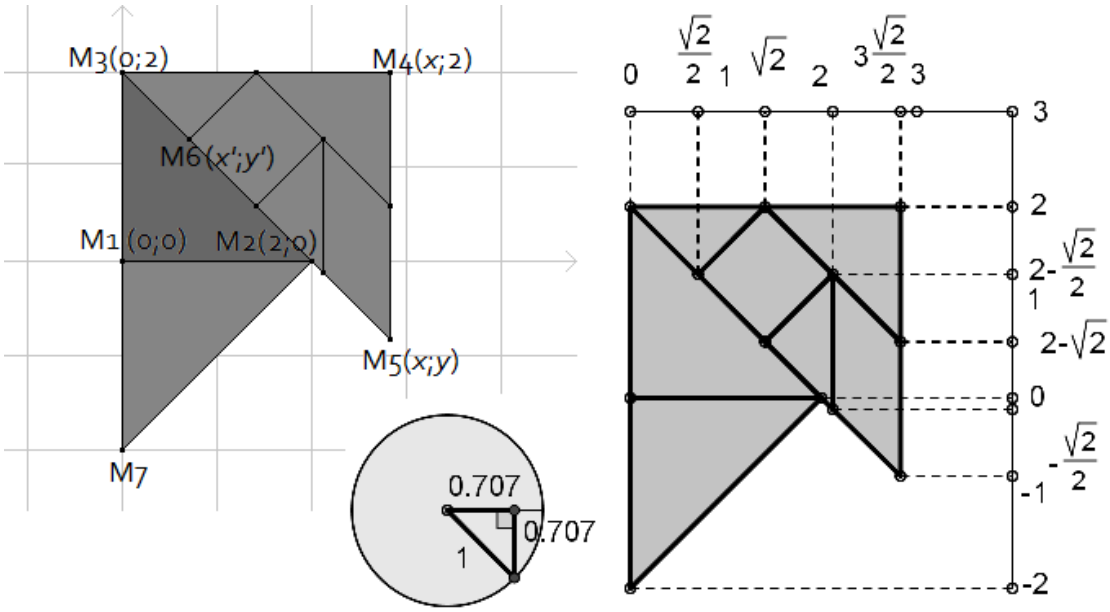


Illustration 7: Une forme hétérogène à 5 côtés réalisée avec le Tangram et un système de coordonnées permettant de repérer la position des sommets des pièces.

Supposons donc que nous disposions d'une pièce dont les coordonnées des points de référence vérifient la forme $\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$. C'est bien le cas au début de l'assemblage comme nous venons de le dire, les coordonnées étant alors entières (les paramètres *a* sont tout simplement nuls). Les coordonnées du point de référence où s'initie l'assemblage sont donc, pour les deux pièces, de la forme $\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$, on va les noter ($x_1;y_1$) et on aura alors $x_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$ et $y_1=\frac{a'\sqrt{2}}{2}+b'$. C'est notre hypothèse de départ pour la pièce en place, et c'est aussi le cas pour la pièce qui vient s'assembler, puisque ces deux pièces font alors coïncider ces deux points. Notons ($x_2;y_2$) les coordonnées du point de référence M_2 qui succède au point M_1 où se réalise l'assemblage, en tournant dans un certain sens autour de la pièce qui vient s'assembler. Si l'assemblage se fait selon une des directions du quadrillage, mettons selon la direction de l'axe des abscisses, les ordonnées des deux points seront égales $y_2=y_1=\frac{a'\sqrt{2}}{2}+b'$ et l'abscisse de M_2 sera tout simplement égale à la somme de celle de M_1 et de la longueur du segment qu'on ajoute. Donc $x_2=x_1+1=\frac{a\sqrt{2}}{2}+(b+1)$ si on ajoute un segment de longueur 1 et $x_2=x_1+\sqrt{2}=\frac{(a+2)\sqrt{2}}{2}+b$ si on ajoute un segment de longueur $\sqrt{2}$. Dans tous les cas x_2 sera donc de la forme $\frac{a''\sqrt{2}}{2}+b''$ où *a''* et *b''* sont des entiers. Le même raisonnement s'applique au cas où l'assemblage se fait selon la direction de l'axe des ordonnées. Dans le cas où l'assemblage se fait selon une des diagonales du quadrillage, aux coordonnées de M_1, il faut ajouter (ou retrancher) les longueurs des projections orthogonales sur les axes du segment ajouté. Et c'est là qu'intervient une nouvelle fois le coefficient $\sqrt{2}$ car, pour projeter sur les axes une longueur mesurée sur une des diagonales, il suffit de multiplier par le cosinus de l'angle 45° qui vaut ... $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui explique le dénominateur 2 de la forme $\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$. Si le

segment mesure 1 sur la diagonale, il faut ajouter (ou retrancher) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ aux coordonnées, et si le segment mesure $\sqrt{2}$ sur la diagonale, il faut ajouter (ou retrancher) 1 aux coordonnées. En supposant que la longueur s'ajoute bien, on va donc se retrouver, soit avec $x_2=x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(a+1)\sqrt{2}}{2}+b$ et $y_2=y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(a'+1)\sqrt{2}}{2}+b'$, soit avec $x_2=x_1+1=\frac{a\sqrt{2}}{2}+(b+1)$ et $y_2=y_1+1=\frac{a'\sqrt{2}}{2}+(b'+1)$. Dans tous les cas, on aura les coordonnées de M_2 qui seront sous la forme indiquée. Ce raisonnement se généralise donc aux différentes situations d'orientation et de longueur du segment ajouté, et de proche en proche à tous les points de référence de la pièce ajoutée. En continuant à ajouter, selon ces règles d'assemblage, les autres pièces du jeu, les coordonnées ne sortent jamais de cette forme. Une conséquence de ceci sera la possibilité de conserver ou de retrouver les valeurs exactes des coordonnées, plutôt que de se satisfaire de valeurs approchées qui pourraient éventuellement suffire pour certaines applications (affichage graphique, etc.) mais montreraient rapidement des défaillances pour d'autres (comparaisons, etc.)

L'illustration montre un pentagone hétérogène réalisé avec les sept pièces du Tangram. En considérant que les deux grands triangles sont disposés sur la grille du quadrillage, on peut repérer les sommets des pièces en donnant aux sommets d'un de ces triangles les coordonnées M1(0;0), M2(2;0) et M3(0;2). Dans ce système, le point M4 a pour coordonnées (x;2) où l'abscisse x est égale à $2\sqrt{2}$ (on se déplace à partir de M3 de deux segments de longueur $\sqrt{2}$ vers la droite). Pour le point M5, on se déplace de $2\sqrt{2}$ vers le bas, les coordonnées de M5 sont donc ($2\sqrt{2}$; $2-2\sqrt{2}$). Pour le point M6, on peut partir de M3 et se déplacer de 1 vers le « Sud-Est », ce qui revient à ajouter ou soustraire aux deux coordonnées de M3, la longueur de la projection de ce segment de longueur 1 sur les axes de coordonnées, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve alors que les coordonnées de M6 sont ($\frac{\sqrt{2}}{2}$; $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Les coordonnées peuvent servir à calculer des longueurs ou des aires. Les longueurs qui vont nous intéresser dans cette étude, sont les longueurs des côtés ainsi que la somme de ces longueurs qu'on appelle périmètre. Lorsqu'on assemble les pièces du jeu en respectant la règle hétérogène expliquée plus loin, notamment en faisant coïncider un point de référence de chacune des deux pièces qu'on assemble, les longueurs des côtés ne peuvent prendre que des valeurs de la forme $a\sqrt{2}+b$ où a et b sont des entiers (on n'a jamais ici besoin de diviser l'entier a par 2). Cela s'explique tout naturellement en considérant les assemblages comme des segments dont on ajoute ou on retranche les longueurs. Le côté [M3M7] de notre illustration mesure 2+2=4. Les trois côtés [M3M4], [M4M5] et [M2M7] mesurent, quant à eux, $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$. La longueur du côté [M2M5] doit être déterminée en considérant les quatre segments de longueurs 1 qui s'ajoutent dans la partie supérieure, et les deux segments de longueur $\sqrt{2}$ qui s'ajoutent dans la partie inférieure. En retranchant ces deux longueurs, on trouve la longueur M2M5 qui vaut $4-2\sqrt{2}\approx 1.172$. Le périmètre d'un tangram hétérogène sera aussi toujours de la forme $a\sqrt{2}+b$ où a et b sont des entiers, car les nombres de cette forme s'ajoutant entre eux produisent toujours des nombres de cette forme : $(a\sqrt{2}+b)+(a'\sqrt{2}+b')=(a+a')\sqrt{2}+(b+b')=a''\sqrt{2}+b''$, où $a''=a+a'$ et $b''=b+b'$. Notre pentagone hétérogène a ainsi un périmètre égal à $4+3\times 2\sqrt{2}+(4-2\sqrt{2})=8+4\sqrt{2}\approx 13.657$.

La forme de l'illustration est une forme non-convexe, car la diagonale [M5M7] est située à l'extérieur de la forme. Le point M2 est un des cinq sommets de ce pentagone, mais il n'est pas présent sur l'enveloppe convexe – le quadrilatère M3M4M5M7 – comme les autres sommets. Pour

les distances entre les sommets qui ne sont pas des longueurs de côtés, on ne dispose pas de forme générale simple. Le côté [M5M7] de l'enveloppe convexe est une de ces longueurs. On peut en obtenir une expression à l'aide des coordonnées et d'une formule dérivée du théorème de Pythagore $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$, mais le résultat ne se simplifie généralement pas pour s'exprimer à l'aide de $\sqrt{2}$. Nous laissons le lecteur vérifier que, dans le cas de notre illustration, on a $M_5M_7=4\times\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 3.061$.

Une dernière caractéristique calculée pour les tangrams est appelée convexité réelle. Il s'agit de l'aire inoccupée par la figure réalisée avec le Tangram à l'intérieur de la surface délimitée par l'enveloppe convexe. Pour calculer la convexité de ce tangram, il faut déterminer l'aire de l'enveloppe convexe et lui enlever l'aire du Tangram, donc huit carrés (ou seize triangles). Dans le cas qui nous occupe, on pourrait aussi bien calculer l'aire du triangle M2M5M7 qu'il faut ajouter au tangram pour que la forme obtenue soit convexe. On trouve alors $\frac{M_2M_7\times M_2M_5}{2}=\frac{2\sqrt{2}\times(4-2\sqrt{2})}{2}=4\sqrt{2}-4$ carrés unitaires, soit $8\sqrt{2}-8$ triangles. D'une façon générale, les convexités réelles vont être encore une fois des nombres de la forme $\frac{a\sqrt{2}}{2}+b=\frac{a}{\sqrt{2}}+b$ où a et b sont des entiers.

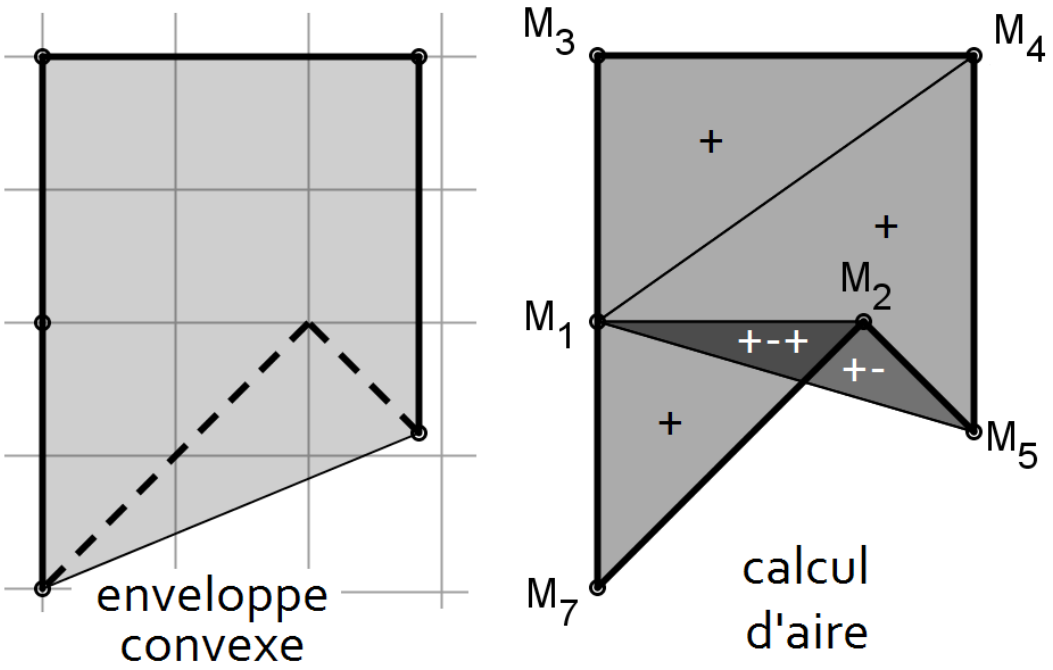


Illustration 8: L'enveloppe convexe est le polygone convexe (sans creux) qui ceinture la forme, ici le quadrilatère convexe de gauche enveloppe du pentagone. Le calcul d'aire se ramène à la somme d'aires algébriques de triangles adjacents ayant un sommet en commun (les parties notées + sont ajoutées, celles notées – sont soustraites), ici le point M1

Pour expliquer cela, précisons comment notre programme calcule les aires des polygones. Nous découpons le polygone en triangles ayant tous un point du bord en commun, ce point étant également l'origine du système de coordonnées. Si l'on veut calculer l'aire de l'enveloppe convexe du pentagone de notre illustration, en prenant M1 comme sommet commun, on aboutit aux triangles M1M3M4, M1M4M5 et M1M5M7. Pour déterminer l'aire algébrique de chacun de ces triangles, on calcule des produits vectoriels (déterminants). Pour le triangle M1M3M4, on prend les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M_4}$, car le produit vectoriel $\overrightarrow{M_1M_3}\wedge\overrightarrow{M_1M_4}$ mesure l'aire du

parallélogramme construit sur ces vecteurs (il faut imaginer le 4ème sommet M'1 de ce parallélogramme M1M3M'1M4 comme étant le symétrique de M1 par rapport au milieu de [M3M4]). Ainsi, en notant $(x_3;y_3)$ les coordonnées de M3 donc de $\overrightarrow{M1M3}$, et $(x_4;y_4)$ les coordonnées de M4 donc de $\overrightarrow{M1M4}$, l'aire du parallélogramme est égale à $\overrightarrow{M1M3}\wedge\overrightarrow{M1M4}=x_3y_4-x_4y_3$. Or, par symétrie, ce parallélogramme mesure deux fois l'aire du triangle M1M3M4. En prenant le résultat de ce calcul d'aire sans modification, on dispose de l'aire du triangle (la moitié du parallélogramme) mesurée en petits triangles unitaires (la moitié du carré unitaire). Montrons cette méthode sur l'exemple de notre pentagone : le triangle M1M3M4 a une aire égale à $2\times2\sqrt{2}-0\times2=4\sqrt{2}$ triangles, le triangle M1M4M5, quant à lui, a une aire égale à $2\times2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\times(2-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=8$ triangles et le triangle M1M5M7 a une aire égale à $0\times(2-2\sqrt{2})-(-2)\times(2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$ triangles. Finalement, l'enveloppe convexe M3M4M5M7 a une aire égale à $4\sqrt{2}+8+4\sqrt{2}=8\sqrt{2}+8$ triangles, ce qui conduit à une convexité du tangram pentagonal égale à $8\sqrt{2}+8-16=8\sqrt{2}-8$ triangles. Notons que pour des polygones convexes (en particulier pour les enveloppes convexes des tangrams), l'opération de découpage en triangles adjacents génère des aires algébriques qui sont toutes positives et qui s'additionnent très naturellement. Dans le cas d'un polygone non-convexe, il y a des parties d'aire de triangles qui sont ajoutées alors qu'elles n'appartiennent pas au polygone, et puis retranchées avec l'aire algébrique du triangle suivant, qui peut très bien être négative, comme dans notre illustration : si l'on voulait calculer l'aire du pentagone (inutile, car étant un tangram cette aire vaut forcément 16 !), une partie du triangle M1M4M5 (très précisément l'aire du triangle M1M5M2) ne fait pas partie du tangram pentagonal, mais l'ajout ultérieur de l'aire algébrique du triangle M1M5M2 (calculée par la formule précédente, celle-ci est négative) retranche cette partie à la somme.

Revenons à notre préoccupation première : montrer que, comme les coordonnées des sommets, les aires des polygones sont toutes également de la forme $\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$ où a et b sont des entiers. Avec la formule que nous venons d'indiquer (très simple à programmer), il s'agit juste d'additionner ou de soustraire des produits $(\frac{a\sqrt{2}}{2}+b)(\frac{a'\sqrt{2}}{2}+b')=(\frac{ab'+ba'}{2})\sqrt{2}+(\frac{aa'(\sqrt{2})^2}{4}+bb')$. La partie rationnelle de cette expression (le dernier terme) ne semble pourtant pas être un entier en général, car on a $\frac{aa'(\sqrt{2})^2}{4}+bb'=\frac{aa'}{2}+bb'=\frac{aa'+2bb'}{2}$. Le produit aa' pose apparemment un problème car, s'il est impair, la partie rationnelle ne serait pas entière, ce qui contredirait notre affirmation et aussi notre expérience (voir au chapitre 10, les convexités des tangrams hétérogènes ont toutes des parties rationnelles entières). En réalité, les morceaux de parties rationnelles non entières (à cause de termes en $\frac{aa'}{2}$ qui, lorsque a et a' sont impairs tous les deux, sont non entiers) se neutralisent en effectuant le produit vectoriel. Dans le calcul du produit vectoriel $xy'-x'y$ des vecteurs $\vec{v}(x;y)$ et $\vec{v}'(x';y')$, lorsque les coordonnées s'écrivent $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$, $y=\frac{c\sqrt{2}}{2}+d$, $x'=\frac{a'\sqrt{2}}{2}+b'$ et $y'=\frac{c'\sqrt{2}}{2}+d'$, on a une partie rationnelle qui est égale à $\frac{aa'+2bb'}{2}-\frac{cc'+2dd'}{2}=\frac{aa'-cc'+2(bb'-dd')}{2}$ et le morceau qui peut poser problème est le terme $aa'-cc'$ qui, s'il est impair, peut rendre cette partie rationnelle non entière. Pourquoi ce terme n'est-il jamais impair ? Il se peut que les quatre nombres a, a', c et c' soient tous les quatre impairs. Les produits aa' et cc' sont alors impairs tous les deux, et leur différence (ou leur somme puisqu'il s'agit de valeurs algébriques) est toujours paire, car la somme de deux nombres impairs est paire : $(2n+1)+(2n'+1)=2(n+n')+2=2(n+n'+1)$. Dès lors qu'il y a un nombre pair dans le couple (a,a') et un nombre pair dans le couple (c,c'), le terme ne pose plus problème car, étant pair, il conduira à un nombre entier. Les cas qui posent problème sont ceux où, dans un des couples, il y a un nombre

pair et un nombre impair tandis que dans l'autre couple, il y a deux nombres de même parité. Cela revient à avoir un des sommets, mettons le premier M ($x=\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$; $y=\frac{c\sqrt{2}}{2}+d$), qui a ses coefficients *a* et *c* de même parité et l'autre sommet M' ($x'=\frac{a'\sqrt{2}}{2}+b'$; $y'=\frac{c'\sqrt{2}}{2}+d'$), qui a ses coefficients *a'* et *c'* de parité différente. Or, ce dernier point est impossible ! Il y a une configuration précise qui fait changer la parité des nombres *a* et *c* : nous n'avons pas insisté dessus, trois pages auparavant, lorsque nous avons écrit « Si le segment mesure 1 sur la diagonale, il faut ajouter (ou retrancher) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ aux coordonnées. » Avec les tangrams hétérogènes (et ce sera vrai aussi pour les *n*-abolos), à chaque fois que l'on va ajouter $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ou $\frac{-\sqrt{2}}{2}$) à l'une des coordonnées, *on va faire de même à l'autre coordonnée*, au signe près. Ce faisant, on va changer la parité de *a* et de *c* simultanément ! Les deux nombres seront toujours, soit pairs tous les deux, soit impairs tous les deux. Ceci étant valable pour toutes les coordonnées, on ne peut jamais se retrouver dans le cas de figure où $aa'-cc'$ est impair. Finalement, la partie rationnelle de l'aire de l'enveloppe convexe, et par suite, celle de la convexité réelle, seront toujours entières.

<u>Question 1</u> : Le nombre $\sqrt{2}$, en plus d'être un nombre irrationnel, a de nombreuses propriétés étonnantes. Nous renvoyons le lecteur intéressé par celles-ci au très remarquable livre de Benoît Rittaud « Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$ »[3]. Ce nombre peut, avec l'ensemble des entiers, engendrer un ensemble de nombres, noté $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, de la forme $\frac{a\sqrt{2}+b}{c}$, où *a, b* et *c* sont des entiers. Dans cet ensemble de nombres, on peut effectuer les quatre opérations d'usage (+, –, ×, ÷) sans sortir de l'ensemble. La division par $a\sqrt{2}+b$ notamment revient à la multiplication par $\frac{a\sqrt{2}-b}{2a^2-b^2}$ qui est toujours un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ est le sous-ensemble de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ne contenant que les nombres de la forme $a\sqrt{2}+b$, où *a* et *b* sont des entiers positifs (les éléments de cet ensemble vérifient donc l'égalité *c*=1). $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ est remarquable car on peut y décomposer tous les éléments sous la forme unique d'un produit de « nombres premiers » de cet ensemble, exactement comme on peut écrire tous les entiers sous la forme d'un produit unique de nombres entiers premiers (par exemple $60=2^2\times3\times5$, où 2, 3 et 5 sont des nombres premiers de $\mathbb{N}$). Les nombres 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+1$, 3, $2\sqrt{2}+1$ sont les premiers nombres premiers de l'ensemble $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ dans lequel 2 n'est pas premier (c'est le carré de $\sqrt{2}$) et où on décompose $2\sqrt{2}+3$ en $(\sqrt{2}+1)^2$ et $3\sqrt{2}+5$ en $(\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}+1)$.

Voici donc quelques petites questions pour se familiariser avec $\sqrt{2}$. La longueur totale ($10\sqrt{2}+20$) des bords des pièces du Tangram est-il un nombre premier de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$? Sinon, décomposer ce nombre en un produit de nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$. Quels sont les premiers nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$ et en particulier quel nombre premier succède à $2\sqrt{2}+1$? On peut aussi chercher les décompositions en facteurs premiers des périmètres réels des pièces du Tangram, et puis celles des <u>périmètres des tangrams</u> homogènes et/ou des 16abolos (les valeurs dans ces

3 Benoît Rittaud, *Le fabuleux destin de* $\sqrt{2}$, Éditions Le Pommier, 2006.

périmètres se trouvent aux chapitres 8 et 11).

Peut-on exprimer les différentes longueurs de segments rencontrées avec les polycompacts (voir le chapitre 12) à l'aide des nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$? On rappelle que ces nombres sont compris entre 0 (exclus) et $\sqrt{2}$, et qu'ils sont obtenus en calculant l'écart entre un nombre entier de $\sqrt{2}$ et un nombre entier, soit par un calcul de forme $a\sqrt{2}-b$ ou $-a\sqrt{2}+b$ (a et b entiers). Nous verrons que, dans l'ordre où ces longueurs apparaissent dans les polycompacts, nous avons les nombres suivants : 1, $\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{2}-1\approx 0.414$, $2-\sqrt{2}\approx 0.586$, $2\sqrt{2}-2\approx 0.828$, $3-2\sqrt{2}\approx 0.172$, $3\sqrt{2}-4\approx 0.243$, $3\sqrt{2}-3\approx 1.243$, $5-3\sqrt{2}\approx 0.757$, $4-2\sqrt{2}\approx 1.172$, $4\sqrt{2}-5\approx 0.657$, $6-4\sqrt{2}\approx 0.343$, $5\sqrt{2}-6\approx 1.071$, $5\sqrt{2}-7\approx 0.071$, $7-4\sqrt{2}\approx 1.343$, $8-5\sqrt{2}\approx 0.929$, $6\sqrt{2}-8\approx 0.485$, $9-6\sqrt{2}\approx 0.515$ et $7\sqrt{2}-9\approx 0.899$ (voir le tableau 55 du chapitre 12, la liste s'allonge avec la suite de la série qui commence par $10-7\sqrt{2}\approx 0.101$, nombres barrés et grisés dans le tableau). La question est donc de savoir comment ces nombres peuvent s'exprimer à partir des nombres premiers de $\mathbb{N}(\sqrt{2})$?

Chapitre 2 :
Premiers assemblages

Lorsqu'on assemble deux ou trois pièces du jeu entre elles, le nombre de combinaisons est faible. Il est alors possible d'essayer de les trouver toutes et d'étudier la diversité des formes trouvées

Thomas Hill fut un des pionniers du Tangram. Vers le milieu du XIXème siècle, ce pédagogue américain eut l'idée de combiner seulement une partie des pièces entre elles. En pensant à un jeune public, il trouvait trop compliquée la multitude des formes engendrées par les sept pièces. Cependant il reconnaissait un intérêt manipulatoire et ludique dans ce jeu qui facilitait l'abord des territoires abstraits de la géométrie. Il proposa donc cette activité : choisir trois des cinq triangles du jeu, sans préciser lesquels, pour reconstituer une forme donnée, puis répondre à une question concernant cet assemblage. L'enfant tire par exemple, une carte sur laquelle est imprimée la figure suivante. Il doit trouver quel jeu de trois triangles peut lui convenir (la réponse n'est pas toujours unique). Des considérations sur les aires des triangles et l'aire de la silhouette peuvent être utiles. Dans le cas de notre figure, il s'agit de trouver qu'elle a une aire de neuf triangles, et donc qu'elle est nécessairement faite des deux grands triangles et d'un petit.

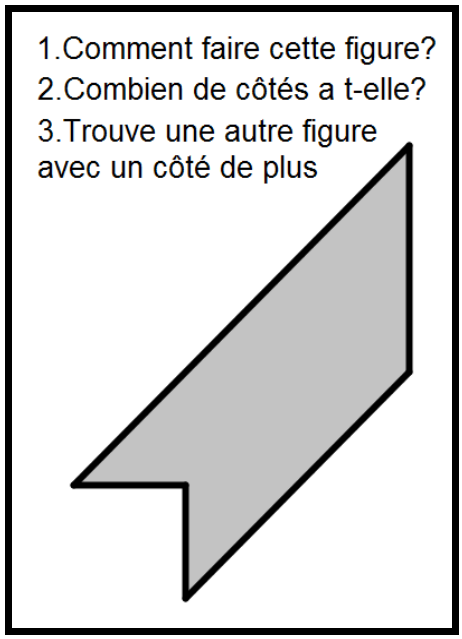


Illustration 9: Une carte réalisée selon la règle de Hill, avec 3 triangles du jeu seulement

Pour les autres questions, ce n'est pas bien difficile de compter les côtés (il suffit de savoir ce qu'est un côté et aussi de savoir compter jusqu'à cinq), mais trouver une

forme ayant un côté de plus peut être moins aisé. Ici c'est facile car il y a beaucoup de possibilités avec six côtés. Pour le pédagogue, il peut être utile de disposer d'un fichier donnant les caractéristiques de toutes les formes possibles. On peut aussi envisager d'autres caractéristiques que le nombre de côtés. La présence d'un angle rentrant (supérieur à un angle plat) dans notre forme peut amener cette question : *Combien d'angles rentrants au maximum peut avoir une figure formée de ces trois pièces?* L'absence de symétrie dans cette figure peut amener cette autre question : *Existe-t-il des formes symétriques réalisables avec ces pièces?* La liste des questions/suggestions peut évidemment être allongée. On s'amuse d'un rien lorsqu'on est stimulé par le jeu, et c'est là justement la trouvaille de Hill. Combien de formes peut-on réaliser avec ce jeu de trois triangles? La recherche manuelle serait un peu laborieuse, bien que non privée d'intérêt. Ne vivant pas au siècle de Hill, nous pouvons nous aider de l'ordinateur pour calculer les différentes combinaisons de ces trois pièces. La règle d'assemblage doit être bien claire : les formes doivent pouvoir se dessiner avec leurs sommets sur le quadrillage, leur bord et leur intérieur doivent être d'un seul tenant (on élimine ainsi les cas de pièces ne se touchant que par un sommet).

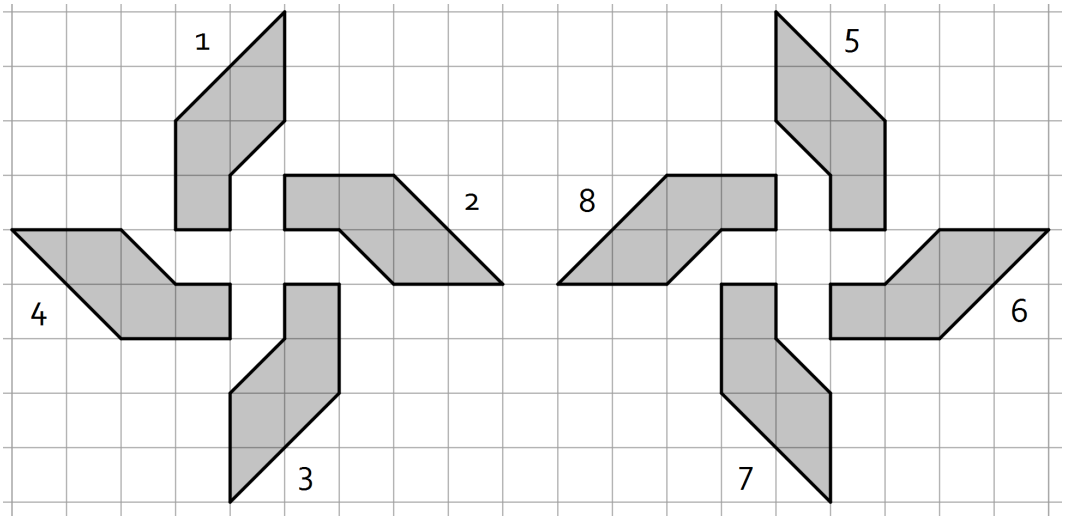


Illustration 10: Les 8 alias d'une des solutions au problème précédent ne sont qu'une seule et même figure dessinée de façon congruente dans des positions différentes

Muni de ces règles, nous pouvons écrire un algorithme qui essaie toutes les combinaisons. Celui-ci doit pouvoir identifier deux formes identiques qui ne seraient pas disposées de la même façon sur le quadrillage. En effet, les formes sur quadrillage qui n'ont aucun élément de symétrie peuvent être disposées de huit façons différentes : nous dirons qu'elle se présente sous huit alias. La forme reste identique à elle-même, elle est juste tournée différemment et éventuellement retournée sur elle-même. Considérons une des réponses possibles à la question 3 de la carte : la forme à six côtés que nous proposons n'est pas symétrique. Elle se présente sur le quadrillage sous un des huit alias que nous avons dessiné.

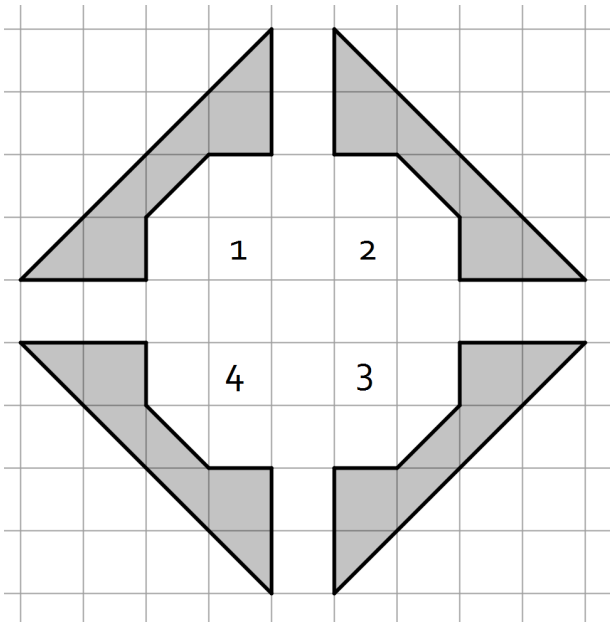


Illustration 11: Les 4 alias d'une solution ayant un axe de symétrie

La présence d'éléments de symétrie limite le nombre des alias différents. Ainsi quatre alias suffisent lorsqu'un axe de symétrie se présente. Même chose pour les formes ayant un centre de symétrie. Le nombre d'alias peut descendre à deux lorsque la figure possède deux axes de symétrie perpendiculaires ou un centre de rotation d'ordre 4 (la figure se superpose à elle-même par une rotation d'un quart de tour, mais un retournement selon un des axes du plan la positionne d'une manière non superposable) et même à un seul et unique alias pour des figures possédant quatre axes de symétrie comme le carré.

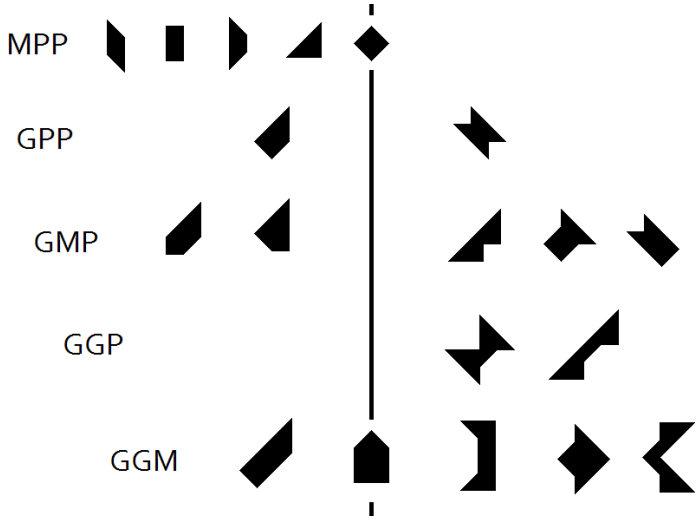


Illustration 12: Les formes convexes et/ou symétriques que l'on peut former avec les 5 sous-ensembles de 3 triangles du jeu

Notre algorithme doit donc reconnaître et éliminer les doublons éventuellement générés. Pour cela, il faut pouvoir disposer d'une écriture commune pour désigner ces différents alias d'une même forme. Et il faut bien sûr que cette écriture diffère pour deux formes distinctes et puisse représenter toute la géométrie de la forme, notamment pour pouvoir la dessiner ultérieurement. Il y a plusieurs solutions pour encoder de telles formes géométriques. Celle que nous avons utilisée est basée sur la description des carreaux du rectangle minimum contenant cette forme. Chacun des carreaux d'une forme sur quadrillage est dans l'un des états

suivants : vide de la forme – rempli par la forme – à moitié occupé par la forme. Dans ce dernier cas, un des sommets du carreau étant vide de la forme, il y a quatre possibilités. Finalement, il y a donc six possibilités que nous coderons avec un chiffre entre 0 et 5 : 0 pour vide, 5 pour plein, les autres chiffres pour les quatre façons d'être à moitié plein de la forme. Notre système illustré plus bas, permet de comprendre comment l'ordinateur va détecter qu'il peut associer deux demi-carrés : lorsque la somme des codes fait 5! Notre algorithme exploite cette idée pour essayer les différentes associations des trois pièces entre elles. Un code complet doit contenir les chiffres des différents carreaux composants le rectangle, mais aussi une indication sur le rectangle. Choisissons d'indiquer la dimension horizontale du rectangle. Les six carreaux de la forme encadrée de gauche est codée 105 140, mais il faut ajouter l'indication sur la dimension horizontale : il y a deux carreaux par ligne (donc trois lignes de deux carreaux). Ainsi renseigné, l'ordinateur comprendra qu'il s'agit de 10 sur la ligne du haut, 51 sur la ligne du centre et 40 sur la ligne du bas. La forme encadrée de droite est codée 253 030 et on ajoute l'indication qu'il s'agit de lignes de trois carreaux : donc 253 sur la ligne du haut et 030 sur celle du bas.

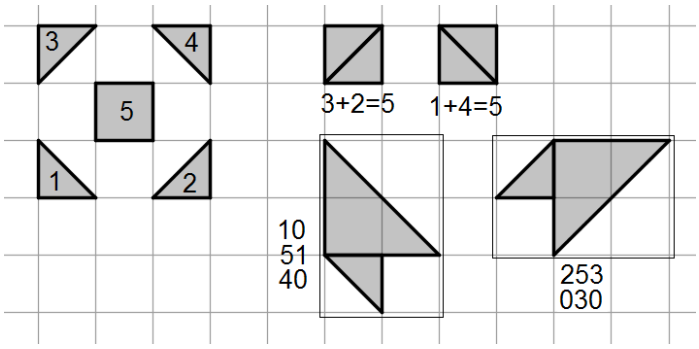


Illustration 13: Le système d'encodage des carreaux utilise un chiffre entre 0 et 5 pour les 6 possibilités

Pour éviter les doublons, notre algorithme doit reconnaître que les deux formes encadrées correspondent à deux alias de la même figure. Il doit donc disposer d'une règle qui assigne la préférence à un des alias. Les deux formes sont codées par les suites de chiffres 105140.2 et 253030.3 (nous avons mis un point pour séparer l'indication sur la dimension horizontale, car celle-ci peut ultimement dépasser 9). Choisissons tout simplement celle qui est la plus petite dans l'ordre alphanumérique connu par l'ordinateur. Lors de notre génération des différentes formes, nous préférerons à chaque fois l'alias ayant cette forme, que l'on dira pour cette raison, *canonique*. Nous passons sur les détails techniques, un peu rebutants pour le néophyte, de notre algorithme pour nous concentrer sur les résultats. Voici le verdict du programme : avec ces trois pièces nous pouvons former soixante-quatre formes différentes seulement qui respectent cette règle d'assemblage. Nous

pouvons dessiner ces formes puisqu'elles ne sont pas si nombreuses, et nous pouvons étudier différentes répartitions de ces formes : combien ont cinq côtés, combien en ont six, etc. Nous avons compté les nombres de côtés et aussi le nombre d'angles rentrants de chacune des formes possibles. Nous avons aussi indiqué l'aire du rectangle qui contient la forme. On voit sur les résultats que cinq valeurs peuvent se rencontrer pour cette aire : 6, 8, 9, 12 et 16. Les dimensions de ces rectangles sont d'un seul type dans chacun des cas : 2×3, 2×4, 3×3, 3×4 et 4×4.

Côtés	5	6	7	8	Total
Avec 1 rentrant	7	4	0	0	11
Avec 2 rentrants	0	10	11	0	21
Avec 3 rentrants	0	0	6	26	32
Aire=6	1	1	0	0	2
Aire=8	3	2	1	0	6
Aire=9	0	0	4	3	7
Aire=12	3	10	8	17	38
Aire=16	0	1	4	6	11
Total	7	14	17	26	64

Tableau 1: Répartition des 64 formes homogènes réalisables avec le jeu GGP

Le seul examen visuel permet d'effectuer certains de ces décomptes. Il suffit de dessiner les figures pour savoir lesquelles ont 5, 6, 7 ou 8 côtés. De même, il est facile de compter les angles rentrants. On peut encore remarquer qu'il y en a deux qui possèdent un axe de symétrie alors que les soixante-deux autres n'ont aucun élément de symétrie. Mais ces comptages seront certainement plus difficiles à conduire quand il y aura davantage de figures, ou quand on examinera des propriétés moins évidentes.

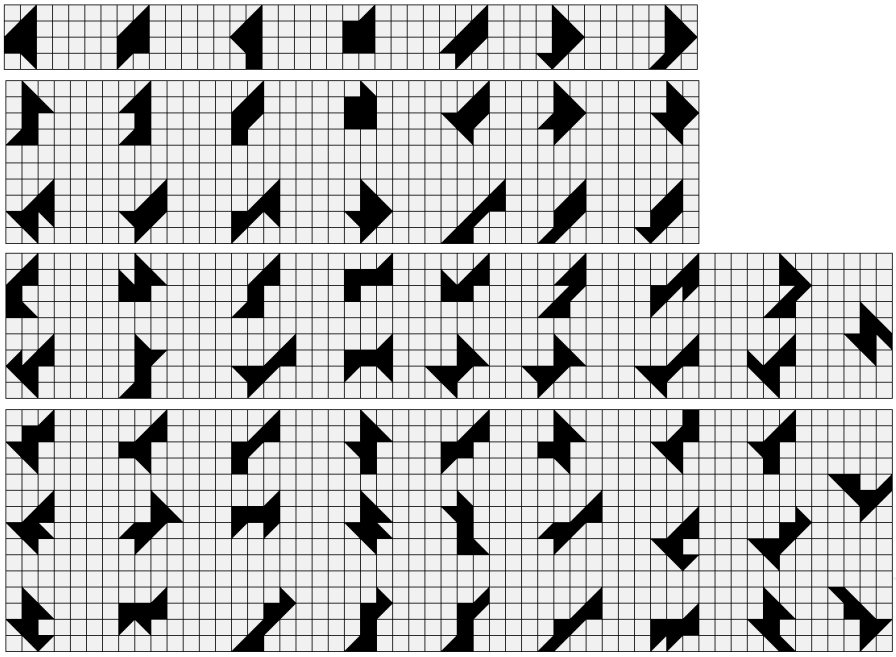


Illustration 14: Les 64 figures que l'on peut obtenir avec le jeu nommé GGP (2 grands triangles et un petit), classées par nombre de côtés

Parmi les sous-ensembles de trois triangles extraits du Tangram, il y a d'autres configurations que celles que nous venons d'examiner, que nous noterons GGP (G pour un grand triangle, P pour un petit). Si l'on note M le moyen triangle, il est aussi possible de prendre les configurations suivantes : GGM, GMP, GPP et MPP. Notons

l'existence, dans ces nouveaux sous-ensembles, de dix formes *convexes* : des formes n'ayant aucun angle rentrant. Les formes convexes sont assez rares en général, nous verrons cela plus loin, mais elles se distinguent avant tout pour leur géométrie particulière (sans renfoncement) et la limitation constitutionnelle du nombre des côtés : en raison de la valeur limitée des angles, ce nombre ne peut dépasser huit pour les formes sur quadrillage.

	Aire	Nb formes	F. symétriques	F. convexes	sym.et conv.
MPP	4	13	5	5	5
GPP	6	35	1	1	0
GMP	7	63	3	2	0
GGP	9	64	2	0	0
GGM	10	57	4	2	1
Total		232	15	10	6

Tableau 2: Formes réalisables par les 5 jeux que l'on peut avoir avec 3 triangles du Tangram

Quelques caractéristiques combinatoires de ces ensembles sont notées dans le tableau ci-dessus. Nous laissons le soin au lecteur d'effectuer d'autres décomptes et observations sur ces premiers assemblages. Mentionnons tout de même le sous-ensemble GGM qui est le seul des cinq à contenir des formes à neuf côtés. Deux de ces formes sont contenues dans un rectangle d'aire 20 (4×5).

Illustration 15: Les 9 figures à 9 côtés que l'on peut former avec 3 triangles du jeu sont toutes réalisées avec le sous-ensemble contenant les 2 grands triangles et le moyen

<u>Question 2</u> : La situation de Hill met en scène trois triangles pris au hasard parmi les cinq du Tangram. Nous avons vu qu'il conduit à cinq jeux différents d'aire 4, 6, 7, 9 et 10. Avec deux triangles, on peut constituer des jeux d'aire 2 (PP), 3 (MP), 5 (GP), 6 (GM) et 8 (GG).

a) Si l'on décide de ne prendre que deux triangles sur les cinq du jeu, combien de formes homogènes peut-on constituer ? Combien de formes hétérogènes (voir au chapitre suivant la définition de *hétérogène*, à ce stade on peut laisser de côté cette partie de la question) ? Cette question peut être traitée sans l'aide d'un programme.

b) Lorsqu'on compare les formes reconstituables avec le jeu MPP d'aire 4 et le jeu complémentaire GG d'aire 8, on s'aperçoit que certaines formes GG sont des agrandissements de formes MPP (le coefficient d'agrandissement des longueurs étant alors de $\sqrt{2}$). Faire la liste de ces formes. De même, les formes reconstituables avec le jeu GPP d'aire 6 et le jeu complémentaire GM d'aire 6

peuvent être identiques. Faire la liste des formes identiques réalisables avec ces deux jeux complémentaires.

c) Mêmes questions qu'au a) si l'on décide de prendre trois ou quatre triangles sur les cinq du jeu (la question des assemblages de trois triangles n'a été que partiellement traitée dans ce chapitre ; pour le choix des cinq triangles, le sujet est traité au chapitre 5). Si l'on considère la génération des ensembles de formes obtenues avec trois triangles, il est sans doute bon de savoir à quoi s'attendre : ces ensembles contiennent 137 (PPM), 260 (PPG), 661 (PMG), 510 (PGG) et 630 formes (MGG), soit un total de 2198 formes hétérogènes (il ne peut y avoir de doublons entre ces cinq catégories, car elles n'ont pas la même aire). Nous savons déjà aussi que, parmi ces formes, 232 sont homogènes. Il en reste 1966 qui sont hétérogènes-non-homogènes. La figure suivante en donnant une partie, il n'en reste plus que 1880.

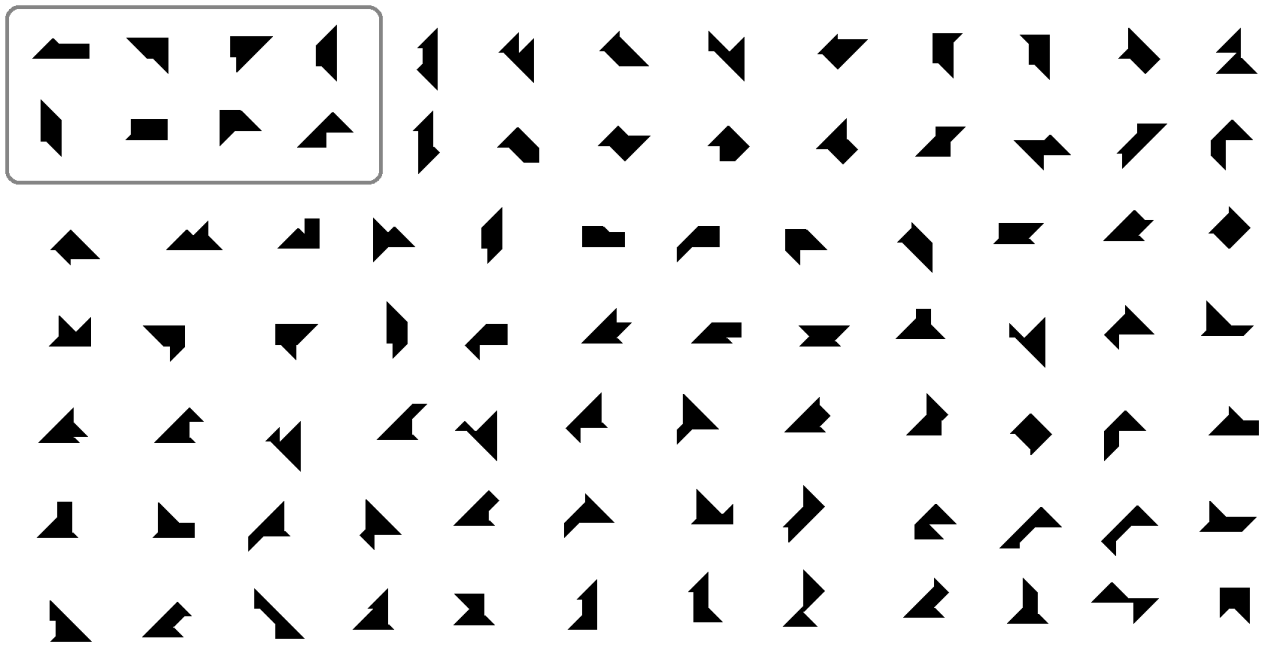


Illustration 16: Les 8 pentagones et les 78 hexagones hétérogènes-non-homogènes que l'on peut obtenir avec un des cinq jeux de trois triangles. Lequel est-ce?

Chapitre 3 : Assemblages en étoile

Avec les formes en étoile, nous faisons nos premiers pas dans un monde plus vaste que celui des formes sur quadrillage. Déterminer le périmètre de ces formes hétérogènes nous amène à rencontrer de nouveaux types de segments

Les angles des pièces du Tangram sont limités à trois valeurs : 1×45=45°, 2×45=90° et 3×45=135°. La seule pièce ayant un angle de 135° est le parallélogramme, elle en a même deux. Cette pièce est, de plus, la seule à ne pas posséder d'angle droit. Le carré, quant à lui, n'ayant que des angles droits, est le seul à ne pas avoir d'angle de 45°. Toutes les autres pièces possédant au moins un angle de 45°, il est possible de disposer les pièces de la façon suivante :

Recette du Tangram en étoile

- Choisir un angle de 45° pour chacune des six pièces autre que le carré
- Mélanger ces pièces entre elles et les disposer dans un ordre quelconque
- Mettre en commun le sommet où se trouve l'angle de 45° choisi
- Combler le trou restant qui mesure 90° car 360–6×45=90 avec le carré
- Dégager la silhouette de l'étoile en gommant les bords intérieurs des pièces

En procédant ainsi, les six pièces autres que le carré se succèdent dans un ordre quelconque. En notant 1 les petits triangles, 2 le moyen, 3 le parallélogramme et 9 les grands triangles (nous verrons le pourquoi de ce code plus loin), il ne se trouve que quatre-vingt-dix permutations des symboles 1,1,2,3,9,9 qui représentent les six pièces. Nous les trouvons en passant en revue les nombres entiers et les écrivons ainsi, dans l'ordre numérique où on les a trouvés. Comme chaque permutation peut être renversée (par exemple 112399 peut être renversée en 993211) sans changer l'ordre des pièces, nous n'avons gardé qu'une des deux possibilités.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80
0	112399	129139	139192	193912	299113	391192	911923	913291	931912
1	112939	129193	139291	199123	299131	391291	911932	913912	932911
2	112993	129319	139912	199132	311299	391912	912139	919123	939112
3	113299	129391	191239	199312	312919	392911	912193	919132	939121
4	113929	129913	191293	239191	312991	399112	912319	919312	991123
5	113992	129931	191329	239911	319129	399121	912391	923911	991132
6	121399	131299	191392	291139	319912	911239	912913	929113	991213
7	123199	132919	192391	291391	329191	911293	912931	929131	991231
8	123919	132991	192913	291913	329911	911329	913129	931129	991312
9	123991	139129	193129	293911	391129	911392	913192	931291	993112

Dans notre recette du Tangram en étoile, il n'est pas précisé comment la pièce choisie doit être disposée autour de son angle de 45°. Chacune des six pièces peut prendre deux positions différentes selon qu'on la tourne dans un sens ou dans l'autre. Cette considération va nous amener une certaine complexité car il va falloir envisager toutes les permutations et, à chaque fois, disposer les six pièces dans l'une des deux positions possibles. Un petit calcul simplissime nous indique qu'il y a $2^6=2\times2\times2\times2\times2\times2=64$ possibilités pour chacune des 90 permutations, soit $64\times90=5760$ combinaisons possibles. En tenant compte du renversement possible de chaque permutation (aucune permutation n'est un palindrome car il y a un seul 2 et un seul 3), cela nous conduirait à doubler les possibilités. Cependant, renverser l'ordre des six symboles d'une permutation revient à retourner la forme en étoile. Comme cela ne change pas réellement la forme, nous n'envisagerons pas ces inversions.

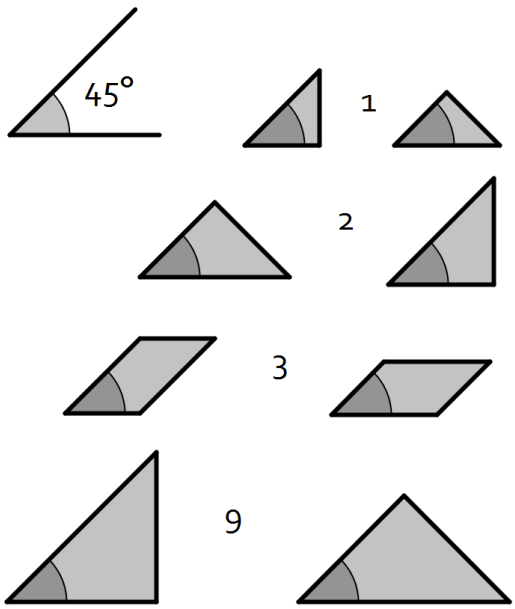


Illustration 17: Les 6 pièces ayant un angle de 45° peuvent chacune se présenter de 2 façons différentes

En réalité, il n'y a que 5520 tangrams en étoile différents. Il faut éliminer en effet du décompte théorique des formes, celles qui sont identiques tout en étant obtenues par un agencement différent des pièces. Cette élimination est facilitée si on peut déterminer quelles configurations de pièces différentes conduisent ainsi à des formes identiques. Le trapèze de la figure 17 semble être un exemple d'une telle forme, reconstituable de deux façons différentes. Il s'agit de la combinaison d'un petit triangle avec, soit le triangle moyen, soit le parallélogramme. Si on regarde de plus près, ces deux assemblages trapézoïdaux ne sont pas vraiment superposables. Il faudrait un retournement pour réaliser la superposition des silhouettes, et alors le sommet commun est aussi retourné, mais vers l'extérieur de la forme, ce qui ne répond pas à la règle d'un tangram étoilé. Il ne se présente donc aucune forme étoilée permettant l'échange de ces deux configurations. L'autre configuration présentée par cette figure est l'ensemble des deux petits triangles fusionnant pour former un carré : cette configuration peut s'échanger avec la pièce carrée, sans modifier la silhouette de l'étoile. On va voir que c'est, en fait, la seule possibilité pour réaliser une silhouette étoilée de deux façons différentes.

Le tableau précédent contient trente permutations contenant la suite 11, et pour chacune de ces permutations, il y a $2^4=2\times2\times2\times2=16$ façons de positionner les quatre autres places. Cela conduit à 16×30=480 étoiles dénombrées, alors qu'il n'y en a que la moitié dans la réalité, soit 240, qui sont réellement différentes. En effet, il y a 5 760–5 520=240 étoiles redondantes car déjà comptées, qu'il convient de supprimer du catalogue final des tangrams étoilés. Voici deux de ces formes, réalisables de deux façons différentes, en échangeant le carré avec la configuration des deux petits triangles qui ont fusionnés.

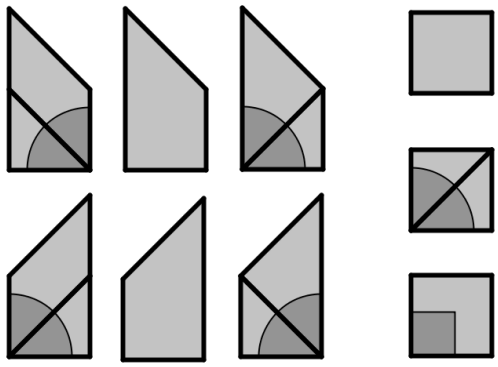


Illustration 18: Combinaisons différentes conduisant à une même silhouette

Nous avons représenté sur un quadrillage l'une de ces formes, car les sommets des pièces y sont sagement positionnés sur les nœuds de celui-ci. L'autre forme n'est pas totalement inscriptible dans le quadrillage : le parallélogramme et le carré en travers n'ont que le sommet commun sur le quadrillage. À deux endroits, un segment de longueur unité est accolé avec un segment de longueur racine carrée de deux unités. Un seul de ces accolements métis ou inter-nature

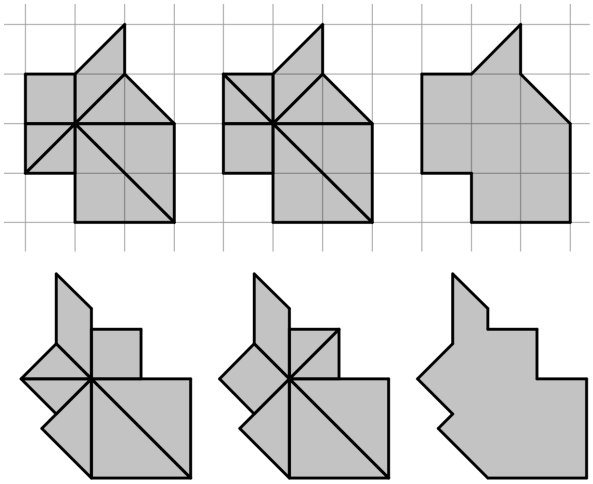


Illustration 19: Tangrams en étoile pouvant être réalisés de 2 façons différentes grâce à l'échange du carré avec la combinaison des 2 petits triangles

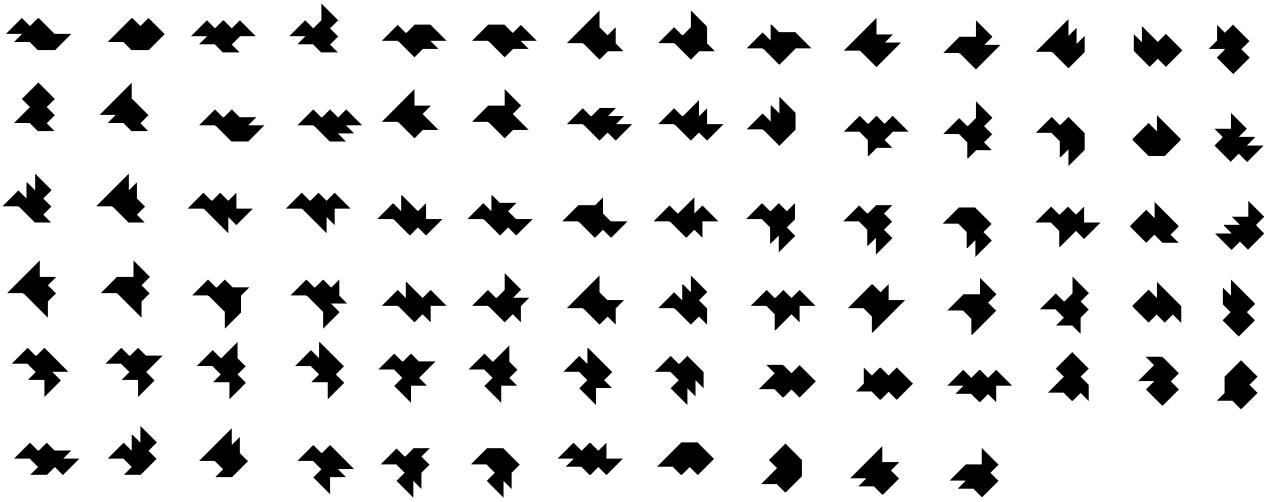


Illustration 20: Les 81 formes en étoile qui s'inscrivent correctement dans le quadrillage

suffit à faire sortir la forme de la catégorie des polygones sur quadrillage. Combien de tangrams étoilés sont-ils inscriptibles dans un quadrillage ? Très peu, seulement quatre-vingt-un, soit 1.6% de l'ensemble des formes en étoile.

Avec les tangrams étoilés qui ne s'inscrivent généralement pas dans un quadrillage, nous faisons la connaissance de formes définies par une règle moins contraignante que celle qui préside aux formes sur quadrillage (n'assembler que des segments égaux : segment unité avec segment unité - segment racine carrée de deux unités avec segment racine carrée de deux unités). Pour ces formes, on autorise les assemblages de segments de longueur quelconque. Les assemblages de même nature sont toujours possibles, nous les baptiserons *assemblages homogènes.* Les autres, les assemblages métis ou inter-nature, nous les baptiserons *assemblages hétérogènes.* Pour ces deux types d'assemblages, l'association des bords doit se faire obligatoirement à partir d'un point de référence. Cette contrainte trouvera son vrai sens plus loin car ici – avec les formes en étoile – il s'agit d'une évidence, tous les assemblages de bords partant nécessairement d'un même sommet.

Pour les assemblages homogènes, les segments constitutifs initiaux qui restent à l'extérieur de la forme ne subissent pas de variation de longueur au fur et à mesure de l'agrégation des pièces entre elles. Par contre, avec les assemblages hétérogènes, il se crée des longueurs de segment originales. La figure 18 montre, dans le bas, une forme qui contient une longueur originale de segment (n'existant pas dans les pièces) égale à la racine carrée de deux moins une unité. Cette longueur vaut un peu moins d'une demi-unité car $\sqrt{2}-1\approx 0.414$. Pour cette forme, il se présente deux segments de cette longueur (à la jonction du carré et du parallélogramme, et puis à celle entre le triangle moyen et le groupe des deux petits triangles). Ces longueurs s'ajoutant à celles de deux segments de longueur $\sqrt{2}$ et dix segments de longueur unité, le périmètre de cette forme est finalement égal à $2(\sqrt{2}-1)+2\sqrt{2}+10=8+4\sqrt{2}\approx 13.66$.

À quoi peut servir d'évaluer le périmètre ? Par essence, les formes en étoile sont centrées et donc assez compactes. Pour préciser le sens que nous donnons à l'adjectif compact et tenter de mesurer la *compacité* d'une forme, nous dirons que pour une aire donnée, une forme sera d'autant plus compacte que la longueur de son périmètre sera petit. Ainsi, compact sera l'opposé d'étalé ou encore de dentelé. La compacité d'un tangram varie en sens inverse du périmètre. Ainsi, la détermination du périmètre des 5 520 formes en étoile permet de les classer selon leur compacité et de les répartir selon ce critère. Ronald Read a donné au qualificatif « compact » le sens que nous avons donné à « hétérogène » (au chapitre 9 nous construisons les *compact tangrams*, au sens de Read) sans réel lien avec la notion de compacité, aussi nous avons écarté cette dénomination.

Périmètre	12,82	13,65	14	14,48	14,82	15,31	15,65	16,14	16,48	16,82	17,31	17,65	18,48	Total
Effectif	22	56	46	78	216	168	426	36	1512	96	728	1072	1064	5520
Fréquence	0,4%	1,0%	0,8%	1,4%	3,9%	3,0%	7,7%	0,7%	27,4%	1,7%	13,2%	19,4%	19,3%	100%
Effectif homogènes	5	0	0	0	10	0	28	0	0	0	0	38	0	81
Part homogènes	22,7%	0,0%	0,0%	0,0%	4,6%	0,0%	6,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	3,5%	0,0%	
Fréquence homogènes	6,2%	0,0%	0,0%	0,0%	12,3%	0,0%	34,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	46,9%	0,0%	100%
Part rationnelle	10	8	14	6	12	4	10	2	8	14	6	12	10	
Part irrationnelle	2	4	0	6	2	8	4	10	6	2	8	4	6	

Les formes ayant la compacité la plus élevée – le périmètre le plus petit – sont au nombre de vingt-deux. Le périmètre le plus petit étant égal à dix unités et deux racines carrées de deux, soit approximativement 12.82 unités de longueur. Le grand carré que nous pouvons former avec les pièces du Tangram n'est pas une forme en étoile (à cause du triangle moyen situé en périphérie), mais c'est une forme plus compacte, plus ramassée, que ces formes étoilées compactes. Son périmètre est inférieur à cette valeur minimale, car il vaut seulement huit fois $\sqrt{2}$, soit environ 11.31 unités. La forme d'aire seize triangles, théoriquement la plus compacte, est un cercle de périmètre $4\sqrt{2\pi}\approx 10.03$ unités. Parmi les formes en étoile les plus compactes, cinq se trouvent inscriptibles dans le quadrillage. Notons, au passage, qu'il est donc possible d'arriver à une même valeur du périmètre en réalisant indifféremment des assemblages purement homogènes ou hétérogènes. Les formes les moins compactes, les plus étirées, ont un périmètre égal à $10+6\sqrt{2}\approx 18.48$ et sont au nombre de 1 064. Contrairement aux formes les plus compactes, aucune de ces formes les moins compactes n'est homogène (inscriptible dans le quadrillage). Comme on le constate sur le tableau, les formes inscriptibles dans le quadrillage, constituées uniquement d'assemblages homogènes, sont réparties dans quatre catégories de périmètres sur treize.

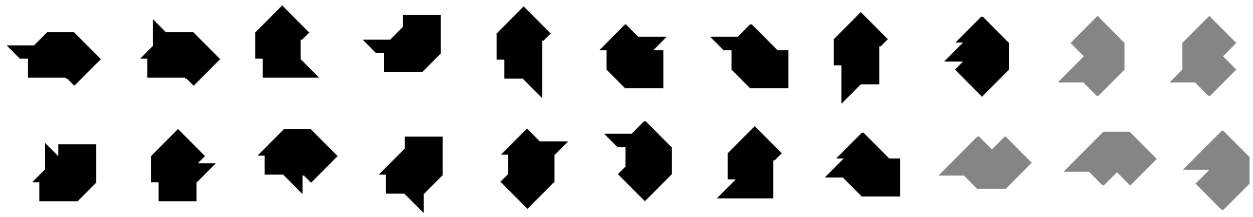


Illustration 21: Les 22 formes étoilées les plus compactes ont un un périmètre égal à $10+2\sqrt{2}\approx 12.82$ unités, parmi lesquelles 5 sont inscriptibles dans le quadrillage (en gris)

La mesure du périmètre n'est pas la seule façon d'approcher la notion de compacité. En anticipant un peu sur ce qui sera étudié plus loin, nous pouvons aussi calculer l'écart des aires existant entre la forme et son enveloppe convexe. Cet écart n'est jamais égal à zéro pour les tangrams en étoile car aucune de ces formes n'est convexe. La forme en étoile la plus compacte, à cet égard, a un écart de convexité égal à 1 triangle (une seule forme, en haut à gauche de la figure 22). Cette caractéristique s'étend ensuite progressivement jusqu'à la valeur maximum qui est

égale à $4+5\sqrt{2}\approx 11.0711$ triangles.

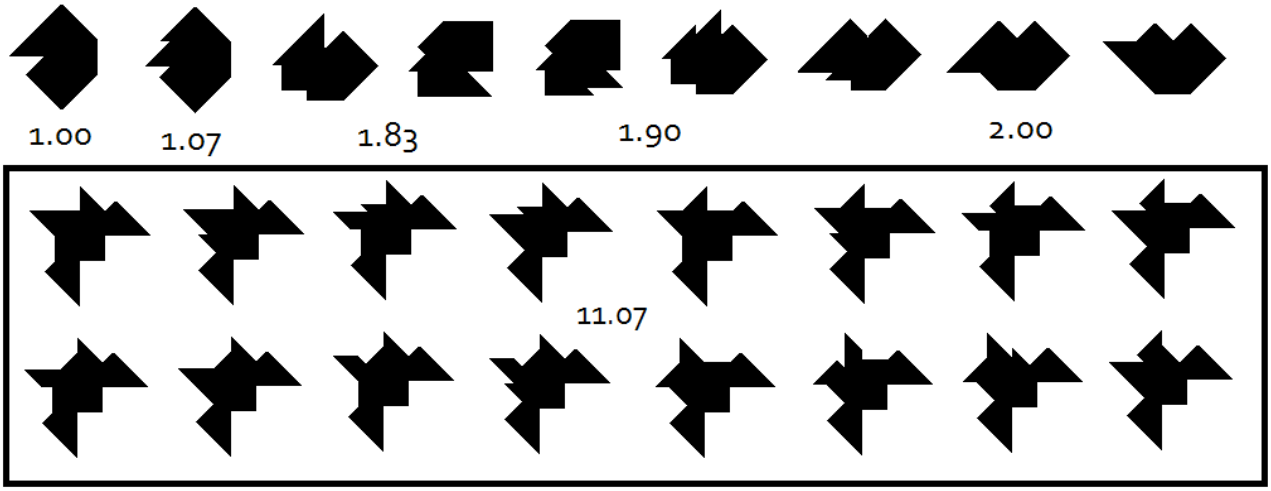


Illustration 22: Tangrams étoilés les plus proches des formes convexes en haut (convexité réelle de 1 à 2) et les plus éloignées (convexité réelle de 11.08 environ)

Nous avons vu apparaître des côtés de longueur $\sqrt{2}-1\approx 0.414$ et nous noterons cette nouvelle longueur *a*. Parmi les dix-sept formes étoilées hétérogènes les plus compactes à l'égard du périmètre (formes en noir sur la figure 21), nous avons aussi quelques spécimens de côtés mesurant une autre nouvelle longueur que nous noterons *b* et qui vaut $2-\sqrt{2}\approx 0.586$. Parmi les autres formes étoilées hétérogènes, il se trouve encore une autre nouvelle longueur de segment que nous noterons *c* et qui vaut $2\sqrt{2}-2\approx 0.828$. Ajoutées à nos deux longueurs initiales – l'unité (notée 1) et $\sqrt{2}\approx 1.414$ unités que nous noterons *d*, comme diagonale – ces trois nouvelles longueurs constituent l'alphabet de cinq signes avec lequel nous pouvons écrire le périmètre d'un tangram étoilé.

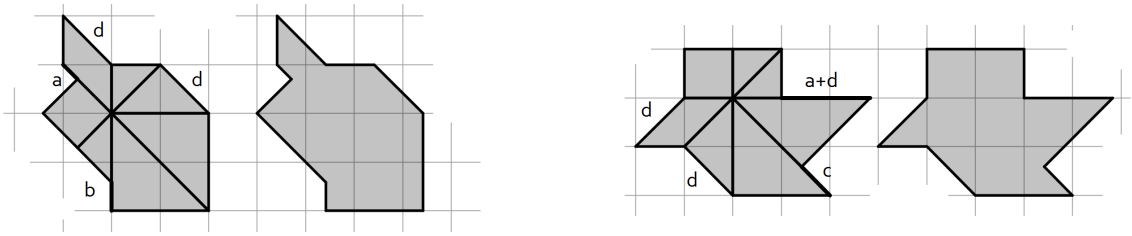


Illustration 23: tangrams étoilés sur lesquels s'observent les nouvelles longueurs de segments $a=\sqrt{2}-1\approx 0.414$, $b=2-\sqrt{2}\approx 0.586$ *et* $c=2\sqrt{2}-2\approx 0.828$.

Lorsque nous parlons de longueur de segment, il ne s'agit pas toujours de longueur des côtés. Nous parlons de segments de côtés qui joignent deux points de référence de la forme. Ainsi définie, la longueur d'un segment ne pourra jamais dépasser racine carrée de deux (la longueur notée *d*). Dans la forme étoilée de droite, sur la figure 21, il y a un côté mesurant $2\sqrt{2}-1\approx 1.828$: ce côté est en réalité formé par deux segments, le premier mesurant racine carrée de deux, et le second mesure *a*, soit la racine carrée de deux moins une unité. Ce n'est pas un seul segment de

longueur 1.828, mais deux ; la longueur est la somme 0.414+1.414=1.828. Cette précision semble artificielle, mais nous verrons plus loin l'importance de continuer à pouvoir distinguer les points de référence pendant le processus d'agrégation des pièces. Voici, pour finir cette partie concernant les tangrams étoilés, la répartition des cinq sortes de segments à travers cette famille qui compte près de cent mille segments.

	a	*b*	*c*	*1*	*d*	Total
Effectif segments	12 504	5 070	1 824	56 520	19 344	95 262
Fréquence segments	13,1%	5,3%	1,9%	59,3%	20,3%	100%

Nous constatons l'imposante majorité des segments de longueur unité (ils représentaient déjà les deux tiers des trente segments initiaux). Les diagonales *d* se retrouvent encore dans plus d'un segment sur cinq (elles représentaient le tiers des segments initiaux). Viennent ensuite les trois nouvelles longueurs dont nous venons de parler, et qui sont présentes dans la plupart (98,4%) des tangrams étoilés. En effet, seules les formes homogènes, s'inscrivant correctement dans le quadrillage sous-jacent, sont exemptes de ce type de segment.

Question 3 : Sur le même principe que les tangrams étoilés qui ont un sommet en commun, nous voudrions générer toutes les formes hétérogènes réalisables avec le Tangram qui ont un segment de longueur unité en commun au centre de la forme (toutes les autres pièces étant disposées autour de ce segment, chacune ayant soit un sommet commun avec ce segment central, soit le segment central en entier comme bord).

a) Dénombrer l'ensemble des formes hétérogènes possibles.

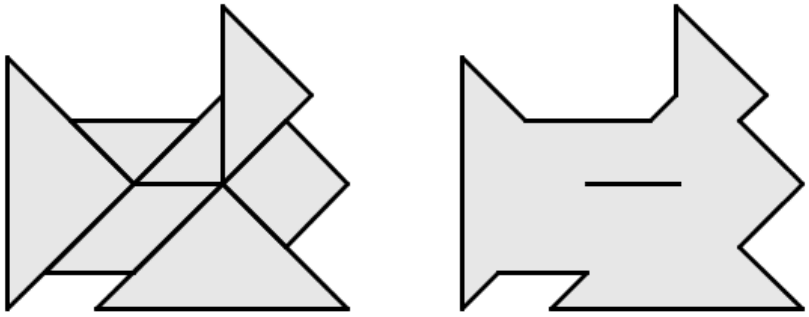


Illustration 24: Forme hétérogène ayant un segment unité au centre

b) Même question avec un segment central de longueur $\sqrt{2}$.

Chapitre 4 :
Le jeu de Mini-Tangram

Le Mini-Tangram est le jeu obtenu en supprimant les deux grands triangles du Tangram. L'étude des assemblages hétérogènes de ce jeu nous conduit à préciser la méthodologie employée pour coder ce type de formes

La suppression des grands triangles du Tangram enlève deux pièces sur sept, soit un peu moins de 30% des pièces pour la moitié de la surface, et une très grand partie des possibilités combinatoires du jeu. Celles-ci existent pourtant à minima, et si l'on ne considère que les assemblages homogènes, ces cinq pièces de petites tailles réussissent à reconstituer près de mille formes (962 formes), dont sept convexes. Comparativement à d'autres jeux de la même catégorie (voir plus loin) ce n'est pas si mal. Historiquement, Ronald Read, ce spécialiste de l'étude du Tangram, a étudié cette restriction du jeu pour tester le programme qu'il mit au point dans sa première détermination du « snug-number », le nombre des formes homogènes réalisables avec le Tangram.

côtés	3	4	5	6	7	8	9	10	total
mini-tangrams pleins	1	5	6	48	139	270	307	175	951
Mini-tangrams baie	0	0	0	0	0	0	8	3	11
Mini-tangrams trou	0	0	0	0	0	0	0	0	0
total par côtés	1	5	6	48	139	270	315	178	962
Formes symétriques	4axes	cR4	2axes	cR2	1 axe	non sym		total sym	
sym pleins	1	0	3	24	33	890		61	
sym baie	0	0	0	0	0	11		0	
Sym 1 trou	0	0	0	0	0	0		0	
total symétriques	1	0	3	24	33	901		61	

Tableau 3: Formes homogènes réalisables avec le mini-Tangram et répartitions selon le nombre de côtés et les éléments de symétrie

Le tableau ci-dessus permet d'entrer un peu plus dans les détails des réalisations de ce jeu. Aucune des 962 formes n'a de vrai trou, mais onze ont une *baie* (une sorte de trou qui a un point de contact avec l'extérieur). Au sein des 951 formes pleines (sans trou ni baie), soixante-et-une ont au moins un élément de symétrie. Nous avons examiné les éléments de symétrie de ces formes et en avons trouvé trente-trois avec un seul axe, vingt-quatre avec un seul centre, trois avec deux axes perpendiculaires et une seule avec quatre axes (il s'agit bien sûr du carré). Le nombre de côtés va de trois (une seule forme) à dix (cent soixante-quinze formes). La convexité sur quadrillage maximum est douze (trois formes). La figure 24 montre

quelques-unes de ces formes homogènes.

Le mini-tangram parvient à constituer 202 144 formes hétérogènes pleines, parmi lesquelles on retrouve les 951 homogènes (environ une forme homogène pour 200 hétérogènes, soit 0,47% environ). Il y a 71 formes non-homogènes qui ont au moins un élément de symétrie (43 avec un seul axe et 28 avec un seul centre). Pour ces formes qui ne sont pas homogènes, le nombre de côtés va de cinq à quatorze. Les mesures de convexité réelle (l'aire de l'enveloppe convexe – le polygone convexe

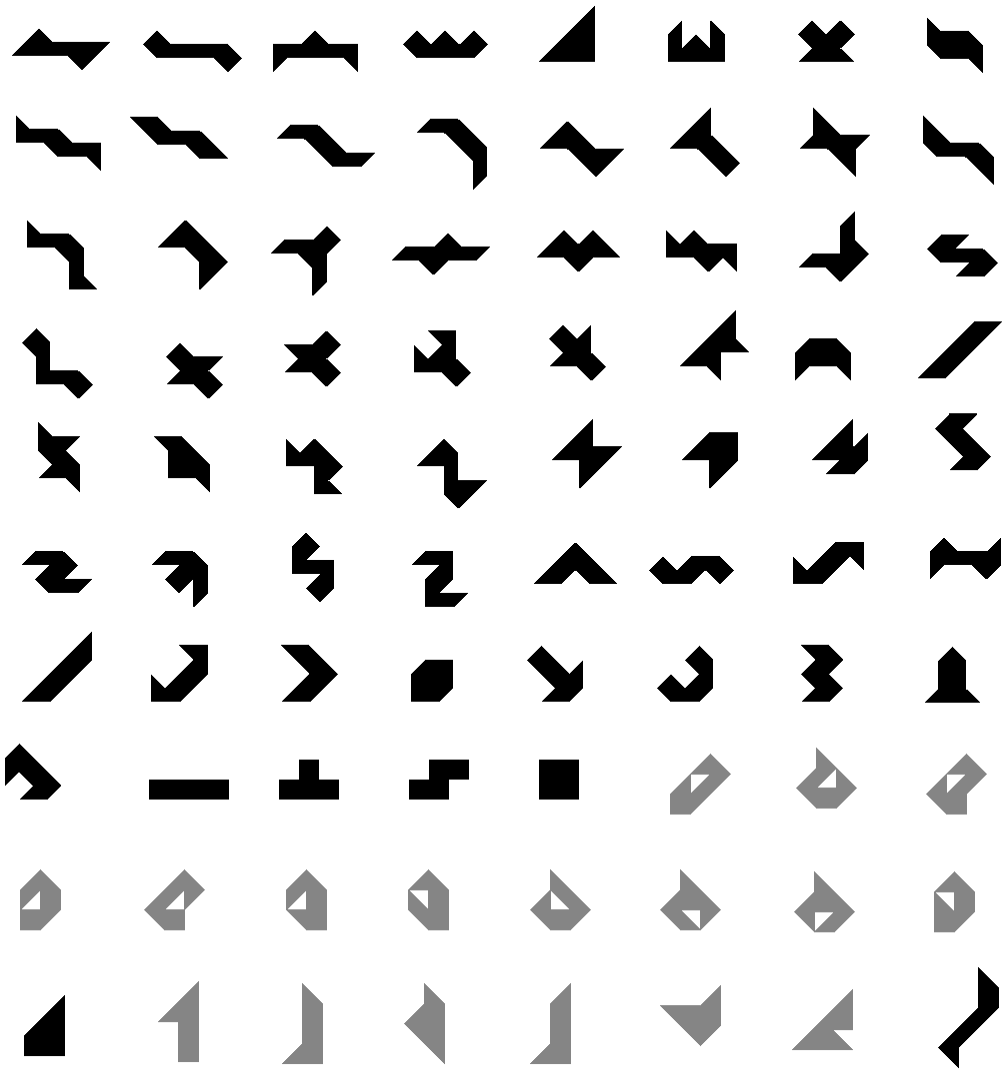


Illustration 25: Les formes homogènes symétriques réalisables avec Mini-Tangram, les formes à baie, une forme convexe non symétrique, des pentagones et une forme de convexité égale à 12 triangles.

minimum qui contient toute la forme – à laquelle on ôte l'aire de la forme) sont comparables mais inférieures ou égales à la convexité sur quadrillage qui, comme on l'a dit, s'étale jusqu'à douze triangles. La convexité réelle maximale est d'environ 8.95 triangles (deux formes de convexité 8.95 puis une forme de convexité 8.83 et neuf formes de convexité 8.78). À titre indicatif, les trois formes homogènes dont la

convexité sur quadrillage est maximale (égale à 12) ont des convexités réelles égales à six (2 formes) et quatre (1 forme). La plus grande convexité réelle pour une forme homogène est de sept triangles (7 formes).

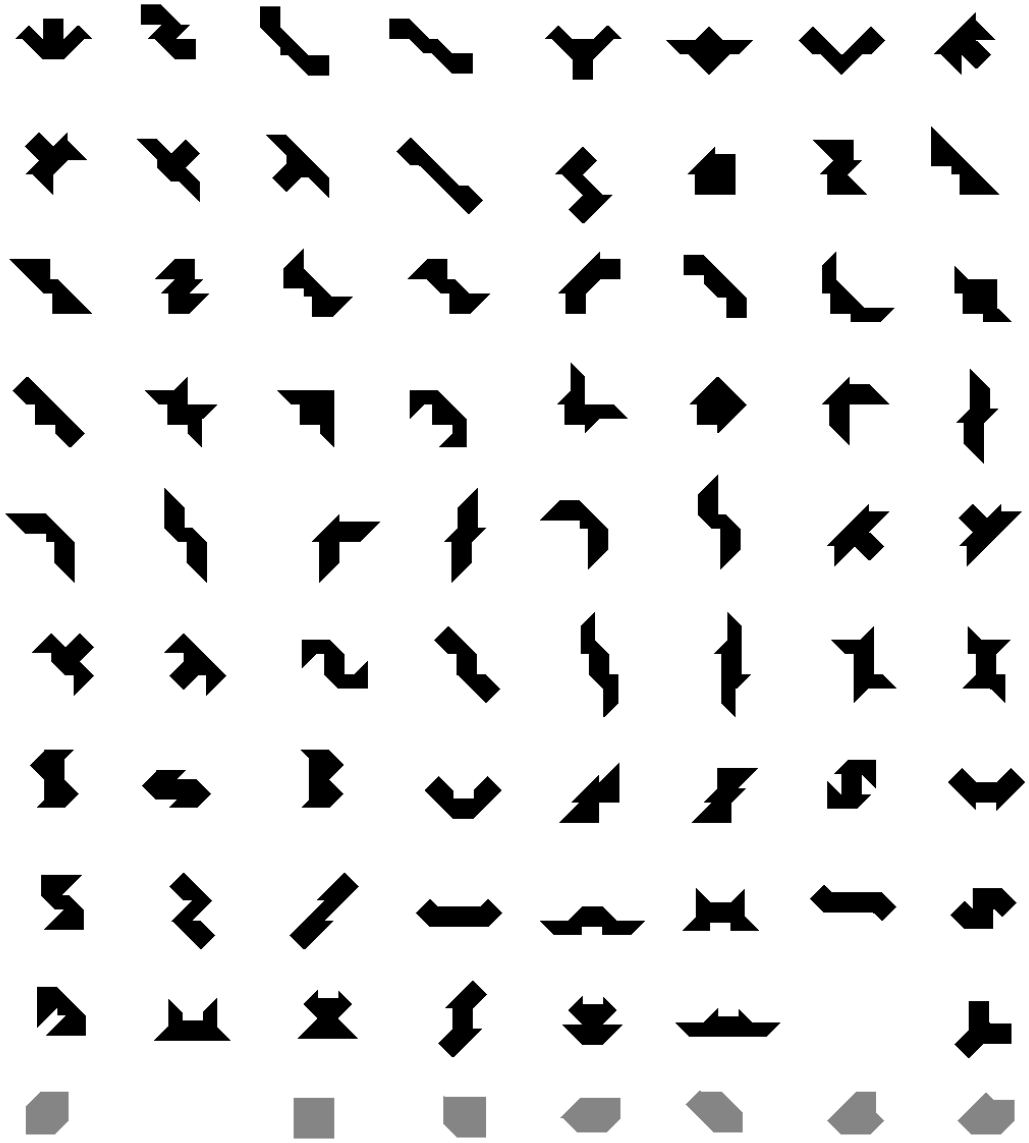


Illustration 26: Les formes symétriques non-homogènes réalisables avec le mini-tangram. En gris, les formes de périmètre minimum (l'hexagone homogène P=7.65 et les 6 de périmètre P=8.00)

Nous avons vu que le périmètre réel d'une forme est une autre caractéristique importante à connaître car elle permet d'évaluer la compacité d'une forme, ce qui paraît être relié à la difficulté d'une forme. Plus le périmètre est petit et plus la compacité est grande et plus la forme dissimule davantage les bords des pièces ce qui la rend théoriquement plus difficile à reconstituer. Pour Mini-tangram, le périmètre réel est minimum pour l'hexagone homogène symétrique qui a un périmètre égal à $2+4\sqrt{2}\approx 7.65$ (l'unité est la longueur du côté du carré). Tout de suite après vient le carré qui a un périmètre de huit unités ainsi que cinq autres

formes qui ne sont pas homogènes, mais qui ont pourtant un périmètre égal à huit aussi.

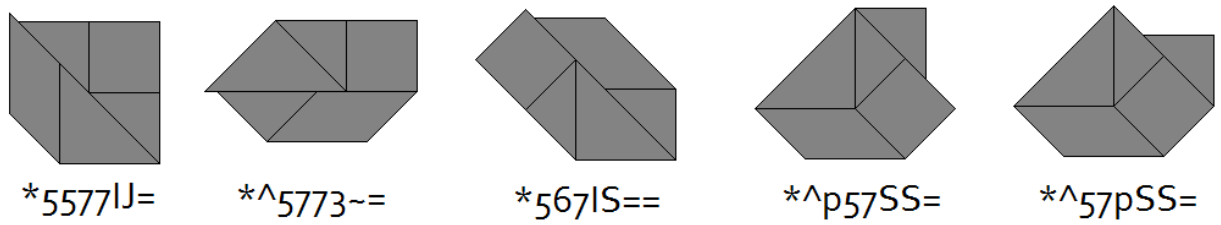


Illustration 27: Solutions pour les formes non-homogènes de périmètre minimal.

Ces formes présentées à la dernière ligne de la figure 26 (solutions figure 27) sont un bon exemple de ce que peut apporter les assemblages hétérogènes : une apparence de forme homogène alors qu'en réalité, il y a quelque part un petit segment qui est presque imperceptible, du moins on peut l'ignorer si on ne regarde pas suffisamment attentivement. Ainsi, la 3ème figure en partant de la gauche sur cette ligne, juste après le carré, semble être un pentagone avec un axe de symétrie, mais il s'agit d'une illusion, la forme est en réalité un hexagone, dont le petit côté mesure $3-2\sqrt{2}\approx 0.172$ unités et peut passer inaperçu. C'est une nouvelle longueur de segment que l'on va noter *e*, la plus petite longueur de segment possible avec les formes hétérogènes. Les 4ème et 5ème formes de cette ligne possèdent également un segment unitaire *e*, et parmi les 71 formes symétriques non-homogènes, une seule forme symétrique possède un segment de cette longueur (ligne du bas de la figure 26, la forme en Y sur la droite dont la solution est figure 29). Les autres formes non-

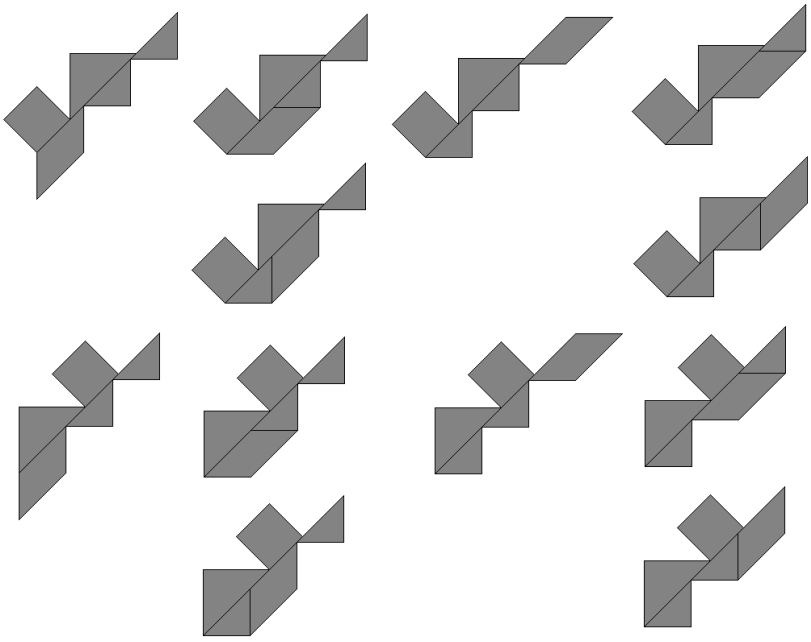


Illustration 28: Les 8 formes hétérogènes contenant un segment de longueur i. Dans les lignes paires, 4 combinaisons originales des pièces qui conduisent à des doublons

homogènes ont généralement un segment unitaire de longueur $a=\sqrt{2}-1\approx 0.414$, $b=2-\sqrt{2}\approx 0.586$ ou $c=2\sqrt{2}-2\approx 0.828$. Ces trois longueurs sont déjà beaucoup plus visibles. Une analyse fine montre en effet qu'avec le mini-tangram, seules 806 formes présentent ainsi un segment de longueur *e* et donc, constituent autant « d'illusions », dans le sens précisé plus haut. Il n'y a donc que trois illusions de ce type pour dix mille formes hétérogènes. Ces formes recèlent ainsi des difficultés liées au grand nombre de combinaisons des longueurs existantes qui ne se présentent pas avec les formes homogènes qui n'ont que deux types de segments unitaires : ceux de longueur 1 et ceux de longueur $d=\sqrt{2}\approx 1.414$.

En regardant d'encore plus près les longueurs de segment possibles avec ce jeu, on en trouve encore huit d'une longueur inédite que nous noterons *i* et qui vaut

Illustration 29: Solutions pour les formes symétriques non-homogènes du mini-Tangram

$3\sqrt{2}-3\approx 1.242$. Cette longueur *i*, doit être constituée par la soustraction de trois côtés de longueur unité à la somme de trois diagonales *d* du carré. Il n'y a qu'une façon de réaliser cela : en mobilisant l'ensemble des cinq pièces avec d'un côté d'une ligne de démarcation, les trois diagonales du parallélogramme et des deux petits triangles, et de l'autre, les trois segments de longueur unité que l'on peut aligner avec le triangle moyen et le carré. Il n'est pas possible de réaliser cette longueur avec un autre arrangement des pièces que les douze formes présentées dans la figure 28. Quatre de ces arrangements conduisant à la même silhouette, il n'en reste plus que huit.

Peut-on prévoir l'existence de ces différentes longueurs sans être réduit à les découvrir de façon empirique ? Cette question prend tout son sens lorsqu'on veut générer l'ensemble des formes hétérogènes réalisables avec un jeu de pièces et, pour ce faire, on doit pouvoir encoder ces différentes formes. Le système d'encodage nécessite de connaître les longueurs de segments possibles afin d'attribuer un code à chacune d'elles. La réponse à cette question nous a été donnée, encore une fois, par Ronald Read. Quelques années après avoir déterminé le « snug-number » du Tangram, celui-ci en vint à s'intéresser aux assemblages hétérogènes qu'il appela les « compact-forms ». Il se posa naturellement la question des longueurs de segment possibles et y apporta le raisonnement qui suit.

Les pièces ont des longueurs de segment égaux à 1 ou à *d*, la diagonale du carré de côté 1. Le petit triangle, ayant les deux types de longueurs, peut contribuer à la formation d'une nouvelle longueur en ajoutant ou retranchant une unité (contribution notée *x*) ou *d* unités (contribution notée *y*) ou ne pas contribuer (contribution notée 1). Pour cette raison, on l'associe au polynôme $1+x+y$. De même, le parallélogramme est associé au même polynôme. Le carré, quant à lui, ne peut pas contribuer avec une diagonale d, sa contribution est associée au polynôme 1+x. Le triangle moyen peut apporter une ou deux longueurs unités ou une diagonale *d*. Son polynôme associé est donc $1+x+x^2+y$. L'idée d'associer un polynôme à chaque pièce est utilisée ensuite dans le développement du polynôme caractéristique du jeu, obtenu en multipliant tous les polynômes des pièces entre eux. Ce polynôme caractéristique du mini-Tangram est défini par l'expression $F(x)=(1+x+y)^3(1+x)(1+x+x^2+y)$ où la puissance 3 du 1er facteur indique qu'il y a trois pièces qui peuvent contribuer selon le polynôme $1+x+y$. Développer ce polynôme *F* est un bon exercice d'entraînement pour des élèves de collège. On peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel comme Xcas, celui-ci donnant le résultat en une fraction de seconde.

$$F(x)=x^6+3x^5y+5x^5+3x^4y^2+13x^4y+11x^4+x^3y^3+12x^3y^2+25x^3y+14x^3+5x^2y^3+21x^2y^2+27x^2y+11x^2+xy^4+8xy^3+18xy^2+16xy+5x+y^4+4y^3+6y^2+4y+1$$

L'intérêt de cette forme développée est de fournir, d'une façon infaillible, révélé par chacun des termes, l'ensemble des longueurs de segments possibles : Le nombre 27, par exemple, dans le terme $27x^2y$ (ligne du milieu), signifie que dans l'expression développée de *F* on trouve 27 fois le produit x^2y. Ce coefficient n'a aucune importance pour ce qui est de la longueur du segment, par contre la présence de ce terme en x^2y dans le développement indique que l'on pourra trouver des segments dont la longueur est $2-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}-2$, à condition que le nombre soit compris entre 0 et $\sqrt{2}$. Dans le tableau ci-dessous, nous avons mis en deux nuances de gris, les fonds des longueurs de segment comprises entre ces limites. En plus clair, celles qui sont obtenues en retranchant la part irrationnelle à la part rationnelle et, en plus foncé, celles qui sont obtenues en faisant la soustraction de façon opposée. Ainsi le terme $27x^2y$ est représenté par une cellule gris clair car $2-\sqrt{2}\approx 0.586$ convient (mais pas $\sqrt{2}-2\approx -0.586$ qui est négatif), cela correspond à la longueur *b* qui se rencontre dès que l'on construit les assemblages de deux pièces (voir les tangrams étoilés).

x \ *y*	0	1	2	3	4
0	1	4 (*d*)	6	4	1
1	5 (1)	16 (*a*)	18	8	1
2	11	27 (*b*)	21 (*c*)	5	0
3	14	25	12 (*e*)	1 (*i*)	0
4	11	13	3 (*h*)	0	0
5	5	3	0	0	0
6	1	0	0	0	0

Tableau 4: Coefficients obtenus dans le développement du polynôme caractéristique du mini-Tangram. En gris, les valeurs qui conduisent à des longueurs de segments comprises entre 0 (exclus) et $\sqrt{2}$

Ce tableau montre que l'on doit s'attendre aux longueurs de segment 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *h* et *i*. Nous avons vu les huit formes réalisables avec un segment de longueur *i*, mais nous ne trouvons pas la trace de la longueur *h* alors que celle-ci devrait être présente selon cette analyse. Il faut, pour la constituer, aligner d'un côté quatre segments unités et, de l'autre, retrancher deux segments de longueur *d*. La seule façon de réaliser cela conduit à avoir trois pièces d'un côté dont le triangle moyen et le carré pour obtenir les quatre segments unités. De l'autre côté, on peut disposer les deux diagonales des deux autres pièces comme on veut, il se trouvera toujours un point de référence dans le côté ainsi formé. Ce côté a bien une longueur égale à la longueur *h*, mais il est constitué en réalité de deux segments : le premier mesure une unité et le second mesure *e* (environ 0.172 unité). Le principe imaginé par Ronald Read conduit à déterminer les longueurs de segments possibles mais il peut se trouver qu'ils soient absents car irréalisables. Le jeu des cinq triangles étudié au chapitre suivant nous montrera que pour réaliser cette longueur *h*, il faut adjoindre

une diagonale surnuméraire de part et d'autre de la ligne de démarcation, ce qui rend cette longueur particulièrement rare (1 segment sur près de 3 000 000 dans le jeu des cinq triangles). Comparativement, le segment de longueur *i* est dix fois plus fréquent puisqu'il en arrive un tous les 316 654 segments pour le mini-tangram.

Mini-Tangram	*e*	*a*	*b*	*c*	*1*	*i*	*d*	Total
Effectif segments	811	402 709	72 782	3 902	1 453 398	8	600 433	2 533 232
Fréquence segments	0,03%	15,90%	2,87%	0,15%	57,37%	0,0003%	23,7%	100%

Tableau 5: Répartition des longueurs des segments constituant les bords des formes hétérogènes réalisables avec le mini-Tangram

Le développement du polynôme caractéristique donne une indication sur la possibilité d'occurrence d'une longueur de segment mais n'en assure pas l'existence. En prenant les résultats de ce développement au pied de la lettre, on ne prend donc aucun risque. Il ne peut pas y avoir, avec ce jeu de cinq pièces, de segments d'une autre longueur que ces huit longueurs (la longueur *h* étant incluse comme les autres). On peut donc développer un codage qui consiste à attribuer un code à chaque longueur possible dans chacune des directions possibles. Avec les pièces du Tangram, et tous les jeux de pièces extraits du Tangram, il ne peut y avoir que huit directions pour les segments. On pourrait citer ces directions selon les points cardinaux : N (Nord), S (Sud), E (Est), O (Ouest), mais aussi NE, NO, SE et SO. Le système d'encodage des silhouettes hétérogènes pleines, réalisable avec le mini-Tangram, doit donc contenir au minimum huit fois huit codes. Comme cela dépasse de loin l'alphabet, même en y adjoignant les lettres majuscules et les chiffres, il va falloir utiliser d'autres signes, par exemple les signes de ponctuation, etc. La trouvaille de Ronald Read est alors d'utiliser les signes du code ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*) dans l'ordre de cette norme qui, étant connue du langage de programmation et associée à son numéro d'ordre, permettra de retrouver la direction et la valeur de la longueur par une simple division euclidienne. Imaginons que l'on code ainsi les segments. Si on décide par exemple de coder les segments selon le tableau ci-dessous, pour coder la première forme de la figure 28 on utilisera la chaîne de caractère H@<o@o_dThX (voir la figure 30) ou une quelconque permutation de ces caractères selon la définition de l'encodage canonique que l'on garde en suspend, pour ne pas alourdir notre exposé.

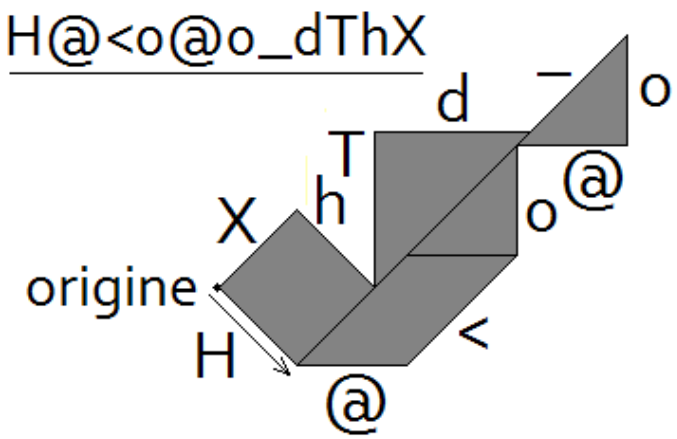


Illustration 30: Encodage d'une forme hétérogène avec un système de 64 codes basé sur la norme ASCII

L'intérêt d'utiliser ce code ASCII est la correspondance existant entre un signe et un nombre. Le signe H correspond au nombre 72, _ correspond à 95 selon le tableau choisi. Effectuons la division euclidienne de 72 par 8 : on trouve 9 et il reste 0 : la direction sera donnée par le quotient (9 indique la direction SE) et la longueur sera donnée par le reste (0 indique qu'il s'agit d'une longueur unité). Pour le segment codé _ qui correspond au nombre 95, la division euclidienne donne un quotient de 11, donc une direction SO, et un reste de 7, donc une longueur égale à *i*.

	N		NE		E		SE		S		SO		O		NO	
N°	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code
1	48	0	56	8	64	@	72	H	80	P	88	X	96	'	104	h
a	49	1	57	9	65	A	73	I	81	Q	89	Y	97	a	105	i
b	50	2	58	:	66	B	74	J	82	R	90	Z	98	b	106	j
c	51	3	59	;	67	C	75	K	83	S	91	[	99	c	107	k
d	52	4	60	<	68	D	76	L	84	T	92	\	100	d	108	l
e	53	5	61	=	69	E	77	M	85	U	93	]	101	e	109	m
h	54	6	62	>	70	F	78	N	86	V	94	^	102	f	110	n
i	55	7	63	?	71	G	79	O	87	W	95	_	103	g	111	o

Tableau 6: Le code ASCII fait correspondre un caractère à un nombre. Ici, certains caractères sont utilisés pour coder à la fois la direction et la longueur d'un segment

Ce tableau est provisoire, il ne peut servir qu'à coder des formes ne présentant que huit longueurs de segment différentes. Pour le Tangram complet, comme on trouve douze longueurs possibles, ainsi qu'on le verra plus loin, il faudra le redéfinir en lui ajoutant quatre lignes de codes supplémentaires.

<u>Question 4</u> : La figure ci-dessous montre plusieurs boîtes carrées de différentes dimensions. Les côtés de ces carrés sont les plus petits nombres de la forme $a+b\sqrt{2}$, avec *a* et *b* entiers, tels qu'on puisse y contenir un tangram.

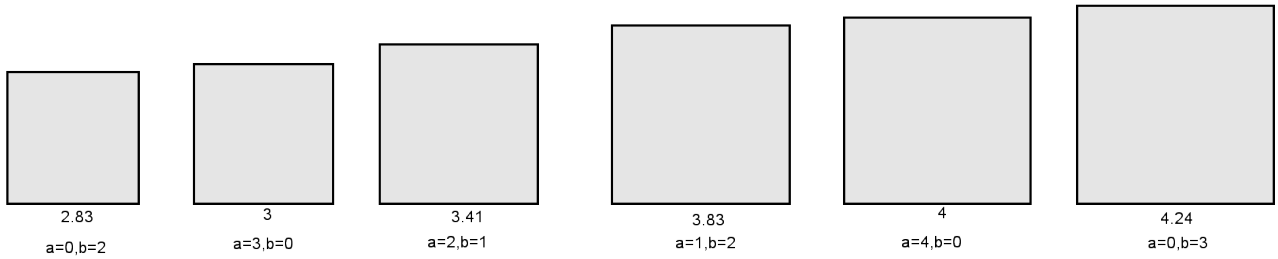


Illustration 31: Différents carrés de côté c= $a+b\sqrt{2}$ (a et b entiers), c variant entre $2\sqrt{2}$ et $3\sqrt{2}$

a) Quelle est la plus grande de ces boîtes dans laquelle les pièces du Tangram couvrent totalement les bords de la boîte sans se couvrir entre elles, laissant apparaître un trou (une baie est possible ici) ? On peut se limiter aux cas où l'intérieur des pièces reste connecté par la fusion d'une partie au moins d'un bord (il s'agit alors d'une forme propre). Mais la question peut s'élargir à d'autres types

d'assemblage, l'essentiel étant de couvrir les bords de la boîte carrée. Y a-t-il un arrangement des pièces dans la boîte qui conduise à un trou ayant un plus grand périmètre ? Donner la valeur exacte de ce plus grand périmètre et le nombre de solutions.

b) Dans le même ordre d'idée, combien de dimensions de telles boîtes carrées sont susceptible de contenir des tangrams hétérogènes (voir chapitres 9 et 10) ayant pour enveloppe convexe ces carrés ? Pour clarifier, nous chercherons des tangrams d'enveloppe convexe carrée assemblés par les points de référence et une portion de côté au moins. Contrairement à la question a) les bords des pièces ne doivent pas nécessairement adhérer aux parois de la boîte carrée, mais chacun des sommets de ces boîtes carrées doit être atteint par un des sommets des pièces du Tangram. Il faut ensuite déterminer le côté de l'enveloppe carrée et comptabiliser les différentes valeurs possibles.

Chapitre 5 :
Assemblages des cinq triangles

Nous examinons ici les assemblages qui peuvent se réaliser avec les pièces triangulaires du Tangram. À cette occasion, la notion de convexité, ou plutôt d'écart à la convexité, est examinée

Afin de ne pas aborder trop tôt la complexité combinatoire du jeu complet, nous éliminons encore ici deux pièces du Tangram. Cette fois, il s'agit du parallélogramme et du carré, ces quadrilatères qui viennent altérer la belle homogénéité du groupe des cinq triangles. Notre jeu contient alors cinq pièces, toutes de la même forme mais pas à la même échelle. Le jeu des triangles du Tangram recouvre une aire de douze petits triangles (1+1+2+4+4=12) ou six carrés. L'assemblage homogène de ces triangles conduit à combien de formes ? Examinons tout d'abord cette question, qui prolonge les triplets de Hill, avant de nous intéresser aux assemblages hétérogènes, aux différentes longueurs de segments et aux différentes valeurs de la convexité qui peuvent s'y rencontrer.

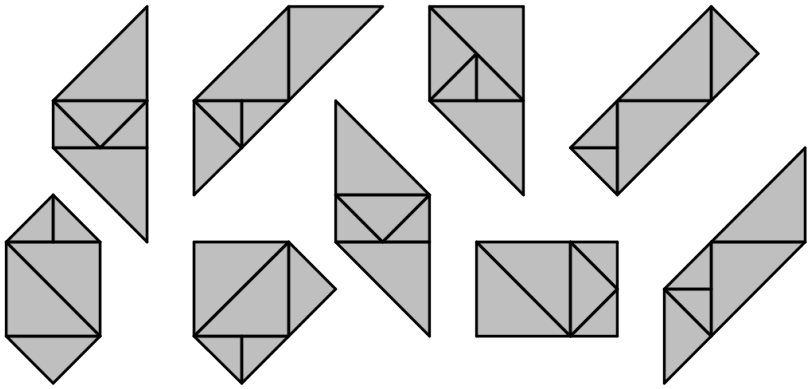


Illustration 32: Les 9 formes convexes réalisables avec l'ensemble des 5 triangles : 7 quadrilatères, 1 pentagone et 1 hexagone

Lorsqu'on reste sur le quadrillage en ne réalisant que des associations homogènes avec les cinq triangles, il est possible de réaliser près de treize mille formes différentes. Le carré n'est pas une figure possible car avec douze demi-carrés on ne

Côtés	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
Total effectif	7	15	85	316	1 025	2 337	3 599	3 602	1 818	177	12981
baie	0	0	0	0	14	47	114	154	78	8	415
trou	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Plein	7	15	85	316	1011	2289	3485	3448	1740	169	12 565

Tableau 7: Répartition des formes homogènes réalisables avec les 5 triangles du Tangram

peut reconstituer un seul grand carré (il en faut deux, quatre, huit ou seize), mais il y a tout de même sept quadrilatères convexes réalisables et deux autres formes convexes, un pentagone et un hexagone.

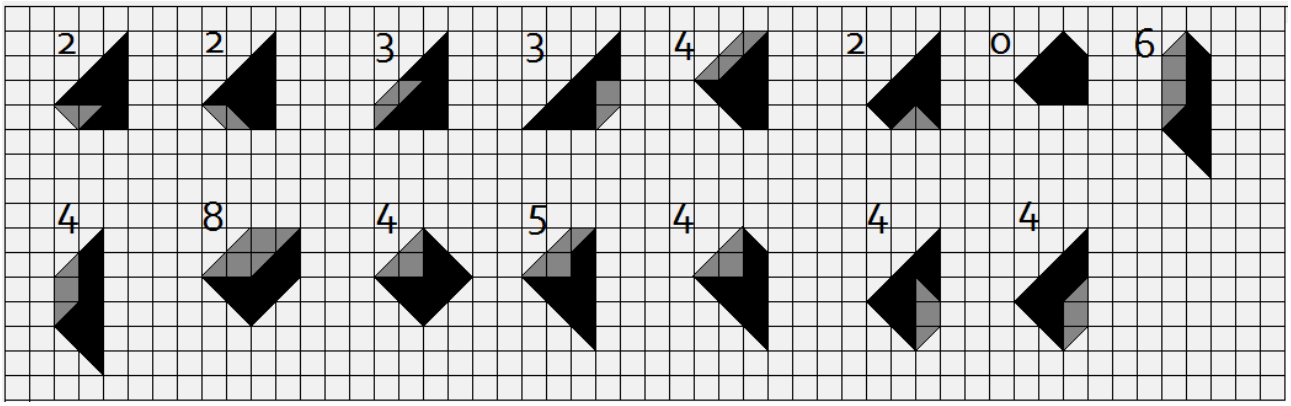


Illustration 33: Les 15 pentagones réalisables avec les 5 triangles ont des convexités allant de 0 à 8

Les quadrilatères sont tous convexes mais, à partir des pentagones, la plupart de ces formes ne sont pas convexes. Il faudrait leur ajouter certaines surfaces pour combler les creux créés par les angles rentrants qu'elles contiennent. Si on ajoute ainsi des petits triangles jusqu'à obtenir une forme convexe, on réalise ce qui pourrait s'appeler une enveloppe minimale sur quadrillage qui circonscrit la forme. On peut également combler les creux d'une autre manière : en ajoutant les portions les plus petites qui réalisent l'enveloppe convexe minimale, ce dernier point sera envisagé plus loin. Restons sur notre première idée : ajouter un certain nombre de petits triangles pour obtenir une forme convexe. Plus ce nombre – appelé *convexité* mais une meilleure expression serait *écart à la convexité* – est faible et plus la forme se rapproche d'une forme convexe. Pour les pentagones, par exemple, nous avons vu qu'il n'y en a qu'un seul de convexe, donc un seul de convexité nulle. Il y en a trois à qui il manque deux triangles pour être convexe, donc trois pentagones de convexité égale à deux. Ensuite, on trouve deux pentagones de convexité égale à trois, six de convexité égale à quatre et un de convexité cinq, un de convexité six et

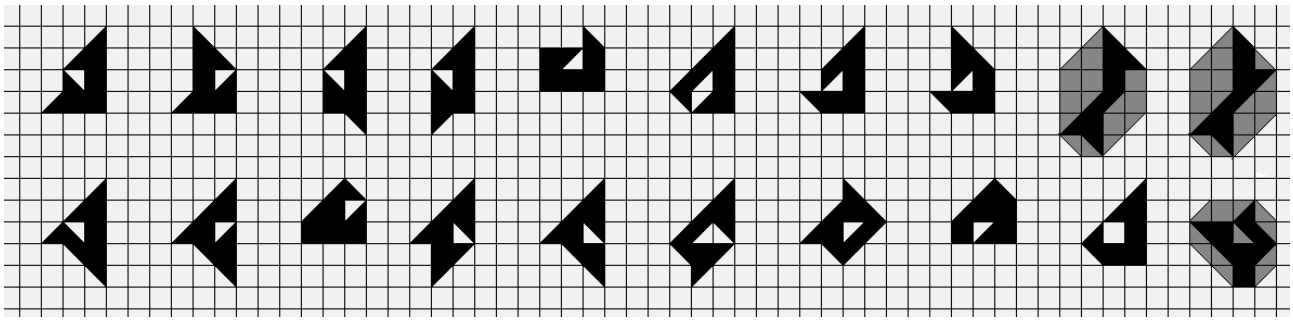


Illustration 34: Les premières formes à baie sont des octogones ayant 3 ou 4 côtés tournés vers l'intérieur. Le seul vrai trou a neuf côtés. La convexité maximum est de 23 (en haut à droite, les 2 formes ayant 9 côtés), mais lorsqu'il y a un trou celle-ci chute à 13 (en bas à droite)

un de convexité huit. Il n'y a que ces quinze pentagones homogènes.

La convexité va pouvoir prendre des valeurs de plus en plus importantes, au fur et à mesure que le nombre de côtés augmente. Pour les hexagones, cette caractéristique s'étale entre zéro et dix-huit! Pourtant, il n'y a que quatre-vingt-cinq hexagones. Avec les formes à neuf côtés, la convexité atteint sa valeur maximum qui est vingt-trois. La seule forme de convexité un qui a neuf côtés est intéressante car elle a une baie (voir figure 34). Les formes à neuf côtés recèlent quarante-six autres formes à baie et une forme ayant un vrai trou. C'est le seul vrai trou, sans aucun contact avec l'extérieur, qui peut se trouver au sein de cette famille de formes. Ce trou recouvrant la surface d'un petit triangle est responsable d'une unité pour la convexité. Il a neuf côtés car trois sont à l'intérieur, bordant le trou, et six sont à l'extérieur. On pourrait dire qu'il s'agit d'un hexagone avec un trou, mais il faut aussi compter les côtés du trou.

Côtés	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
CVX=0	7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	9
CVX=1	0	0	6	10	2	1	0	0	0	0	19
CVX=2	0	3	21	17	64	23	10	0	0	0	138
CVX=3	0	2	11	45	100	43	25	2	0	0	228
CVX=4	0	6	10	36	75	119	90	16	0	0	352
CVX=5	0	1	3	23	61	121	78	43	7	0	337
CVX=6	0	1	6	37	110	266	272	218	23	0	933
CVX=7	0	0	2	36	139	284	289	239	77	4	1 070
CVX=8	0	1	8	35	90	281	350	289	95	4	1 153
CVX=9	0	0	1	19	99	253	415	380	256	25	1 448
CVX=10	0	0	6	22	77	252	443	458	230	17	1 505
CVX=11	0	0	1	16	67	203	368	415	305	49	1 424
CVX=12	0	0	4	10	39	121	309	353	164	17	1 017
CVX=13	0	0	0	2	19	97	205	248	199	31	801
CVX=14	0	0	2	6	29	99	300	376	194	15	1 021
CVX=15	0	0	0	0	31	74	188	250	108	8	659
CVX=16	0	0	2	1	6	30	101	110	52	4	306
CVX=17	0	0	0	1	7	20	41	37	14	0	120
CVX=18	0	0	1	0	2	14	45	87	71	3	223
CVX=19	0	0	0	0	5	25	40	50	17	0	137
CVX=20	0	0	0	0	2	2	12	13	1	0	30
CVX=21	0	0	0	0	0	7	13	14	4	0	38
CVX=22	0	0	0	0	1	0	2	1	0	0	4
CVX=23	0	0	0	0	0	2	3	3	1	0	9
Total	7	15	85	316	1025	2337	3599	3602	1818	177	12 981

Tableau 8: Répartition croisée entre convexité et nombre de côtés dans les assemblages de 5 triangles

Les formes à baie sont beaucoup plus nombreuses que les formes à trou, puisqu'il n'y a qu'une forme à trou et quatre cent quinze formes ayant une baie. Les premières baies se rencontrent parmi les formes ayant huit côtés. Pour la plupart, les baies ont trois côtés. Ce sont des sortes de pentagones ayant un trou

triangulaire, mais nous préférons les considérer comme des octogones invaginés. Pour trois d'entre eux (voir les deux du bas à gauche, figure 34), le point de contact de la baie avec l'extérieur étant situé sur un pseudo-côté (pour les autres, la baie débouche sur un vrai sommet), nous pourrions les considérer comme des quadrilatères ayant un trou triangulaire, donc des formes à sept côtés alors que nous les considérons comme des octogones, des formes à huit côtés. Il ne s'agit ici en fait que de trancher entre deux conceptions topologiques différentes du bord des formes à baie : n'y a t-il qu'un seul bord invaginé (c'est le choix de notre prédécesseur R. Read que nous avons repris) ou bien deux bords en contact ?

Les baies triangulaires ont une aire de un ou deux petits triangles. Il existe aussi des trous ayant une forme de quadrilatère : parmi les formes à huit côtés, l'une d'entre elles a une baie en forme de parallélogramme (ligne du haut, figure 34). On rencontre ailleurs aussi des baies en forme de carré (dans la ligne du bas de cette même figure 34, un ennéagone invaginé renferme un carré), mais il ne se présente aucune baie d'aire supérieure à deux triangles ni aucune forme ayant deux baies.

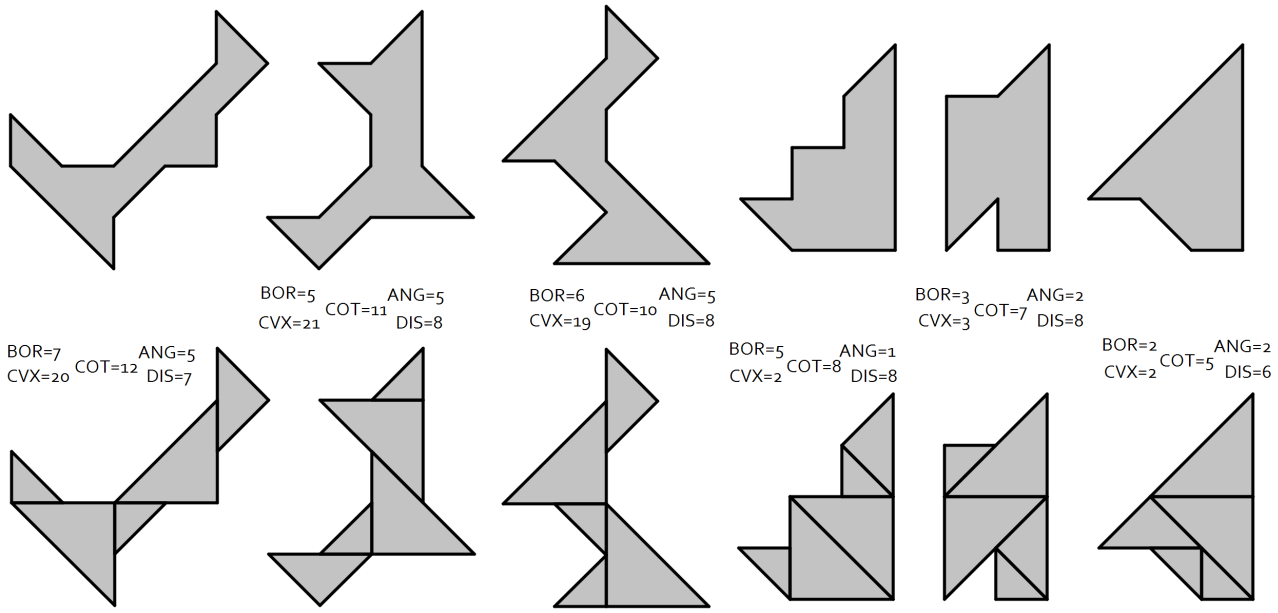


Illustration 35: Quelques formes (en haut), leur solution (en bas) et quelques paramètres qui pourraient être responsables de la difficulté de la reconstitution (la liste n'est pas exhaustive) : convexité (CVX), nombre de côtés (COT), nombre d'angles dissimulés (DIS), nombre d'angles exhibés (ANG) et nombre de bords exhibés (BOR)

À quoi peut bien servir la convexité ? L'intérêt des formes convexes, pour un joueur qui cherche à résoudre un problème de Tangram, réside en partie dans le fait que les bords des pièces, et aussi les angles, sont mieux dissimulés. La meilleure façon de dissimuler les pièces est de réaliser des angles plats, par exemple en faisant en sorte que l'angle de 135° du parallélogramme soit adjacent avec un angle de 45° d'un triangle. Ici, ne disposant que de triangles, on peut accoler deux angles droits pour

réaliser cette très efficace dissimulation. Lorsque la convexité augmente, il n'y a pas forcément toujours une baisse concomitante de la dissimulation des pièces. Mais cette baisse peut s'observer lorsqu'on considère les formes les plus déchiquetées, dentelées ou étirées qui ont une convexité importante. La compacité étant l'inverse de la longueur du bord, est un autre indicateur de la plus ou moins grande dissimulation des pièces dans la silhouette. Lorsque la silhouette est peu compacte (son périmètre est grand) et a une convexité importante, il y a de bonnes raisons de penser que cette silhouette révèle beaucoup sur les pièces. Inversement, une forme compacte (périmètre faible) et presque convexe (convexité faible) montre peu d'informations sur les emplacements probables des pièces.

L'étude d'un jeu de pièces ne peut se limiter à l'étude des formes homogènes. Les assemblages hétérogènes sont aussi naturels pour un joueur. Ils sont plus difficiles à coder pour l'informaticien qui ne peut utiliser un système aussi efficace que ceux qu'il est aisé de construire pour les formes sur quadrillage. Il faut tenir compte des nouvelles longueurs possibles et traduire les silhouettes en fonction des longueurs de segments ainsi que des directions prises par ces segments. Gardons cet aspect technique pour plus tard, et examinons l'ensemble des formes hétérogènes produites par ce jeu de cinq pièces. Le nombre de formes pleines (sans baie ni trou) est impressionnant : 1 454 595 ! Parmi celles-ci, nous retrouvons bien sûr les formes homogènes (il y en a 12 565 pleines), et nous en trouvons 546 de symétriques (112 sont homogènes). Concernant les bords, il peut y avoir jusqu'à 18 segments et quinze côtés. Ce qui nous intéresse est la différence entre l'aire de l'enveloppe convexe la plus étroite (on ne parle plus d'enveloppe sur le quadrillage) et l'aire de la forme qui vaut toujours la même valeur de six carrés. Cette convexité réelle s'étale entre 0 (pour les formes convexes) et 19.31 environ. Les différentes valeurs prises par cette convexité réelle sont nombreuses. Entre 0 et 1 triangle de convexité, il y a huit valeurs différentes. Des exemples de détermination de cette convexité réelle sont donnés dans la figure 36.

Toutes les valeurs de la convexité réelle s'expriment sous la forme $\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$ où a et b sont des entiers (voir chapitre 1). Pour les formes de la figure 36, on a : $a=1.5\sqrt{2}-2\approx 0.12132$; $b=0.5(\sqrt{2}-1)\approx 0.20711$; $c=2a=3\sqrt{2}-4\approx 0.24264$; $d=a+b=2\sqrt{2}-2.5\approx 0.32843$; $e=0.25\sqrt{2}\approx 0.35355$; $f=\sqrt{2}-1\approx 0.41421$; $g=a+2\sqrt{2}-2.5=3.5\sqrt{2}-4.5\approx 0.44875$; $h=1.75\sqrt{2}-2\approx 0.47487$; $i=0.5$.

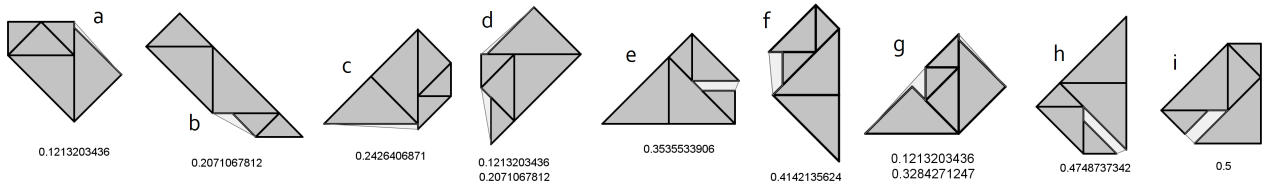


Illustration 36: Quelques valeurs de la convexité réelle de formes hétérogènes de moins de 1 triangle de convexité

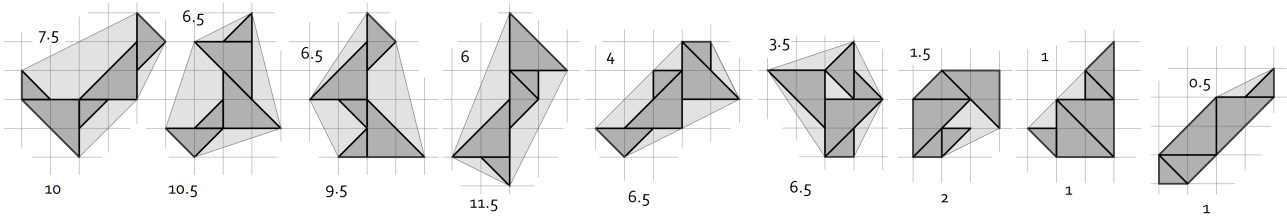


Illustration 37: Détermination, pour quelques formes homogènes, de la convexité réelle (nombre du haut) qui correspond à la différence entre l'aire de la forme convexe grise (l'enveloppe convexe) et l'aire des pièces (6 pour le jeu des 5 triangles). La convexité sur quadrillage (en bas) est toujours supérieure à la convexité réelle.

En ce qui concerne les formes homogènes, nous avons vu qu'on pouvait déterminer à leur propos une convexité sur quadrillage. Cette valeur reflète-t-elle fidèlement la convexité réelle ? Examinons quelques formes homogènes à travers ces deux indicateurs (figure 37) et constatons que ces deux grandeurs varient dans le même sens globalement, malgré des variations liées à la forme. Il peut y avoir égalité entre les deux types de convexité (voir problème 5), mais généralement la convexité réelle est inférieure à la convexité sur quadrillage. Au pire, la convexité réelle vaut la moitié de la convexité sur quadrillage. Dans tous les cas, cette dernière est donc comprise entre un et deux fois la convexité réelle. Pour ces deux expressions de la convexité des formes homogènes, nous pouvons remarquer encore que les deux nombres sont toujours des nombres décimaux, et plus précisément des nombres entiers de petits triangles (notre unité d'aire préférée). Les formes homogènes de convexité réelle maximum ont une convexité réelle égale à 15 (il en existe douze) alors que la forme hétérogène de convexité réelle maximum a une convexité de 19.31 triangles ou 9.657 carrés, un nombre qui s'exprime à l'aide de la racine carrée de deux : $4+4\sqrt{2}\approx 9.657$.

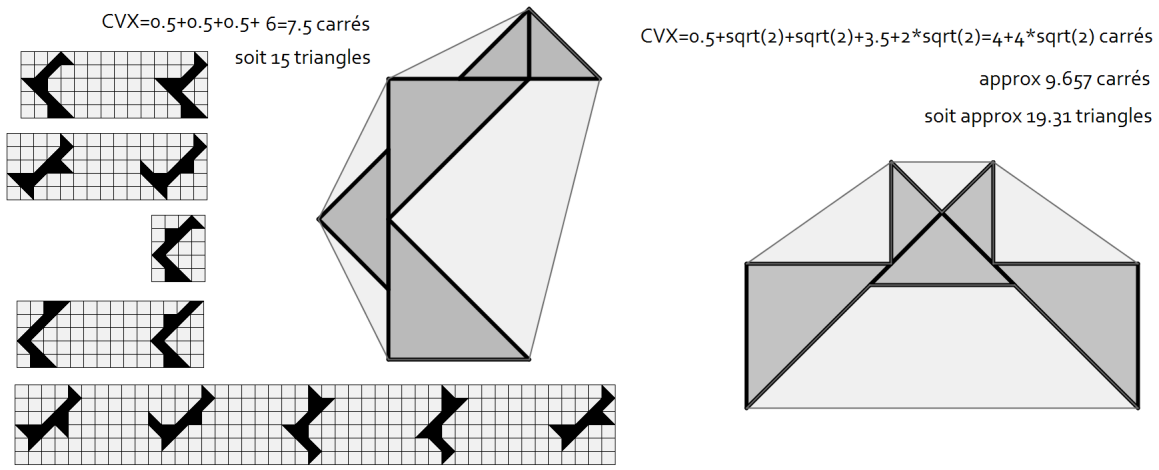


Illustration 38: Formes de convexité réelle maximum réalisables avec le jeu des 5 triangles : à gauche, classées selon leur convexité sur quadrillage (de 19 à 23 ici), les 12 formes homogènes de convexité réelle égale à 15, à droite la forme hétérogène de convexité réelle égale à 19.31

Avec les assemblages hétérogènes de ce jeu de cinq pièces, nous avons trois nouvelles longueurs que l'on n'avait pas vu apparaître dans les tangrams étoilés (longueurs de segments présentes : 1, *a* , *b*, *c* et *d*) ni avec le mini-Tangram (il se rajoutait uniquement les longueurs *e* et *i*). Il s'agit des longueurs $f=3\sqrt{2}-4\approx 0.242$, $g=5-3\sqrt{2}\approx 0.758$ et $h=1+e=4-2\sqrt{2}\approx 1.172$ (voir figure 39).

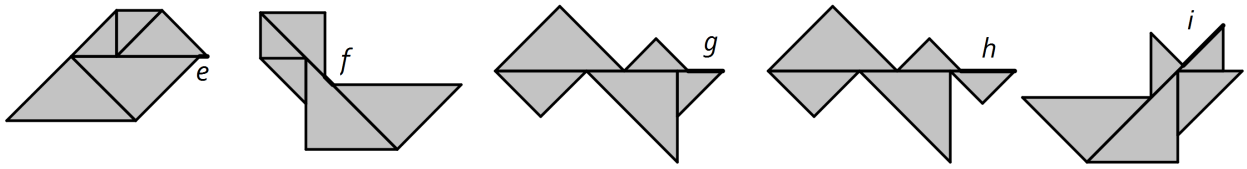


Illustration 39: Différentes longueurs de segment qui apparaissent avec le jeu des 5 triangles

La répartition des segments de toutes les formes hétérogènes produites par ce jeu de cinq pièces est donnée dans le tableau ci-dessous. On y constate encore la grande majorité (55%) du segment original de longueur unité et de son alter ego racine carrée de deux, noté *d* (29%). Les premières longueurs nouvelles *a*, *b* et *c* constituent, à eux trois, près de 16% des longueurs de segment. Les dernières longueurs nouvelles, quant à elles, ne représentent à elles cinq que 0.22% des segments. Certaines de ces longueurs sont en effet assez difficiles à constituer : la longueur *h*, pour prendre la plus rare, doit être constituée par la soustraction de deux diagonales *d* de carré à la somme de quatre côtés de longueur unité. Dans notre exemple de la figure 39, cet assemblage mobilise à lui seul l'ensemble des cinq pièces du jeu réparti de part et d'autre d'une ligne de démarcation. D'un côté, les quatre segments unités auxquels s'ajoute une diagonale et, de l'autre, trois diagonales. Pourquoi cette diagonale surnuméraire ? Ceci permet de constituer la longueur *h* sur une diagonale, car sinon, en enlevant les deux petits triangles de droite, la longueur *h* se réaliserait sur le côté du grand triangle. Ce côté mesure deux unités de long et, la longueur *h* étant supérieure à une unité, on se retrouverait avec un segment de longueur unité et un segment de longueur *e*, séparés par un point de référence. C'est pour cette raison que le segment *h* est extrêmement rare (0,00004% soit un segment sur 2 800 000) et qu'il est absent des tangrams étoilés et aussi des formes produites par le mini-Tangram, malgré la réalisation d'une condition nécessaire à son existence (la possibilité de cette longueur apparaît dans le développement du polynôme caractéristique).

5 Triangles	*e*	*f*	*a*	*b*	*g*	*c*	*1*	*h*	*i*	*d*	Total
Effectif segments	44 903	885	2 302 712	985 211	933	245 212	12 327 879	8	3 376	6 546 820	22 412 151
Fréquence segments	0,20%	0,0039%	10,27%	4,40%	0,0042%	1,09%	55,01%	0,00004%	0,015%	29,2%	100%

Tableau 9: Répartition des différents types de segment constituant les bords des formes hétérogènes réalisables avec les 5 triangles du Tangram

<u>Question 5</u> : Les formes homogènes dont la convexité sur quadrillage égale la convexité réelle sont assez rares et remarquables (ne serait-ce que par leur relative

rareté). Pour ces formes, l'enveloppe convexe coïncide avec l'enveloppe sur quadrillage. Combien sont elles à posséder cette propriété, parmi les 12 981 formes homogènes réalisables avec les cinq triangles ? À défaut de les compter toutes (travail assez fastidieux qui nécessite un programme spécifique), quelle est la convexité maximum pour laquelle ce genre de forme se rencontre ? Notre illustration en montre un spécimen pour chaque valeur de la convexité jusqu'à six triangles de convexité. Rappelons, par ailleurs, que la convexité réelle des formes homogènes s'élève au maximum à quinze triangles. Le nombre cherché doit par conséquent être compris entre 7 et 15. Cela limite (un peu) la recherche, puisqu'il n'y a, parmi les formes homogènes, que 10 098 formes de convexité sur quadrillage comprise entre 7 et 15 et 7 557 formes de convexité réelle comprise entre 7 et 15 .

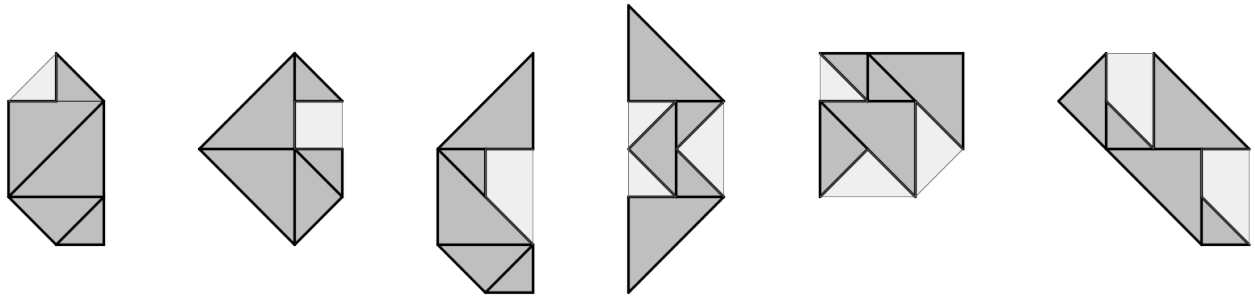


Illustration 40: Formes homogènes réalisables avec les 5 triangles du Tangram dont les convexités réelles et sur quadrillage sont égales

Chapitre 6 :
Tangrams homogènes

Génération des assemblages homogènes réalisables avec les pièces du Tangram. On se penche, à ce propos, sur le processus de formation des côtés et on détermine la répartition des formes que ce nombre de côtés induit

Martin Gardner est une des personnalités qui a fait le plus pour développer et enrichir les utilisations traditionnelles du Tangram. Chroniqueur au Scientific American entre 1956 et 1981, il y publie deux articles[4] sur le Tangram où sont énoncés quelques faits remarquables sur ce jeu et aussi de nombreuses questions ouvertes qu'il soumet ainsi à ses lecteurs. L'une de ces questions concerne le nombre de pentagones réalisables avec les sept pièces du jeu. Gardner leur pose la question dans un premier article de 1974 pour les mettre en appétit, disant que la réponse serait dans le prochain article. Il annonce alors qu'il y a seize pentagones homogènes et deux hétérogènes (il utilise l'épithète *snug* forgé par Ronald Read pour les formes homogènes et *loose* pour les formes hétérogènes, Read dira *compact*). Mais ses lecteurs lui envoient des protestations véhémentes et complètent la collection qui passe progressivement à la valeur définitive de vingt-deux pentagones homogènes et trente-et-un hétérogènes. Deux lettres de lecteurs contiennent l'ensemble de ces formes, trouvées à la main, mais ce sont les travaux indépendants de deux programmeurs en 1975 et 1976, qui clôturent la question.

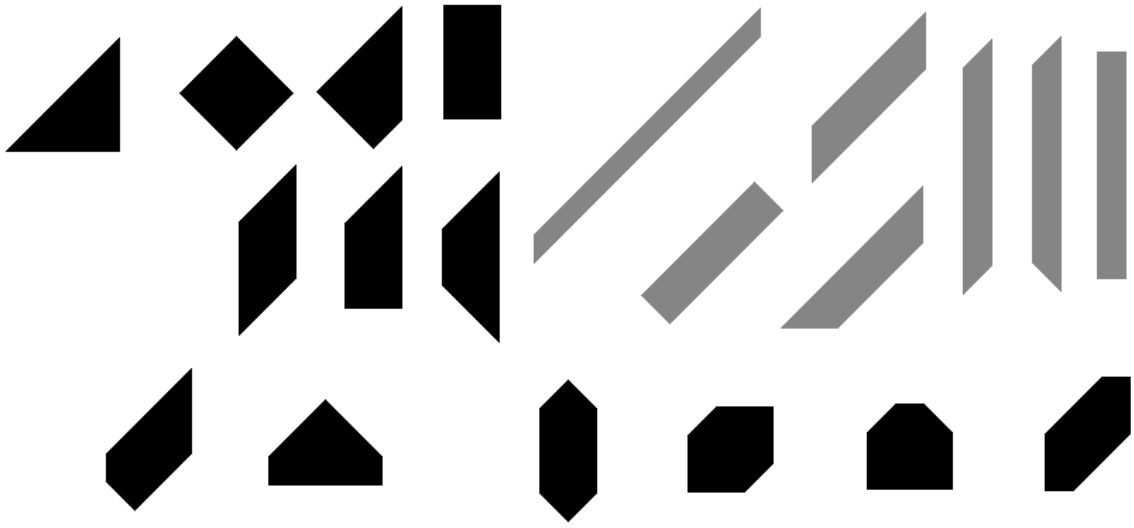


Illustration 41: Les 13 formes convexes réalisables avec un Tangram (en noir) et les 7 autres formes homogènes de même aire mais impossibles avec ce jeu (en gris)

4Ces articles sont reproduits et complétés dans le livre : Gardner Martin, 1988, Time Travel and Other Mathematical Bewilderments, W.H. Freeman and Company, New York, pp.28-54.

L'inventaire – même partiel – des formes d'une catégorie donnée réalisables avec le Tangram n'a pas véritablement commencé à cette époque. Il y eut tout d'abord la publication, en 1942, d'un court article de deux professeurs de Chekiang en Chine, Fu Traing Wang et Chuan-Chih Hsiung[5], qui annonçait le nombre de formes convexes réalisables avec le Tangram. Ces formes n'étaient que treize, et ils en apportaient la preuve à l'aide d'un raisonnement. Parmi ces treize formes se trouvent un triangle, six quadrilatères, deux pentagones et quatre hexagones. Ainsi les possibilités de ce jeu aux apparences illimitées se trouvaient avoir des limites identifiées. C'était le début d'une quête des limites qui rebondit sans cesse depuis. Car lorsqu'une question trouve sa réponse, une autre s'élève sur un sujet voisin. Ainsi, la découverte de Gardner concernant les pentagones ne mit pas fin au questionnement, au contraire. Il se demanda aussitôt combien il pouvait y avoir d'hexagones. À cette époque, Ronald Read commençait son travail de pionnier et apportait beaucoup de réponses (en particulier, il montra que les hexagones étaient en nombre infini) et aussi beaucoup de questions nouvelles. C'est lui qui définit l'assemblage homogène que l'on rencontre dans toutes les formes convexes et près de la moitié des pentagones. Il se demanda alors combien de formes homogènes il pouvait y avoir. Cette question l'occupa pendant des années et en 2004 il en publia le nombre, obtenu à l'aide d'un programme : le snug-number du Tangram est égal à 5 583 516 dont 4 842 205 sont des formes pleines, 731 951 ont une baie et 9 360 un vrai trou.

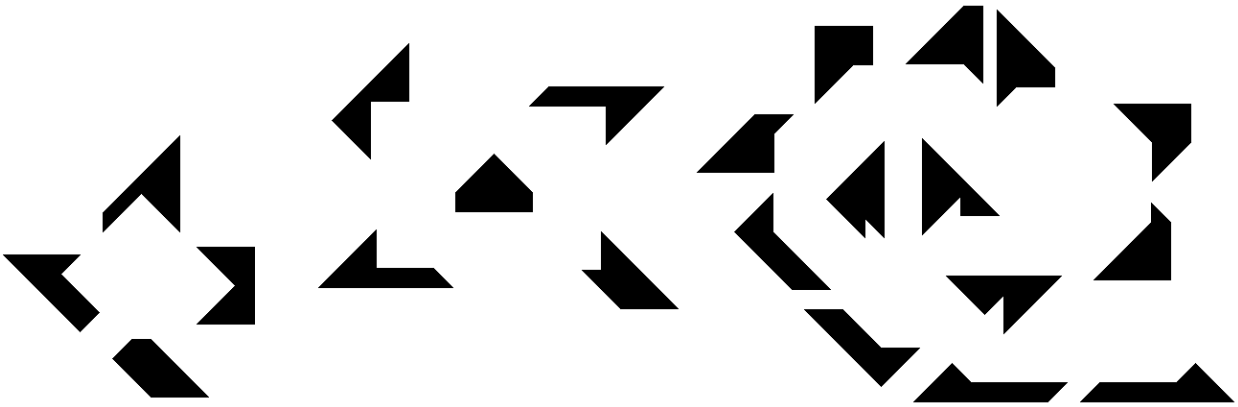


Illustration 42: Les 22 pentagones homogènes se répartissent en 2 formes convexes et 20 non-convexes parmi lesquelles 10 ont un angle de 225°, 7 un angle de 270° et 3 un angle de 315°

Le procédé employé par Read pour générer toutes les formes homogènes est assez simple à comprendre mais relativement complexe à mettre en œuvre. Il prend chacune des pièces différentes, et commence par adjoindre une deuxième pièce parmi les six restantes. Pour ce faire, il tourne cette deuxième pièce dans toutes les positions possibles (il y en a huit si elle n'a aucune symétrie) et cherche à l'assembler

5 Fu Traing Wang et Chuan-Chih Hsiung, *A Theorem on the Tangram*, The American Mathematical Monthly, vol. 49, n° 9, Novembre 1942, p. 596–599

à partir de l'un des points de référence de la première pièce. Lorsqu'un assemblage est possible, il faut comparer la forme produite avec les formes déjà produites, afin de supprimer les doublons éventuels. Il arrive ainsi à constituer douze fichiers indépendants qui servent de point de départ à l'assemblage d'une troisième pièce parmi les cinq restantes. Par exemple, un de ces fichiers contient toutes les formes produites à partir d'un grand triangle (noté G), auquel on a adjoint un petit (noté P) dans toutes les positions différentes. Ce fichier GP contient cinq formes homogènes seulement mais, si on essaie d'adjoindre une troisième pièce, par exemple un triangle moyen (noté M), on obtient un fichier beaucoup plus grand (noté GPM) contenant soixante-trois formes. Les douze fichiers de deux pièces sont GP, GM, GG, PP, MP, GK, PK (K: Carré), MK, GQ (Q: Parallélogramme), PQ, MQ et QK. Ils contiennent 41 formes dont trois sont en double, réalisées par des assemblages de pièces différents (voir figure 41 et tableau associé). De façon concomitante, tous les fichiers de trois pièces sont constitués : GPM, GPP, GPG, GPK, et GPQ à partir de GP, mais aussi GMP, GMG, GMK, GMQ à partir de GM, etc. Les fichiers contenant les mêmes pièces sont alors fusionnés, comme par exemple GMP, GPM, MPG, MGP, PGM et PMG qui constituent un seul fichier PMG (il prend le nom contenant les pièces dans l'ordre de leur rang). Après la fusion des jeux de trois pièces identiques, il y a donc dix-sept fichiers qui sont PPM, PPK, PPQ, PMK, PMQ, PMG, PKQ, PKG, PQG, PGG, MKQ, MKG, MQG, MGG, KQG, KGG, QGG. À l'étape suivante, il y a constitution des fichiers de quatre pièces, fusion des fichiers contenant les mêmes pièces et ainsi de suite ; étape après étape, on arrive à la dernière étape qui fusionne les productions des cinq fichiers constitués à l'étape six : PPMKQG, PPMKGG, PPMQGG, PPKQGG, PMKQGG.

À titre indicatif, la progression du nombre de formes à chaque étape est de 5-41-683-11 548-154 580-1 356 547-5 583 516, ce qui correspond, lorsqu'on ne garde que

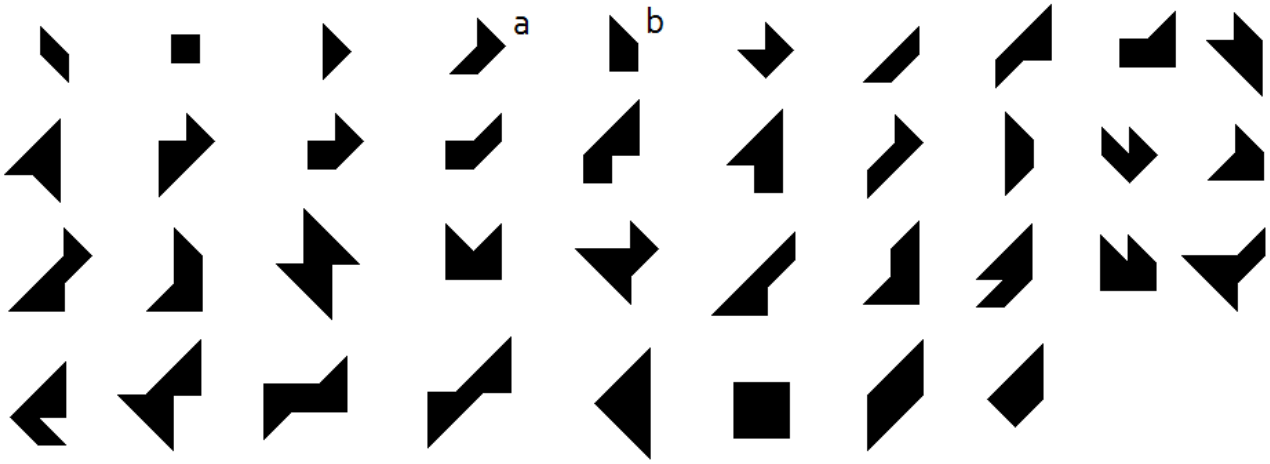


Illustration 43: Les 38 formes obtenues à la 2ème étape du processus d'agrégation des 7 pièces (voir leurs codes dans le tableau ci-dessous). Les formes a et b sont produites de plusieurs façons différentes (voir le tableau ci-dessous)

les silhouettes extérieures, à 5-38-592-9 517-119 425-1 077 783-5 583 516 formes différentes. Ces nombres montrent que le facteur d'expansion d'une étape à la suivante est variable, égal environ à 8.2-16.7-16.9-13.4-8.8-4.1. C'est lors de l'adjonction de la quatrième pièce que ce facteur est maximal (×16.9), alors que la dernière étape est celle qui se fait avec le moins d'extension (×4.1).

	Formes à agréger (avant fusion)			
1	1 1 1.2.14	1 9 2.3.022530	2 3 1.3.153	3 9 2.3.022523
2	1 1 1.1.5	1 9 2.2.0255	2 3 2.2.1143	3 9 2.2.1155
3	1 1 1.2.13	1 9 2.3.014504	2 3 2.2.0125	3 9 3.3.002453040
4	1 2 2.2.0123 (forme a)	1 9 2.3.022504	2 9 3.3.001023250	3 9 2.3.022541
5	1 2 1.2.15 (forme b)	1 9 2.3.015330	2 9 2.3.010525	9 9 3.4.002025450040
6	1 2 2.2.0143	2 4 2.2.0153	2 9 2.3.022543	9 9 2.4.02254504
7	1 3 2.2.0223	3 4 2.2.0253	2 9 2.2.1255	9 9 3.3.002555300
8	1 3 1.2.15	4 9 2.3.022550	2 9 3.3.001453040	9 9 3.4.002025530300
9	1 3 2.2.0123	4 9 2.3.022505	3 9 3.3.002023250	9 9 2.2.5555
10	1 4 1.2.15	2 3 2.3.012330	3 9 2.3.020525	9 9 2.4.02255330
				9 9 3.4.010051450040

Tableau 10: Les 41 formes obtenues par l'agrégation de 2 pièces du Tangram (en gris, les 3 formes en double qui sont obtenues par des assemblages de pièces différents). Les 2 premiers chiffres indiquent les pièces qui ont été agrégées (1:petit triangle, 2:moyen triangle, 3:parallélogramme, 4:carré, 9: grand triangle), ensuite, séparés par un point, les nombres de lignes, de colonnes et le code de la forme

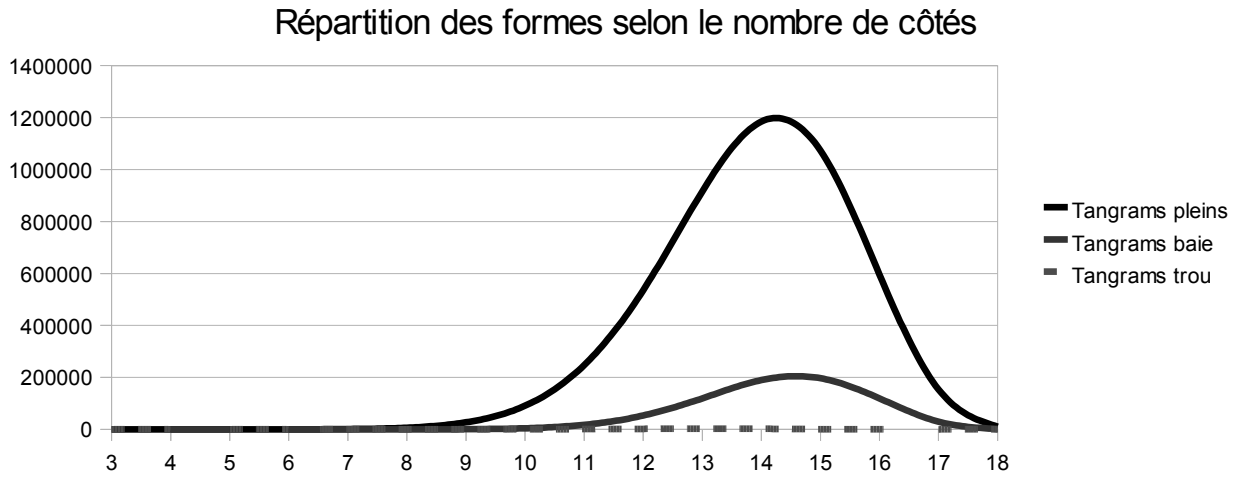
Il n'y a pas vraiment de difficultés à obtenir ces formes, dans la mesure où l'on procède méthodiquement pour supprimer les doublons. Une forme est en doublon lorsqu'elle est présente deux fois, même si le codage diffère entre ces deux apparitions. Comme on ajoute les pièces en ajoutant les codes des carreaux (voir la figure 13 au chapitre 2), les formes produites sont des matrices qu'il est facile de transposer par une des symétries possibles. En réalité, nous écrivons une forme générée sous sa forme canonique (la transposition qui donne la plus petite valeur alphanumérique) et nous stockons les formes produites dans un arbre binaire, une structure de données qui ne peut stocker deux fois la même valeur. Ainsi nous sommes assurés de n'avoir qu'un seul exemplaire de chaque forme.

L'ensemble de toutes les formes homogènes réalisables avec le Tangram contient, nous l'avons dit, 5 583 516 formes dont 4 842 205 pleines, 731 951 formes avec baie et 9 360 formes avec trou. S'il n'y a qu'un triangle, six quadrilatères et vingt-deux pentagones, les hexagones homogènes sont déjà deux cents. La progression du nombre de formes selon le nombre de côtés, donnée dans le tableau ci-contre, est importante jusqu'à quatorze côtés –

Côtés	progression du nombre		
	pleins	baie	trou
de 3 à 4	6,0		
de 4 à 5	3,7		
de 5 à 6	9,1		
de 6 à 7	6,2		
de 7 à 8	5,1	7,8	7,3
de 8 à 9	4,2	9,5	3,9
de 9 à 10	3,4	5,7	4,5
de 10 à 11	2,7	4,1	2,6
de 11 à 12	2,2	3,1	2,0
de 12 à 13	1,7	2,2	1,4
de 13 à 14	1,3	1,6	0,8
de 14 à 15	0,9	1,0	0,3
de 15 à 16	0,6	0,6	0,035
de 16 à 17	0,3	0,2	
de 17 à 18	0,1	0,1	

valeur modale du nombre de côté et aussi valeur moyenne approximative (la moyenne est de 13.90) – puis décroît progressivement. La médiane est aussi sensiblement égale à quatorze, car 38% des formes pleines ont moins de quatorze côtés et 38% en ont plus. Mais cette répartition est dissymétrique : onze valeurs sont inférieures à quatorze tandis que quatre sont supérieures à quatorze. En calculant les rapports des nombres de formes, on s'aperçoit que ce rapport débute par une curieuse inflexion, puis passe par sa valeur maximale et décroit régulièrement ensuite (à partir de six côtés pour les formes pleines). Cette inflexion se manifeste par un déficit de pentagones relativement aux quadrilatères. Ensuite la progression est très rapide

Côtés	Tangrams pleins	Tangrams baie	Tangrams trou	Total par côtés
3	1	0	0	1
4	6	0	0	6
5	22	0	0	22
6	200	0	0	200
7	1 245	10	3	1 258
8	6 392	78	22	6 492
9	27 113	739	86	27 938
10	90 860	4 238	391	95 489
11	247 255	17 348	1 017	265 620
12	535 302	53 359	1 992	590 653
13	915 949	119 260	2 841	1 038 050
14	1 184 701	189 698	2 323	1 376 722
15	1 073 018	196 708	662	1 270 388
16	595 932	119 344	23	715 299
17	153 472	29 630	0	183 102
18	10 737	1 539	0	12 276
total	4 842 205	731 951	9 360	5 583 516



Graphique 1: Répartition des tangrams homogènes selon le nombre des côtés

Le maximum du nombre de côtés est dix-huit (seize seulement pour les formes à trou). Les formes homogènes ne peuvent avoir plus de dix-huit côtés car, au départ, nous avons trente segments, et à chaque agrégation d'une pièces nous perdons au

minimum deux segments dans l'assemblage homogène des pièces. Comme il y a six assemblages pour constituer un tangram, on perd douze segments au minimum dans l'intérieur de la forme. Il en reste donc dix-huit et, au maximum, ces dix-huit segments constituent dix-huit côtés. Les formes ayant un trou ne peuvent avoir dix-huit côtés comme les formes pleines ou à baie car, lors de la constitution du trou, il faut que deux segments supplémentaires fusionnent, ce qui diminue d'autant le nombre de segments disponibles pour constituer le bord de la forme.

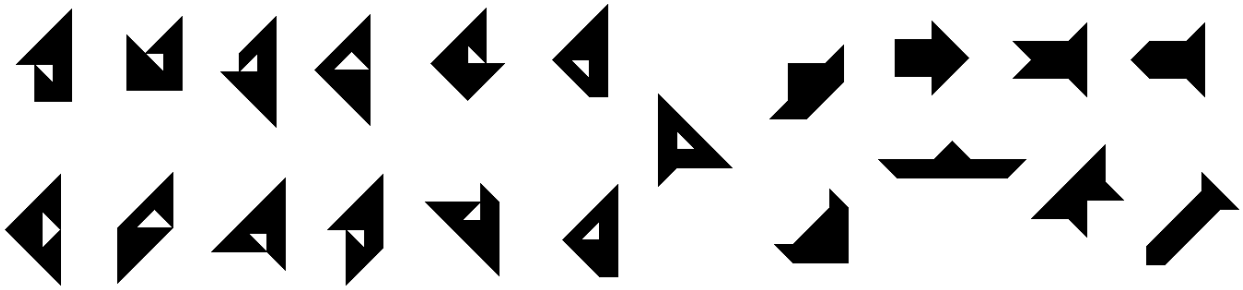


Illustration 44: Les 10 premières formes à baie (à gauche) et les 3 premières formes à trou ont 7 côtés. Parmi les 1 245 formes pleines à 7 côtés, 8 seulement sont symétriques (à droite)

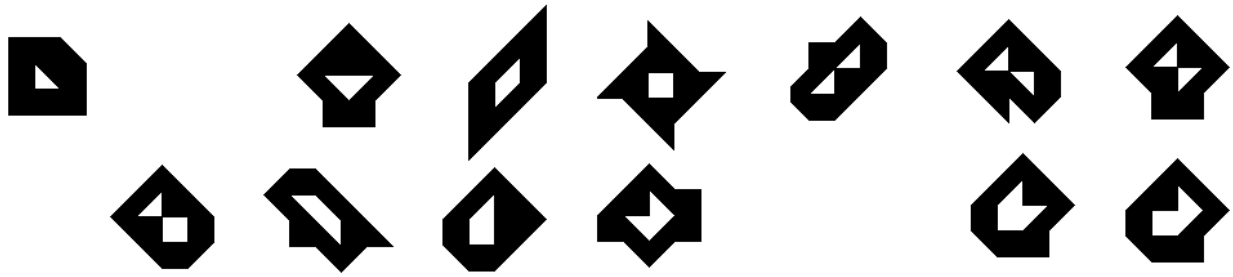


Illustration 45: Les 13 formes de trous que l'on rencontre dans un tangram homogène

Les formes à trou sont assez peu nombreuses comparées aux formes pleines ou aux formes à baie, mais elles n'en sont que plus attractives. Il n'y a pas beaucoup de possibilités pour la forme et la taille du trou. Parmi les 9 360 formes différentes qui ont un vrai trou, on rencontre seulement treize formes de trous. Ces trous peuvent avoir une aire de un à quatre triangles mais les plus fréquents sont les trous dont l'aire égale un triangle (8 508 formes). Les trous dont l'aire mesure deux triangles sont les plus variés puisqu'ils peuvent prendre six formes différentes (voir la figure 45) dont la moitié ont un isthme (un rétrécissement qui sépare le trou en deux parties contiguës). Les formes ayant un isthme sont très rares (dix formes pour les trois sortes d'isthme d'aire 2) alors que les formes ayant un trou d'aire 2 en un seul morceau sont assez fréquentes (795 en tout). Les trous de trois et quatre triangles sont rares aussi (42 et 5 formes en tout), un seul ayant un isthme d'aire 3. Treize formes à trou ont une enveloppe extérieure convexe, ce qui est amusant car il y en a autant de formes convexes qui n'ont pas de trou.

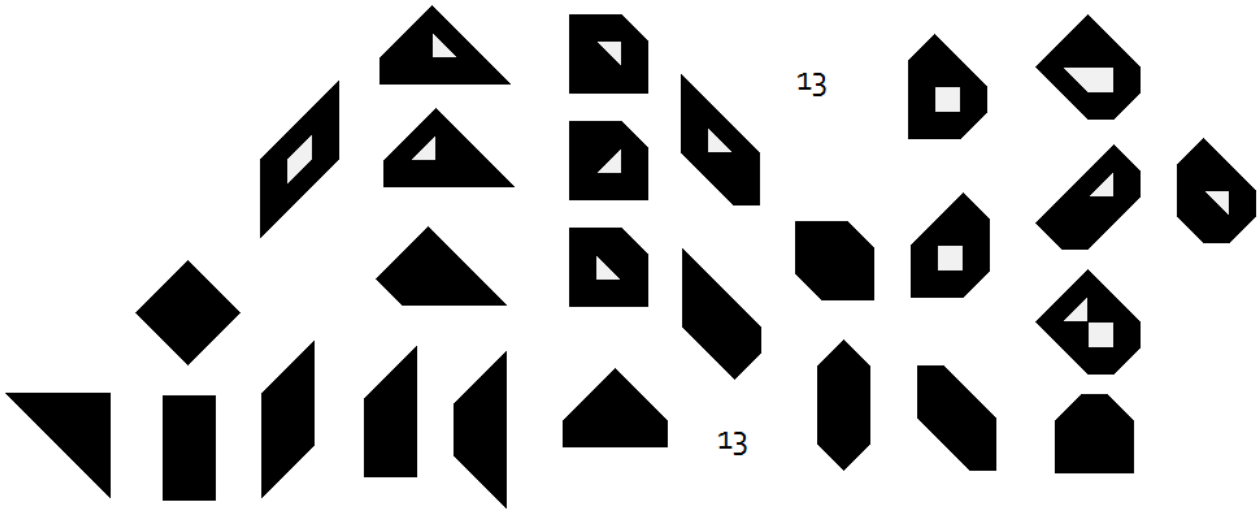


Illustration 46: Les formes à trou réalisables avec le Tangram ayant une enveloppe convexe sont au nombre de 13 comme les formes convexes

Réalité										côtés							
pièces	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Total
1	5	2															7
2	2	9	13	14													38
3	1	11	41	112	183	187	54										589
4	2	13	56	279	816	1811	2678	2466	1032	122							9275
5	1	15	71	403	1589	5209	13043	23693	31028	25198	10593	1710	78				112631
6	0	8	56	399	2051	8435	28059	72357	148183	226859	249095	172086	61277	7763	230		976858
7	1	6	22	200	1245	6392	27113	90860	247255	535302	915949	1184701	1073018	595932	153472	10737	4842205

modèle										côtés							
pièces	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Total
1	5	2															7
2	1	5	22	9	0												38
3	3	10	41	122	278	116	9	0									580
4	7	35	131	350	996	2267	3630	1530	172	7	0						9 125
5	17	81	330	1367	2896	6757	15674	29057	36839	15650	2212	141	4	111			111 135
6	30	165	641	3000	6640	17075	38441	80961	159336	251240	269210	114957	19166	2581	5054	10352	978 848
modèle	33	195	768	4658	8375	22654	55797	127077	262301	502314	868364	1200108	1132440	490473	118161	67546	4 861 265
réalité	1	6	22	200	1245	6392	27113	90860	247255	535302	915949	1184701	1073018	595932	153472	10737	4 842 205

répart.	-3	-2	-1	0	1	2	3	total
modèle	0,001	0,005	0,010	0,038	0,171	0,740	0,035	1

Tableau 11: En haut, progression du nombre de côtés selon le nombre de pièces agrégées pour les formes homogènes pleines. En bas, la même progression dans un modèle théorique

Lorsqu'on accole une pièce à une autre dans le processus d'agrégation, combien de côtés nouveaux crée-t-on ? Il est possible de répondre à cette question en donnant les différentes valeurs possibles : on peut créer jusqu'à trois côtés, mais on peut aussi faire diminuer le nombre de côtés de une, deux et même trois unités. La figure ci-dessous illustre ces différentes configurations. La question est plus délicate de savoir quelle est la répartition de ces différentes type d'agrégation. Il y a sans doute une différence entre les cinq types de pièces du jeu, les quadrilatères ayant un côté de plus contribuent vraisemblablement davantage que les petits triangles. Il y a aussi un profil moyen, une sorte de caractéristique globale du jeu qui permettrait d'expliquer la genèse de cette répartition asymétrique des formes selon leur

nombre de côtés.

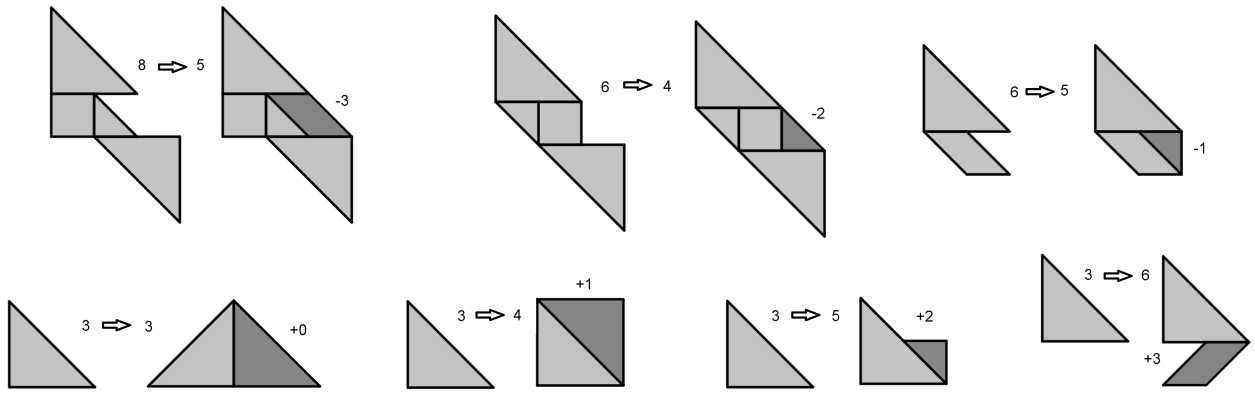
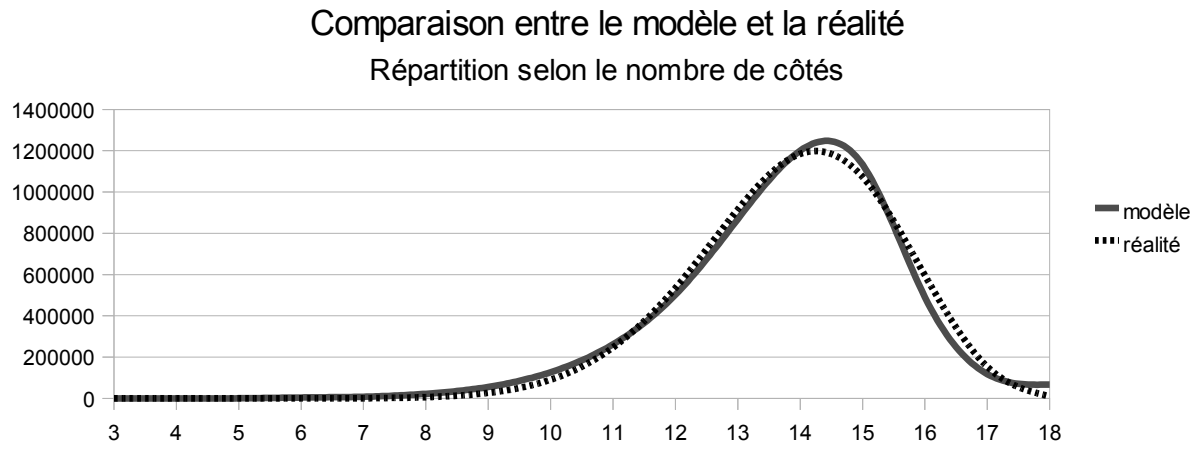


Illustration 47: Les différentes types d'agrégation des pièces selon leur impact sur le nombre de côtés se répartissent entre 7 valeurs allant de -3 à +3, les plus fréquentes étant +1 et surtout +2.

En cherchant comment les pièces augmentent ou diminuent le nombre de côtés, les exemples les plus évidents, les plus simples et par voie de conséquence les plus fréquents, sont les cas où le nombre de côtés augmente de une ou de deux unités. Admettons que ce soit les deux seules façons d'agréger une pièce à une autre, et supposons que le nombre de côtés augmente de un dans p% des cas et de deux dans (1-p)% des cas. Avec ce modèle simpliste, en partant de la répartition initiale (cinq triangles et trois quadrilatères), cela conduit aux répartitions suivantes pour les agrégats de deux pièces : $5\times p$ formes à quatre côtés ; $5\times(1-p)+2\times p$ formes à cinq côtés ; $2\times(1-p)$ formes à six côtés. Nous avons élaboré un peu cette idée en proposant une répartition des fréquences de chacun des types d'agrégation et en appliquant cette grille des fréquences aux agrégats de deux à sept pièces. Ainsi nous avons pu obtenir la répartition prévue par ce modèle des tangrams selon leur nombre de côtés. En comparant la courbe de la répartition réelle et celle obtenue avec le modèle, nous avons ajusté les valeurs des fréquences du modèle. Le résultat de cet ajustement est celui qui est donné dans le tableau du bas ci-dessus, où l'on voit que l'ajout d'une pièce entraîne une augmentation de un côté dans un peu plus d'un cas sur six environ (p=0.171 dans le modèle), et de deux côtés dans près de trois cas sur quatre (0.740 dans le modèle). Les autres valeurs de la variation du nombre de côtés sont faibles (4% environ pour des augmentations de zéro et de deux côtés) ou très faibles (1% pour une baisse de un côté, moins de 1% pour les deux autres valeurs).

Les deux courbes se superposent assez bien avec ces valeurs. L'augmentation de deux côtés arrive de différentes façons, mais la façon la plus fréquente avec les assemblages homogènes du Tangram – la façon typique – est qu'un triangle s'accole à un côté d'une forme ajoutant deux de ses côtés sans perdre la plupart du temps le côté de la forme sur lequel il s'accole.



Question 6 : Les formes homogènes ayant un vrai trou réalisables avec le Tangram sont nombreuses (9360 formes) mais, parmi celles-ci, il n'y en a que cinquante qui présentent un élément de symétrie. Sauriez-vous les trouver (six de ces formes ayant été données dans ce chapitre, il n'en reste que quarante-quatre à découvrir) ? Les formes à baie, symétriques et homogènes, ne sont guère plus nombreuses : quatre-vingt-huit seulement, dont dix-sept sont données dans ce chapitre. Ces formes symétriques trouées peuvent être réparties en cinq catégories : un seul axe (trente-sept ont un trou et soixante-et-une ont une baie), deux axes (deux ont un trou), un centre demi-tour (dix ont un trou et vingt-sept ont une baie) et un centre quart-de-tour.

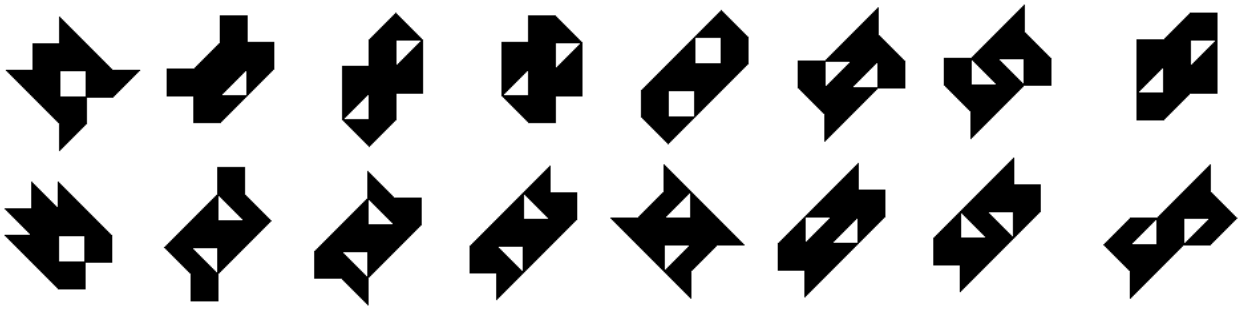


Illustration 48: Les 16 formes homogènes à 16 côtés ayant une baie au moins (13 en ont deux) et un élément de symétrie réalisables avec le Tangram contiennent 3 formes avec un axe (celles qui n'ont qu'une baie) et 13 avec un centre demi-tour (celles qui en ont deux)

Chapitre 7 : Périmètre

Le périmètre des assemblages homogènes du Tangram est étudié à la lumière de la relation de Pick. La répartition des segments rationnels et irrationnels sur le bord ou à l'intérieur de la forme conditionne les différentes valeurs du périmètre

Les assemblages homogènes du Tangram ont leurs sommets sur les nœuds d'un quadrillage. Ils obéissent pour cette raison à la loi de Pick que nous avons évoquée au premier chapitre. Cette loi relie le nombre de nœuds du quadrillage sur le périmètre (notés *P*), le nombre de nœuds du quadrillage à l'intérieur de la forme (notés *I*) et l'aire de la forme. Pour un tangram, les sept pièces étant toujours utilisées, sans chevauchement, l'aire est invariablement égale à huit carrés du quadrillage. Nous avons donc $8=\frac{P}{2}+I-1$, la relation de Pick pour le Tangram s'écrit encore $P=2(9-I)$.

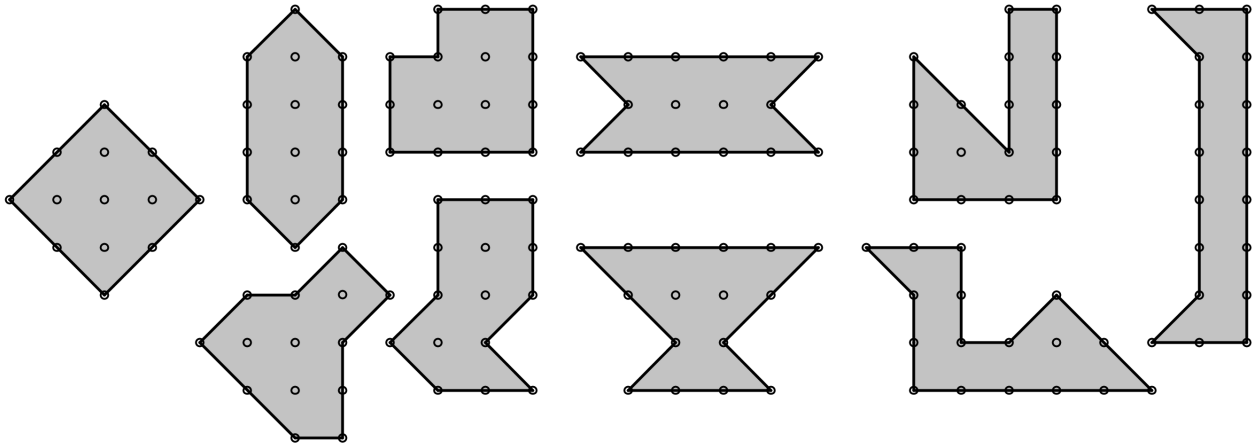
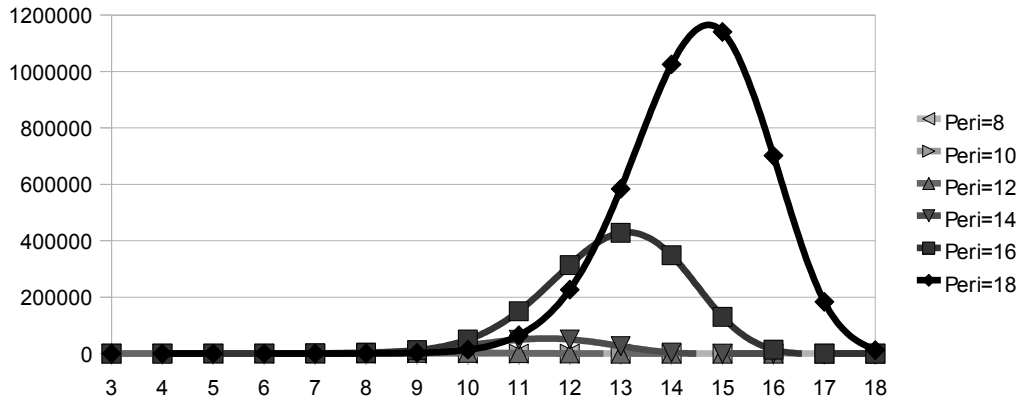


Illustration 49: Formes homogènes renfermant 5, 4, 3, 2, 1 ou 0 nœuds du quadrillage et nombres de nœuds du quadrillage qui en découle sur le bord de la forme (8, 10, 12, 14, 16 ou 18)

Le nombre *P* est donc toujours pair. Il peut prendre des valeurs allant jusqu'à dix-huit : lorsque *I* est nul, il n'y a pas de point du quadrillage à l'intérieur de la forme. Celle-ci est alors plus allongée et constituée des dix-huit segments qui restent après avoir fusionné deux segments à chaque étape de l'agrégation. Nous avons vu en effet que les pièces s'accolent entre elles par segments entiers, faisant disparaître, à chaque étape, au minimum deux segments du total des segments. Comme il y a trente segments initialement, la valeur maximale de *P* (*P*=18) correspond ainsi à la valeur minimale de *I* (*I*=0). Mais il est possible d'englober un, deux, trois, quatre et même cinq nœuds du quadrillage à l'intérieur d'une forme. Pour ce faire, il faut que

l'on accole plus de deux segments entre eux. En perdant deux segments supplémentaires, un point du quadrillage devient prisonnier de l'intérieur de la forme. L'augmentation d'une unité sur *I* correspond à la diminution de *P* de deux. Au maximum, *I* peut aller jusqu'à cinq car, pour atteindre six, il faudrait réduire le périmètre à six segments aussi, car alors la relation de Pick s'écrirait $P=2(9-6)=2\times3=6$. Comment enfermer six points du quadrillage avec un bord passant par seulement six points du quadrillage ? Ces points devant être des sommets de la forme, et les côtés ne pouvant être que dans les directions du quadrillage ou de ses diagonales, ce problème n'a pas de solution. Même pour cinq points, il est difficile d'en trouver, et le grand carré est la seule forme réalisable avec le Tangram qui englobe cinq nœuds du quadrillage. Pour ce tangram carré, la relation de Pick prévoit $P=2(9-5)=2\times4=8$ et on a bien huit segments de longueur *d* (la diagonale du carré) qui bordent ce carré (voir la figure 49). Sinon, toutes les autres valeurs de *I* sont bien plus largement répandues et il peut se trouver des centaines de formes de chaque sorte au moins.



Graphique 2: Répartition des formes homogènes selon le nombre de segments constituant les bords

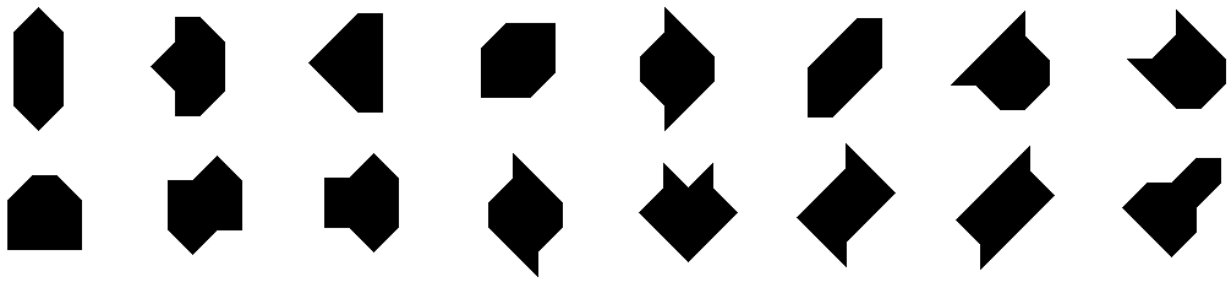


Illustration 50: Sur les 133 tangrams homogènes constitués de 10 segments sur le bord (P=10, I=4), il y en a 16 qui possèdent au moins un élément de symétrie.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des nombres de tangrams homogènes selon le nombre de segments formant le bord de la forme. On constate que ces formes sont de plus en plus nombreuses lorsque ce nombre, le « Périmètre » – en réalité, le nombre *P* de points du quadrillage sur le périmètre – augmente.

L'augmentation relative est très forte au début (×133 lorsque *P* passe de 8 à 10) et beaucoup moins à la fin (×2.73 seulement lorsque *P* passe de 16 à 18) alors qu'en termes absolus, l'augmentation n'est que faible au début (+132 lorsque *P* passe de 8 à 10) et forte à la fin (+2 506 180 lorsque *P* passe de 16 à 18).

Périmètre	Tangrams pleins	Tangrams baie	Tangrams trou	Total par périmètre	Rapport
8	1	0	0	1	
10	133	0	0	133	133
12	8 242	34	8	8 284	62,29
14	167 876	4 980	912	173 768	20,98
16	1 318 267	120 868	8 440	1 447 575	8,33
18	3 347 686	606 069	0	3 953 755	2,73
total	4 842 205	731 951	9 360	5 583 516	

Tableau 12: Répartition des formes homogènes selon le type plein/baie/trou et la valeur du périmètre (nombre P de segments du bord)

La plupart du temps, lors du processus d'agrégation des pièces entre elles, les assemblages homogènes font disparaître les segments initiaux à l'intérieur de la forme deux par deux. Parfois, ce sont quatre segments qui disparaissent d'un coup et plus rarement six ou huit. Quelle est la proportion respective de chacun de ces assemblages ? Nous pouvons nous attendre à ce que la dernière étape conduise à une part plus importante des assemblages du 2ème (faisant disparaître quatre segments), du 3ème et du 4ème type (faisant disparaître six ou huit segments) qu'aux étapes précédentes, car les formes sont de plus en plus compliquées, favorisant les assemblages plus élaborés. À la première étape, lors de la constitution des assemblages de deux pièces, il n'y a presque que des assemblages du premier type. Seules quatre formes sur trente-huit sont issues d'un assemblage du deuxième type (les quatre dernières formes de la figure 43) soit moins de 13%, et aucun assemblage du troisième ou du quatrième type n'est encore possible.

Tamgram	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Total	ratio
1 pièce	2	3		2													7	
2 pièces	0	3	4	7	5	15	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	38	5,4
3 pièces	0	1	1	14	37	66	124	153	56	73	67	0	0	0	0	0	592	15,6
4 pièces	0	0	0	5	13	161	419	886	2198	1882	2047	1906	0	0	0	0	9 517	16,1
5 pièces	0	0	0	1	1	94	114	2258	3244	13927	25441	23388	38437	12520	0	0	119 425	12,5
6 pièces	0	0	0	0	0	8	8	959	781	24211	17011	195831	138796	356287	343891	0	1 077 783	9,0
7 pièces	0	0	0	0	0	1	0	133	0	8284	0	173768	0	1447575	0	3953755	5 583 516	5,2

Tableau 13: Progression du nombre de formes dont le bord possède n segments lors du processus d'agrégation des pièces entre elles, n variant entre 3 et 18. Les bords des tangrams complets (comptant 7 pièces) ne peuvent prendre que des valeurs paires de n.

Pourquoi n'y a-t-il pas d'assemblages ayant un nombre impair de segments alors qu'il en existe aux autres étapes de l'agrégation ? Cela, nous le savons déjà : c'est à cause du nombre pair (30) de segments initiaux et du fait que tous les tangrams de sept pièces sont fabriqués à partir d'assemblages du 1er, 2ème, 3ème ou 4ème type qui font disparaître un nombre pair de segments à chaque étape. Aux autres étapes, il y

a des agrégats constitués d'un nombre impair de segments. L'adjonction d'un petit triangle (3 segments) au carré (4 segments) est un agrégat du 1er type qui fait passer le nombre de segments de sept (3+4=7) à cinq (7−2=5). Examinons les formes complètes ayant dix segments sur les bords, et donc quatre points du quadrillage prisonniers dans la forme. Elles peuvent être constituées de différentes façons, mais il doit y avoir quatre assemblages du 2ème type, ou bien un du 4ème type et un du 2ème,ou bien un du 3ème type et deux du 2ème, ou encore deux assemblages du 3ème type. Ce sont les seules combinaisons qui assurent de constituer quatre points prisonniers.

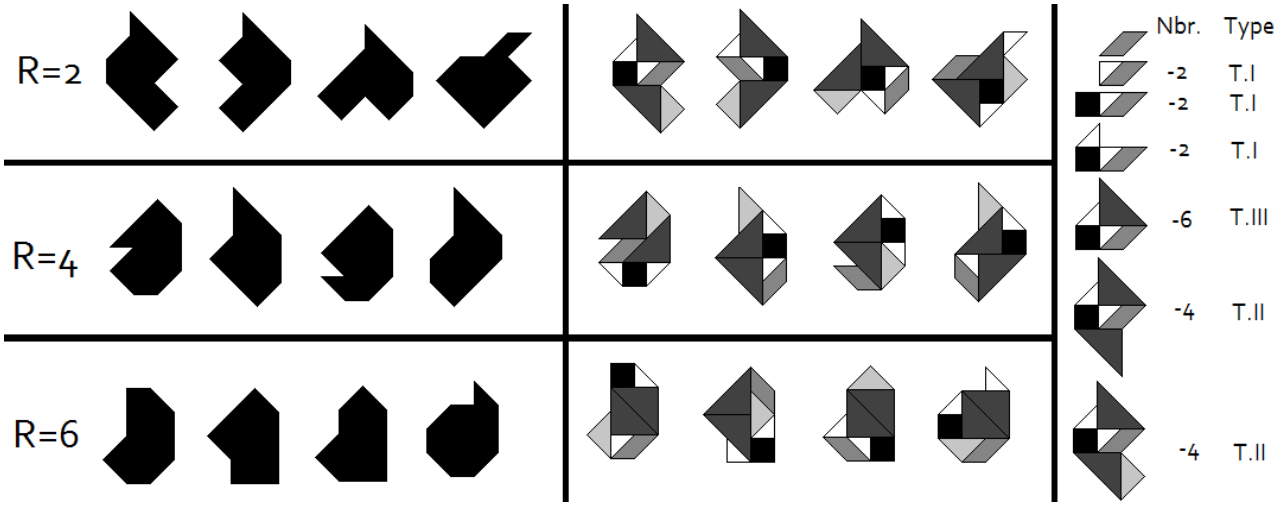


Illustration 51: Les formes homogènes ayant 10 segments sur le bord ont perdu 20 segments lors de l'agrégation des pièces, soit 8 de plus que le minimum. Quelques exemples à gauche et leurs solutions au centre montrant les 8 segments et les points du quadrillage emprisonnés à l'intérieur. Le paramètre R désigne le nombre de segments de longueur Rationnelle 1 ; ce nombre ne prenant que 3 valeurs lorsque P=10. À droite, un scénario d'agrégation de la 1ère des formes présentées.

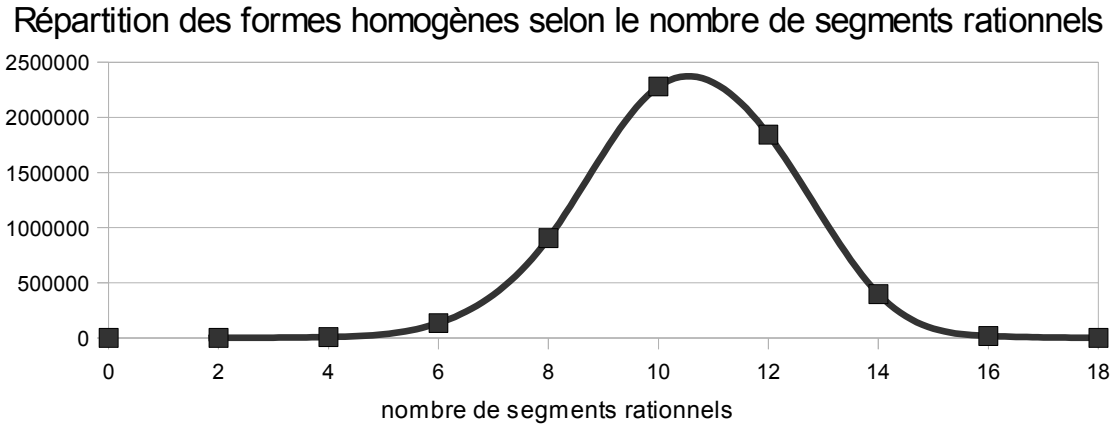
Essayons de bâtir un modèle qui rende compte de ces aspects constitutifs : les pièces ont un nombre de segments sur leur bord égal à 4.3 environ car $\frac{2\times3+3\times4+2\times6}{7}=\frac{30}{7}=4.\overline{285714}$. À chaque fois qu'on ajoute une nouvelle pièce, on ajoute en moyenne 4,3 segments sur les bords mais on en retranche 2, 4, 6 ou 8 pour les besoins de l'assemblage, ce qui fait qu'on ajoute en réalité 2.3, 0.3, -1.7 ou -3.7 segments de la forme. Examinons ce que produit un modèle simplifié dans lequel il n'y a pas d'assemblages de type IV. Comme au chapitre précédent, nous ajustons les coefficients de répartition pour que l'étape des agrégats de six pièces coïncide au mieux avec la réalité. La répartition des types d'assemblages qui convient le mieux est la suivante : 89.6% de type I, 9.5% de type II et 0.9% de type III. De cette façon, on arrive à la répartition suivante pour les agrégats de six pièces. La ligne du dessus donne les nombres théoriques de segments sur le bord (ces nombres peuvent descendre théoriquement jusqu'à des valeurs négatives que nous n'avons pas reportées), celle du dessous donne les effectifs correspondants.

Compte tenu du fait que l'on a toujours considéré qu'une pièce avait 4.29 côtés, on n'arrive jamais à des nombres entiers. Les nombres entiers seraient obtenus au septième agrégat, s'il avait lieu, car $0.\overline{285714}\times 7=2$. Dans la réalité, on n'a donc pas exactement ces valeurs décimales (l'avant dernière ligne du tableau précédent donne la réalité des agrégats de six pièces). On n'a pas non plus, dans la réalité, les valeurs négatives prévues par le modèle, qui sont d'ailleurs si faibles qu'elles ne conduisent pas à des effectifs entiers. On retrouve curieusement la lacune existante au départ (entre les pièces à quatre segments et celles à six) qui se propage en 2ème position des formes ayant le plus grand nombre de segments.

0,43	1,43	2,43	3,43	4,43	5,43	6,43	7,43	8,43	9,43	10,43	11,43	12,43	13,43	14,43	15,43	16,43	17,43	18,43
0	1	1	9	14	102	162	894	1443	5907	9755	28922	49291	94273	170332	177829	361017	0	177829

Tableau 14: Répartition des nombres de segments sur le bord avec un modèle simplifié d'agrégation

À la dernière étape de l'agrégation, notre modèle produit des formes avec des nombres impairs de segments ce qui n'existe pas dans la réalité. Les agrégats disparates, qui pouvaient avoir des aires différentes et des nombres impairs de segments sur le bord, s'assemblent avec la dernière pièce, produisant une catégorie homogène de formes. Toutes ont la même aire, toutes ont un nombre pair de segments sur le bord, et ce nombre ne prend que les valeurs 8, 10, 12, 14, 16 et 18.



Depuis le début de ce chapitre, nous nous intéressons aux nombres de segments unitaires qui joignent les points de référence du quadrillage sur lequel s'accrochent les pièces du jeu dans les assemblages homogènes. Mais ces segments ne sont pas tous semblables. Ils ne mesurent pas tous la même longueur. Au départ, nous avions sept pièces totalisant trente segments unitaires dont vingt mesurent une unité et dix mesurent *d*, la diagonale du carré, qui est égale à la racine carrée de deux unités (1.414 environ). Lorsque les pièces sont agrégées, les segments unitaires qui constituent le bord des formes, se répartissent de façon assez souple, entre ceux qui mesurent une unité et ceux qui en mesurent *d*. Nous qualifions de *rationnels* les segments de longueur unité, par opposition aux segments *irrationnels* qui ont pour longueur *d*, car ce nombre est un nombre irrationnel (il ne peut

s'exprimer comme rapport de deux nombres entiers). Le nombre de segments rationnels s'étend entre zéro et dix-huit, mais en ne prenant que des valeurs paires. La distribution de ces valeurs est presque normale, dans le sens donné à la « loi normale », qui se traduit par cette célèbre courbe en cloche aussi appelée *gaussienne*. Les formes les plus nombreuses ont dix segments de longueur rationnelle. Autour de cette valeur modale de dix segments rationnels, les autres valeurs se répartissent à peu près symétriquement avec une dissymétrie en faveur des valeurs supérieures, puisqu'elles sont plus de deux fois plus nombreuses que les valeurs inférieures à dix. La moyenne est de 10.54 segments rationnels par forme.

	Tangrams pleins		Tangrams baie		Tangrams trou			
Part	Rationnels	Irrationnels	Rationnels	Irrationnels	Rationnels	Irrationnels	Total Rationnel	Total Irrationnel
0	1	135	0	1	0	0	1	136
2	114	28 622	0	1 986	0	47	114	30 655
4	7 209	556 734	360	54 288	64	949	7 633	611 971
6	120 338	2 103 056	12 566	273 801	1 165	3 557	134 069	2 380 414
8	781 987	1 846 281	117 442	329 223	3 938	4 004	903 367	2 179 508
10	1 956 411	307 377	320 507	72 652	3 272	803	2 280 190	380 832
12	1 607 080	0	235 343	0	877	0	1 843 300	0
14	353 308	0	44 132	0	44	0	397 484	0
16	15 702	0	1 600	0	0	0	17 302	0
18	55	0	1	0	0	0	56	0
total	4 842 205	4 842 205	731 951	731 951	9 360	9 360	5 583 516	5 583 516

Tableau 15: Répartition des tangrams homogènes selon le type (plein/baie/trou) et le nombre de segments rationnels ou irrationnels qu'ils contiennent.

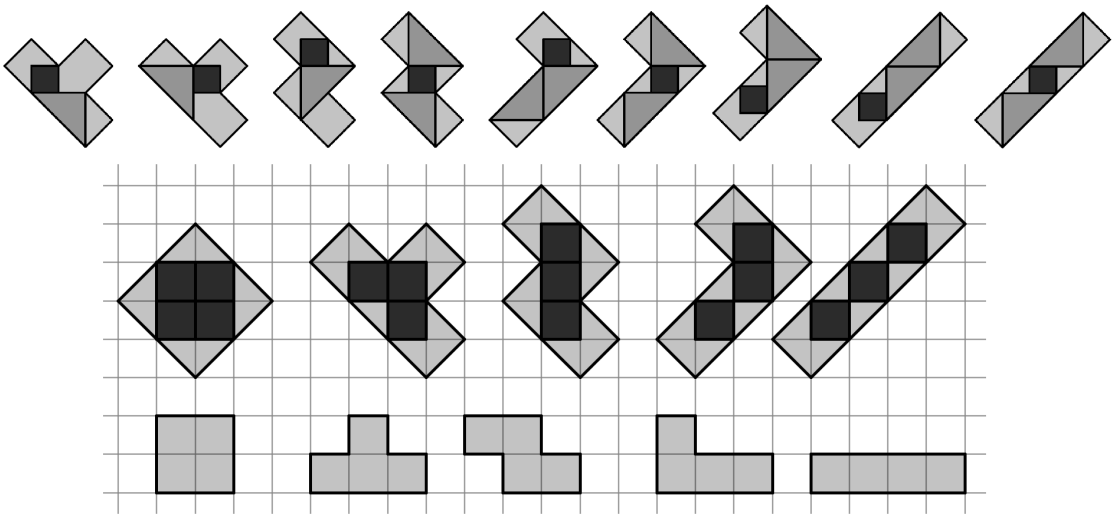


Illustration 52: Les 4 tétraminos disposés en bas, selon les lignes du quadrillages et en haut selon ses diagonales. Dans cette dernière disposition, les emplacements possibles de la pièce carrée sont indiqués en noir. Lorsque les grands triangles (en gris) sont entrés à leur tour, on ne peut plus caser le parallélogramme, ce qui montre que ces formes sont impossibles.

Il n'y a qu'une seule forme ayant un nombre de segments rationnels nul. Il s'agit du carré, cette forme si remarquable par bien d'autres aspects, qui possède on l'a dit, huit segments irrationnels. Ronald Read a apporté en son temps, sans l'aide de

l'ordinateur, la preuve que cette forme était la seule qui puisse avoir cette propriété. Son raisonnement est simple. Il commence par faire remarquer que pour avoir cette caractéristique – n'avoir que des bords selon les diagonales du quadrillage de référence – les bords devaient être perpendiculaires. Il faut bien en effet, passer d'une diagonale à une autre en faisant, soit un quart de tour vers la droite, soit un quart de tour vers la gauche.

Les formes géométriques sur quadrillage dont les angles mesurent 90° ou 270° sont appelées *polyominos* ou *polyminos*. Ce sont les formes obtenues en joignant sur le quadrillage des carrés superposables. Nous devons cette dénomination à Solomon Golomb qui, en 1952, effectua l'étude mathématique de ces formes, et aussi à Martin Gardner qui les popularisa en 1954. On connait bien les douze *pentaminos* qui sont formés de cinq carrés et encore mieux les cinq *tétraminos* du jeu *Tétris*, créé en 1984 par Alexei Pajitnov, qui sont formés de quatre carrés. Ce sont justement les tétraminos qui retinrent l'attention de Ronald Read, car avec quatre carrés disposés selon les diagonales du quadrillage, on forme des figures d'aire huit carrés (le carré unitaire qui mesure les aires a ses côtés disposés selon les lignes du quadrillage, son aire est deux fois plus petite que celle de ces carrés diagonaux). Il n'y a que cinq tétraminos différents, le grand carré est l'un d'eux.

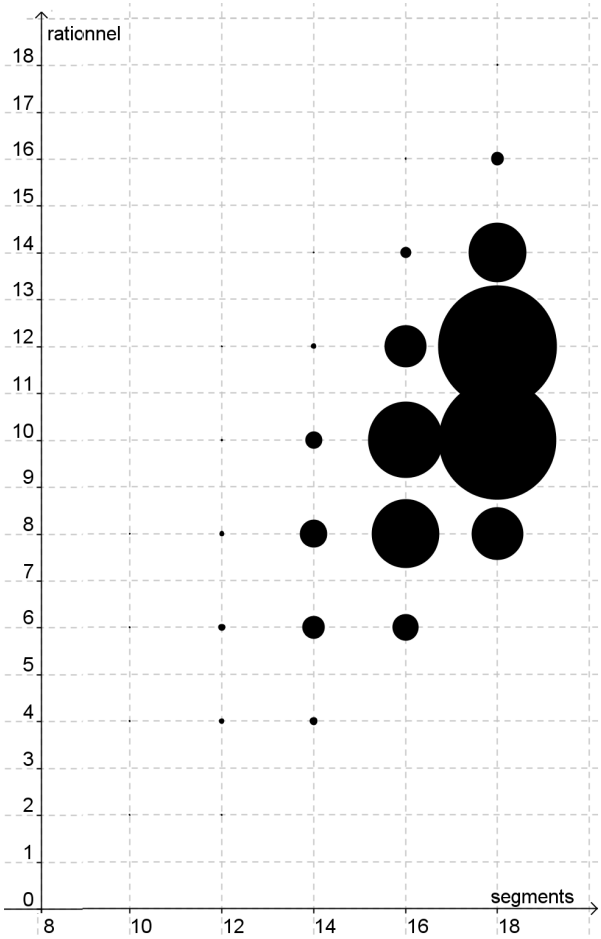


Illustration 53: Répartition des formes homogènes selon le nombre de segments du bord et la part rationnelle de ces segments. L'aire des disques est proportionnelle aux effectifs

Les quatre autres tétraminos sont des formes impossibles à reconstituer avec les pièces du Tangram. Read suggère pour s'en convaincre, de choisir d'abord la place de la pièce carrée. La figure 52 nous montre à quels endroits cette pièce peut s'insérer. Ensuite il faut essayer de loger les deux grands triangles dans l'espace restant. Lorsque ce n'est pas directement impossible, ce sont les autres pièces que l'on ne peut plus loger, à commencer par le parallélogramme. Force est d'admettre que le carré est donc la seule forme ayant ses côtés selon les diagonales du quadrillage, autrement dit ayant un nombre nul de segments rationnels sur son

bord.

L'observation de Ronald Read concernant les tangrams aux bords tous irrationnels peut être appliquée à ceux qui ont des bords tous rationnels. Pour les mêmes raisons, ces formes doivent être des polyominos (formés d'assemblages de carrés), mais cette fois ce sont des *octominos* (formés de huit carrés) car, les côtés de ces formes devant suivre les bords du quadrillage, chacun des carrés constitutifs a une aire de une unité. Les octominos sont beaucoup plus nombreux que les tétraminos ou les pentaminos. Il en existe trois cent soixante-neuf dont six sont des formes ayant une baie. Le Tangram parvient à en reconstituer cent trente-six dont un avec une baie. Ce n'est pas un raisonnement subtil qui nous permet de faire cette affirmation. Il s'agit juste d'un sous-produit de notre recherche exhaustive, à l'aide d'un programme, des formes homogènes et de la détermination pour ces formes de la répartition rationnelle/irrationnelle des segments formant les bords. Cette belle collection d'octomino-tangrams mérite une analyse un peu plus complète : deux formes ont pour périmètre 12, dix-neuf ont pour périmètre 14, cinquante-neuf ont pour périmètre 16, et cinquante-six ont pour périmètre 18. Ces octomino-tangrams contiennent treize formes ayant au moins un élément de symétrie. Deux s'inscrivent dans un carré 3×3, trente-et-une dans un carré 4×4, sinon cinq s'inscrivent dans un rectangle 2×6, neuf dans un rectangle 2×5, un seul dans un rectangle 2×4, trente-cinq dans un rectangle 3×4, trente-cinq dans un rectangle 3×5, deux dans un rectangle 3×6 et seize dans un rectangle 4×5.

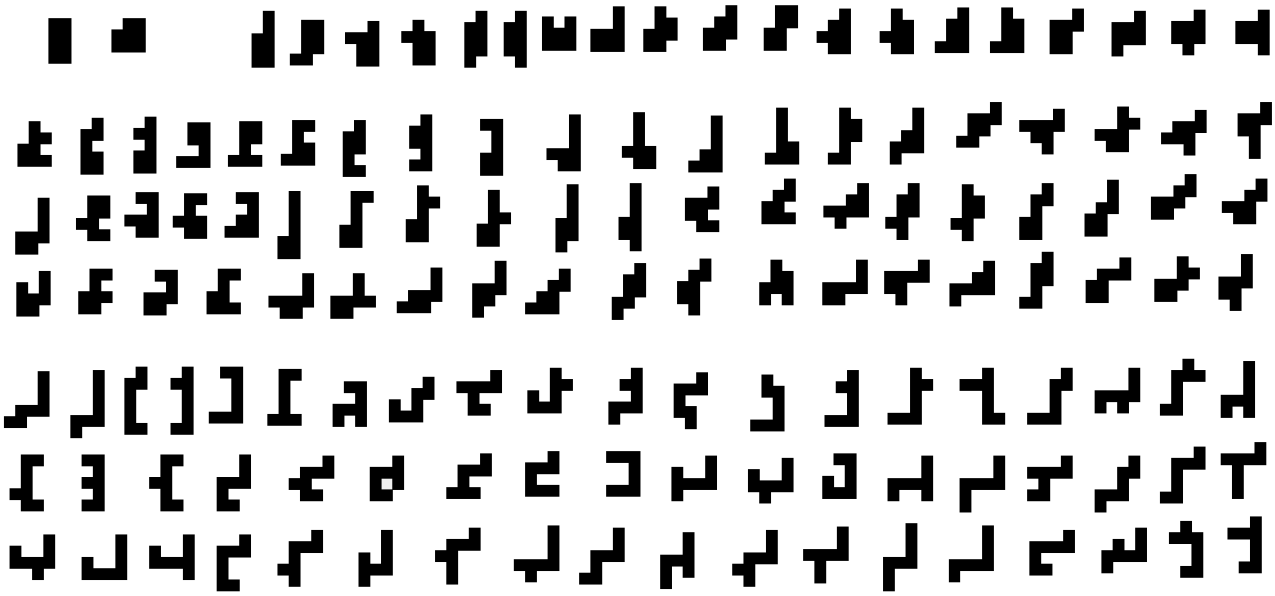


Illustration 54: Les 136 octomino-tangrams ont tous leurs bords rationnels. Ici, ils sont classés selon leur nombre de segments qui ne peut prendre que 4 valeurs : 12 (2 formes), 14 (19 formes), 16 (59 formes) et 18 (56 formes dont une à baie).

Les valeurs que nous avons obtenues pour les nombres de segments sur les bords d'une forme homogène, combinées avec la répartition rationnelle/irrationnelle des bords des pièces (initialement le tiers des bords de pièce est irrationnel), nous conduisent à établir la liste des périmètres réels possibles pour un tangram. Il y a, en tout et pour tout, vingt-neuf valeurs différentes du périmètre réel (la longueur exacte du bord, mesurée avec une unité égale au côté du carré). Ces valeurs se répartissent très irrégulièrement entre 10.828 ($2\sqrt{2}+8$) et 22.142 ($10\sqrt{2}+8$). Certaines catégories sont très abondantes – la plus abondante (n°27) comprend près d'un million six cent cinquante mille formes de périmètre 20.485 ($6\sqrt{2}+12$), soit près de 30% des formes homogènes – alors que d'autres sont quasi inexistantes. Les dix catégories les plus pauvres contiennent moins de cent formes chacune. Les vingt-six catégories les plus pauvres contiennent ensemble juste un peu plus que la seule catégorie des formes de périmètre 20.485.

n°	*P*	rat.	irr.	Plein	Baie	Trou	Total
1	10	8	2	2	0	0	2
2	8	0	8	1	0	0	1
3	10	6	4	29	0	0	29
4	12	12	0	2	0	0	2
5	10	4	6	76	0	0	76
6	12	10	2	131	0	0	131
7	10	2	8	26	0	0	26
8	12	8	4	1 772	0	0	1 772
9	14	14	0	19	0	0	19
10	12	6	6	4 231	5	1	4 237
11	14	12	2	2 129	4	3	2 136
12	12	4	8	2 018	29	7	2 054
13	14	10	4	29 760	329	75	30 164
14	16	16	0	59	0	0	59
15	12	2	10	88	0	0	88
16	14	8	6	80 029	1 910	359	82 298
17	16	14	2	10 717	382	44	11 143
18	14	6	8	50 824	2 406	418	53 648
19	16	12	4	182 601	10 209	874	193 684
20	18	18	0	55	1	0	56
21	14	4	10	5 115	331	57	5 503
22	16	10	6	596 372	46 756	3 197	646 325
23	18	16	2	15 643	1 600	0	17 243
24	16	8	8	463 264	53 366	3 579	520 209
25	18	14	4	342 572	43 750	0	386 322
26	16	6	10	65 254	10 155	746	76 155
27	18	12	6	1 422 348	225 130	0	1 647 478
28	18	10	8	1 330 148	273 422	0	1 603 570
29	18	8	10	236 920	62 166	0	299 086
				4 842 205	731 951	9 360	5 583 516

Tableau 16: Répartition des tangrams homogènes selon le périmètre réel et la catégorie

La figure 55 montre les formes appartenant aux six catégories les plus « pauvres ». On voit qu'il s'agit de formes souvent exceptionnelles : le carré au périmètre uniquement irrationnel, les deux hexagones convexes qui sont les formes ayant le plus petit périmètre, vingt-et-un octominos au périmètre uniquement rationnel, d'autres formes peu remarquables, et puis la catégorie de l'autre hexagone symétrique et convexe qui contient encore deux autres formes convexes et deux autres formes symétriques.

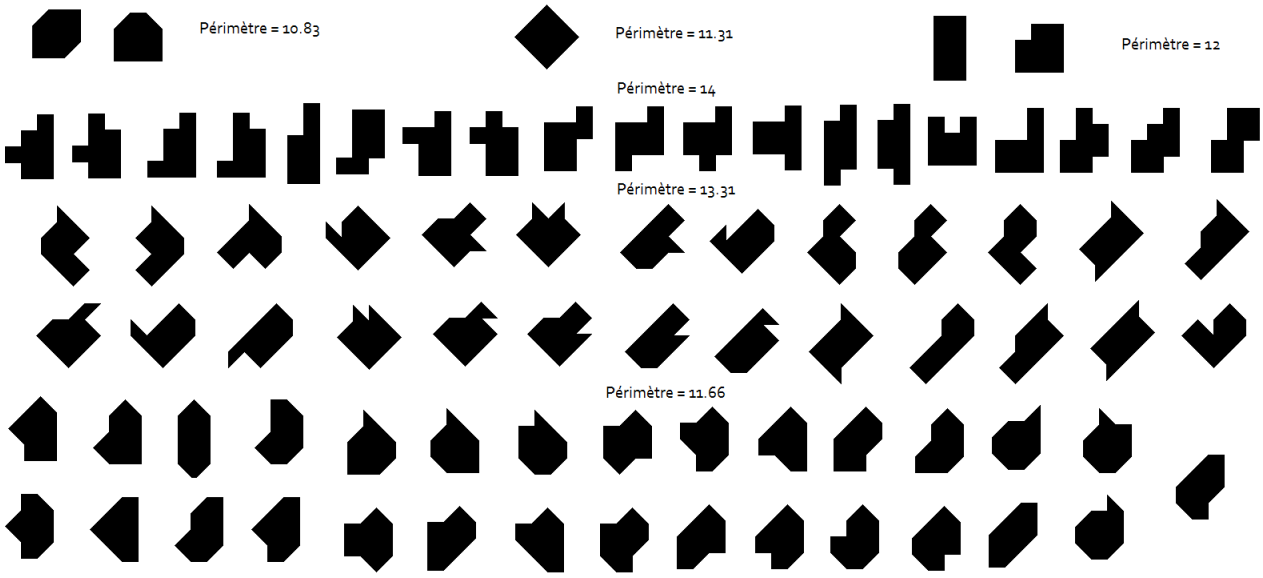


Illustration 55: Les 79 formes homogènes appartenant aux 6 catégories de périmètre réel les moins abondantes contiennent de nombreuses formes remarquables dont 7 formes convexes

Les formes à trou se répartissent dans seulement douze catégories de périmètres. Le nombre de segments ne peut être égal dans ce cas, on l'a vu, qu'à 12, 14 ou 16 ce qui exclut déjà onze catégories. Les six autres catégories ignorées contiennent trop peu de formes pour accueillir une forme à trou. La proportion de celles-ci dans la totalité est en effet inférieure à 10 pour 5 000 formes, et elle s'étend entre un et 50 pour 5 000 formes au sein des catégories contenant des formes à trou. Il n'y a pas beaucoup de formes à trou (1.7 sur 1 000 environ) mais en plus d'avoir un trou, nombreuses sont celles qui se remarquent du fait de leur symétrie (5.3 sur 1 000 environ alors qu'il n'y a que 0.39 formes symétriques pour mille formes pleines) ou de leur bord extérieur convexe (treize formes à trou ont un bord convexe alors qu'il n'y en a que treize également parmi les très nombreuses formes pleines). Les figures 56 et 57 donnent un aperçu de ces formes.

rationnelle	P=12	P=14	P=16	Total
0	0	0	0	0
2	0	0	0	0
4	7	57	0	64
6	1	418	746	1 165
8	0	359	3 579	3 938
10	0	75	3 197	3 272
12	0	3	874	877
14	0	0	44	44
16	0	0	0	0
18	0	0	0	0
total	8	912	8 440	9 360

Tableau 17: Répartition des formes à trou selon le « périmètre » P et le nombre de segments rationnels

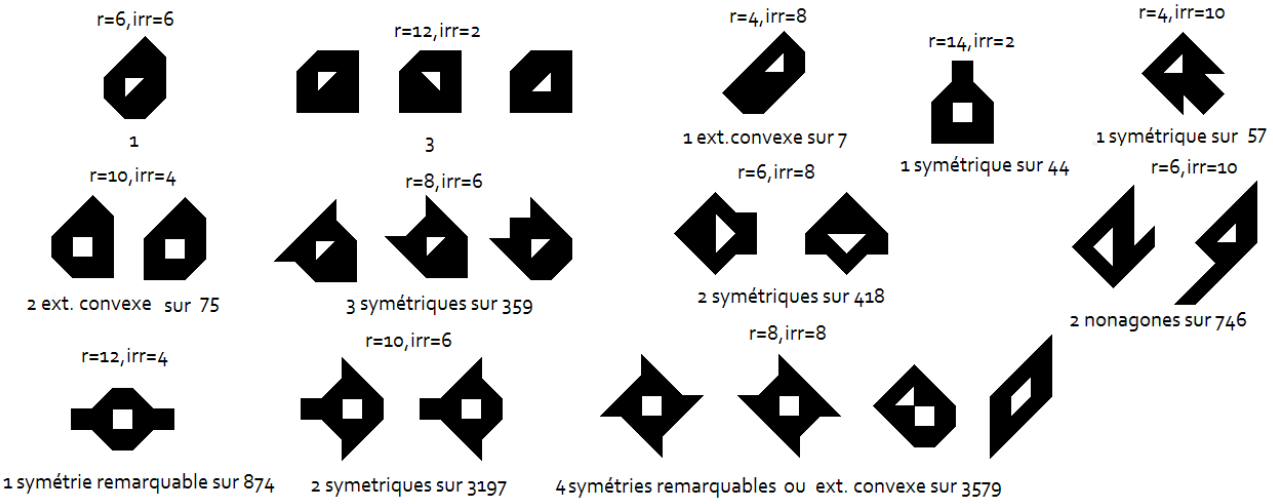


Illustration 56: Quelques spécimen remarquables par leur symétrie ou leur bord externe convexe parmi les formes homogènes ayant un trou.

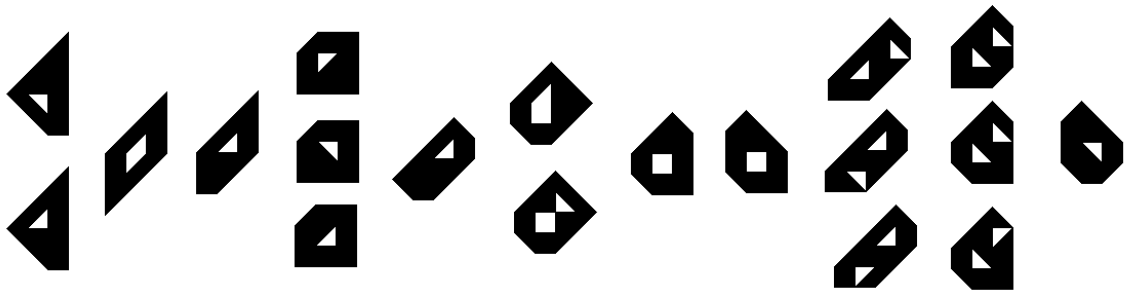


Illustration 57: Les formes homogènes ayant un trou et un bord externe convexe sont assez nombreuses relativement au faible nombre de formes à trou, surtout si l'on considère les différentes variantes liées à la disposition du trou. Ici nous avons ajouté les quelques formes à baies apparentées

On a ajouté aux formes à trou ayant un bord externe convexe les formes à trou ayant également une baie ceinturées par une enveloppe convexe, même si nous avions convenu de ne pas considérer les formes ayant une baie de la même manière que les formes à trou. Notre décompte des formes à trou ayant un bord externe convexe peut paraître abusif si l'on ne considère que la forme de l'enveloppe. Il y a en effet des variations sur la disposition du trou, la forme externe restant inchangée. Ceci arrive à quelques reprises comme on peut le constater sur la figure 57. Quoi qu'il en soit, les formes à trou sont prédisposées à fournir davantage de formes remarquables que les formes pleines. Pour confirmer encore cette remarque, il y a neuf tangrams symétriques ayant deux axes de symétrie perpendiculaires parmi lesquels deux ont un trou. Ce type de forme n'apparaît donc que 1.4 fois sur un million de formes pleines, alors que proportionnellement il apparaitrait 214 fois chez les formes à trou.

				Côtés																
	P	Rat	P réel	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	10	8	10,83				2													2
2	8	0	11,31		1															1
3	10	6	11,66			1	3	9	10	6										29
4	12	12	12,00		1	0	1													2
5	10	4	12,49		1	1	8	12	34	17	3									76
6	12	10	12,83		1	1	10	25	40	36	15	3								131
7	10	2	13,31				3	10	9	4										26
8	12	8	13,66	1	2	5	26	94	278	507	525	268	66							1 772
9	14	14	14,00				2	0	11	0	6									19
10	12	6	14,49			2	19	111	403	1 045	1 461	1 007	189							4 237
11	14	12	14,83				9	76	227	482	581	508	213	40						2 136
12	12	4	15,31			3	20	85	251	569	746	380								2 054
13	14	10	15,66			1	19	163	823	2 895	6 424	8 731	7 371	3 228	509					30 164
14	16	16	16,00				1	0	10	0	28	0	20							59
15	12	2	16,14				2	9	29	39	9									88
16	14	8	16,49			3	38	246	1 286	4 674	12 406	22 204	24 358	14 465	2 618					82 298
17	16	14	16,83				5	35	213	659	1 725	2 758	3 064	2 015	637	32				11 143
18	14	6	17,31			1	7	87	600	2 839	8 476	15 694	17 115	8 626	203					53 648
19	16	12	17,66			4	19	149	796	3 590	12 042	29 654	48 852	52 831	34 692	10 567	488			193 684
20	18	18	18,00						7	0	26	0	22	0	1					56
21	14	4	18,14					13	135	586	1 516	2 162	1 091							5 503
22	16	10	18,49					55	591	4 402	20 351	63 170	133 819	186 037	158 852	68 041	11 007			646 325
23	18	16	18,83				2	23	80	461	1 047	2 450	3 885	4 563	3 302	1 268	162			17 243
24	16	8	19,31				2	30	351	2 560	12 863	44 817	106 502	160 178	138 962	51 474	2 470			520 209
25	18	14	19,66				2	10	150	962	4 680	17 110	43 209	81 645	105 630	88 160	38 801	5 843	120	386 322
26	16	6	20,14					3	56	497	2 722	9 582	21 486	26 760	15 049					76 155
27	18	12	20,49					9	66	682	4 270	23 115	87 736	234 767	419 286	472 419	306 223	91 849	7 056	1 647 478
28	18	10	21,31					4	34	361	2 833	17 200	72 272	209 858	405 802	487 747	316 949	85 410	5 100	1 603 570
29	18	8	22,14						2	65	734	4 807	19 383	53 037	91 179	90 680	39 199	0	0	299 086
				1	6	22	200	1 258	6 492	27 938	95 489	265 620	590 653	1 038 050	1 376 722	1 270 388	715 299	183 102	12 276	5 583 516

Tableau 18: Répartition croisée des tangrams homogènes selon la valeur de leur périmètre réel et selon le nombre de côtés. Malgré ce découpage fin en 221 classes, certaines restent très abondantes : 15 classes contenant plus de 100 000 formes concentrent à elles seules près de 70% de l'effectif

Après avoir examiné les catégories de périmètres peu abondantes, il serait intéressant de pouvoir différencier les éléments de ces ensembles beaucoup plus vastes qui regroupent tant de formes. Prenons le groupe des formes ayant un bord formé par 18 segments. Certes, ce groupe qui est le plus gros peut se scinder naturellement en parties plus restreintes, ne serait-ce qu'en les répartissant selon leur nombre de côtés comme nous l'avons fait dans le tableau 18. Il subsiste, ce faisant, quatre classes de plus de 200 000 formes, quinze classes de plus de 100 000 formes, 28 classes de plus de 50 000 formes… On pourrait aussi répartir les formes selon la part rationnelle des segments du bord. Il est toujours possible aussi d'identifier quelques-unes des formes par leur symétrie, leur enveloppe convexe, la présence d'une baie ou d'un trou (ce point fait l'objet de la question 7). Mais ces dernières distinctions ne parviennent pas à créer de grandes coupures dans les vastes ensembles. Tout au plus, elles permettent de mettre en avant une certaine élite de formes remarquables, plongeant par contraste les autres dans une relative obscurité. Pour approfondir notre examen de ces formes, il faut affiner notre capacité discriminatoire en déterminant d'autres caractéristiques comme la convexité ou le nombre de côtés de l'enveloppe convexe.

Question 7 : Les formes homogènes ayant dix-huit segments sur les bords sont les plus nombreuses (près de quatre millions sur cinq millions et demi, soit presque 75%). Il en existe une grande variété, leur nombre de côtés peut prendre toutes les valeurs entre 6 et 18. La part rationnelle de ces dix-huit segments peut prendre toutes les valeurs entre 8 et 18. Aucune de ces formes n'a un vrai trou, mais 15% d'entre elles ont une baie, et mille possèdent un élément de symétrie. Donner un exemplaire de chacune des variétés de ces tangrams homogènes, en faisant varier le nombre de côtés, la part rationnelle du périmètre, la présence/absence d'éléments de symétrie ou d'une baie.

part rationnelle	pleins	baies
0	0	0
2	0	0
4	0	0
6	0	0
8	236 920	62 166
10	1 330 148	273 422
12	1 422 348	225 130
14	342 572	43 750
16	15 643	1 600
18	55	1
	3 347 686	606 069

Tableau 19: Répartition des tangrams homogènes ayant un bord formé de 18 segments selon la part rationnelle du périmètre

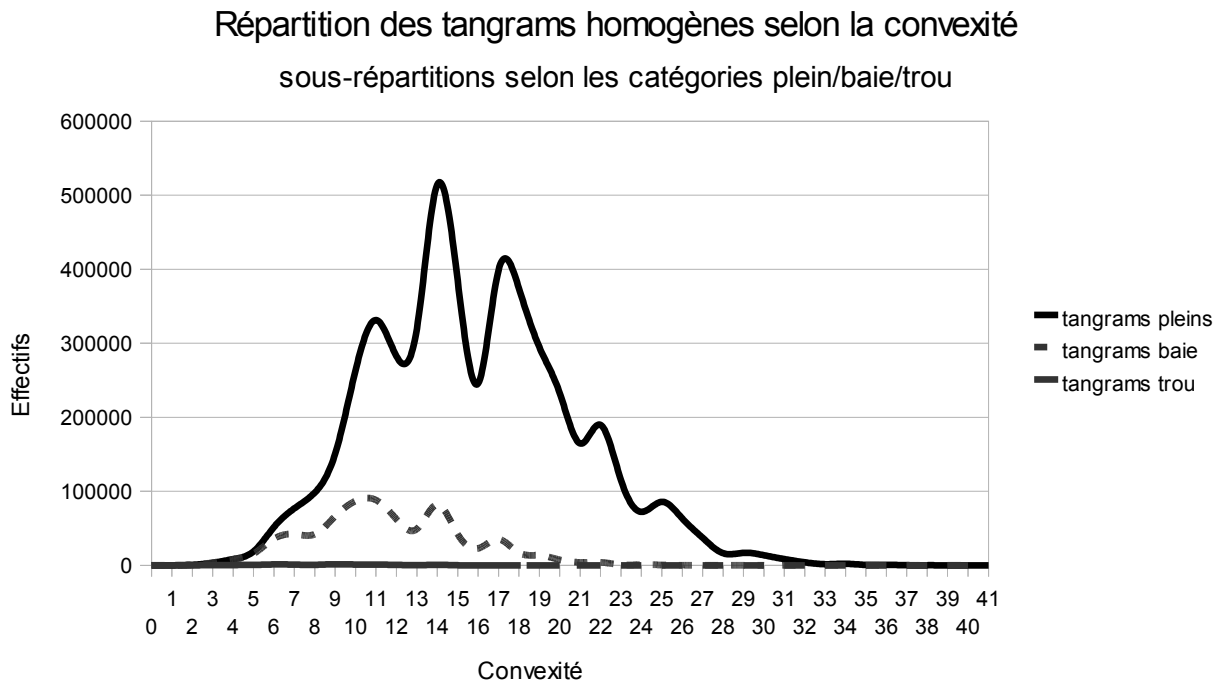
Côtés	P=18	Côtés	P=18
6	4	13	583 870
7	46	14	1 025 200
8	339	15	1 140 274
9	2 531	16	701 334
10	13 590	17	183 102
11	64 682	18	12 276
12	226 507	Total	3 953 755

Tableau 20: Répartition des tangrams homogènes ayant un bord formé de 18 segments selon le nombre de côtés

Chapitre 8 :
Périmètres réels et convexité

Les assemblages homogènes sont plus ou moins proches des formes convexes. Cet aspect déterminant de l'allure d'une forme supporte trois définitions que l'on examine ici, ce qui nous amène à examiner l'enveloppe convexe de ces tangrams

Nous avons déjà donné quelque aperçu de la notion de convexité (voir chapitre 5, figure 32). Ce paramètre de l'étude des tangrams a suivi naturellement la découverte des formes convexes puisqu'il fut décrit dès 1973 par Joost Elffers[6]. Cet auteur explique qu'il appelle [nombre de] convexité le nombre de petits triangles qu'il faut ajouter à une forme pour que celle-ci devienne convexe. Il publie peu après le nombre de formes ayant la convexité maximum : quatorze formes ont une convexité de 41 triangles. Nous savions déjà, depuis 1942, que les formes de convexité nulle (les formes convexes) n'étaient que treize. Ainsi, nous connaissions le domaine de variation de ce paramètre, il ne restait plus qu'à donner la répartition des formes homogènes selon ce critère. Peut-être qu'elle fut donnée ici ou là, peut-être Joost l'a-t-il lui-même publiée ; ces travaux, s'ils existent, ne nous ayant pas été rapportés, nous avons effectué ce décompte nous-même dans les années 2010. Le tableau 21 résume la répartition des tangrams selon ce paramètre. La moyenne des



6 Ellfers Joost, *Tangram*, Verlag M. Dumont Schauberg, Köln, 1973.

convexités est égale à 15.21. Ce qui apparaît d'une façon surprenante est l'allure multimodale de cette répartition : au lieu de la courbe en cloche classique qui signerait une répartition homogène des formes autour de la valeur moyenne, nous constatons qu'il y a un pic principal aux alentours de 14, et qu'il y a ensuite un autre pic de moindre importance aux alentours de 17, puis un autre aux alentours de 11, un autre moins visible et plus éloigné aux alentours de 22, et enfin deux autres pics aux alentours de 25 et 29. Dans l'ordre des convexités, ces pics se suivent d'une façon assez régulière (la suite 11, 14, 17, 22, 25, 29 conduit aux écarts 3, 3, 5, 3, 4) mais peu explicative. Si encore il s'était agi d'un renforcement des valeurs paires par rapport aux valeurs impaires, cela aurait pu être compris plus aisément. Ici, il y a des convexités déficitaires (comme 12 ou 16) et des convexités pléthoriques (comme 11, 14 ou 17). Nous irons chercher l'explication de ce phénomène étrange en étudiant d'autres mesures de la convexité. À côté de celle définie par Elffers – nous l'avons appelée *convexité sur quadrillage* (elle ne concerne que les formes homogènes, celles qu'on peut dessiner sur un quadrillage) – on peut calculer de deux autres manières cet écart à la convexité.

convexité	tangrams pleins	tangrams baie	tangrams trou	total par convexité
0	13	0	0	13
1	67	48	8	123
2	718	717	57	1 492
3	3 329	3 606	214	7 149
4	8 301	8 180	384	16 865
5	18 786	15 777	604	35 167
6	51 658	35 834	1 176	88 668
7	76 940	42 273	974	120 187
8	98 306	42 098	696	141 100
9	150 586	66 325	1 499	218 410
10	263 722	87 004	1 075	351 801
11	331 348	88 113	997	420 458
12	282 519	62 328	571	345 418
13	319 583	49 020	209	368 812
14	513 991	81 827	603	596 421
15	384 691	42 094	119	426 904
16	245 477	22 857	62	268 396
17	398 332	35 243	91	433 666
18	374 107	16 995	3	391 105
19	294 908	13 515	17	308 440
20	232 584	7 494	0	240 078
21	164 570	3 991	1	168 562
22	189 642	4 066	0	193 708
23	114 984	857	0	115 841
24	72 201	844	0	73 045
25	85 736	494	0	86 230
26	63 350	223	0	63 573
27	37 294	88	0	37 382
28	16 371	2	0	16 373
29	16 880	37	0	16 917
30	13 650	0	0	13 650
31	8 399	1	0	8 400
32	4 088	0	0	4 088
33	1 524	0	0	1 524
34	2 028	0	0	2 028
35	607	0	0	607
36	597	0	0	597
37	145	0	0	145
38	102	0	0	102
39	50	0	0	50
40	7	0	0	7
41	14	0	0	14
total	4 842 205	731 951	9 360	5 583 516

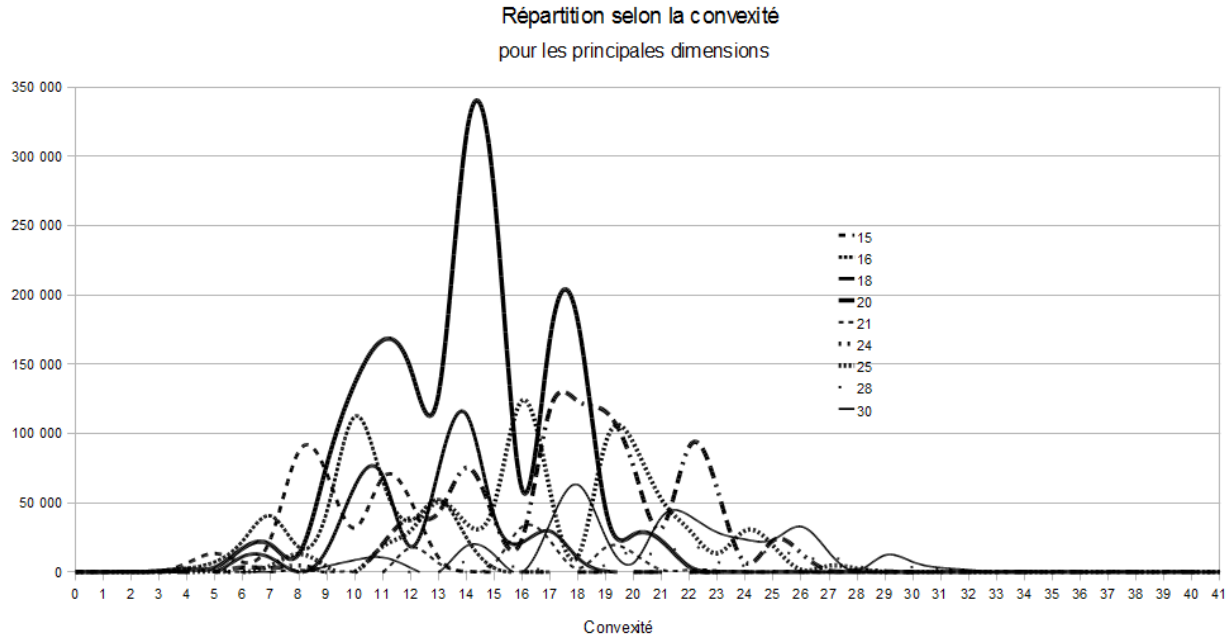
Tableau 21: Répartition des tangrams homogènes selon la valeur de leur convexité sur quadrillage

La première façon d'approcher la notion de convexité est de calculer l'aire du rectangle que l'on peut découper en suivant le quadrillage (voir figure 58) dans lequel s'inscrit la forme homogène. L'aire de ce rectangle, que nous avons appelée *dimension* de la forme homogène, est tout simplement le produit de sa largeur par sa longueur. La dimension peut être obtenue très aisément lorsqu'on travaille avec

des formes numérisées avec des codes d'un tableau rectangulaire décrivant l'occupation de chaque carreau du rectangle considéré (voir au chapitre 2, figure 13). Un rectangle 2×8 par exemple, contient seize carreaux, donc sa dimension est de seize unités. Dans le rectangle, s'inscrit le tangram qui a toujours une aire de huit carreaux. Par soustraction, on obtient ainsi une mesure de l'espace rectangulaire non-occupé par le Tangram que l'on peut qualifier de première approximation de la convexité ou *convexité rectangulaire*. La convexité rectangulaire n'est nulle que si cette forme est un rectangle correctement inscrit dans le quadrillage. Ainsi, malgré le fait qu'il y a deux tangrams rectangulaires, un seul tangram a une convexité rectangulaire nulle, le carré s'inscrivant en diagonal dans le quadrillage – selon un

Dim	Convexité rectangulaire	Tangrams pleins	Tangrams baie	Tangrams trou	Total par dimension
8	0	1	0	0	1
9	2	26	22	5	53
10	4	1 087	423	0	1 510
12	8	40 162	19 976	554	60 692
14	12	9 686	552	0	10 238
15	14	290 797	81 198	1 190	373 185
16	16	304 774	124 016	2 916	431 706
18	20	426 283	49 724	322	476 329
20	24	1 482 861	320 698	3 980	1 807 539
21	26	122 473	2 890	0	125 363
24	32	852 753	57 791	189	910 733
25	34	675 907	63 096	201	739 204
28	40	127 622	1 281	0	128 903
30	44	406 212	9 839	3	416 054
32	48	2 804	0	0	2 804
35	54	44 510	166	0	44 676
36	56	45 084	279	0	45 363
40	64	784	0	0	784
42	68	8 028	0	0	8 028
48	80	98	0	0	98
49	82	253	0	0	253
total		4 842 205	731 951	9 360	5 583 516

Tableau 22: Répartition des formes homogènes selon la dimension du rectangle contenant la forme et selon la catégorie (plein/baie/trou)



Graphique 3: Lorsqu'on étudie la répartition des convexités pour une certaine dimension du rectangle dans lequel s'inscrit la forme homogène, on voit que certaines valeurs de la convexité sont mieux représentées que d'autres (ce ne sont pas toujours les mêmes valeurs qui sont favorisées)

carré 4×4 qui a pour dimension 16 (et non 8) – sa convexité rectangulaire est égale à 8 carreaux, soit seize triangles.

La dimension prend 21 valeurs différentes entre 8 (2×4) et 49 (7×7) qui est la dimension maximum, réalisée pour 253 formes. Ainsi la convexité rectangulaire prend 21 valeurs entre 0 et 41. Ici on mesure les aires en carreaux mais, pour la convexité sur quadrillage, on utilisait le petit triangle comme unité d'aire. Exprimée

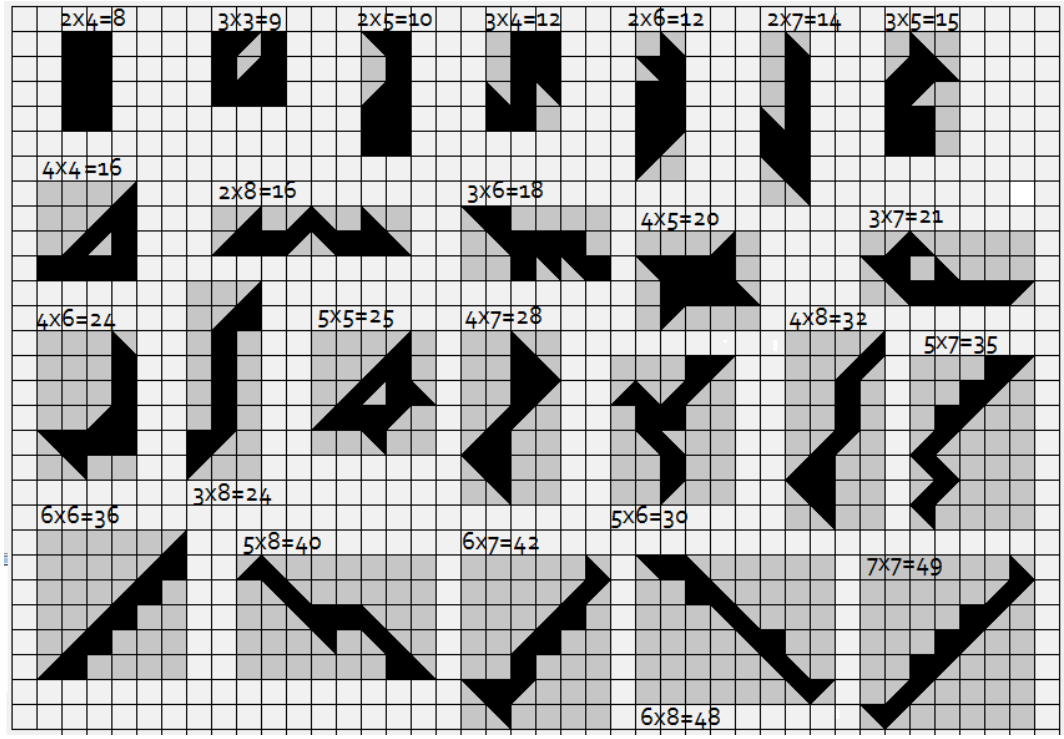


Illustration 58: Les différentes sortes de rectangles contenant les formes homogènes peuvent avoir 21 aires différentes (caractéristique appelée dimension). Comme certaines aires sont réalisables de 2 façons, cela conduit à 24 rectangles différents

Convexité Dimension	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	2	15	36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	2	27	273	778	430	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	4	18	791	4 136	4 243	10 214	24 453	14 955	1 878	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	727	0	2 182	2 640	1 041	2 169	1 279	195	5	0	0	0	0	0	0
15	2	43	0	591	6 456	13 369	7 073	24 884	87 241	70 910	31 801	68 114	51 731	10 534	436	0	0	0	0
16	2	12	163	854	2 779	7 410	22 809	40 473	17 959	43 618	112 283	65 883	37 138	52 428	24 926	2 927	42	0	0
18	0	0	140	0	0	0	11 275	10 062	0	16 072	61 751	69 617	18 216	73 536	113 940	40 079	21 449	29 449	10 085
20	0	0	0	646	1 998	3 402	17 260	19 489	13 126	77 560	136 080	167 380	146 825	128 219	315 417	273 746	59 386	168 798	180 532
21	0	0	0	0	0	0	0	0	1 621	0	0	0	17 552	6 431	0	6 041	32 686	22 587	2 721
24	0	0	0	0	0	0	3 347	2 849	4 653	0	0	20 190	38 906	42 767	75 336	38 290	24 128	117 743	123 282
25	0	8	22	0	0	495	0	4 767	13 044	3 895	0	18 436	29 868	50 687	35 174	48 881	123 965	58 715	11 309
28	0	0	0	0	0	0	0	0	512	0	0	0	0	0	7 408	3 188	4 229	0	0
30	0	0	67	144	0	0	0	0	0	4 167	8 607	10 509	3 081	0	18 711	12 312	0	35 209	62 990
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	108	0	0
35	0	0	0	0	56	0	0	0	0	0	0	0	2 096	932	0	0	875	0	0
36	0	0	0	0	176	277	77	0	0	0	0	134	0	3 278	5 048	1 127	491	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	25	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0	192	68	0	0	0	0	0	0	0	313	1 037	1 165	156
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	30
49	0	0	0	0	0	0	0	0	25	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	13	123	1 492	7 149	16 865	35 167	88 668	120 187	141 100	218 410	351 801	420 458	345 418	368 812	596 421	426 904	268 396	433 666	391 105

Tableau 23: Début du tableau donnant la répartition croisée entre convexité et dimension des formes homogènes. Le graphique 2 permet de visualiser les courbes obtenues à partir de ces répartitions, pour les principales dimensions (entre 15 et 30)

dans cette unité plus petite, la convexité rectangulaire prend des valeurs allant de 0 à 82. Cette répartition est assez irrégulière, mais l'irrégularité se comprend alors plus aisément. Les longueurs des côtés des différents rectangles ne prennent qu'un nombre limité de valeurs. La plupart du temps, une dimension correspond à un seul type de rectangle (8=2×4, 9=3×3, 10=2×5, 14=2×7, etc.), mais parfois il se trouve plusieurs types de rectangles pour donner la même dimension (12=3×4 mais aussi 2×6, 16=2×8 mais aussi 4×4, 20=2×10 mais cette forme n'est pas réalisable avec le Tangram, par contre on en trouve beaucoup ayant la dimension 20=4×5, 24=4×6 mais aussi 3×8). En définitive il y a 24 formes différentes de rectangles pour tous les tangrams homogènes. Ces différentes formes ne favorisent pas toutes la réalisation d'un tangram : la dimension 20 est de loin la plus favorable avec près de un tiers de toutes les formes homogènes. La deuxième dimension favorable est 24 qui regroupe deux formes (4×6 et 3×8), suivie de près par 25. À elles trois, ces dimensions favorables regroupent 62% des formes homogènes, soit près de deux formes sur trois. Si l'on observe la répartition des convexités pour la dimension 20 (voir graphique 2, la courbe en trait plein au-dessus des autres), on s'aperçoit qu'elle présente globalement le profil moyen de l'ensemble des formes homogènes. Les pics inexpliqués observés pour les convexités de 11, 14 et 17-18 se retrouvent ici, pour cette seule catégorie pléthorique. Pourquoi y a-t-il si peu de formes de convexité 16 et de dimension 20 ? Nous n'avons pas la réponse à cette question.

Vu la taille du tableau, nous n'avons reproduit que la première moitié de la répartition croisée dimension/convexité illustrée au graphique 3. Sur une ligne, on peut lire les chiffres étonnants de la répartition des convexités pour une dimension donnée : pour la dimension 24, on trouve des trous inexpliqués aux convexités 9 et 10. Cela est d'autant plus intrigant que le reste de la répartition des convexités de cette dimension est assez régulier. La même chose se retrouve ici et là, avec une plus ou moins grande ampleur. On remarque aussi que certaines dimensions se caractérisent par une répartition régulière et sans trou des convexités (les dimensions 12 et 16 par exemple), alors que d'autres sont très irrégulières. Observez la répartition des convexités pour la dimension 30 : quelques formes de convexité 2 et 3, puis plus rien jusqu'aux convexités 9, 10, 11 et 12, puis aucune forme de convexité 13, et des formes plus nombreuses de convexités 14 et 15, puis plus rien pour 16, et encore des formes plus nombreuses et sans aucune discontinuité entre 17 et 35. Une hypothèse concernant la genèse de ces répartitions irrégulières devrait expliquer pourquoi certaines valeurs de la convexité sont déficitaires au point d'apparaître comme interdites aux tangrams.

La seconde façon alternative de mesurer la convexité est de calculer l'aire de l'enveloppe convexe dans laquelle s'inscrit la forme homogène. Alors que la convexité au sens de Elffers nécessite la détermination d'une enveloppe convexe sur quadrillage (en anticipant sur la définition des polyabolos : une enveloppe convexe polyabolique), ici nous envisageons l'enveloppe convexe réelle : ce polygone convexe bâti à partir des sommets les plus extérieurs et qui contient toute la forme. Nous avons déjà envisagé ces enveloppes convexes et déterminé quelques convexités réelles au chapitre 5 (voir figures 36 à 38). Comme ce sont les enveloppes convexes les plus serrées autour des sommets de la forme (l'enveloppe convexe sur quadrillage et l'enveloppe rectangulaire empruntent nécessairement les bords ou les diagonales du quadrillage), ce sera la mesure la plus fidèle et aussi la plus petite de l'écart existant entre l'aire du tangram (égale à huit carrés) et l'aire de son enveloppe convexe. L'enveloppe convexe est toujours contenue dans l'enveloppe sur quadrillage qui est, elle-même, toujours contenue dans l'enveloppe

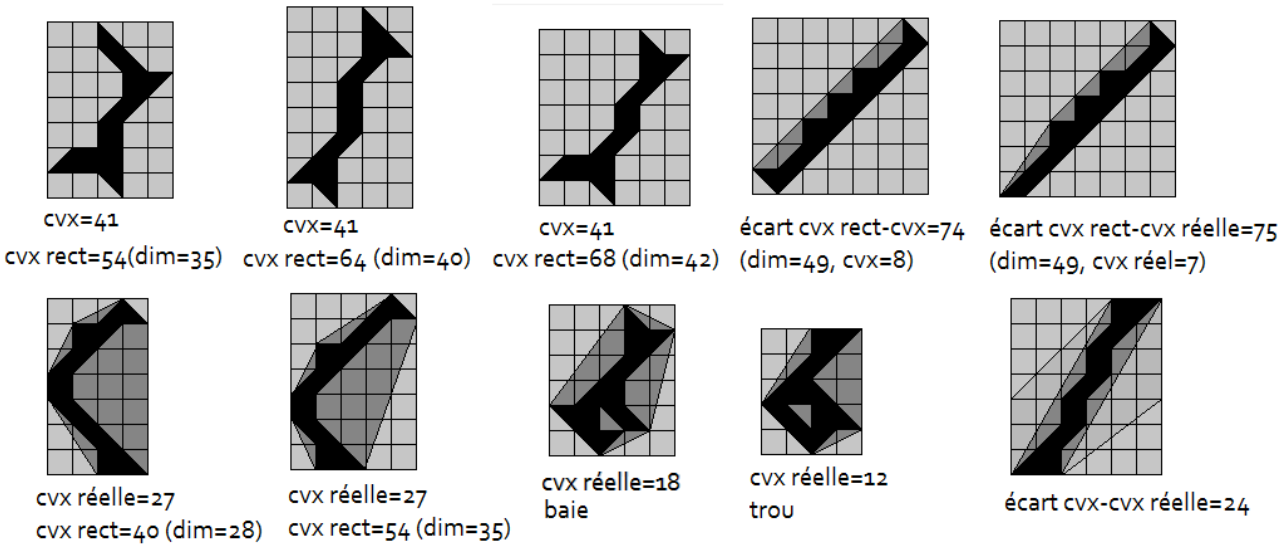
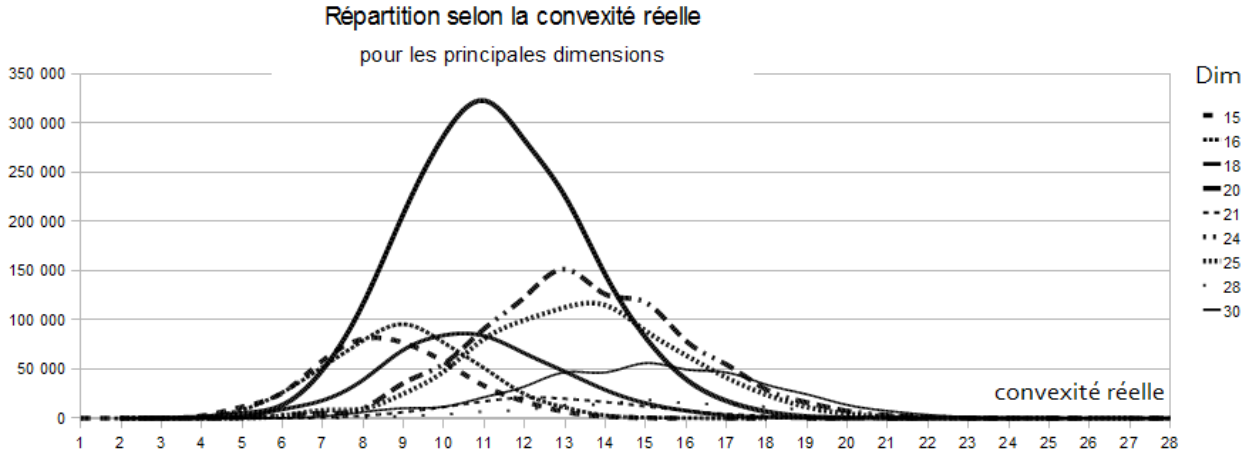


Illustration 59: Les situations où les valeurs des différentes sortes de convexités, ou des écarts entre celles-ci, sont poussées au maximum



Graphique 4: Répartition des formes homogènes selon la convexité réelle pour les valeurs principales de la dimension (entre 15 et 30)

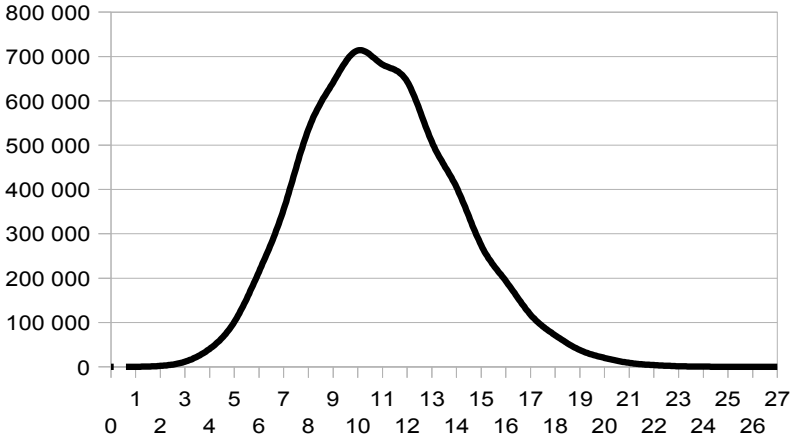
rectangulaire. Il peut y avoir égalité entre les aires de ces enveloppes dans des cas particuliers. On montre sur la figure 59 quelques formes homogènes présentant les extremums rencontrés en matière de convexité :

- la convexité réelle peut varier entre 0 (13 formes convexes) et 27 (4 formes de convexité réelle maximum), 18 s'il y a une baie (9 formes) ou 12 s'il y a un trou (6 formes) ; l'écart entre la convexité réelle et la convexité sur quadrillage peut varier entre 0 et 24 (une seule forme de convexité 36 et de convexité réelle 12).
- la convexité sur quadrillage peut varier entre 0 et 41 (14 formes de convexité sur quadrillage maximum) ; l'écart entre la convexité sur quadrillage et la convexité rectangulaire peut varier entre 0 et 74 (25 formes de dimension 49 et de convexité 8).
- la dimension peut aller jusqu'à 49, donc la convexité rectangulaire peut varier entre 0 et 82 (253 formes de convexité rectangulaire maximum égale à 2×49–16=82, les convexités étant mesurées en petits triangles contrairement aux dimensions mesurées en carrés, une unité d'aire deux fois plus grande) ; l'écart entre la convexité rectangulaire et la convexité réelle peut varier entre 0 et 75 (4 formes de dimension 49 et de convexité réelle 7).

Convexité réelle	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
Plein	13	96	1 115	5 439	19 777	54 627	127 897	235 015	395 294	520 343	623 712	626 509	612 321	493 728	
Baie	0	48	961	5 642	19 521	45 139	84 103	118 385	138 740	120 464	89 607	55 371	31 426	13 889	
Trou	0	8	96	433	1 144	1 552	2 483	1 673	1 203	529	185	48	6	0	
Total	13	152	2 172	11 514	40 442	101 318	214 483	355 073	535 237	641 336	713 504	681 928	643 753	507 617	
Convexité réelle	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Total
Plein	399 220	272 481	193 011	117 542	71 162	37 783	20 213	8 952	3 927	1 453	458	93	20	4	4 842 205
Baie	5 928	1 970	607	141	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	731 951
Trou	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9 360
Total	405 148	274 451	193 618	117 683	71 171	37 783	20 213	8 952	3 927	1 453	458	93	20	4	5 583 516

Tableau 24: Répartition des tangrams homogènes selon les valeurs de la convexité réelle et la catégorie (plein/baie/trou). La convexité réelle est nulle pour les 13 formes convexes

L'étude de la répartition des formes homogènes selon les valeurs de la convexité réelle montre que ce paramètre est distribué de façon plus régulière que la convexité rectangulaire. Pour chaque valeur de la dimension (donc de la convexité rectangulaire), la forme de la courbe de répartition s'approche de celle



Graphique 5: Répartition équilibrée des formes homogènes selon la convexité réelle autour de la moyenne (10.94)

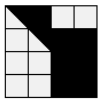
d'une cloche gaussienne. Le graphique 4 illustre cela, et le graphique 5 montre la résultante, toutes dimensions confondues, qui traduit cette répartition équilibrée autour de la valeur moyenne de la convexité réelle qui est de 10.94 pour l'ensemble des formes homogènes (11.36 pour les formes pleines, 8.25 pour les baies et 6.12 pour les formes à trou).

Nous devons dire un mot de la façon dont nous avons calculé la convexité réelle des formes homogènes. La convexité rectangulaire est obtenue directement à partir du produit des nombres de lignes et de colonnes de la matrice des codes du remplissage des carreaux (les chiffres de 0 à 5). La convexité sur quadrillage nécessite un algorithme un peu plus élaboré, mais celui-ci peut être aisément conçu : en partant du rectangle aux dimensions de la forme (la matrice des codes), on tronque successivement chacun des sommets selon les directions des diagonales en s'arrêtant lorsque le code obtenu dans un des carreaux tronqués indique qu'une partie de la forme est à l'extérieur. Le principe est plus difficile à expliquer qu'à réaliser : dans notre programme, cette partie de code occupe sept lignes (dont quatre presque identiques pour le traitement des quatre sommets).

Pour la convexité réelle, il nous a fallu beaucoup plus de temps pour en concevoir l'algorithme. Celui-ci n'allant pas de soi, et la notion de convexité réelle d'un tangram n'ayant jamais été abordée par les auteurs, nous avions tout d'abord ignoré cet aspect des formes homogènes, pourtant plus essentiel et naturel que la convexité sur quadrillage. La difficulté provient de l'encodage de ces formes : la matrice des codes 0 à 5 est très pratique pour une grande quantité d'applications mais, dès qu'il faut disposer de la liste des sommets de la forme dans l'ordre où ils se présentent, elle est beaucoup moins efficace. Nous avions laborieusement obtenu l'affichage graphique des formes et le nombre de côtés, mais nous avions toujours baissé les bras lorsqu'il s'agissait d'obtenir directement cette liste des sommets. Notre recherche nous conduisit aux formes hétérogènes qui utilisaient pour leur production un encodage différent (voir plus loin) et plus complexe, mais cet encodage favorisait la détermination de la convexité réelle car nous avions directement la liste des sommets par leurs coordonnées. Ce n'est qu'après ce détour par les formes hétérogènes que nous sommes revenu aux formes homogènes.

Avec le recul, cette nouvelle exposition au sujet nous amenant encore la question de l'enveloppe convexe réelle, nous avons cherché les méthodes préconisées (les questions techniques sur les polygones sont nombreuses sur internet pour la conception de jeux vidéos) et découvert l'algorithme de Graham. Celui-ci nécessite la liste des sommets *dans n'importe quel ordre*, et ceci est facile à obtenir avec nos matrices de codes. À partir de cette liste, on ordonne les sommets selon l'angle

qu'ils font avec celui qui a les plus petites coordonnées (choix d'un sommet de référence), et on examine alors la ligne formée à partir du sommet de référence : si cette ligne tourne vers la droite, la forme restant convexe on garde le point, si elle tourne vers la gauche, l'angle étant rentrant, le sommet est abandonné et on passe au suivant. Lorsqu'on a examiné tous les sommets, il reste ceux de l'enveloppe convexe, et on peut donc en calculer l'aire. Cet algorithme est plus complexe que celui qui détermine l'enveloppe sur quadrillage car, avec notre façon de rédiger les programmes, il nous faut une quarantaine de lignes pour l'écrire.

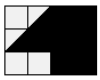


```
Xi=4, Yi=4
4 . 5 . 0 . 0
0 . 4 . 5 . 5
0 . 0 . 5 . 5
0 . 0 . 5 . 5

Sommets apres elimination :
[ 0 , 0 , -1.0 ]
[ 1 , 0 , -1.0 ]
[ 2 , 0 , -1.0 ]
[ 1 , 1 , -1.0 ]
[ 2 , 1 , -1.0 ]
[ 3 , 1 , -1.0 ]
[ 4 , 1 , -1.0 ]
[ 2 , 2 , -1.0 ]
[ 3 , 2 , -1.0 ]
[ 4 , 2 , -1.0 ]
[ 2 , 3 , -1.0 ]
[ 3 , 3 , -1.0 ]
[ 4 , 3 , -1.0 ]
[ 2 , 4 , -1.0 ]
[ 3 , 4 , -1.0 ]
[ 4 , 4 , -1.0 ]
Sommets/angles dans l'ordre :
[ 0 , 0 , 1.0 ]
[ 1 , 0 , 1.0 ]
[ 2 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 1 , 0.9701425 ]
[ 3 , 1 , 0.9486833 ]
[ 2 , 1 , 0.89442719 ]
[ 4 , 2 , 0.89442719 ]
[ 3 , 2 , 0.83205029 ]
[ 4 , 3 , 0.8 ]
[ 1 , 1 , 0.70710678 ]
[ 2 , 2 , 0.70710678 ]
[ 3 , 3 , 0.70710678 ]
[ 4 , 4 , 0.70710678 ]
[ 3 , 4 , 0.6 ]
[ 2 , 3 , 0.5547002 ]
[ 2 , 4 , 0.4472136 ]
Nombre de sommets de l'enveloppe convexe = 5
[ 0 , 0 , 1.0 ]
[ 2 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 1 , 0.9701425 ]
[ 4 , 4 , 0.70710678 ]
[ 2 , 4 , 0.4472136 ]
 Aire de l'enveloppe : 22
```

```
Xi=4, Yi=3
4 . 5 . 5 . 5
0 . 4 . 5 . 5
0 . 0 . 5 . 5

Sommets apres elimination :
[ 0 , 0 , -1.0 ]
[ 1 , 0 , -1.0 ]
[ 2 , 0 , -1.0 ]
[ 3 , 0 , -1.0 ]
[ 4 , 0 , -1.0 ]
[ 1 , 1 , -1.0 ]
[ 2 , 1 , -1.0 ]
[ 3 , 1 , -1.0 ]
[ 4 , 1 , -1.0 ]
[ 2 , 2 , -1.0 ]
[ 3 , 2 , -1.0 ]
[ 4 , 2 , -1.0 ]
[ 2 , 3 , -1.0 ]
[ 3 , 3 , -1.0 ]
[ 4 , 3 , -1.0 ]
Sommets/angles dans l'ordre :
[ 0 , 0 , 1.0 ]
[ 1 , 0 , 1.0 ]
[ 2 , 0 , 1.0 ]
[ 3 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 1 , 0.9701425 ]
[ 3 , 1 , 0.9486833 ]
[ 2 , 1 , 0.89442719 ]
[ 4 , 2 , 0.89442719 ]
[ 3 , 2 , 0.83205029 ]
[ 4 , 3 , 0.8 ]
[ 1 , 1 , 0.70710678 ]
[ 2 , 2 , 0.70710678 ]
[ 3 , 3 , 0.70710678 ]
[ 2 , 3 , 0.5547002 ]
Nombre de sommets de l'enveloppe convexe = 4
[ 0 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 3 , 0.8 ]
[ 2 , 3 , 0.5547002 ]
 Aire de l'enveloppe : 18
```



```
Xi=4, Yi=3
0 . 0 . 5 . 5
4 . 5 . 5 . 5
0 . 4 . 5 . 5

Sommets apres elimination :
[ 2 , 0 , -1.0 ]
[ 3 , 0 , -1.0 ]
[ 4 , 0 , -1.0 ]
[ 0 , 1 , -1.0 ]
[ 1 , 1 , -1.0 ]
[ 2 , 1 , -1.0 ]
[ 3 , 1 , -1.0 ]
[ 4 , 1 , -1.0 ]
[ 1 , 2 , -1.0 ]
[ 2 , 2 , -1.0 ]
[ 3 , 2 , -1.0 ]
[ 4 , 2 , -1.0 ]
[ 2 , 3 , -1.0 ]
[ 3 , 3 , -1.0 ]
[ 4 , 3 , -1.0 ]
Sommets/angles dans l'ordre :
[ 2 , 0 , 1.0 ]
[ 3 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 1 , 0.89442719 ]
[ 3 , 1 , 0.70710678 ]
[ 4 , 2 , 0.70710678 ]
[ 4 , 3 , 0.5547002 ]
[ 3 , 2 , 0.4472136 ]
[ 3 , 3 , 0.31622777 ]
[ 2 , 1 , 0.0 ]
[ 2 , 2 , 0.0 ]
[ 2 , 3 , 0.0 ]
[ 1 , 2 , -0.4472136 ]
[ 1 , 1 , -0.70710678 ]
[ 0 , 1 , -0.89442719 ]
Nombre de sommets de l'enveloppe convexe = 5
[ 2 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 0 , 1.0 ]
[ 4 , 3 , 0.5547002 ]
[ 2 , 3 , 0.0 ]
[ 0 , 1 , -0.89442719 ]
 Aire de l'enveloppe : 18
```

Illustration 60: Les coordonnées des points du quadrillage contenus dans les formes homogènes sont obtenues à partir des matrices des codes 0 à 5. Les angles avec l'horizontal étant déterminés (les triplets donnent à droite le cosinus de cet angle), les points sont réordonnés et passés au crible de Graham qui élimine ceux qui sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe

L'algorithme de Graham nous a permis de déterminer la convexité réelle des formes homogènes, mais il peut aussi servir à obtenir d'autres renseignements sur l'enveloppe convexe comme, par exemple, le nombre de ses côtés. Nous avons ainsi été vivement intéressé par la découverte des formes inscrites dans un triangle (voir question 8), mais aussi nous avons été surpris de réaliser que le nombre maximum des côtés de l'enveloppe convexe était de dix. Avec les formes sur quadrillages réalisées par assemblages de petits triangles (les polyabolos, voir plus loin), nous avions pris l'habitude de considérer que le nombre de sommets d'une forme convexe ne pouvait dépasser huit. Mais ici, alors que nous travaillons toujours avec

des formes sur quadrillage, les côtés n'étant pas limités aux côtés ou aux diagonales du quadrillage, nous pouvions obtenir des formes convexes ayant plus de huit côtés. D'une façon générale, si on dispose dix-huit sommets sur le quadrillage (dix-huit est le maximum du nombre de sommets d'un tangram homogène), on peut théoriquement obtenir un polygone convexe à dix-huit côtés (voir le polygone de la figure 61 à droite, qui en a vingt). Dans la pratique, avec les pièces du Tangram, ce nombre ne peut donc dépasser dix, et encore, il n'y a que onze tangrams à avoir une enveloppe convexe décagonale.

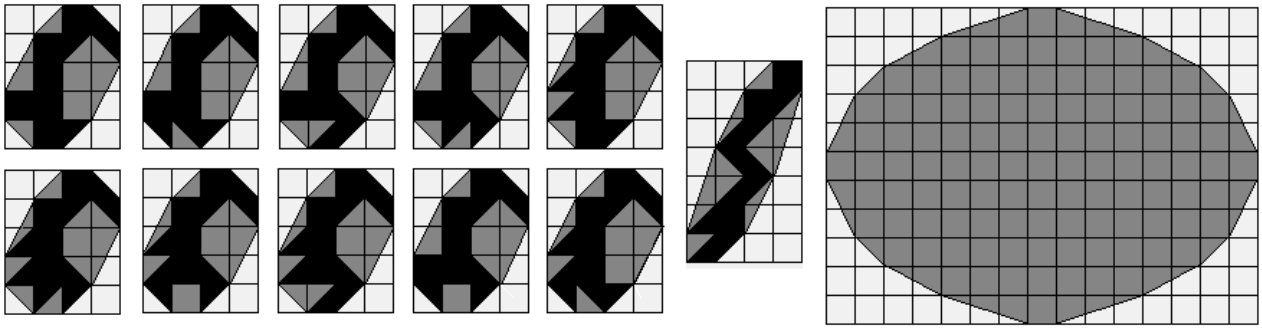


Illustration 61: Les 11 formes homogènes ayant une enveloppe convexe décagonale. La forme convexe de droite possède 20 sommets sur le quadrillage mais son aire est beaucoup trop importante pour qu'elle soit l'enveloppe convexe d'un tangram

Sommets Enveloppe / Forme	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Plein	378	86 847	1 005 138	2 263 153	1 294 330	188 237	4 111	11	4 842 205
Baie	89	18 659	188 816	355 498	155 085	13 775	29	0	731 951
Trou	3	265	2 725	4 686	1 599	82	0	0	9 360
Total	470	105 771	1 196 679	2 623 337	1 451 014	202 094	4 140	11	5 583 516

Tableau 25: Répartition des tangrams homogènes selon le nombre de sommets de leur enveloppe convexe et leur catégorie (plein/baie/trou)

Une grande catégorie de formes homogènes apparaît lorsqu'on recherche les formes qui ont une convexité réelle égale à la convexité sur quadrillage (nous avions abordé cette question à propos du jeu des cinq triangles dans la question 5, chapitre 5). Cette catégorie regroupe près de 5% des formes homogènes (273 838 formes exactement). L'intérêt de cette coïncidence entre les deux formes de convexité réside dans le fait que les enveloppes convexes de ces formes sont des polyabolos (voir plus loin, ces formes sont obtenues par adjonctions homogènes de petits triangles). Le nombre de polyabolos convexes est très limité : il vaut vingt pour les polyabolos d'aire 16 et augmente irrégulièrement pour les polyabolos d'aire supérieure à 16, atteignant 47 pour les polyabolos d'aire 40. Cela signifie qu'il y a potentiellement 47 formes possibles pour les enveloppes convexes des formes de cette catégorie qui ont une convexité égale à 24, car alors l'enveloppe a une aire de 40 (24+16=40). Comme il n'y a que quatre formes de cette catégorie qui ont la convexité maximale de 24, nous n'aurons au maximum que quatre formes convexes

différentes sur les 47 possibles (en réalité trois formes ont la même enveloppe convexe hexagonale, et la 4ème a une autre sorte d'enveloppe, hexagonale aussi). Notre réflexion ne prend du sens qu'avec les convexités mieux représentées, mais ce qui est certain, c'est qu'avec ces formes on ne peut sortir de l'ensemble des polyabolos convexes dont les aires sont comprises entre 16 et 40. Cet ensemble ne comporte *que* 638 formes. C'est infiniment moins que l'ensemble des formes convexes sur quadrillage ayant des aires comprises entre 16 et 40 (ensemble non dénombrable).

Convexité	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
CVX=cvx	13	123	1 463	6 499	13 327	19 386	37 132	38 538	33 237	26 344	29 873	22 985	15 189
Convexité	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Total
CVX=cvx	10 428	10 203	4 542	2 484	943	625	292	141	40	20	7	4	273 838

Tableau 26: Répartition des formes homogènes ayant une convexité réelle égale à la convexité sur quadrillage. La moyenne des convexités pour ce groupe de formes est de 8.49, soit 2.5 de moins que la moyenne des convexités réelles et 6.7 de moins que la moyenne des convexités sur quadrillage

Pour la convexité 16, l'enveloppe a une aire de 32. Il existe 37 polyabolos convexes d'aire 32, dont le triangle et le carré. Nous pouvons chercher lesquelles des 2484 formes de convexité 16 de cette catégorie ont une enveloppe triangulaire (réponse : aucune), et lesquelles ont une enveloppe carrée (réponse : il y en 42). Si nous voulons continuer à chercher les formes qui ont une enveloppe carrée, il faut chercher parmi les formes de convexité 2 (le carré a alors pour côté 3, il a une aire de 9 carrés, soit 18 triangles) et 20 (le carré a alors pour côté $3\sqrt{2}$, il a une aire de 18 carrés, soit 36 triangles), les autres carrés étant trop grands pour le Tangram. Pour les formes de convexité 2, il y en a 168 qui ont une enveloppe à quatre côtés dont 36 sont des enveloppes carrées (les autres ont des enveloppes de deux sortes de quadrilatères alors qu'il existe sept quadrilatères d'aire 18 triangles). Quant aux formes de convexité 20 de cette catégorie, il n'y en a qu'une seule qui a une enveloppe convexe carrée. Nous avons oublié, chemin faisant, deux sortes de carré, dont les bords ne suivent ni les côtés du quadrillage ni ses diagonales. Inscrits dans des carrés de côté 5, ces deux carrés de côtés $\sqrt{13}$ et $\sqrt{17}$ peuvent envelopper quinze tangrams homogènes, comme on l'a vu dans la réponse de la question 4. Un seul s'enveloppe dans un carré d'aire 17 (donc de convexité réelle 18), tandis que quatorze ont une enveloppe carrée d'aire 13 (donc de convexité réelle 10).

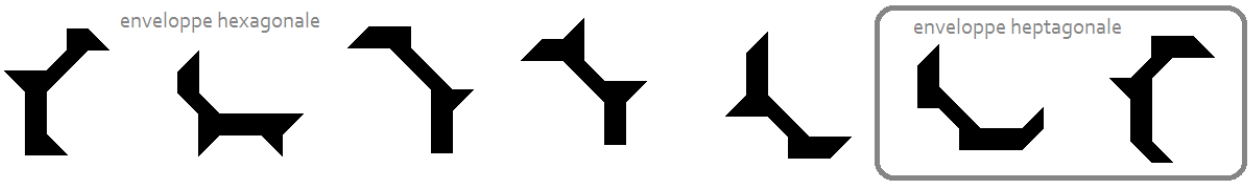


Illustration 62: Les 7 formes de convexité maximale égale à 23 dont le périmètre vaut 18 et contient 12 segments de longueur unité

Finalement, les formes homogènes dont l'enveloppe convexe est un carré sont au nombre de quatre-vingt-quinze (1 carré convexe+36 de convexité 2+14 de convexité 10+42 de convexité 16+1 de convexité 18+1 de convexité 20). Ces formes se distinguent nettement, par leur nombre réduit, des plus de cent mille formes ayant une enveloppe convexe à quatre côtés. Il faut dire qu'il n'y a pas moins de 182 polyabolos à quatre côtés ayant une aire comprise entre 16 et quarante triangles.

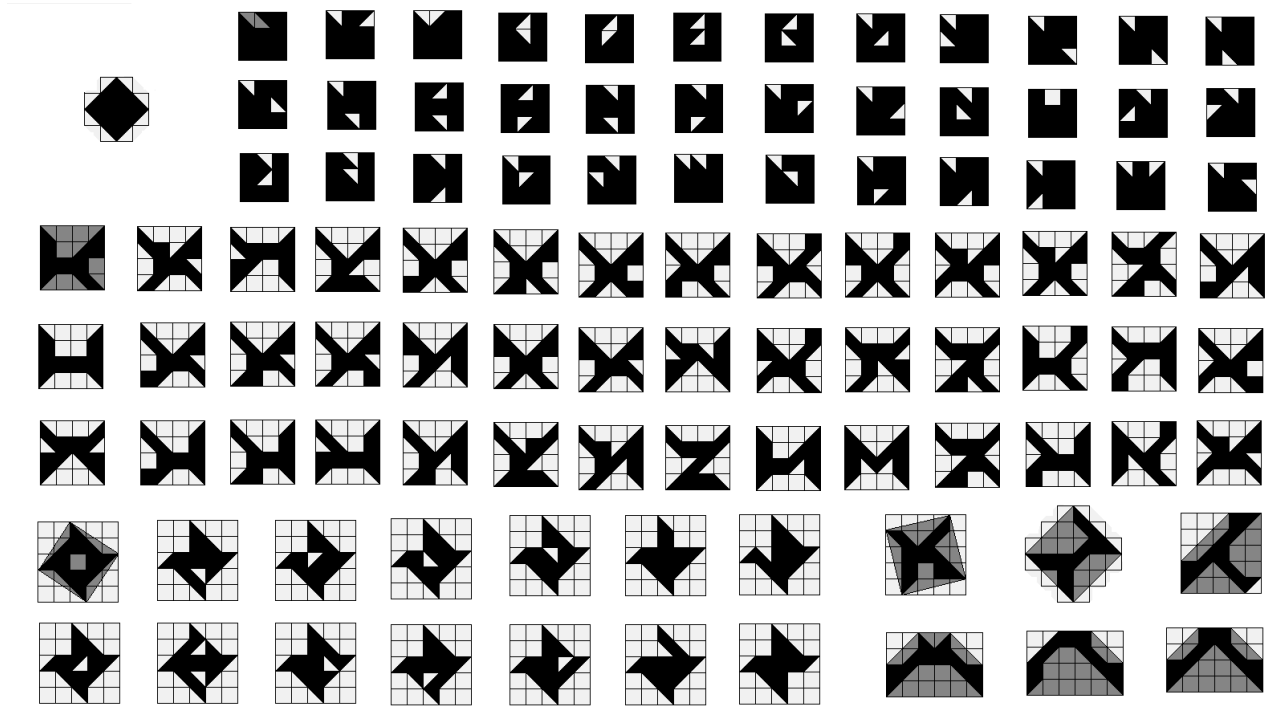


Illustration 63: Les 95 formes homogènes qui ont une enveloppe convexe carrée sont de 6 types (leur convexité est égale à 0, 2, 10, 16, 18 ou 20). En bas à droite, les 4 formes de convexité 24 dont la convexité est égale à la convexité sur quadrillage sont inscrites dans 2 sortes d'hexagones

Pour terminer cette partie sur les convexités des formes homogènes, revenons un instant sur notre idée première : identifier une caractéristique importante de ces formes qui permette de fractionner (un peu) les gros sous-ensembles contenant des formes semblables. Nous avions évoqué, à la fin du chapitre précédent, la sous-catégorie immense des formes ayant un périmètre contenant dix-huit segments. Sur près de quatre millions de telles formes, soit 75% environ des formes homogènes, il y en a encore 42% qui ont douze segments rationnels et six irrationnels. À l'aide de nos nouvelles caractéristiques (convexité réelle, nombre de sommets de l'enveloppe convexe, écart entre convexité réelle et convexité sur quadrillage), nous pouvons fragmenter ce gros sous-ensemble qui comporte 1 647 478 formes presque semblables. La possibilité d'effectuer cette fragmentation ne fait pas diminuer le nombre des formes : nous allons nous trouver face à une grande quantité de sous-catégories mineures contenant toutes ces formes semblables, l'éclatement analytique ayant pour corollaire la complexification

croissante des descriptions. La répartition de ces formes dans un tableau croisant le nombre de sommets de l'enveloppe convexe et la convexité réelle montre un éclatement assez réussi en 112 sous-catégories mineures.

Cet éclatement répartit le nombre considérable en nombres plus raisonnables, le maximum étant de 112 328 (enveloppe hexagonale d'aire 27, car la convexité réelle vaut 11). Quelques-unes de ces sous-catégories mineures peuvent être illustrées sans avoir l'impression d'une multitude : les 89 formes ayant une enveloppe triangulaire (mais cela anticipe sur la question 8), les sept formes de convexité maximale 23 (figure 62), les cinq formes d'enveloppe décagonale (figure 61).

Sommets Enveloppe Cvx réelle	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
2			16						16
3		14	359	130					503
4		508	1 424	506	77	6			2 521
5		974	3 379	4 455	910	9			9 727
6		1 365	11 748	12 736	4 216	392			30 457
7		1 110	16 709	30 428	16 331	2 051			66 629
8	62	6 018	25 713	61 064	29 544	5 559			127 960
9	22	1 375	31 923	89 652	52 742	6 201			181 915
10		2 886	50 413	96 568	68 762	11 718			230 347
11		2 765	38 776	112 328	70 261	11 867	1 034		237 031
12	5	3 779	47 444	105 977	65 842	11 547	372	5	234 971
13		1 058	31 097	87 958	57 860	8 366	274		186 613
14		2 538	27 453	67 893	37 978	6 009	111		141 982
15		397	16 266	42 374	27 975	3 020	68		90 100
16		593	11 594	27 270	14 008	2 245	18		55 728
17		236	5 640	14 613	7 850	781	14		29 134
18		90	3 067	6 924	3 500	375	6		13 962
19		61	890	2 951	1 341	144	2		5 389
20		13	476	945	449	31	1		1 915
21			92	272	107	3			474
22			23	52	22				97
23				5	2				7
Total	89	25 780	324 502	765 101	459 777	70 324	1 900	5	1 647 478

Tableau 27: Répartition des formes de périmètre 18 dont la part rationnelle vaut 12 selon le nombre de sommets de l'enveloppe convexe et la convexité réelle

<u>Question 8</u> : Les formes homogènes dont l'enveloppe convexe est un triangle sont assez nombreuses puisqu'elles sont près de cinq cents. La seule étant convexe est le triangle isocèle rectangle de côtés 4, 4 et $4\sqrt{(2)}$.

a) Quelles sont les différentes sortes de triangles que l'on peut obtenir ? Précisons notre question : combien de formes différentes d'enveloppes convexes triangulaires peut-on obtenir pour les tangrams homogènes ? Une indication : la réponse se compte avec les doigts des deux mains…

b) Certaines de ces formes ont un côté au moins qui ne suit pas les côtés du quadrillage ni les directions de ses diagonales (voir notre illustration). Est-il possible alors que l'enveloppe convexe d'un Tangram soit constituée de deux ou trois segments de ce type ?

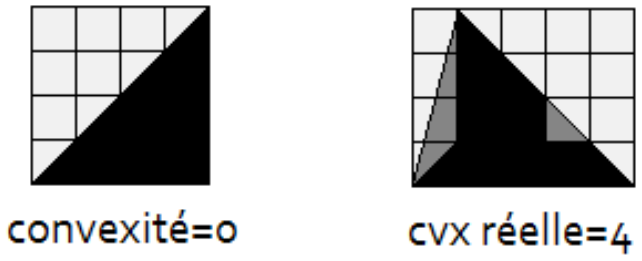


Illustration 64: Certains tangrams homogènes ont une enveloppe convexe triangulaire dont un des côtés est non-conforme comme le petit côté de la forme de droite

Chapitre 9 : Génération des hétérogènes

Les assemblages hétérogènes des pièces du Tangram posant des problèmes de génération (pas seulement pour les formes à trou), seules les formes pleines ont été générées et sont étudiées ici

Nous avons déjà mis en place les outils pour générer et explorer ce monde des formes hétérogènes : l'encodage nécessite des symboles pour toutes les directions possibles (il y en a huit, que l'on a appelées selon les directions de la boussole N, NE, E , SE, S, SO, O et NO) et toutes les longueurs de segment possibles. Pour savoir quelles sont les longueurs possibles avec le Tangram, on peut développer le polynôme caractéristique de ce jeu, comme on l'a fait au chapitre 4 pour le mini-Tangram. Ici, on ajoute les deux grands triangles de caractéristique $1+x+x^2+y+y^2$ ce qui conduit au polynôme $F(x)=(1+x+y)^3(1+x)(1+x+x^2+y)(1+x+x^2+y+y^2)^2$. Le développement de ce polynôme conduit aux coefficients du tableau suivant, où l'on a grisé les combinaisons donnant une valeur comprise entre 0 et $\sqrt{2}$ puisqu'un segment unitaire (entre deux points de référence) ne peut dépasser ces valeurs.

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	6	17	30	36	30	17	6	1
1	7	36	87	130	130	88	39	10	1
2	24	105	214	266	215	112	35	5	
3	53	195	330	334	211	80	16	1	
4	83	252	345	274	127	31	3		
5	96	234	249	146	44	5			
6	83	156	121	47	7				
7	53	72	36	7					
8	24	21	5						
9	7	3							
10	1								

Tableau 28: Coefficients du développement de l'expression F qui donne les différentes contributions possibles des pièces pour une fraction résiduelle de la longueur d'un segment unitaire

Le nombre 105, sur fond gris foncé au croisement de la 4ème ligne et de la 3ème colonne, signifie que dans l'expression développée de F on trouve 105 fois le produit x^2y. Ces coefficients n'ont aucune importance pour ce qui est de la longueur du

segment, par contre la présence de ce terme en x^2y dans le développement indique que l'on pourra trouver des segments dont la longueur est $2-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}-2$. Comme $\sqrt{2}-2\approx-0{,}586$ est négatif, cette valeur ne convient pas. Par contre, $2-\sqrt{2}\approx0{,}586$ convenant, nous avons grisé la cellule. Dans notre tableau, nous avons grisé en foncé les combinaisons de la forme $a-b\sqrt{2}$ qui conviennent et en plus clair, celles de la forme $b\sqrt{2}-a$ qui conviennent. Ainsi, la longueur $2-\sqrt{2}$ a été coloriée en gris foncé. Cette longueur a été notée *b* plus haut (depuis le chapitre 3) ; elle apparaît dès que l'on peut accoler une diagonale irrationnelle du carré avec un côté de longueur 2, c'est-à-dire dès que l'on construit des assemblages de deux pièces : l'hypoténuse d'un triangle moyen, accolée à celle d'un petit triangle, génère cette longueur (voir figure 22 où celle-ci est découpée dans une cathète de grand triangle). Certaines longueurs tardent bien davantage à apparaître, comme la longueur $6-4\sqrt{2}$ qui n'apparaît que dans les assemblages de sept pièces. Cette longueur n'a pas encore été rencontrée avec les différents jeux que nous avons étudiés, nous l'avons grisée en foncé car elle est obtenue en soustrayant la part irrationnelle de la part rationnelle.

ancien	nouveau	Part rat.	Part irrat.	Val. Approx.	Rang d'apparition
e	1	3	-2	0.172	3
f	2	-4	3	0.243	4
(j)	3	6	-4	0.343	7
a	4	-1	1	0.414	2
b	5	2	-1	0.586	2
(k)	6	-5	4	0.657	6
g	7	5	-3	0.757	5
c	8	-2	2	0.828	2
1	9	1	0	1.000	1
h	10	4	-2	1.172	5
i	11	-3	3	1.243	4
d	12	0	1	1.414	1

Tableau 29: Les 12 différentes longueurs de segments unitaires pour les formes hétérogènes réalisées avec le Tangram et leur rang d'apparition lors du processus d'agrégation des pièces

On comprend, grâce à ce développement de *F*, qu'il n'y a que douze valeurs qui vont convenir, mais cela ne nous assure pas qu'il soit possible d'obtenir ces valeurs dans la réalité combinatoire des pièces. Pour déterminer si ces longueurs potentielles sont réalisables concrètement, il suffit d'en exhiber un spécimen. Nous avons déjà rencontré, avec les jeux étudiés précédemment, dix de ces longueurs. L'image 65 nous montre, respectivement pour chacune des deux nouvelles longueurs (notées *j* et *k*), un exemple de tangram hétérogène qui la réalise. Nous devons par conséquent nous attendre à générer ces douze longueurs et devons préparer un encodage qui tienne compte de cette réalité.

Pour simplifier nos codes, nous avons adopté une notation des longueurs avec des valeurs numériques de 1 à 12 (voir tableau ci-dessus). De même, pour les orientations des segments, nous avons choisi un système de codes numériques qui fait en sorte que des orientations opposées aient toujours une somme égale à sept (0+7=1+6=2+5=3+4=7) comme les faces opposées d'un dé. De cette manière, il sera plus facile pour le programme de reconnaître lorsque deux formes peuvent s'accoler : elles doivent avoir des directions opposées. Ainsi, par exemple, un segment de direction 0 peut s'accoler avec un segment de direction 7. Ceci est une conséquence du fait que le contour d'une forme est toujours décrit dans le même sens (en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). En additionnant des segments de direction opposée, on est assuré que les pièces qui s'accolent ne se chevauchent pas (au moins de part et d'autre de la partie de segment qui fusionne).

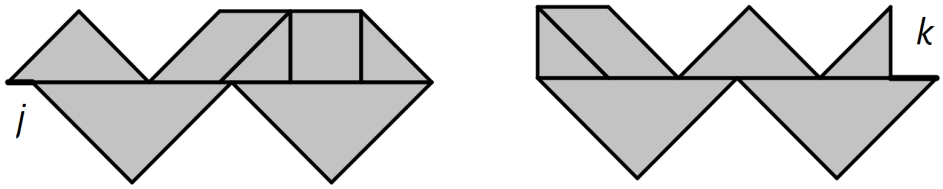


Illustration 65: Les 2 nouvelles longueurs de segment rencontrées avec les assemblages hétérogènes des 7 pièces du jeu

Un ensemble de 12×8=96 symboles doit donc être choisi. Le tableau suivant donne une suite de symboles ASCII que nous pouvons utiliser pour obtenir, par simple division euclidienne de l'équivalent numérique du code (chaque symbole est reconnu par l'ordinateur sous la forme d'un nombre, et ce nombre est utilisable par les programmes), la longueur et la direction du segment. Ceci a déjà été vu dans le chapitre 4 (autour de la figure 30), mais ici le tableau est plus complet. Par exemple,

Lon	0 (E)		1 (SE)		2 (S)		3 (SO)		4 (NE)		5 (N)		6 (NO)		7 (O)	
N°	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code	ASCII	Code
1	48	espace	60	,	72	8	84	D	96	P	108	\	120	h	132	t
2	49	!	61	-	73	9	85	E	97	Q	109	]	121	i	133	u
3	50	"	62	.	74	:	86	F	98	R	110	^	122	j	134	v
4	51	#	63	/	75	;	87	G	99	S	111	_	123	k	135	w
5	52	$	64	0	76	<	88	H	100	T	112	'	124	l	136	x
6	53	%	65	1	77	=	89	I	101	U	113	a	125	m	137	y
7	54	&	66	2	78	>	90	J	102	V	114	b	126	n	138	z
8	55	'	67	3	79	?	91	K	103	W	115	c	127	o	139	{
9	56	(	68	4	80	@	92	L	104	X	116	d	128	p	140	|
10	57	)	69	5	81	A	93	M	105	Y	117	e	129	q	141	}
11	58	*	70	6	82	B	94	N	106	Z	118	f	130	r	142	~
12	59	+	71	7	83	C	95	O	107	[	119	g	131	s	143	delta

Tableau 30: Liste des 96 symboles nécessaires à l'encodage des différents types de segment, selon la longueur (12 longueurs possibles) et selon la direction (8 directions possibles) du segment

le symbole # est utilisé pour coder un segment *a* de longueur n°4 ($\sqrt{2}-1\approx 0.414$) qui va dans la direction 0 (la direction horizontale, de gauche à droite). Les équivalents numériques des codes choisis commençants à 48 (4×12), on trouve la direction d'un segment en enlevant 4 au quotient de l'équivalent numérique du caractère par 12. Pour le segment codé #, l'équivalent numérique est 51 et 51=4×12+3, le quotient vaut donc 4 et la direction est 4–4=0. La longueur du segment est trouvée en ajoutant 1 au reste, ici 3+1=4 le segment # a la longueur n°4. Les symboles des lignes grisées (longueur unité codée 9 et longueur $\sqrt{2}$ codée 12) seront les plus utilisés, car ils codent les segments unitaires entiers. Parmi tous les codes possibles pour une forme donnée, nous avons choisi de conserver comme écriture *canonique* celle qui, parmi les seize orientations différentes possibles de la forme (huit obtenues par rotation, et les huit autres par une symétrie axiale à partir des premières), arriverait en premier dans un dictionnaire (lorsqu'on choisit la plus « petite » permutation circulaire possible des symboles).

Afin de générer toutes les formes hétérogènes, il suffit d'accoler les pièces entre elles en respectant la règle d'assemblage hétérogène (un côté en commun quelle que soit la longueur des segments qui s'accolent, du moment que l'assemblage se fasse à partir d'un sommet commun). Lorsque le bord d'une pièce peut s'accoler à un endroit du bord de l'agrégat, il faut veiller à ce que la pièce que l'on accole ne chevauche pas le reste de l'agrégat, ne serait-ce que par un de ses sommets. Il faut en particulier éviter les assemblages qui réalisent des formes à trou comme celles qu'on a rencontrées avec les assemblages homogènes. L'encodage choisi pour les formes hétérogènes ne permet pas en effet de coder de façon satisfaisante un trou. On peut imaginer coder une forme à baie avec ce système, mais un trou suppose une rupture dans la ligne du bord. Celle-ci pouvant être réalisée à différents endroits, on ne pourra reconnaître les formes identiques avec ce système. Il faudra innover pour trouver une façon satisfaisante d'indiquer la position et la forme d'un trou (voir chapitre 14, figure 133 notamment), sachant qu'un tangram hétérogène peut en renfermer plusieurs (figure 131). Nous nous sommes donc limités à la

i	Ni	Ni/Ni-1	N'i	N'i/N'i-1	(Ni-N'i)/Ni
1	5		5		0%
2	109	22	106	21	3%
3	6 226	57	5 965	56	4%
4	342 265	55	323 944	54	5%
5	14 882 129	43	13 885 990	43	7%
6	442 747 706	30	416 599 869	30	6%
7	6 380 137 818	14	6 380 137 818	15	0%

Tableau 31: Progressions des nombres de formes hétérogènes (Ni : avant expurgation, N'i : après expurgation des doublons) pendant le processus d'agrégation (i : nombre de pièces agrégées)

génération des formes pleines, cette entreprise déjà suffisamment difficile conduit à une très grande quantité de formes. Si trouver les formes homogènes était équivalent au trajet Paris-Hawaï (12 000 *km*), alors trouver les formes hétérogènes nous amènerait sur le Soleil (149 600 000 *km*, soit 12 500 fois plus loin) !

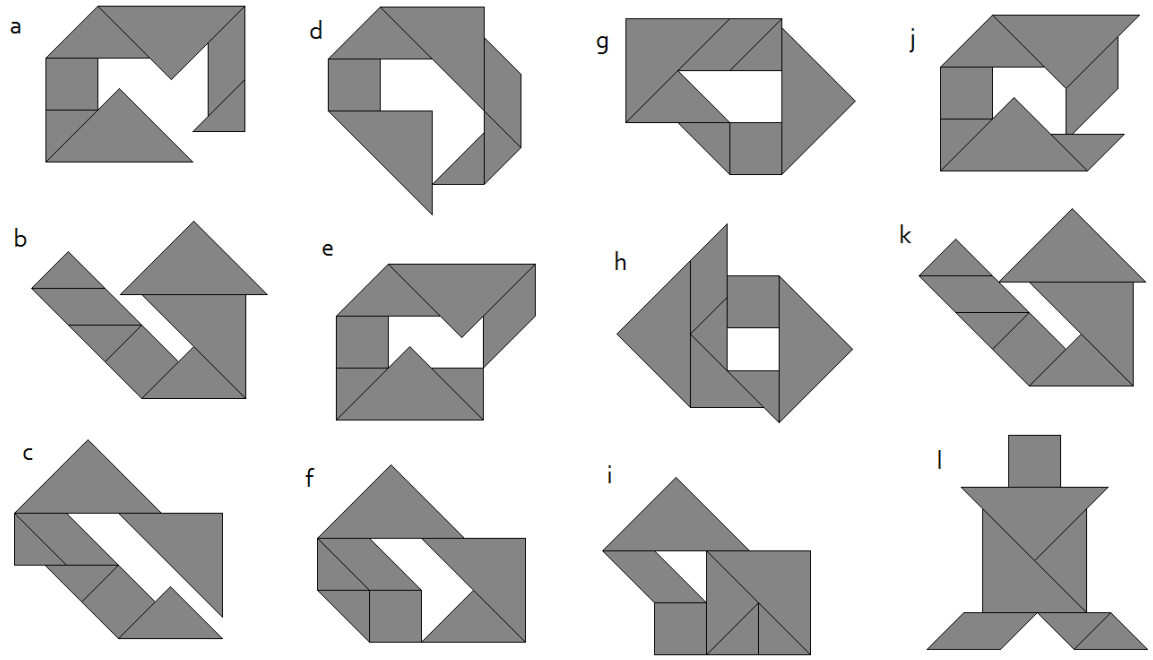


Illustration 66: Seules les formes hétérogènes pleines sont générées ici (a, b, c) ; les formes à baie (d, e, f) pourraient l'être avec notre encodage ; celles à trou (g, h, i) nécessitent un autre encodage ; les formes j, k et l ne sont pas hétérogènes (un chevauchement interdit pour j, des assemblages ne partant pas d'un point de référence pour k et l.

Le processus d'agrégation des pièces a déjà été décrit au chapitre 6 : on prend une pièce du jeu, disons le carré, et on lui accole toutes les autres sortes de pièces (il y en a quatre), et ce, de toutes les manières compatibles avec la règle des assemblages hétérogènes. L'ensemble des formes obtenues est enregistré avec, en en-tête, l'indication des pièces qu'il reste à agréger. En procédant de même pour toutes les sortes de pièces, on obtient un fichier qui contient toutes les formes possibles avec deux pièces du jeu. Pour donner quelques exemples, les formes qui ont été obtenues à l'aide du carré (code 4) et du parallélogramme (code 3), nécessitent encore qu'on leur accolent tous les triangles du jeu : les petits (code 1), le moyen (code 2) et les grands (code 9). Ainsi ces formes seront précédées de l'entête 11299 qui indique les cinq pièces que l'on doit encore accoler. Les formes qui ont été obtenues à l'aide du carré et du triangle moyen seront précédées de l'entête 11399 indiquant que l'on doit encore leur accoler les petits et grands triangles ainsi que le parallélogramme. Ce faisant, dans ce fichier de formes obtenues par l'agrégation de deux pièces, certaines formes peuvent se présenter plusieurs fois si les pièces qu'il faut encore leur accoler sont différentes.

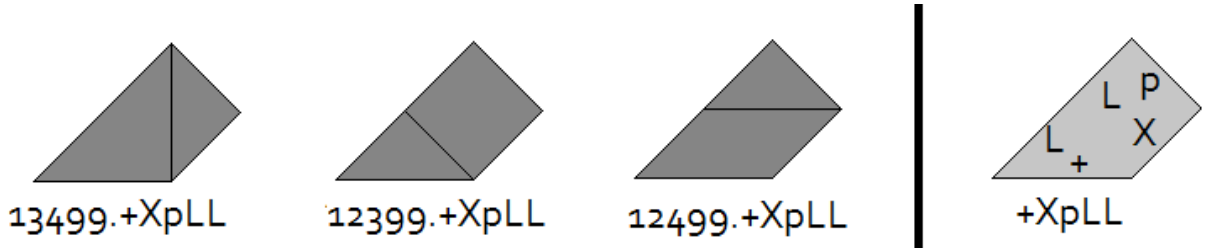


Illustration 67: Une forme peut être présente en plusieurs exemplaires qui diffèrent par leur entête (la liste des pièces restant à utiliser : 5 chiffres ici séparés du code de la forme par un point). À droite, une seule occurrence de cette forme subsiste dans le fichier expurgé

Le trapèze de la figure 67 est obtenu de trois façons différentes : en accolant un petit triangle à une des pièces d'aire 2 triangles que comporte le jeu. Cette forme se présente donc trois fois, avec trois en-têtes différentes. Si on expurge du fichier tous les doublons (il n'y a que deux formes qui ont des doublons à cette étape de l'agrégation), on obtient un fichier ne contenant que des formes originales. Avec le Tangram, les formes hétérogènes produites par l'assemblage de deux pièces constitue avec les en-têtes un ensemble de 109 formes différentes qui, une fois expurgé de ses doublons, n'en contient plus que 106. Rappelons que lors des assemblages homogènes, à cette étape de l'agrégation, nous n'avions que 38 formes (41 si on compte les trois doublons).

À l'étape suivante, on ajoute à chaque forme du fichier précédent l'ensemble des différentes pièces qu'il reste à agréger ainsi que l'indique l'en-tête de la forme, et ce, de toutes les façons possibles. Au moment d'enregistrer les différentes formes obtenues, on supprime de l'en-tête la pièce qui vient d'être ajoutée. On construit ainsi les différents fichiers du processus d'agrégation. Après l'agrégation de la 3ème pièce, il y a 6 226 formes différentes, soit environ 57 fois le nombre qu'il y en avait à la 2ème étape. Aux étapes suivantes, le nombre de formes différentes continue à être multiplié par des coefficients importants bien que décroissants : pour obtenir les formes de quatre pièces le nombre a été multiplié par 55 ; pour obtenir les formes de cinq pièces il a été multiplié par 43 et, pour les formes de six pièces, il a été

étape	Hétérogènes	Homogènes	Homo/Hétéro
1	5	5	100,00%
2	106	38	35,85%
3	5 965	589	9,87%
4	323 944	9 275	2,86%
5	13 885 990	112 631	0,81%
6	416 599 869	976 858	0,23%
7	6 380 137 818	4 842 205	0,08%

Tableau 32: Répartition des formes homogènes au sein des formes hétérogènes pleines lors du processus d'agrégation

multiplié par 30. L'allure de cette progression nous a permis d'estimer le nombre des formes à sept pièces avant de les produire toutes. Ce nombre s'est avéré être supérieur à six milliards, soit une multiplication des formes de six pièces par un facteur 14.

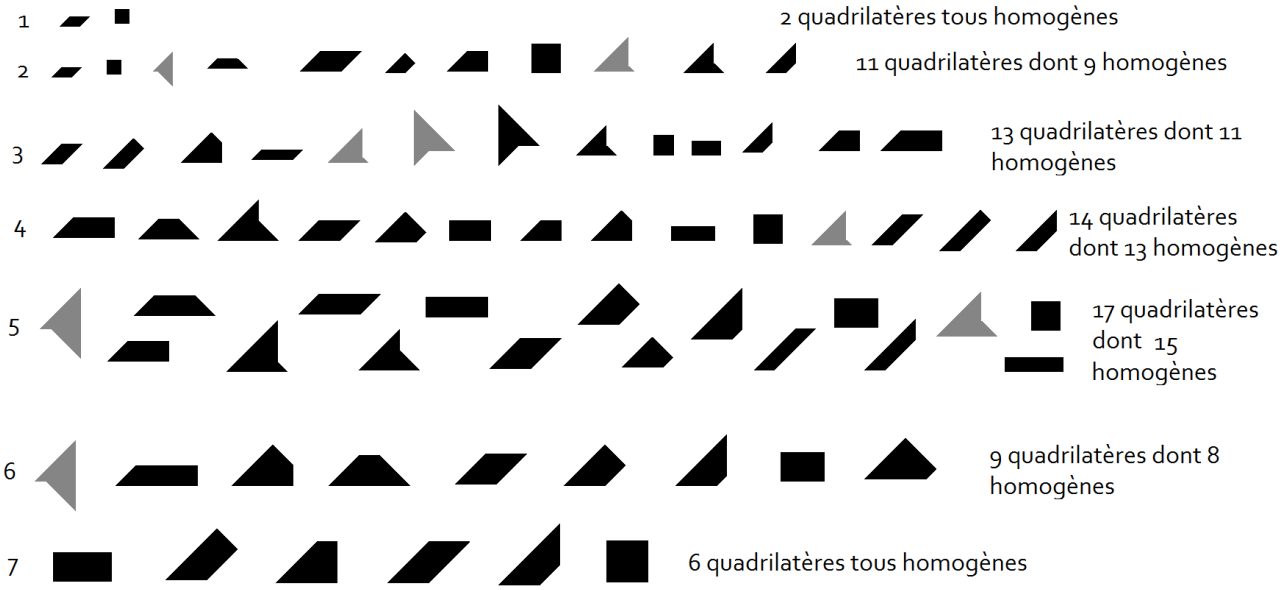


Illustration 68: Les 72 quadrilatères hétérogènes présents aux différentes étapes de l'agrégation sont principalement des formes homogènes. Les formes non-homogènes (1 sur 9 en moyenne) sont grisées

Dans les fichiers expurgés, les formes obtenues sont un peu moins nombreuses, mais du même ordre de grandeur que celles des fichiers non-expurgés. À l'étape finale du processus, cette part des formes expurgées est nulle car, dans le fichier final, il n'y a plus d'en-tête pour indiquer les pièces restant à agréger (il n'y a plus de pièces à agréger, toutes les formes sont originales). Avant d'aborder l'étude de cet ensemble des tangrams hétérogènes complets ainsi construit, on peut s'intéresser aux ensembles de formes hétérogènes des différentes étapes de l'agrégation. On a donné, dans le tableau 29, les rangs d'apparition des différentes longueurs de segments composant les bords de ces formes intermédiaires. Mais de nombreuses autres caractéristiques peuvent être calculées sur ces formes, comme le nombre de côtés, la longueur du périmètre, les éléments de symétrie, la convexité et même l'aire qui est variable, contrairement aux formes complètes (qui ont toutes la même aire de huit carrés).

La première caractéristique qui nous a intéressé est la reconnaissance du caractère purement homogène au sein des formes hétérogènes. La possibilité de constituer des assemblages homogènes existe pour les assemblages homogènes, mais la plupart du temps une des pièces au moins vient s'accoler de façon hétérogène, supprimant d'un coup le caractère homogène. Pour identifier une forme homogène, nous avons testé une condition suffisante d'homogénéité : les segments unitaires

doivent tous avoir une longueur égale à 1 ou à $\sqrt{2}$,et les segments de longueur 1 doivent suivre les deux directions perpendiculaires d'un carré imaginaire, tandis que les autres segments doivent suivre ses diagonales. Notons qu'il est bien possible que la première partie de cette condition soit déjà suffisante. Quoi qu'il en soit, nous avions besoin de vérifier nos résultats d'agrégation des formes hétérogènes, et le nombre de formes homogènes pleines, aux différentes étapes de la construction des tangrams, nous étant déjà connu, ces formes pouvaient servir de test pour valider en partie, ou invalider en totalité nos résultats. Le tableau qui suit donne le nombre de formes homogènes et la part de celles-ci dans les formes hétérogènes obtenues durant le processus d'agrégation.

i	C=3	C=4	C=5	C=6	C=7	C=8	C=9	C=10	C=11	C=12	C=13	C=14	C=15	C=16	C=17	C=18	C=19	C=20
1	3	2																
2	2	11	36	46	11													
3	1	13	100	446	1 432	2 187	1 438	340	8									
4	2	14	135	1 017	5 649	22 564	60 339	99 138	86 652	40 208	7 871	355						
5	1	17	161	1 371	10 563	60 489	267 838	915 930	2 217 443	3 655 665	3 702 290	2 218 188	718 740	110 968	6 326			
6	0	9	118	1 371	13 100	92 026	533 175	2 453 702	9 094 377	26 881 032	59 922 576	97 092 520	106 589 261	75 050 758	31 183 598	6 954 097	714 796	23 353
7	1	6	53	631	7 762	72 504	516 680	2 923 074	13 514 234	51 561 094	161 145 538	412 814 157	839 029 030	1 314 528 488	1 514 235 029	1 216 253 610	631 067 979	191 620 828
	10	72	603	4 882	38 517	249 770	1 379 470	6 392 184	24 912 714	82 137 999	224 778 275	512 125 220	946 337 031	1 389 690 214	1 545 424 953	1 223 207 707	631 782 775	191 644 181

Tableau 33: Répartition des formes hétérogènes obtenues durant le processus d'agrégation des formes, selon leur nombre de côtés (pour les formes à 7 pièces, le décompte complet est tableau 35)

Le fait que ces nombres correspondent à ceux qui avaient été obtenus, par une autre méthode, pour l'étude des tangrams homogènes, valide partiellement nos résultats dans le sens qu'ils montrent une cohérence laissant penser que l'ensemble est correct. Ce qui apparaît aussi clairement est que les formes homogènes ont tendance à se diluer à l'intérieur des formes compactes. Ce phénomène est une conséquence du fait que seules les formes homogènes donnent naissance à d'autres formes homogènes, alors que, dans le même temps, les formes homogènes donnent naissance à une part toujours plus grande de formes hétérogènes qui ne sont pas homogènes.

La répartition des nombres de côtés a la même allure dissymétrique que celle qu'on observe pour les tangrams homogènes : la moyenne est déportée vers les valeurs

i	C=3	C=4	C=5	C=6	C=7	C=8	C=9	C=10	C=11	C=12	C=13	C=14	C=15	C=16	C=17	C=18
1	100%	100%														
2	100%	55%	28%	43%	0%											
3	100%	62%	22%	18%	11%	9,0%	8,3%	0%	0%							
4	100%	93%	41%	27%	14%	8,0%	4,4%	2,5%	1,2%	0,30%	0%	0%				
5	100%	88%	44%	29%	15%	8,6%	4,9%	2,6%	1,4%	0,69%	0,29%	0,08%	0,011%	0%	0%	
6	-	89%	47%	29%	16%	9,2%	5,3%	2,9%	1,6%	0,84%	0,42%	0,18%	0,057%	0,010%	0,00074%	0%
7	100%	100%	42%	32%	16%	9,0%	5,4%	3,3%	2,0%	1,1%	0,64%	0,33%	0,15%	0,054%	0,012%	0,0010%

Tableau 34: Part des formes homogènes au sein des formes hétérogènes ayant le même nombre de côtés (18 côtés au maximum pour un tangram homogène), à chaque étape de l'agrégation

supérieures, la moitié des valeurs supérieures correspond à plus de 90% des effectifs (au moins pour les quatre dernières étapes du processus d'agrégation). Le nombre moyen de côtés pour un tangram hétérogène est 17 (approché à l'entier le plus proche) alors qu'il est de 14 pour les tangrams homogènes. Ce nombre

supérieur montre que les formes hétérogènes ont la possibilité de réaliser davantage de côtés que les formes homogènes. Nous savions cela depuis les travaux précurseurs de R. Read et leur vulgarisation par M. Gardner : les tangrams hétérogènes peuvent avoir jusqu'à vingt-trois côtés (ce nombre est égal au nombre total des côtés des sept pièces du jeu, voir chapitre 1) alors que les tangrams homogènes n'en avaient au maximum que dix-huit (trente segments unitaires accolés au minimum deux par deux à chaque étape de l'agrégation).

Nombre de côtés	Formes hétérogènes	Formes homogènes	Formes non-homogènes	Fréq. Homo
3	1	1	0	100%
4	6	6	0	100%
5	53	22	31	41,5%
6	631	200	431	31,7%
7	7 762	1 245	6 517	16,0%
8	72 504	6 392	66 112	8,8%
9	516 680	27 113	489 567	5,2%
10	2 923 074	90 860	2 832 214	3,1%
11	13 514 234	247 255	13 266 979	1,8%
12	51 561 094	535 302	51 025 792	1,0%
13	161 145 538	915 949	160 229 589	0,57%
14	412 814 157	1 184 701	411 629 456	0,29%
15	839 029 030	1 073 018	837 956 012	0,13%
16	1 314 528 488	595 932	1 313 932 556	0,045%
17	1 514 235 029	153 472	1 514 081 557	0,0101%
18	1 216 253 610	10 737	1 216 242 873	0,00088%
19	631 067 979	0	631 067 979	0%
20	191 620 828	0	191 620 828	0%
21	29 063 262	0	29 063 262	0%
22	1 756 210	0	1 756 210	0%
23	27 648	0	27 648	0%
Total	6 380 137 818	4 842 205	6 375 295 613	0,08%

Tableau 35: Répartition des formes hétérogènes selon le nombre de côtés et la part des formes homogènes. Globalement, il y a 12 500 fois plus de formes hétérogènes que de formes homogènes

Les formes hétérogènes à trois côtés sont toutes des formes homogènes (il y en a dix au total, mais certaines sont identiques). Parmi celles à quatre côtés, il y a près de 90% des formes hétérogènes qui sont homogènes (8 quadrilatères non-homogènes sur 72). À partir de cinq côtés, les formes hétérogènes deviennent prépondérantes. Les premiers tangrams hétérogènes qui ne sont pas homogènes sont les 31 pentagones dont Martin Gardner avait fait le compte, avec l'aide de ses lecteurs du Scientific American en 1974. Gardner ne cherchait pas spécifiquement les tangrams hétérogènes. Il cherchait les pentagones. Il s'avère que pour le Tangram, les pentagones sont, soit homogènes (il y en a 22), soit hétérogènes-non-homogènes (il y en a 31). Aucun pentagone ne peut être obtenu en dehors des assemblages hétérogènes.

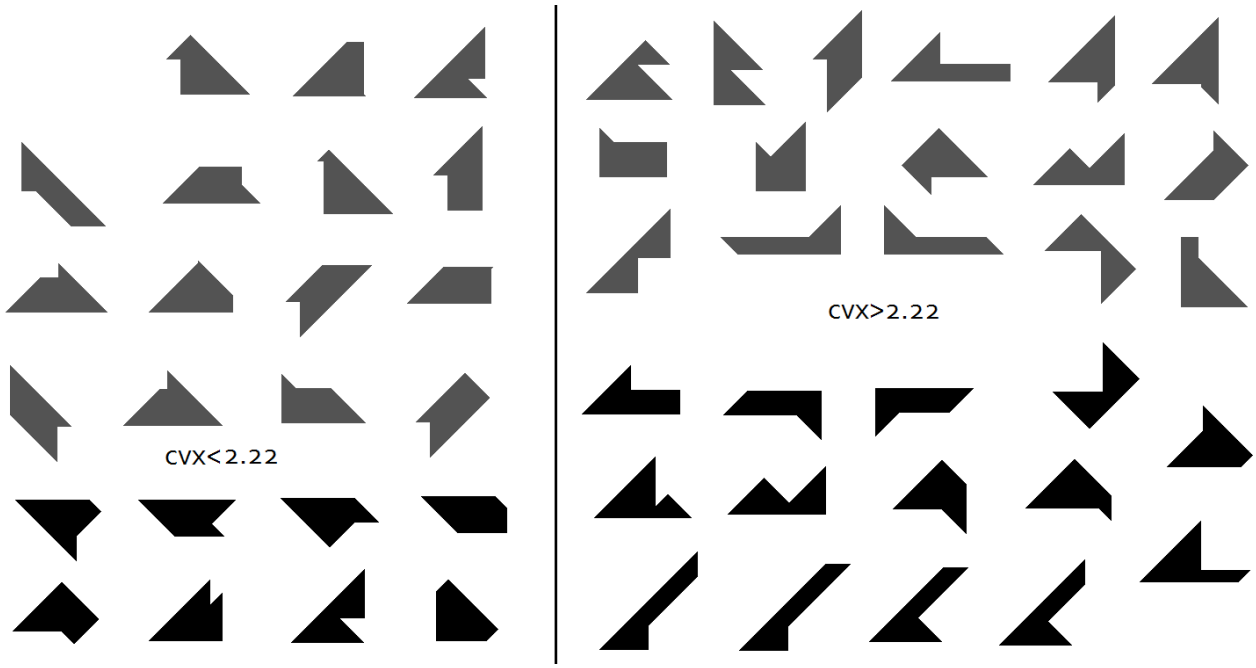


Illustration 69: Les 53 pentagones réalisables avec le Tangram sont tous hétérogènes. Parmi eux, 22 formes seulement sont homogènes (en noir)

À partir des hexagones, il existe une infinité de formes non-hétérogènes, comme l'a montré R. Read, mais seulement 631 hexagones hétérogènes dont 200 homogènes. La fréquence des formes homogènes diminue ensuite progressivement, au fur et à mesure que le nombre de côtés augmente (voir les tableaux 34 et 35).

	Aire=1	Aire=2	Aire=3	Aire=4	Aire=5	Aire=6	Aire=7	Aire=8	Aire=9	Aire=10	Aire=11	Aire=12	Aire=13	Aire=14	Aire=15	Aire=16	Total
1 pièce	28.57%	42.86%	0%	28.57%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%
2 pièces	0%	4.59%	18.35%	16.51%	11.93%	35.78%	0%	12.84%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%
3 pièces	0%	0%	0%	4.95%	9.36%	6.59%	24.53%	22.08%	8.19%	24.30%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%
4 pièces	0%	0%	0%	0%	0%	3.78%	2.08%	11.59%	21.93%	9.83%	26.82%	23.97%	0%	0%	0%	0%	100%
5 pièces	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	1.36%	0%	16.35%	8.37%	22.50%	41.58%	9.84%	0%	0%	100%
6 pièces	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	10.83%	0%	59.72%	29.45%	0%	100%
7 pièces	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	100%

Tableau 36: Répartition des agrégats intermédiaires rencontrés lors de la génération des tangrams hétérogènes, selon leur aire (l'unité d'aire est le petit triangle) et le nombre de pièces utilisées

L'évolution de la répartition des aires lors du processus d'agrégation est assez irrégulière (voir tableau 36). Les agrégats intermédiaires dont on mesure l'importance relative dans ce tableau, ne nous sont pas tous étrangers. Nous reconnaissons que la case marquée 1.36%, au croisement de la ligne « 5 pièces » et de la colonne « Aire=8 », correspond au mini-Tangram, le jeu que nous avons étudié au chapitre 4. De même, nous connaissons aussi un peu le contenu de la case marquée 22.50%, au croisement de la ligne « 5 pièces » et de la colonne « Aire=12 », qui correspond en partie aux assemblages des cinq triangles du jeu (cette case contient aussi deux autres jeux que l'on obtient en substituant au triangle moyen le carré ou le parallélogramme).

Nous avons vu que les bords des formes hétérogènes sont constitués de segments

qui prennent jusqu'à douze valeurs de longueurs différentes. Mais quelle est la part de chaque valeur pendant l'agrégation ? Nous avons effectué ce décompte pour montrer comment les longueurs fractionnées envahissent progressivement le tableau. Au départ, lorsque les pièces ne sont pas assemblées, un tiers des segments des bords mesurent comme la diagonale du carré unité (longueur n°12), les deux autres tiers mesurant l'unité (longueur n°9). Après l'agrégation des pièces entre elles, les longueurs fragmentées représentent 17% des segments, la part des segments unitaires initiaux ayant chuté à 25% environ pour la longueur n°12 et à 57% environ pour la longueur n°9.

en %	Long=1	Long=2	Long=3	Long=4	Long=5	Long=6	Long=7	Long=8	Long=9	Long=10	Long=11	Long=12	Total
1 pièce	0	0	0	0	0	0	0	0	66.7	0	0	33.3	100%
2 pièces	0	0	0	6.44	2.02	0	0	0.38	57.7	0	0	33.5	100%
3 pièces	0.06	0	0	8.53	3.19	0	0	0.71	56.3	0	0	31.2	100%
4 pièces	0.11	0.0008	0	9.79	3.64	0	0	0.81	55.9	0	0.006	29.8	100%
5 pièces	0.14	0.0023	0	10.92	3.82	0	0.00011	0.80	55.8	0.000017	0.011	28.5	100%
6 pièces	0.16	0.0039	0	11.84	3.90	0.000011	0.00026	0.78	55.9	0.000056	0.014	27.4	100%
7 pièces	0.17	0.0048	0.000001	12.44	3.79	0.000027	0.00036	0.73	57.5	0.000082	0.014	25.3	100%

Tableau 37: Évolution des parts (en %) de chacune des 12 longueurs de segment, au cours du processus d'agrégation des pièces

Les statistiques concernant les types de segments sont les plus faciles à obtenir, puisque notre système d'encodage est fondé sur cette distinction. Il est donc aisé, lorsqu'on dispose du fichier des formes hétérogènes encodées de cette façon, de donner la moyenne du nombre de segments à chaque étape du processus d'agrégation : celle-ci passe de 4.29 segments/forme (pièces séparées) à 20.64 segments/forme (tangrams à sept pièces), en passant par 7.47 (2 pièces), 10.56 (3 pièces), 13.32 (4 pièces), 15.83 (5 pièces) et 18.17 (6 pièces). Pour les tangrams complets, le nombre de segments par forme prend toutes les valeurs possibles entre 8 (1 forme : le carré) et 24 (plus de 87 millions de formes). Le tableau suivant donne la répartition des formes hétérogènes entre ces différentes valeurs.

Peri	Total
8	1
9	4
10	191
11	1 865
12	31 510
13	226 599
14	1 673 548
15	8 435 391
16	36 679 806
17	129 188 015
18	362 637 399
19	816 304 553
20	1 407 563 573
21	1 701 240 012
22	1 294 649 204
23	534 126 851
24	87 379 296
total	6 380 137 818

Tableau 38: Répartition des formes hétérogènes selon le nombre de segments du bord

L'obtention des tangrams hétérogènes par agrégation de la 7ème pièce à l'ensemble colossal des 442 747 706 figures présentes dans le fichier des formes à six pièces s'est avérée être plus longue et difficile que prévu. Nous avions mis au point la procédure lors des précédentes étapes de cette agrégation, et donc il n'était pas difficile de l'adapter pour cette ultime phase. Devant m'absenter quelques semaines de mon domicile (juillet 2011), je lançais le calcul sur mon ordinateur après avoir installé un dispositif me permettant

d'intervenir sur lui à distance. Tout se passa bien, je pus contrôler la manœuvre à distance, sans perte de temps. Je fus même heureux d'annoncer début août à Ron que j'avais trouvé un total de 2 671 935 848 tangrams hétérogènes. Puis je me lançais dans les premières vérifications en calculant le périmètre (nombre de segments unitaires) des formes obtenues, car Ron m'avait envoyé un premier décompte des formes ayant moins de quinze segments unitaires (la méthode suivie par Ron est très différente de la mienne : il détermine la totalité des tangrams hétérogènes, doublons compris, et doit ensuite expurger les 500 fichiers obtenus en les regroupant par périmètre croissant). Il était content d'avoir trouvé le carré, la forme ayant le plus petit périmètre, car ceci était attendu et confirmait un peu son travail. Quelle ne fut ma consternation lorsque je constatais que, parmi mes 2.7 milliards de formes ne figurait pas le carré ! Je fut bien forcé d'admettre que j'avais fait une erreur et qu'il me fallait en découvrir la cause. Je découvris alors assez rapidement la cause de mon erreur : j'avais modifié une procédure en créant une variable *privée* pour une procédure où existait déjà la même variable mais déclarée *publique* – cette distinction technique du langage Java autorise l'utilisation de variables ayant le même nom dans différentes parties du programme – et mon action sur la variable privée était sans incidence sur la publique alors qu'elle aurait dû en avoir. Comme il s'agissait du choix de l'alias pour un numéro de la pièce manquante, le programme examinait seulement les formes pour le premier alias. Je compris alors que j'avais fait tourner ainsi mon ordinateur pendant cinq semaines pour n'explorer que les formes qu'on pouvait obtenir avec un seul type d'alias (certaines pièces n'ont que deux alias comme le carré, mais les triangles en ont huit et le parallélogramme seize !). Je devais relancer le programme, en excluant le premier alias, et fusionner les différents fichiers obtenus en expurgeant les doublons existant dans les deux types de fichiers. Je relançais donc, mi-août, une nouvelle version du programme. Entre temps, Ron avait réussi à obtenir les tangrams de périmètre 15 et 16 (8 432 720 et 36 649 093 formes).

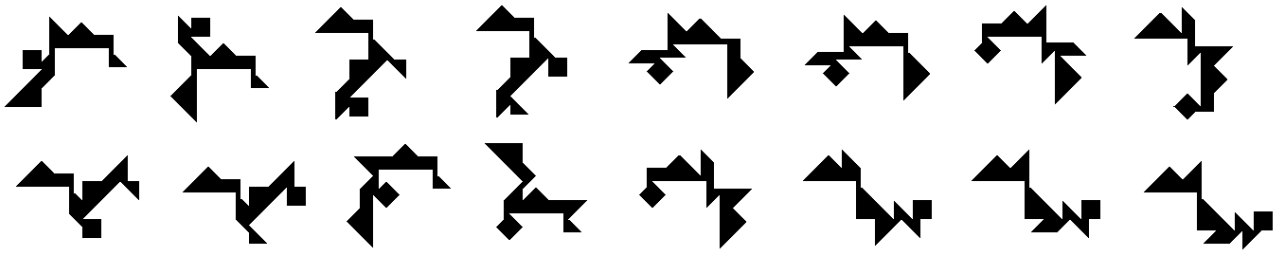


Illustration 70: Quelques-unes des formes hétérogènes dont le bord contient 24 segments (le maximum pour les formes hétérogènes)

Le calcul des nouvelles formes était assez rapide mais, pour éviter les doublons, tous les quatre millions de nouvelles formes, il fallait que le programme lise les milliards de formes déjà trouvées, et cela prenait à chaque fois environ une heure…

Le 21, Ron m'annonce qu'il a obtenu les tangrams de périmètre 17 (129 020 410 formes). Le 30 août, après 3.5 milliards de formes, arrive pour moi une bonne nouvelle : le carré a été enregistré ! Le 30 octobre, mon programme avait trouvé plus de 5.754 milliards de formes mais était loin d'avoir fini son travail ; de son côté Ron avait réussi à obtenir le nombre de tangrams à 19 côtés (832 500 284 formes) en découpant les fichiers selon un nouveau paramètre qu'il a appelé lambda. Le paramètre *lambda* est la différence entre le nombre de segments unitaires et le nombre de côtés. Sa plus petite valeur est 0, et il s'avère que la plus grande est 12 pour le Tangram. En procédant ainsi, Ron peut obtenir des fichiers plus petits et appliquer sa procédure d'expulsion des doublons qui utilise le tri des formes en même temps que la fusion des fichiers entre eux. Le procédé suivi par Ron demande des manipulations de fichiers qui sont délicates, avec des risques d'erreurs, et une comptabilité exigeante. Mon procédé semble plus aisé à mettre en œuvre (car la procédure d'expurgation des doublons est faite par le programme) mais prend plus de temps, principalement pour lire, de façon répétée, l'ensemble des formes déjà trouvées afin de ne pas créer de doublons. Il y eut aussi quelques incidents mineurs, comme l'arrêt inopiné de mon ordinateur en plein calcul (3 fois en sept mois de travail), ce qui nécessitait à chaque fois de relancer le programme, en partant d'un point nettement en arrière (pour ne rien oublier) quitte à perdre du temps. J'ai aussi expérimenté des variantes de mon mode opératoire, par exemple en lançant deux programmes simultanément qui travaillent sur des parties différentes. Le problème est qu'après il faut fusionner les différentes parties obtenues, en expulsant les doublons, sans rien perdre, et sans refaire plusieurs fois le même travail inutilement… Ce n'est que fin janvier 2012, après sept mois de calcul quasiment ininterrompu, que prit fin ce travail : j'avais ainsi trouvé 6 380 137 818 tangrams hétérogènes pleins. J'ai obtenu presque instantanément un début de validation, car parmi ces formes j'en trouvais exactement 4 842 205 qui présentaient la caractéristique d'être homogène, et ce nombre correspondait à celui trouvé précédemment en utilisant d'autres méthodes, par Ron d'abord et ensuite par moi. Mais la vraie validation de ce résultat final devait venir d'une confrontation entre mes résultats et ceux de Ron. Seulement, la recherche de Ron fut stoppée par des problèmes de santé. Âgé de 85 ans, ce pionnier de la recherche sur le Tangram ne pouvait plus continuer à effectuer le travail sur son ordinateur… Je dois donc me contenter de mes propres vérifications, et solliciter la tolérance de mes lecteurs face à d'éventuelles erreurs. En attendant que quelqu'un poursuive le travail et confirme (infirme ou complète) ces résultats que nous publions ici pour la première fois, nous pouvons extraire quelques informations supplémentaires de cet ensemble aussi colossal (plus de 6.38 milliards de formes !) que le nombre d'humains sur Terre en 2003. Comparativement, les formes homogènes sont

beaucoup plus restreintes puisqu'elles ne représentent que celle d'un pays comme l'Irlande (4 722 028 irlandais en 2012), deux fois la population intramuros de la ville de Paris (2 243 833 parisiens en 2013).

Question 9 : Pour rester dans les questions simples concernant cette multitude, revenons aux prolongements de la question de G. Hill (chapitre 2) qui nous invitait à compter les « rentrants » d'un tangram.

a) Notre question porte donc sur le nombre maximum de rentrants que l'on peut obtenir avec une forme hétérogène. Répondre à cette question dans les deux sens de « rentrant » : angle rentrant (>180°) ou partie rentrante (en creux).

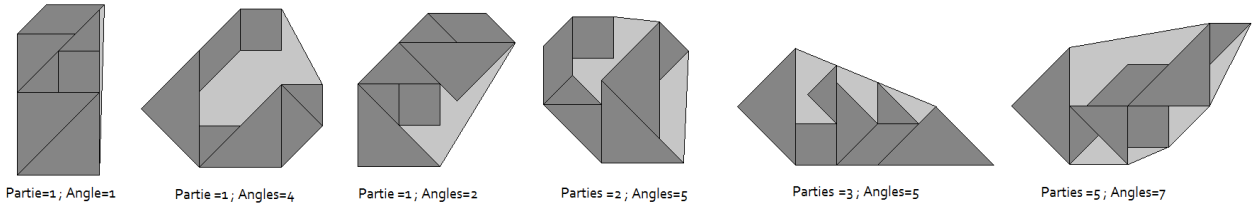


Illustration 71: Décomptes des parties rentrantes et des angles rentrants dans quelques tangrams

b) Parfois, c'est un alignement de points qui crée les parties rentrantes. Prouver l'alignement des quatre points de la 5ème figure puis chercher si un alignement de cinq points peut exister, créant quatre parties rentrantes consécutives.

Chapitre 10 : Étude des formes hétérogènes

Le fichier considérable des formes hétérogènes est étudié à travers trois caractéristiques principales : périmètre, convexité et symétrie. Des sous-ensembles remarquables peuvent être alors identifiés pour les valeurs extrêmes de ces paramètres.

Certaines caractéristiques sont assez simples à obtenir. Ainsi le nombre de côtés d'une forme hétérogène se déduit facilement de son encodage (il suffit de compter les segments qui sont dans la même direction). Dans la foulée, on peut déterminer le périmètre réel, c'est-à-dire la longueur exacte du bord de la forme, en ajoutant séparément les parts rationnelles et irrationnelles de chaque longueur de segment. Ce périmètre réel d'une forme hétérogène est un nombre de la forme $a\sqrt{2}+b$, où *a* et *b* sont des nombres entiers, *a* étant la part irrationnelle et *b* la part rationnelle du périmètre réel. Nous avons déterminé pour chacun des tangrams hétérogènes les parts rationnelles et irrationnelles du périmètre réel afin d'en connaître les différentes modalités et leur répartition.

	Part irrationnelle															
Part rationnelle	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	36	36
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	22 843	22 852
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21 486	0	2 002 191	2 023 677
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4 173	0	1 992 368	0	49 337 402	51 333 943
6	0	0	0	0	0	0	0	0	406	0	816 638	0	52 729 463	0	369 933 216	423 479 723
8	0	0	0	0	0	0	10	0	196 177	0	26 004 750	0	504 074 465	0	807 066 776	1 337 342 178
10	0	0	0	0	0	0	27 323	0	7 928 973	0	285 544 172	0	1 457 695 219	0	23 517 814	1 774 713 501
12	0	0	0	0	1 726	0	1 637 159	0	92 381 860	0	1 018 286 926	0	439 547 263	0	32 457	1 551 887 391
14	0	0	49	0	196 750	0	19 584 301	0	357 969 234	0	490 447 993	0	2 629 134	0	0	870 827 461
16	0	0	11 785	0	2 648 934	0	65 257 732	0	198 194 013	0	39 544 104	0	21	0	0	305 656 589
18	482	0	166 576	0	5 229 180	0	31 206 520	0	21 885 374	0	18 978	0	0	0	0	58 507 110
20	186	0	76 183	0	1 291 114	0	2 629 404	0	346 470	0	0	0	0	0	0	4 343 357
Total	668	0	254 593	0	9 367 704	0	120 342 449	0	678 902 507	0	1 860 667 734	0	2 458 689 428	0	1 251 912 735	6 380 137 818

Tableau 39: Répartition des formes hétérogènes selon leurs périmètres réels. Les nombres indiqués sont les effectifs des formes ayant telle part rationnelle et telle part irrationnelle

La part rationnelle varie entre −2 et 20, en ne prenant que des valeurs paires ; même chose pour la part irrationnelle qui varie, elle, entre −4 et 10. Finalement, les couples de nombres formés par les valeurs rationnelles et irrationnelles du périmètre réel, ne prennent que cinquante-et-une valeurs distinctes pour l'ensemble de tous les tangrams hétérogènes. Ces valeurs conduisent à des périmètres réels qui s'échelonnent entre $2\sqrt{2}+8\approx 10.8284$ et $8\sqrt{2}+16\approx 27.3137$, ces valeurs extrêmes n'étant, bien sûr, que peu représentées (10 formes pour la plus petite et 21 formes pour la plus grande). À titre de comparaison, les tangrams homogènes ont des périmètres qui prennent vingt-neuf valeurs distinctes s'échelonnant entre 10.828 et

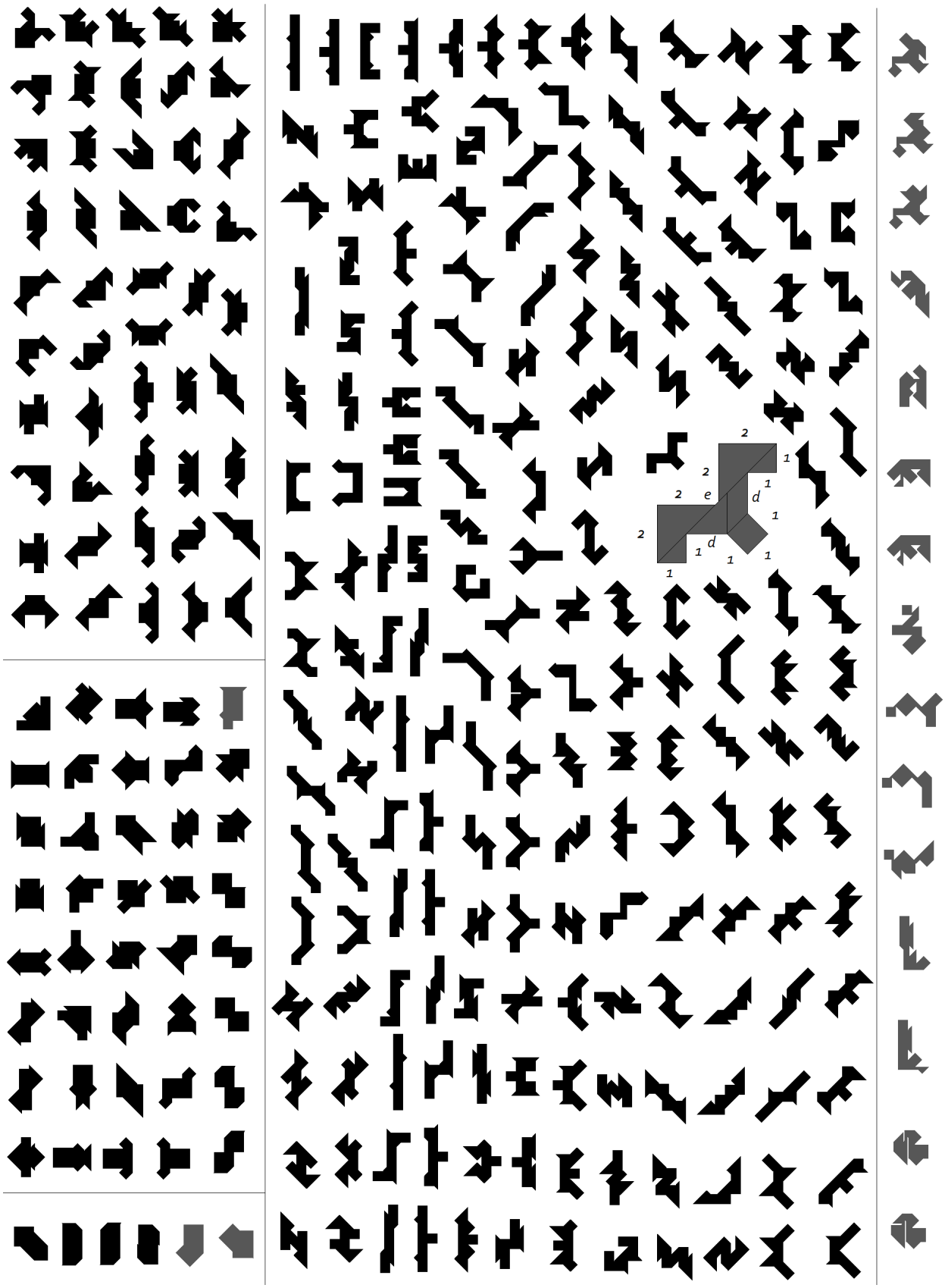


Illustration 72: Les 273 tangrams non-homogènes symétriques dont le périmètre est un nombre entier : 12 (4 formes), 14 (39 formes), 16 (48 formes) ou 18 (182 formes dont une solutionnée). La figure présente aussi quelques formes non symétriques (en gris) de périmètre 20 essentiellement (à droite), cette catégorie pourtant nombreuse (1 291 114 formes) n'ayant pas de forme symétrique

22.142. Il n'y a pas de valeur inférieure au minimum atteint par les formes homogènes (10.828), alors que onze valeurs du périmètre réel dépassent le maximum du périmètre des formes homogènes (1 020 599 012 formes concernées, soit 16 % de l'ensemble).

La valeur moyenne du périmètre réel est de 20.93 environ. Comme souvent dans la répartition des formes, il existe une forte dissymétrie vers les valeurs supérieures : 37 valeurs sont plus petites que la moyenne alors que quatorze sont plus grandes. La valeur du périmètre réel la plus fréquente est $8\sqrt{2}+10\approx 21.3137$ qui est la mesure du périmètre de 1 457 695 219 formes hétérogènes, soit environ 23% de l'ensemble. Pour reprendre notre analogie numérique avec la population mondiale, cet ensemble équivaut à la population des deux berceaux du Tangram que sont la Chine et le Japon réunis (1.331 milliard pour la Chine et 0.127 pour le Japon).

Si on effectue la somme de toutes les formes hétérogènes ayant une part irrationnelle nulle, donc un périmètre réel entier (colonne en gris clair de notre tableau 39), on trouve 9 367 704 formes, réparties dans quatre catégories correspondant à des périmètres égaux à 12 (1726 formes), 14 (196 750 formes), 16 (2 648 934 formes), 18 (5 229 180 formes) et 20 (1 291 114 formes). Ces formes ne sont généralement pas des formes homogènes, comme on pourrait s'y attendre. En fait, seulement 135 de ces formes en sont et constituent la famille des octaminos reconstituables

	Part rationnelle	Part irrationnelle	Périmètre réel	Effectif
1	8	2	10.83	10
2	14	-2	11.17	49
3	0	8	11.31	9
4	6	4	11.66	406
5	12	0	12.00	1 726
6	-2	10	12.14	36
7	18	-4	12.34	482
8	4	6	12.49	4 173
9	10	2	12.83	27 323
10	16	-2	13.17	11 785
11	2	8	13.31	21 486
12	8	4	13.66	196 177
13	14	0	14.00	196 750
14	0	10	14.14	22 843
15	20	-4	14.34	186
16	6	6	14.49	816 638
17	12	2	14.83	1 637 159
18	18	-2	15.17	166 576
19	4	8	15.31	1 992 368
20	10	4	15.66	7 928 973
21	16	0	16.00	2 648 934
22	2	10	16.14	2 002 191
23	8	6	16.49	26 004 750
24	14	2	16.83	19 584 301
25	20	-2	17.17	76 183
26	6	8	17.31	52 729 463
27	12	4	17.66	92 381 860
28	18	0	18.00	5 229 180
29	4	10	18.14	49 337 402
30	10	6	18.49	285 544 172
31	16	2	18.83	65 257 732
32	8	8	19.31	504 074 465
33	14	4	19.66	357 969 234
34	20	0	20.00	1 291 114
35	6	10	20.14	369 933 216
36	12	6	20.49	1 018 286 926
37	18	2	20.83	31 206 520
38	10	8	21.31	1 457 695 219
39	16	4	21.66	198 194 013
40	8	10	22.14	807 066 776
41	14	6	22.49	490 447 993
42	20	2	22.83	2 629 404
43	12	8	23.31	439 547 263
44	18	4	23.66	21 885 374
45	10	10	24.14	23 517 814
46	16	6	24.49	39 544 104
47	14	8	25.31	2 629 134
48	20	4	25.66	346 470
49	12	10	26.14	32 457
50	18	6	26.49	18 978
51	16	8	27.31	21

Tableau 40: Les 51 différentes valeurs du périmètre réel d'un tangram hétérogène s'écrivent $a\sqrt{2}+b$ *où b est la part rationnelle et a la part irrationnelle*

avec le Tangram (voir au chapitre 7, notamment la figure 54). À quoi ressemblent alors les autres formes de périmètre entier ? Ont-elles un aspect particulier, ou sont-elles juste le fruit du hasard qui a neutralisé ainsi, « sans le faire exprès », la composante irrationnelle ? Nous avons affaire à une très importante collection de formes qui n'ont, dans leur aspect extérieur, rien qui indique cette caractéristique pourtant vraiment remarquable. Ce sont des combinaisons variées de segments unitaires ayant, pour la plupart, des parties irrationnelles non nulles, qui produit ainsi ce groupe de formes sans partie irrationnelle. La figure solutionnée de notre illustration a un périmètre qui se calcule ainsi, en ajoutant les 18 segments qui le compose : 15+2*d*+*e*. Deux segments de longueur $\sqrt{2}$ disparaissent de la somme,

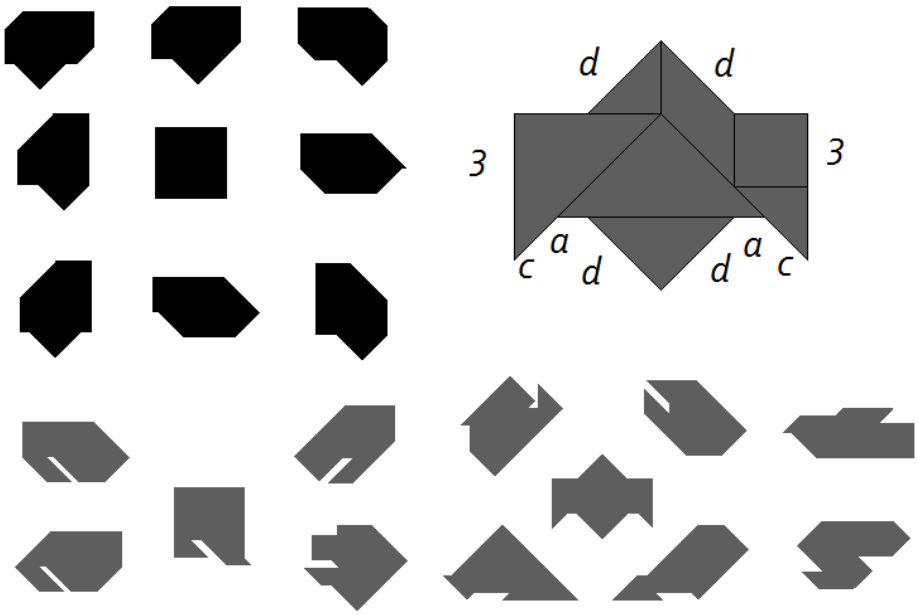


Illustration 73: Quelques-unes des 22 852 formes hétérogènes dont la part rationnelle du périmètre est nulle. En noir, les 9 formes qui ont un périmètre égal à $8\sqrt{2}$ *(dont le carré, qui est la seule forme homogène du lot). En gris, le périmètre vaut* $10\sqrt{2}$ *. La solution de la seule forme symétrique montre qu'ici, la somme des longueurs des segments fractionnés (2a+2c) neutralise les 6 longueurs 1*

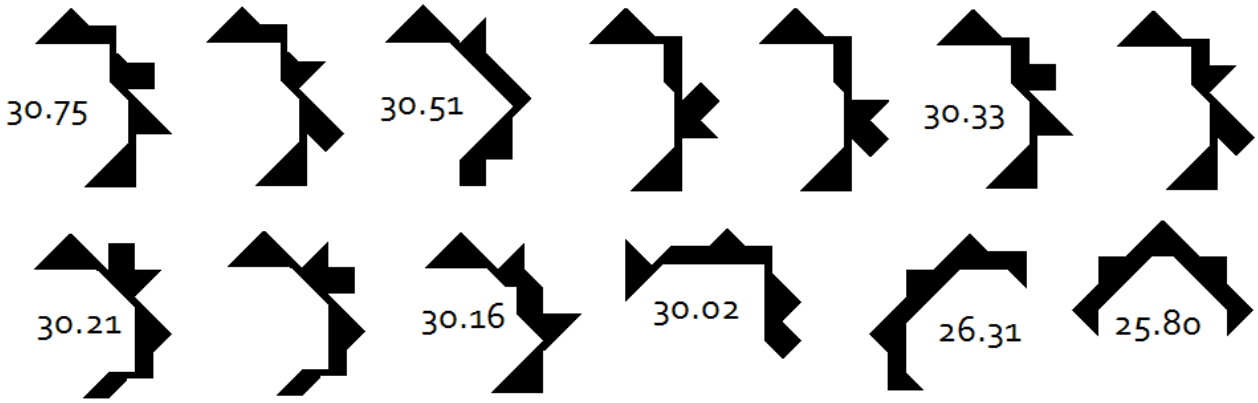


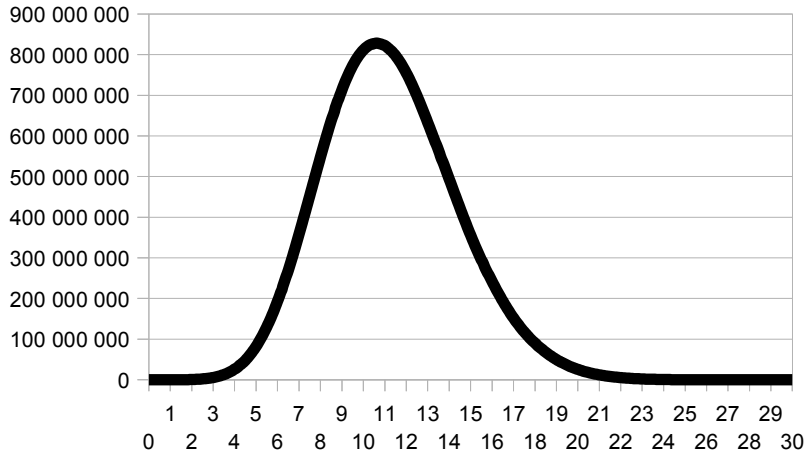
Illustration 74: Les 11 formes hétérogènes de convexité supérieure à 30 petits triangles et les 2 formes symétriques de convexité maximale

neutralisés par le segment fragmentaire *e*, cela se traduit par la somme $15+2(\sqrt{2})+3-2\sqrt{2}=18$. Pour constituer ce groupe de formes, il y a cinq types de longueurs qui contribuent négativement à la part irrationnelle : la *b* (n°5, 14%) enlève 1 segment, la *e* (n°1, 3% des segments) en enlève 2, la *g* (n°7, 0.008% des segments) en enlève 3, la *h* (n°10, 0.0007%) en enlève 2 et la *j* (n°3, 0.0001% des segments) en enlève 4. De l'autre côté, il y a trois types de longueurs qui y contribuent positivement : la *d* (n°12, 16%) ajoute 1 segment, la *a* (n°4, 2.4%) en ajoute 1 et la *c* (n°8, 0.01%) en ajoute 2. Sur les 170 millions de segments concernés, il y a 31 millions de fois la longueur $\sqrt{2}$ qui s'ajoute et autant qui se retranche, ce qui représente en moyenne par forme, environ 3.4 fois la longueur $\sqrt{2}$ qui s'ajoute et se retranche.

Si on effectue de même, la somme de toutes les formes hétérogènes ayant une part rationnelle nulle, donc un périmètre réel multiple de $\sqrt{2}$, on trouve seulement 22 852 formes, réparties dans deux catégories correspondants à des périmètres égaux à $8\sqrt{2}$ (9 formes, dont le carré) et $10\sqrt{2}$ (22 843 formes). Ces formes ne sont pas des formes homogènes, sauf le carré. À quoi ressemblent alors les autres formes au périmètre multiple de $\sqrt{2}$? Nous avons illustré ceci avec quelques exemples (figure 74) qui proviennent des deux catégories, et qui montrent que ces formes n'ont rien de particulier en dehors de cette annulation *ex-abrupto* de la part rationnelle. La figure solutionnée de notre illustration a un périmètre qui se calcule en ajoutant les quatorze segments qui le compose : 6+2*a*+2*c*+4*d*. Il y a ainsi six segments de longueur 1 qui disparaissent

de	à	effectif
0	0.999	1 046
1	1.999	48 185
2	2.999	749 245
3	3.999	5 703 208
4	4.999	26 080 974
5	5.999	82 265 611
6	6.999	192 773 360
7	7.999	358 222 690
8	8.999	547 243 644
9	9.999	713 679 815
10	10.999	811 423 227
11	11.999	822 101 918
12	12.999	755 145 920
13	13.999	633 700 225
14	14.999	494 029 484
15	15.999	356 279 097
16	16.999	241 573 307
17	17.999	152 239 834
18	18.999	90 385 532
19	19.999	49 848 738
20	20.999	25 754 283
21	21.999	12 234 373
22	22.999	5 398 998
23	23.999	2 143 133
24	24.999	776 155
25	25.999	249 176
26	26.999	67 708
27	27.999	15 526
28	28.999	3 046
29	29.999	349
30	30.999	11

Tableau 41: Répartition par tranches des convexités réelles



Graphique 6: La répartition des convexités est centrée de façon dissymétrique autour de la valeur moyenne qui est de 11.73

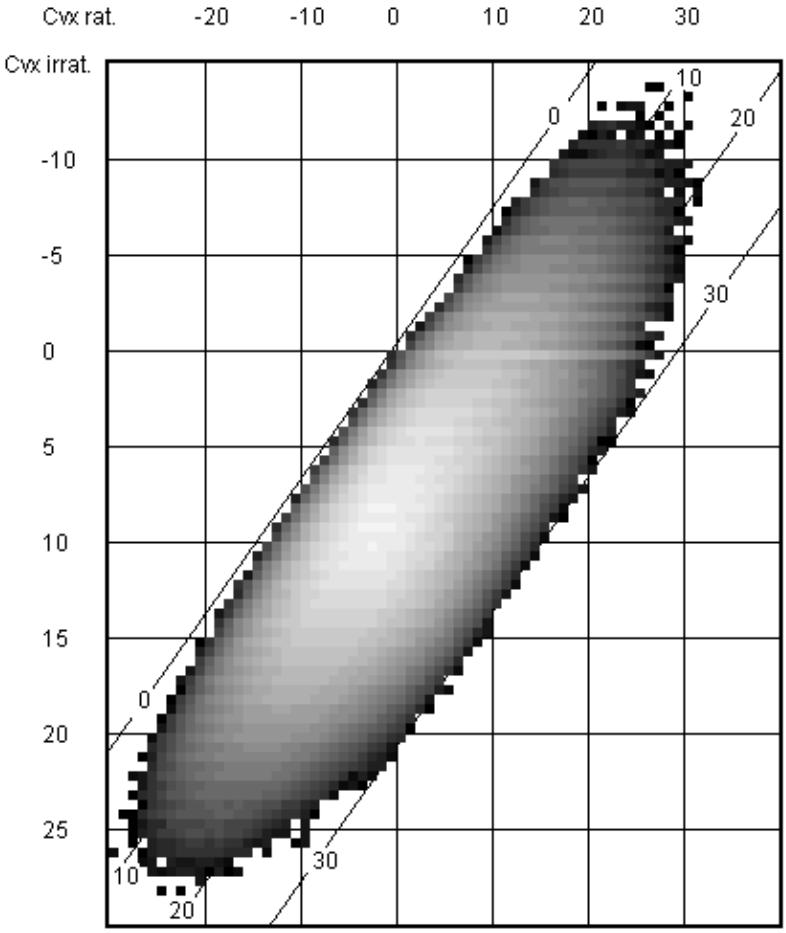


Illustration 75: Les coordonnées rationnelles et irrationnelles de la convexité des tangrams hétérogènes permettent de dessiner ce nuage où les couleurs sont basées sur l'exposant de la puissance de 2 de l'effectif (noir de $2^0=1$ à $2^1=2$, … , blanc de $2^{22}=4191304$ à $2^{23}=8388608$). Les lignes d'isoconvexités sont esquissées rappelant que la convexité varie entre 0 et 30 environ

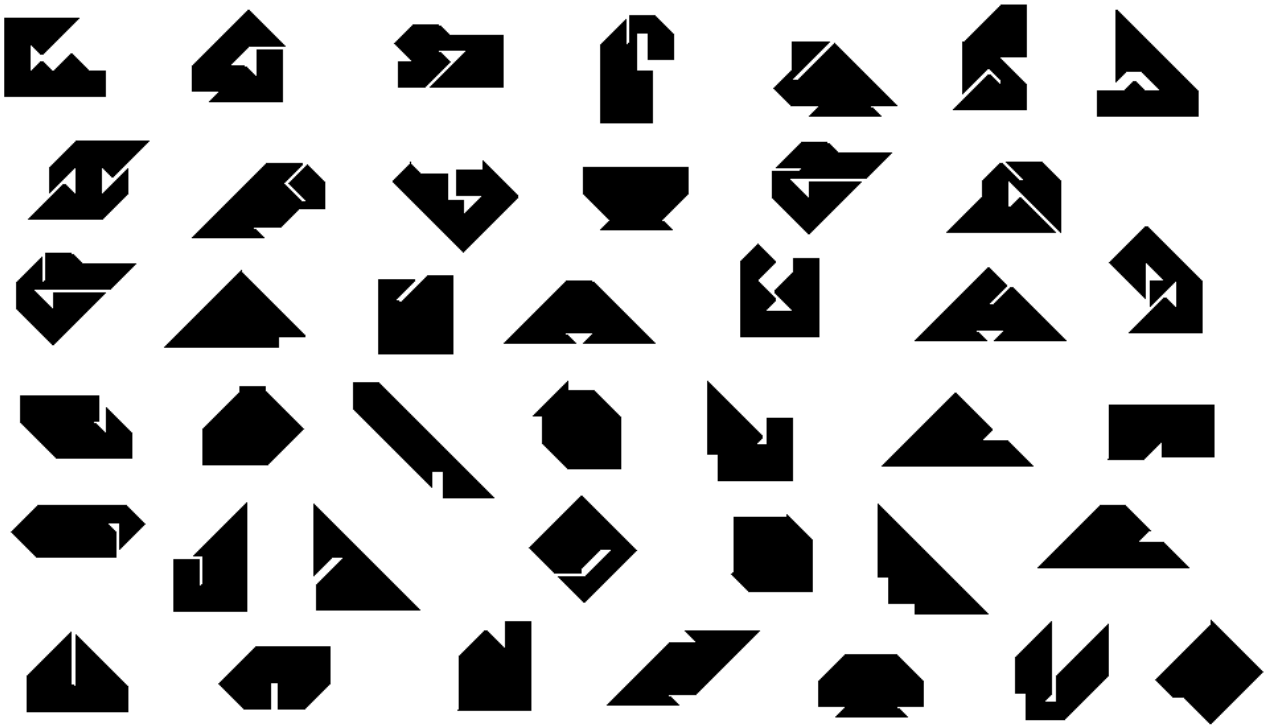


Illustration 76: Quelques tangrams non-homogènes de faible convexité montrant de curieuses excavations ou petits décrochements.

de la somme, neutralisés par les segments fragmentaires *a* et *c*, $6+2(\sqrt{2}-1)+2(2\sqrt{2}-2)+4\sqrt{2}=10\sqrt{2}$.

Pour constituer ce groupe de formes, il y a quatre types de longueurs qui contribuent négativement à la part rationnelle : la *a* (n°4, 20% des segments) en enlève 1, la *c* (n°8, 6%) en enlève 2, la *f* (n°2, 0.7%) en enlève 4 et la *i* (n°11, 0.4%) en enlève 3. Par contre, il n'y a qu'un seul type de longueur qui y contribue positivement, la longueur 1 (n°9, 37%) qui en ajoute 1. Si bien que, pour ces formes, pour chaque segment de longueur *a*, il s'ajoute quatre segments de longueur 1 qui annulent le déficit rationnel. La longueur *d* (n°12, 36%) est aussi présente mais ne contribue pas à la part rationnelle. Sur les 318 490 segments concernés, il y en a 177 077 de longueur 1 qui s'ajoutent et autant qui se retranchent, ce qui représente environ 5.12 par formes en moyenne qui s'ajoutent et se retranchent.

Nous avons déjà introduit la notion de convexité réelle, la différence entre l'aire de l'enveloppe convexe (le polygone convexe minimum qui contient toute la forme) et l'aire du Tangram (chapitre 5 et 8 notamment). Pour une forme hétérogène, c'est même la seule mesure satisfaisante de la convexité. La convexité réelle est nulle lorsque la forme est convexe et peut aller jusqu'à 30.75 (l'unité d'aire étant le petit triangle), c'est-à-dire $6+17.5\sqrt{2}$ pour les formes les moins convexes, la valeur moyenne étant de 11.73 triangles. Nous avons calculé la convexité réelle des tangrams et l'avons enregistrée sous la forme de deux nombres entiers *a* et *b* sachant que, dans tous les cas, les convexités réelles pouvaient se mettre sous la forme $a+\frac{b}{\sqrt{2}}$ où *a* et *b* sont des nombres entiers, ce qui revient à $a+\frac{b}{2}\sqrt{2}$ (voir question 1). Le nombre de valeurs distinctes de la convexité est très grand : il n'y a pas moins de 1 939 combinaisons différentes des parties rationnelles et irrationnelles, donc 1 939 valeurs distinctes possibles. La partie rationnelle est un entier compris entre -29 et 32, tandis que la partie irrationnelle varie entre -14 et 28, de 0.5 en 0.5. Cela fait 62 valeurs distinctes possibles pour la partie rationnelle et 85 valeurs distinctes possibles pour la partie irrationnelle. En prenant les effectifs de chaque valeur de la convexité pour colorer un pixel, et en positionnant ces pixels selon les parties rationnelles et irrationnelles de la convexité, nous obtenons le nuage allongé de la figure ci-dessous. Le trait clair horizontal correspondant à une partie irrationnelle nulle n'est pas une rayure accidentelle. Il s'agit d'une tranche particulièrement abondante relativement à son voisinage (d'où la couleur plus claire) qui contient plus de trente-deux millions de formes.

Autrement dit, la convexité réelle semble varier de façon continue lorsqu'on examine les convexités approchées avec la précision du centième de triangle. Pour synthétiser cette information dans un tableau raisonnable, nous présentons la distribution des valeurs de convexité par tranches d'aires de un triangle. Cette

simplification génère tout de même trente-et-une tranches. Rappelons que la convexité réelle des tangrams homogènes atteint un maximum de 27 triangles (4 formes). Il y a près de 20 000 tangrams hétérogènes qui ont une convexité réelle supérieure ou égale à 27, et onze de ces formes ont une convexité supérieure à trente triangles.

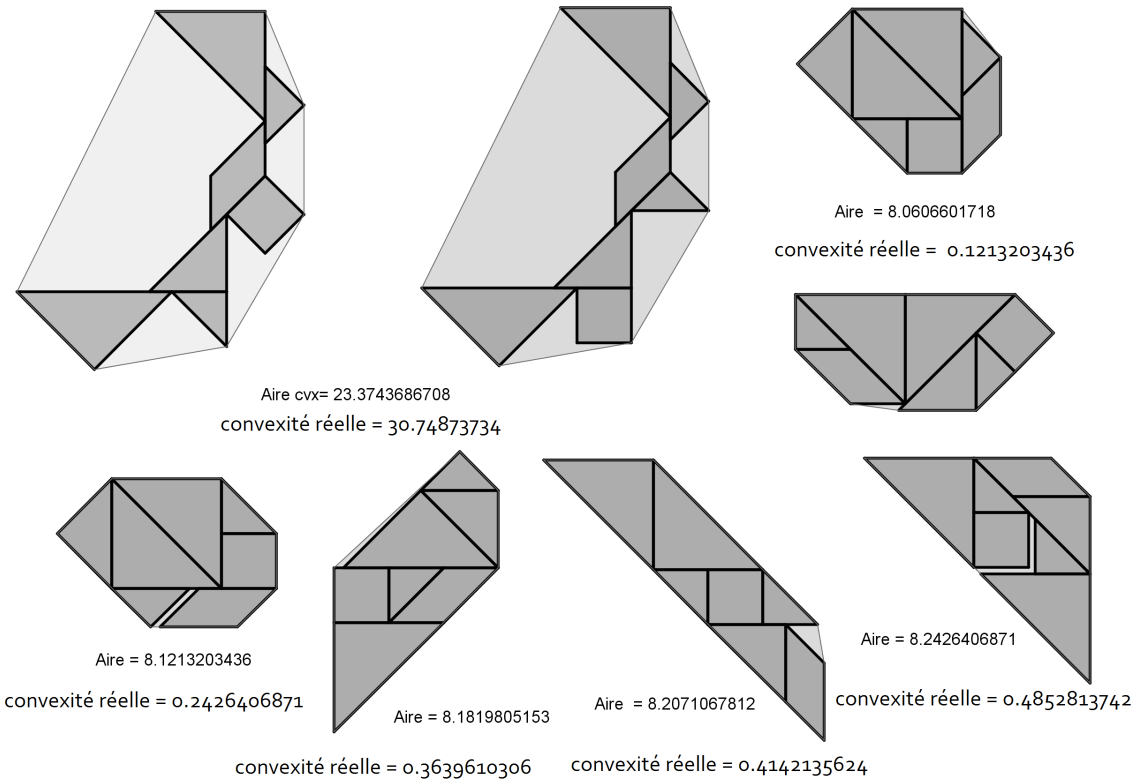


Illustration 77: Les 2 formes de convexité maximale (30.75), 2 des 8 formes de convexité non nulle minimale (0.12) et 4 autres formes de faible convexité (inférieure à 0.5)

Les tangrams hétérogènes qui ont une petite convexité sont plus intéressants car ils s'approchent des formes convexes qui sont celles qui dissimulent le plus les silhouettes des pièces et, par conséquent, qui sont les plus difficiles à reconstituer. Ils sont aussi beaucoup plus nombreux que les formes convexes : 1 046 formes réparties dans 19 classes différentes ont ainsi une convexité inférieure à un triangle, alors qu'il n'y a que treize formes convexes (de convexité nulle). Notre illustration montre certaines de ces formes de faible convexité qui cachent parfois dans les petits détails leur originalité : un mini-décrochement, une fine entaille ou un périmètre remarquablement découpé. On peut découvrir aussi de multiples variantes d'une même forme, comme ces quelques triangles dont la surface est entamée, ici ou là, créant autant d'illusions d'une partie manquante, comme nous l'a fait observer Sam Lloyd, ce grand auteur de la fin du XIXème siècle.

La plus petite convexité non nulle est égale à 0.12 petit triangle environ. Il n'y a que huit formes ayant cette convexité qui se résume à l'aire d'un triangle de côté $3-2\sqrt{2}$

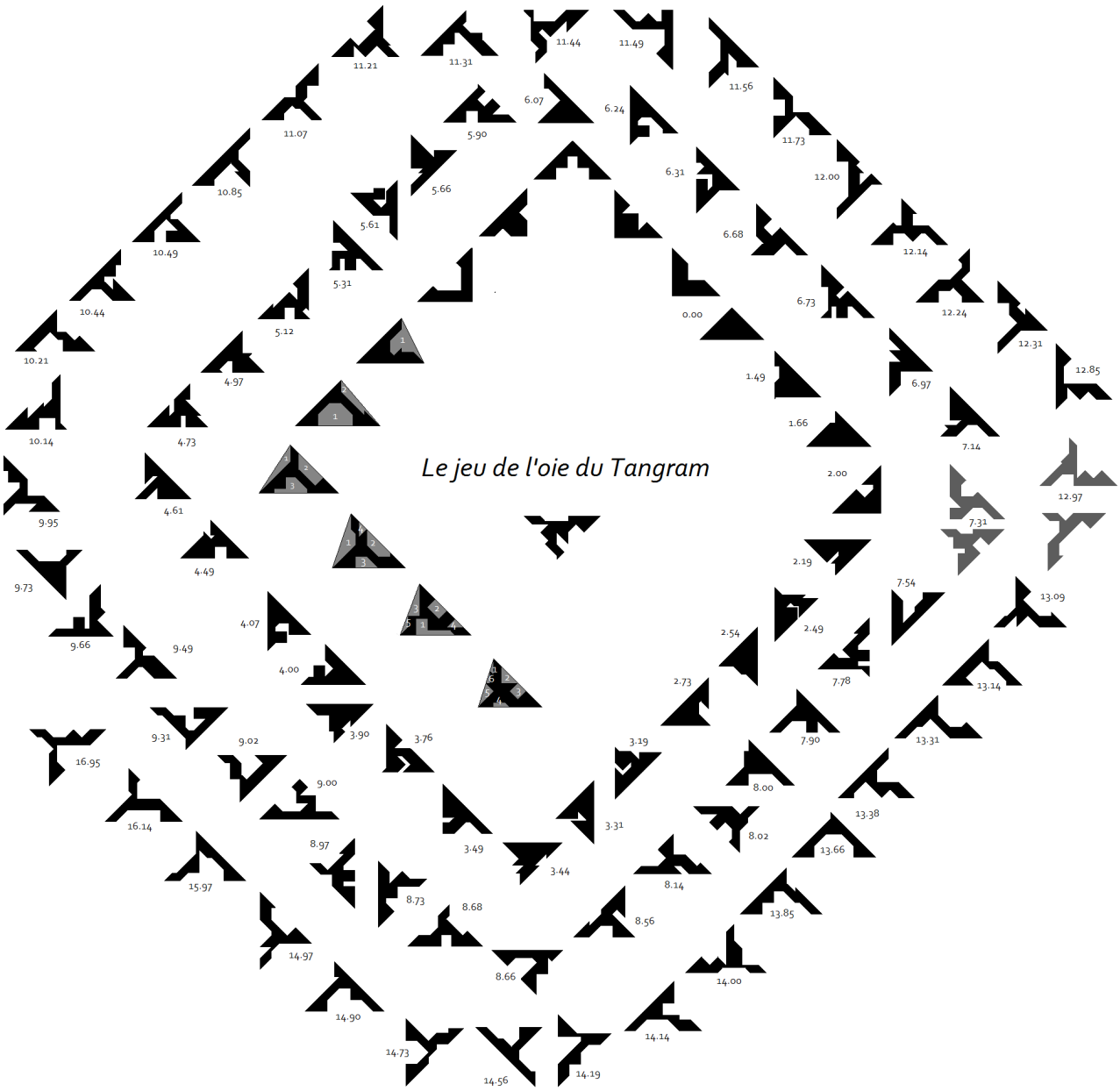


Illustration 78: Tangrams à enveloppe triangulaire : 86 convexités différentes, 6 formes symétriques et une forme ayant 20 côtés. En gris : formes de même convexité et de dimensions différentes

et de hauteur $\frac{\sqrt{2}}{2}$, son aire vaut donc $-2+1.5\sqrt{2}\approx 0.1213203436$ .La valeur de la convexité qui vient ensuite est le double de cette valeur minimale, soit $-4+3\sqrt{2}\approx 0.2426406871$. Il y a 22 formes qui ont cette convexité de 0.24, ensuite vient la convexité 0.36 (le triple de la convexité minimale) pour laquelle il y a onze formes. La quatrième valeur n'est pas le quadruple de la convexité minimale (0.49) qui vient seulement en cinquième position, mais 0.41 environ (en réalité $\sqrt{2}-1\approx 0.4142135624$). On voit un exemplaire de forme ayant cette convexité sur l'illustration mais, en tout, il en existe 28 formes différentes. Pour la forme de l'illustration, cette convexité est égale à l'aire du triangle de côté $2-\sqrt{2}$ et de

hauteur $\frac{\sqrt{2}}{2}$. En ajoutant les 44 formes de convexité 0.49, cela nous fait 113 formes en tout dont la convexité prend les cinq valeurs non nulles minimales inférieures à un demi petit triangle.

La détermination de la convexité réelle passe par celle des sommets de l'enveloppe convexe – ce polygone qui ceinture étroitement la forme. Certaines informations sur ces enveloppes convexes comme le nombre de sommets/côtés sont directement accessibles et identifiables sur les tangrams. Ce nombre varie entre trois et onze. Pourquoi onze et pas douze ? C'est ainsi, on pourrait avoir des enveloppes convexes à douze côtés sans doute avec un jeu voisin du Tangram (voir plus loin, les enveloppes des 16compacts), mais pour les tangrams hétérogènes, il n'y a que 25 674 formes, soit 0.0004% environ (une forme sur 250 000) à s'inscrire dans une enveloppe à onze côtés. Aucune ne s'inscrit dans une enveloppe à douze côtés. La moyenne du nombre de côtés de cette enveloppe convexe est de 6.67 et la distribution des valeurs est assez concentrée et régulière autour de cette moyenne.

Les formes qui s'inscrivent dans une enveloppe triangulaire sont les moins nombreuses et les plus remarquables : d'un coup d'œil, on identifie le triangle, et la forme du Tangram s'y découpe en creux. On peut, pour cette famille de près de 25 000 membres, identifier toutes les sortes de triangles qui se rencontrent. La figure qui suit nous donne un aperçu de cette variabilité : 86 valeurs différentes de la convexité qui est comprise entre 0 et 16.95 petits triangles (l'aire de ces enveloppes varie donc entre 16 et 32.95 petits triangles) ; 88 dimensions différentes de triangles (deux formes distinctes pour les convexités 7.31 et 12.97) ; 4 919 triangles isocèles dont 855 qui ne sont pas rectangles ; 4 064 triangles rectangles tous isocèles ; 378 formes homogènes ; le nombre

côtés enveloppe cvx	Effectif
3	24 985
4	23 763 141
5	539 581 720
6	2 179 448 028
7	2 544 919 569
8	971 127 115
9	117 400 300
10	3 847 286
11	25 674

Tableau 42: Répartition des formes hétérogènes selon le nombre de côtés de l'enveloppe convexe

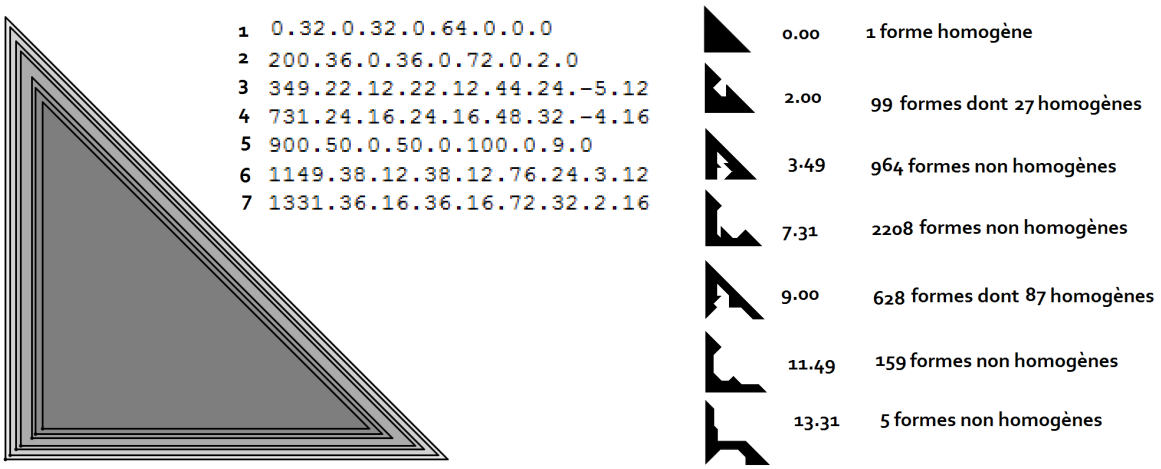


Illustration 79: Les 7 différentes enveloppes qui soient des triangles isocèles rectangles

de côtés varie entre 3 et 20 ; les parties en « creux » qui grignotent l'enveloppe convexe peuvent être de formes et de dimensions très variées, et leur nombre peut aller jusqu'à cinq (voir question 9).

Parmi les 88 sortes d'enveloppes triangulaires des formes hétérogènes, il s'en trouve sept qui sont des triangles isocèles rectangles. Ces sept demi-carrés ont des petits côtés compris entre 4 et $4+\sqrt{2}$ unités : 4, 4.243, 4.414, 4.828, 5, 5.243 et 5.414 environ. La figure ci-dessous nous montre un exemplaire de chacune de ces dimensions. La plus répandue de ces enveloppes est celle de convexité 7.31 qui correspond à un demi-carré de côté 4.828, une des deux seules enveloppes triangulaires qui existe en deux dimensions (l'autre forme de convexité 7.31 est un triangle acutangle dont le plus grand angle vaut environ 70°). Nous avons laissé les caractéristiques de ces triangles sous la forme manipulée par nos programmes : la convexité réelle arrondie au centième (×100) suivie des trois longueurs des côtés au carré sous la forme du double de la partie rationnelle et du double de la partie irrationnelle, les deux derniers codes étant la partie rationnelle et irrationnelle (doublée) de la convexité. Pour la forme n°4 par exemple, celle de convexité 7.31, le premier côté est donné par les codes 24 et 16 qui signifient que la longueur au carrée est $12+8\sqrt{2}$, donc la longueur exacte est $\sqrt{12+8\sqrt{2}}\approx 4.828$.

Avant de refermer notre dossier sur les enveloppes convexes triangulaires, nous aimerions préciser les différentes sortes de triangles isocèles qui se rencontrent : tous ont la même forme avec un angle de 45° et deux angles de 67.5°, comme des octogones réguliers coupés en huit. Les 855 tangrams qui s'enveloppent ainsi, tous non-homogènes, sont répartis en cinq catégories, les grands côtés de ces triangles allant de $1+3\sqrt{2}\approx 5.243$ à $5+\sqrt{2}\approx 6.414$, en passant par 5.414, 5.828 et 6.243. La catégorie la plus répandue est celle du milieu qui conduit à des formes de convexité 8.02.

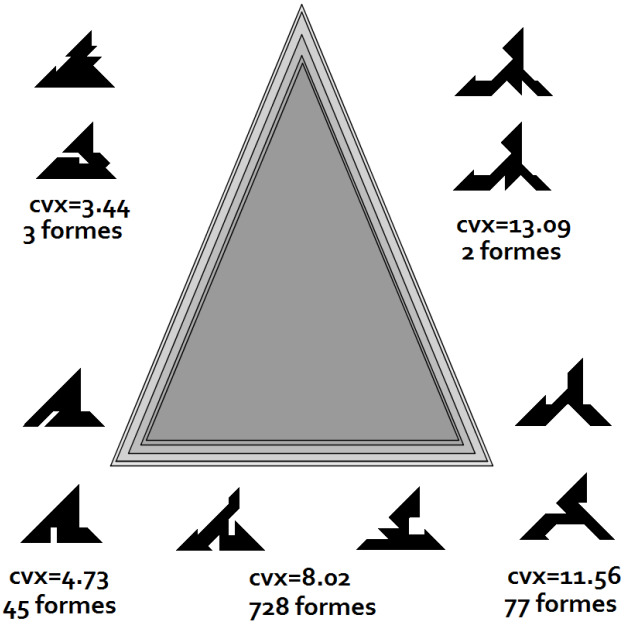


Illustration 80: Les 5 sortes d'enveloppes triangulaires isocèles qui ne sont pas rectangles

On pourrait écrire un livre entier sur les enveloppes convexes des tangrams hétérogènes qui ne sont qu'exceptionnellement triangulaires. Nous en resterons à cette courte introduction. Pour les enveloppes hendécagonales (onze côtés), presque aussi nombreuses que les triangulaires, combien de formes différentes avons-nous à votre avis ? Pour les triangulaires, on avait 86 convexités différentes.

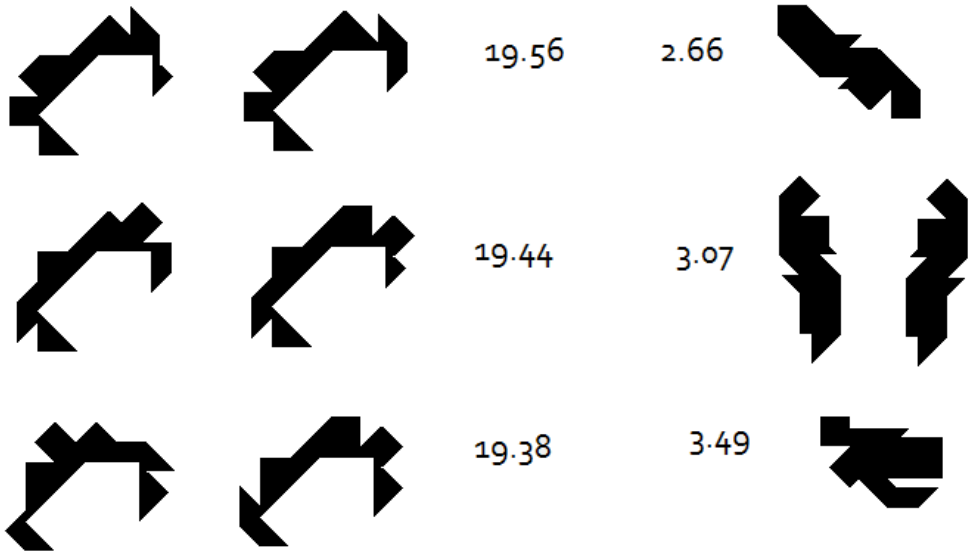


Illustration 81: Les 10 formes hétérogènes d'enveloppes hendécagonales dont les convexités sont les plus grandes et les plus petites

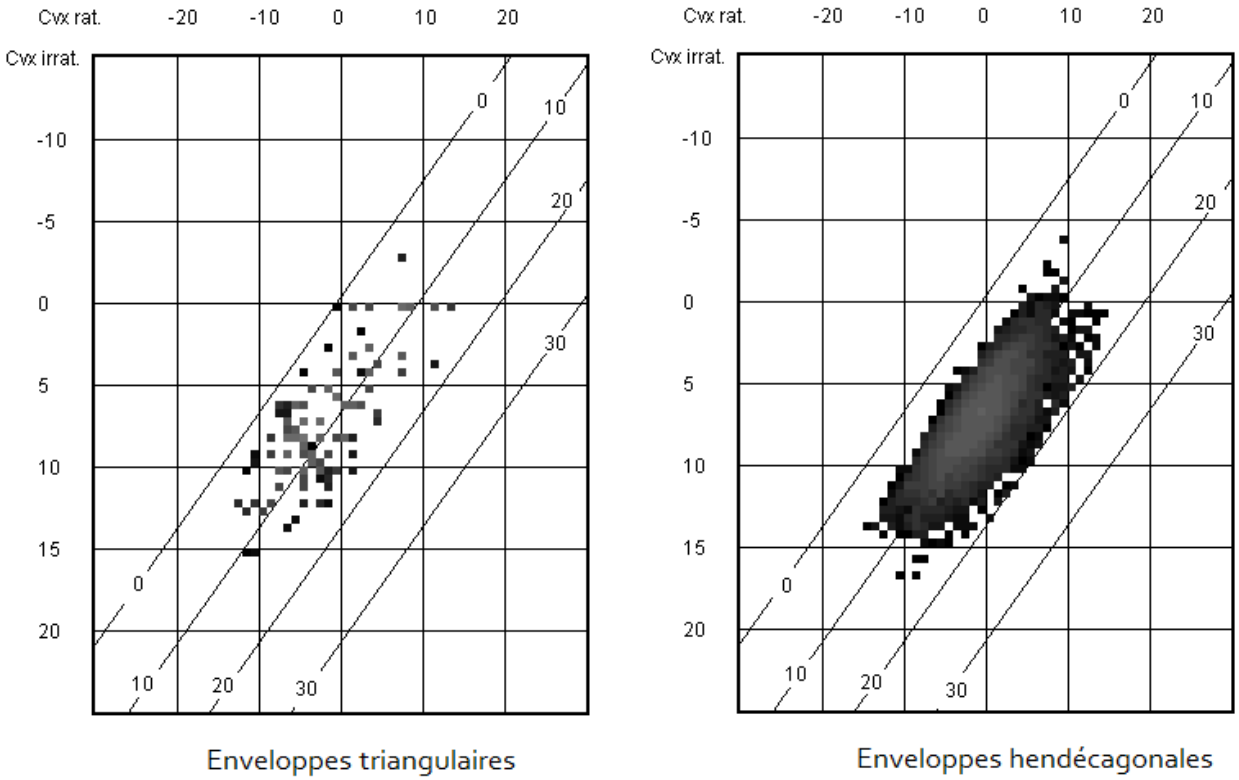


Illustration 82: Répartitions des parties rationnelles et irrationnelles des tangrams hétérogènes ayant une enveloppe convexe triangulaire (à gauche) et hendécagonale (à droite)

Nombre de côtés	Symétriques	dont homo	dont non-homo	Ratio Homo/Sym	Ratio Sym/Hétéro
3	1	1	0	100%	100%
4	4	4	0	100%	67%
5	2	2	0	100%	3.8%
6	33	27	6	82%	5.2%
7	22	8	14	36%	0.28%
8	129	83	46	64%	0.18%
9	80	35	45	44%	0.015%
10	551	263	288	48%	0.019%
11	252	78	174	31%	0.0019%
12	1 306	456	850	35%	0.0025%
13	441	97	344	22%	0.00027%
14	2 220	571	1 649	26%	0.00054%
15	403	51	352	13%	0.000048%
16	1 825	197	1 628	11%	0.00014%
17	111	3	108	3%	0.0000073%
18	559	8	551	1%	0.000046%
19	0	0	0	0%	0%
20	48	0	48	0%	0.000025%
21	0	0	0	0%	0%
22	0	0	0	0%	0%
23	0	0	0	0%	0%
Total	7 987	1 884	6 103		
Moyennes	13.904	12.502	14.337	23.6%	0.00013%

Tableau 43: Répartition des tangrams hétérogènes symétriques selon leur nombre de côtés et leur caractéristique (homogènes ou non) et évolution de 2 ratios concernant ces formes symétriques

Et bien, les enveloppes hendécagonales sont beaucoup plus variées puisqu'on dénombre pas moins de 405 convexités différentes. Les nuages des convexités réelles (à comparer avec le nuage complet de la figure) de ces deux types de tangrams hétérogènes sont explicites : alors que les tangrams d'enveloppes

		Non-homogènes						Homogènes					
Côtés	Total	Centre R4	Centre R2	1 seul axe	2 axes	4 axes	Total	Centre R4	Centre R2	1 seul axe	2 axes	4 axes	total
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
4	4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	4
5	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
6	33	0	3	3	0	0	6	0	10	13	4	0	27
7	22	0	0	14	0	0	14	0	0	8	0	0	8
8	129	0	22	23	1	0	46	0	40	42	1	0	83
9	80	0	0	45	0	0	45	0	0	35	0	0	35
10	551	0	153	133	2	0	288	0	135	127	1	0	263
11	252	0	0	174	0	0	174	0	0	78	0	0	78
12	1306	0	502	348	0	0	850	0	259	197	0	0	456
13	441	0	0	344	0	0	344	0	0	97	0	0	97
14	2220	0	986	663	0	0	1 649	0	327	244	0	0	571
15	403	0	0	352	0	0	352	0	0	51	0	0	51
16	1825	0	959	669	0	0	1 628	0	120	77	0	0	197
17	111	0	0	108	0	0	108	0	0	3	0	0	3
18	559	0	336	215	0	0	551	0	0	8	0	0	8
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	48	0	19	29	0	0	48	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 44: Répartition des formes non-homogènes symétriques selon le nombre de côtés, la catégorie (homogènes ou non), et la nature des éléments de symétrie

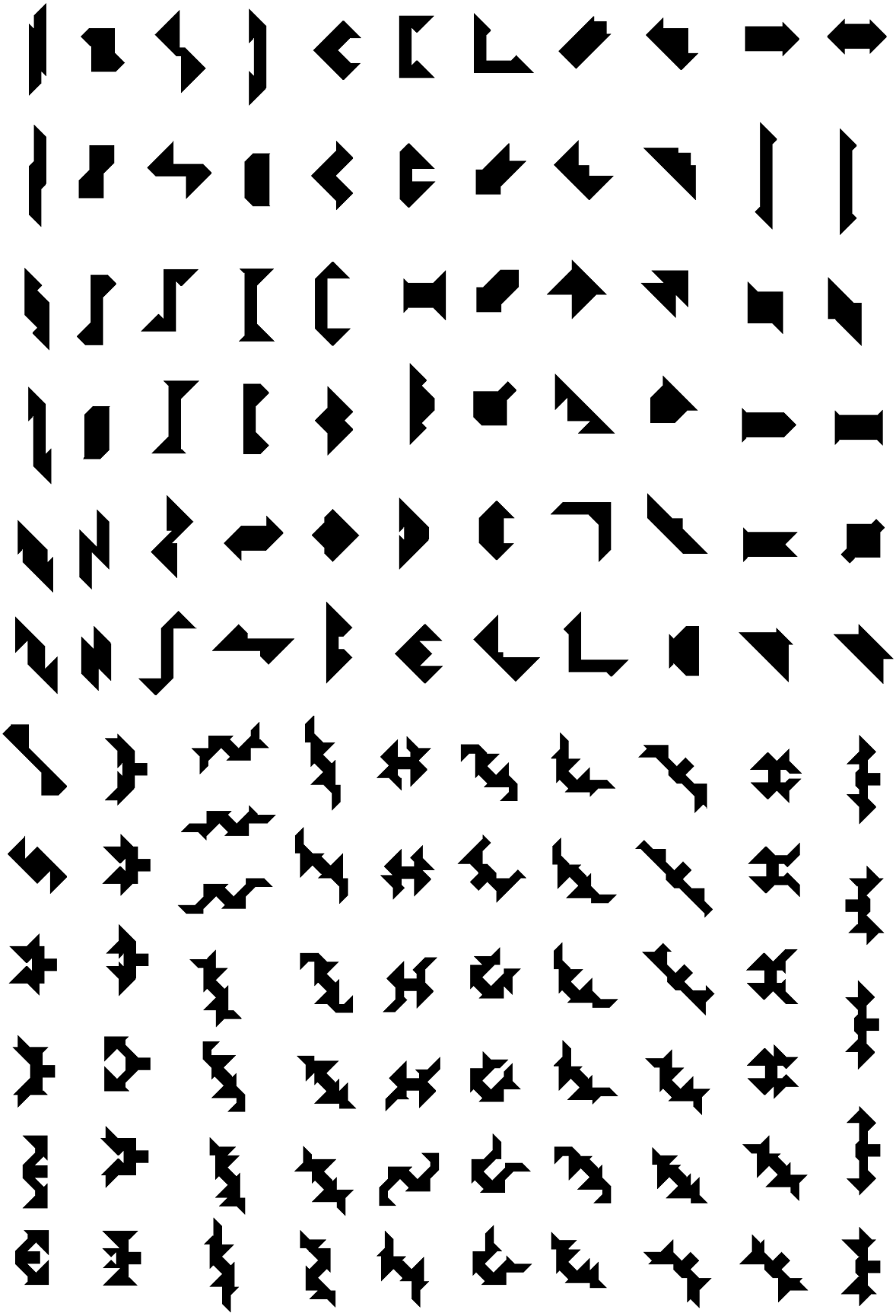


Illustration 83: Quelques-uns des 6 103 tangrams non-homogènes symétriques : ceux qui ont le moins de côtés en haut (6 à 8 côtés) et ceux qui en ont le plus en bas (20 et 18 côtés).

triangulaires sont éparpillés, ceux d'enveloppes hendécagonales forment un ensemble très cohérent, où les convexités réelles se succèdent de façon quasi-continue. Pourtant ces deux catégories contiennent, à peu de choses près, autant d'individus l'une que l'autre.

Pour ne pas nous submerger dans les détails, nous n'allons pas effectuer le même travail que pour les formes triangulaires, mais on peut s'attendre à une plus grande diversité de formes encore. Pour les enveloppes triangulaires, il n'y avait que deux valeurs de la convexité pour lesquelles il existait des variantes de formes. Ici, on doit s'attendre à des combinaisons originales et variées des onze longueurs et des onze angles impliqués dans une convexité donnée. La figure 81 donne quelque aperçu de cela en proposant les dix formes de convexité minimale (1 forme de convexité $-3+4\sqrt{2}\approx 2.66$, deux formes de convexité $-4+5\sqrt{2}\approx 3.07$ et une forme de convexité $-5+6\sqrt{2}\approx 3.49$) et maximale (2 formes de convexité $1+13\sqrt{2}\approx 19.38$, deux formes de convexité $6+9.5\sqrt{2}\approx 19.44$ et deux formes de convexité $4+11\sqrt{2}\approx 19.56$). Pour ces dix formes, il y a quatre paires de même convexité, mais dans aucune de ces paires il ne se trouve une enveloppe en double. Peut-être bien que pour les 25 674 formes concernées, les 25 674 enveloppes hendécagonales sont uniques…

La troisième caractéristique qui va nous permettre de distinguer les formes hétérogènes est la présence d'éléments de symétrie. Cette caractéristique exclut d'emblée la majeure partie des formes qui ne présentent aucun élément de symétrie. Les formes symétriques sont rares et belles. Elles ont un impact perceptif

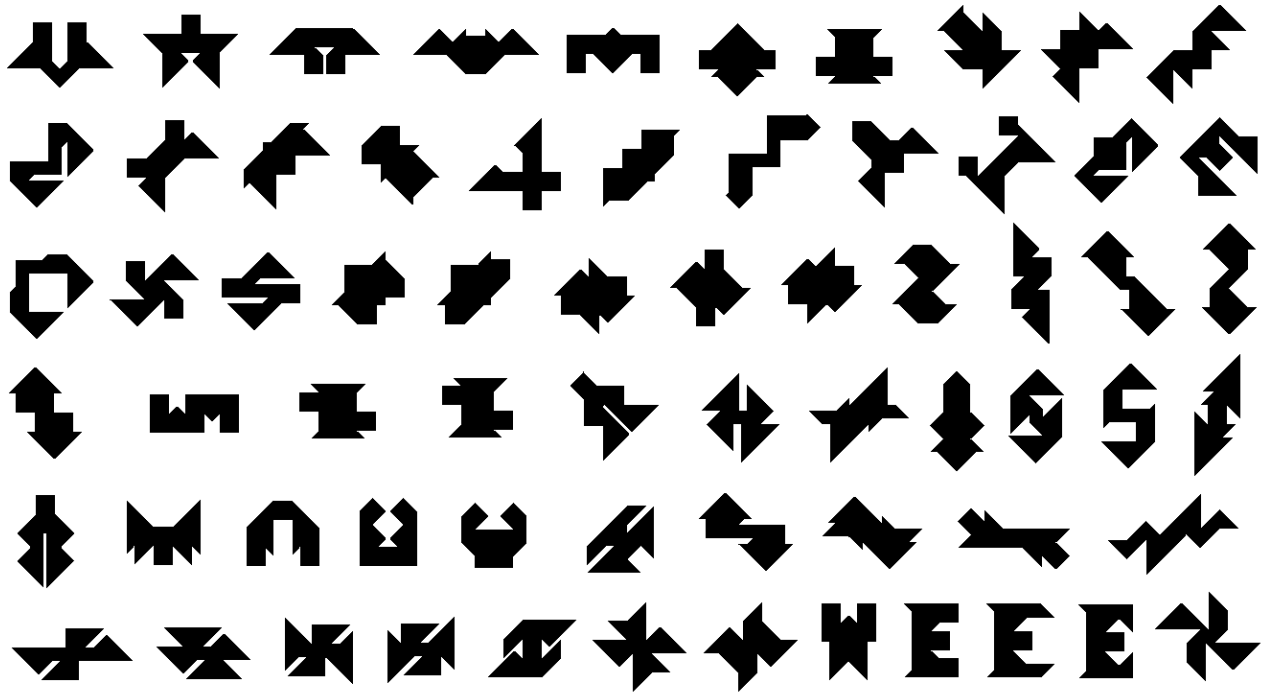


Illustration 84: Quelques-unes des formes symétriques non-homogènes à 14 côtés (la catégorie la mieux représentée)

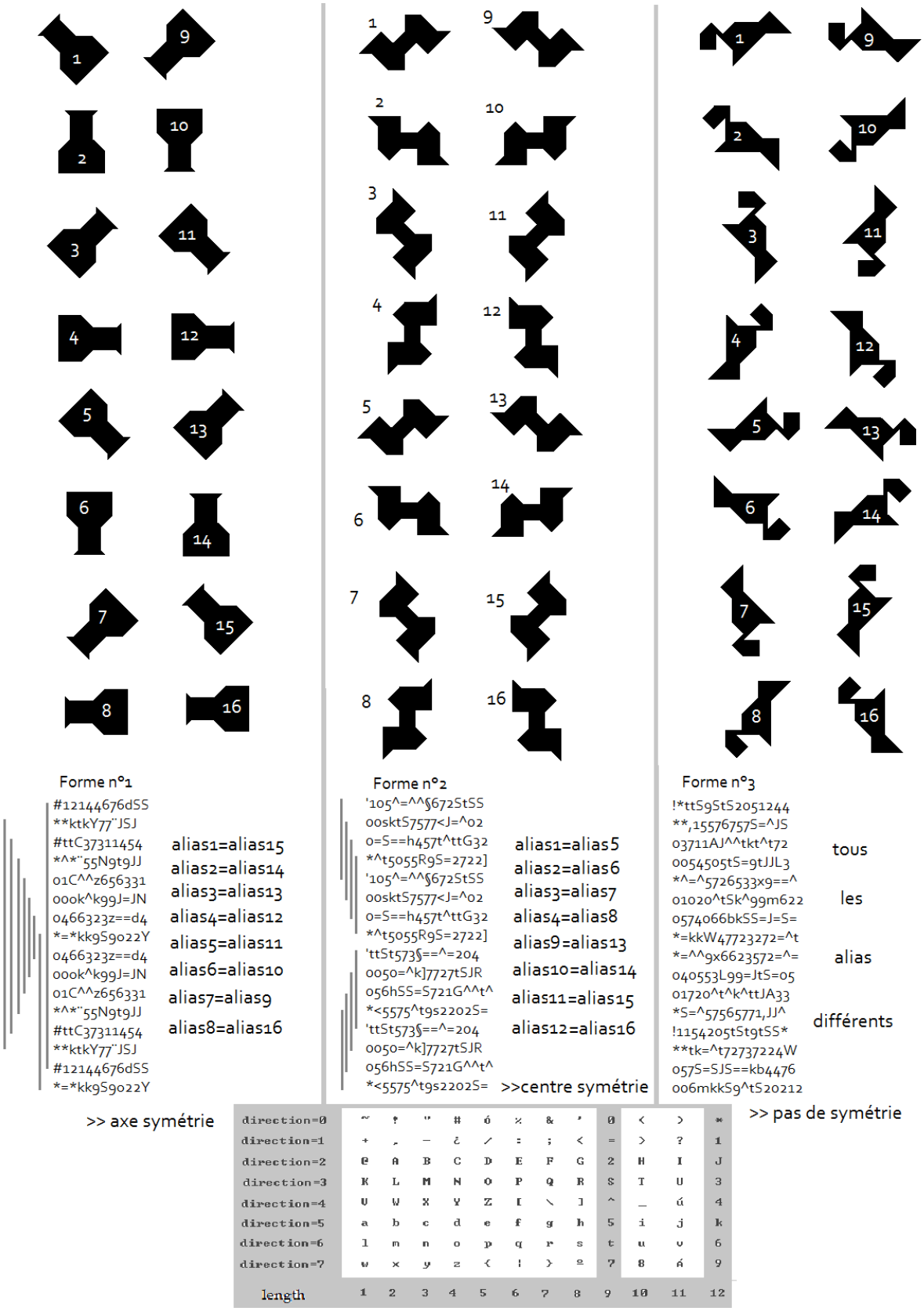


Illustration 85: Formes ne présentant pas les mêmes éléments de symétrie (forme n°1: un axe, forme n°2: un centre, forme n°3: aucune symétrie), données sous la forme de leurs 16 alias. Les égalités entre alias permettent d'identifier le type de symétrie

différent des autres formes pour un observateur : on les reconnaît d'un coup d'œil, et on s'en rappelle mieux, du fait de leur symétrie. En effet, pour s'en rappeler, il suffit de retenir la moitié des informations pertinentes, l'autre moitié étant déduite par symétrie. Les tangrams hétérogènes symétriques sont au nombre de 7 987. Il y en a environ quatre fois plus que chez les tangrams homogènes (1 884 tangrams homogènes pleins et symétriques), alors qu'il y a près de 1 300 fois plus de tangrams hétérogènes que de tangrams homogènes. Comme quoi la symétrie est « difficile » à réaliser pour une forme hétérogène en dehors de l'assemblage homogène. Ces formes symétriques sont considérablement diluées dans la très grande diversité des formes générée par l'assemblage hétérogène. Elles sont fréquentes lorsque le nombre de côtés est faible, mais deviennent de plus en plus rares – de plus en plus noyées dans la masse des formes hétérogènes – au fur et à mesure que le nombre de côtés augmente. Les effectifs des formes symétriques sont plus importants lorsque le nombre de côtés est pair – comme chez les tangrams homogènes – car seule la symétrie axiale (avec un seul axe de symétrie) est possible lorsque le nombre de côtés est impair.

Les formes symétriques se partagent quasiment en deux groupes : les formes ayant un seul axe de symétrie et celles qui ont un centre de symétrie (un centre de rotation demi-tour, noté R2 dans les tableaux). Ces deux groupes ont presque les mêmes effectifs, bien que les formes ayant un axe soient légèrement plus nombreuses ; ceci est aussi vrai pour les tangrams homogènes symétriques (où 52% ont un seul axe) que pour les non-homogènes symétriques (où 51% ont un seul axe). On doit mentionner l'existence de formes ayant plus d'un élément de symétrie, même s'il faut en souligner l'extrême rareté parmi les formes non-homogènes : à côté des 6 100 formes ayant un unique élément de symétrie (axe ou centre R2), il n'y a que trois formes qui possèdent deux axes de symétrie perpendiculaires (et un centre R2). Aucune forme à quatre axes (comme le carré qui est homogène) et aucune forme avec un centre R4 (comme l'étoile de *ninja* qui est une forme homogène ayant un trou). Parmi les tangrams homogènes pleins, il y a huit formes ayant plus d'un élément de symétrie sur 1884 formes symétriques, soit un ratio de 1 pour 235, alors que pour les tangrams non-homogènes symétriques, ce ratio tombe à 1 pour 2033, soit une fréquence dix fois moindre que pour les homogènes .

La figure 83 montre des formes symétriques non-homogènes rencontrées aux extrémités de la répartition selon le nombre de côtés (formes à 6, 7 et 8 côtés d'une part, 18 et 20 de l'autre) car ce sont les groupes les moins peuplés et les plus particuliers, mais la plus grande partie des formes symétriques non-homogènes ont quatorze et seize côtés (plus de 1600 formes, soit 27% de l'ensemble pour chacune de ces deux valeurs). Il y a presque autant de formes symétriques non-homogènes à quatorze côtés que des formes symétriques homogènes tous nombres de côtés

confondus.

Aucun tangram hétérogène symétrique n'a plus de vingt côtés alors qu'il y a presque trente millions de compacts ayant entre 21 et 23 côtés. La proportion des formes symétriques au sein des formes hétérogènes est toujours faible (0,00013% en moyenne, soit un pour 800 000 environ) mais cette proportion est très fortement décroissante lorsque le nombre de côtés augmente : pour les compacts à six côtés elle est de 5.2% (1 pour 19) ; pour les compacts à dix côtés elle est encore de 0.019% (1 pour 5 200) ; pour les compacts à vingt côtés elle n'est plus que de 0.000025% (1 pour 4 000 000).

Sur le plan technique, comment reconnaît-on une forme symétrique ? Avec ce type d'encodage des segments consécutifs du bord, nous examinons les seize alias d'une même forme obtenus par rotations successives de 45° – cela conduit à huit alias – et ensuite par symétrie de chacun de ces huit premiers alias par rapport à un axe (n'importe lequel). S'il existe des éléments de symétrie, certains de ces alias sont identiques. Évidemment, pour pouvoir décider si deux alias sont identiques, il faut comparer les formes canoniques (la permutation de rang inférieur) et non les formes brutes obtenues par rotation ou symétrie. La figure 85 donne un aperçu de cet algorithme en montrant trois figures et leurs alias. Le tableau d'encodage utilisé ici n'est pas celui des codes ASCII indiqué plus haut.

<u>Question 10</u> : Nous avons ordonné les valeurs réelles des convexités en comparant les valeurs approchées, mais nous souhaiterions restituer les valeurs exactes, c'est-à-dire des nombres de la forme $a+\frac{b\sqrt{2}}{2}$ où a et b sont entiers (voir la question 1). Nous avons commencé ce travail en donnant les premières valeurs exactes :

Convexité n°	1	2	3	4	5	6
Exacte	0	$-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$-4+3\sqrt{2}$	$-6+\frac{9}{2}\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	$-8+6\sqrt{2}$
Approchée	0	0.1213203436	0.2426406871	0.3639610307	0.4142135624	0.4852813742
Effectif	13	8	22	11	28	44

a) Déterminer les quatorze autres valeurs exactes de la convexité réelle inférieures ou égales à 1 triangle à l'aide des valeurs approchées, de la forme canonique encodée (la table d'encodage est figure 85) ou, plus directement, des silhouettes des formes de la figure 86.

b) Même chose pour les formes de grande convexité : parmi les formes de la figure 74, en choisir six qui représentent les six valeurs de la convexité supérieure à 30, puis déterminer la valeur exacte de cette convexité.

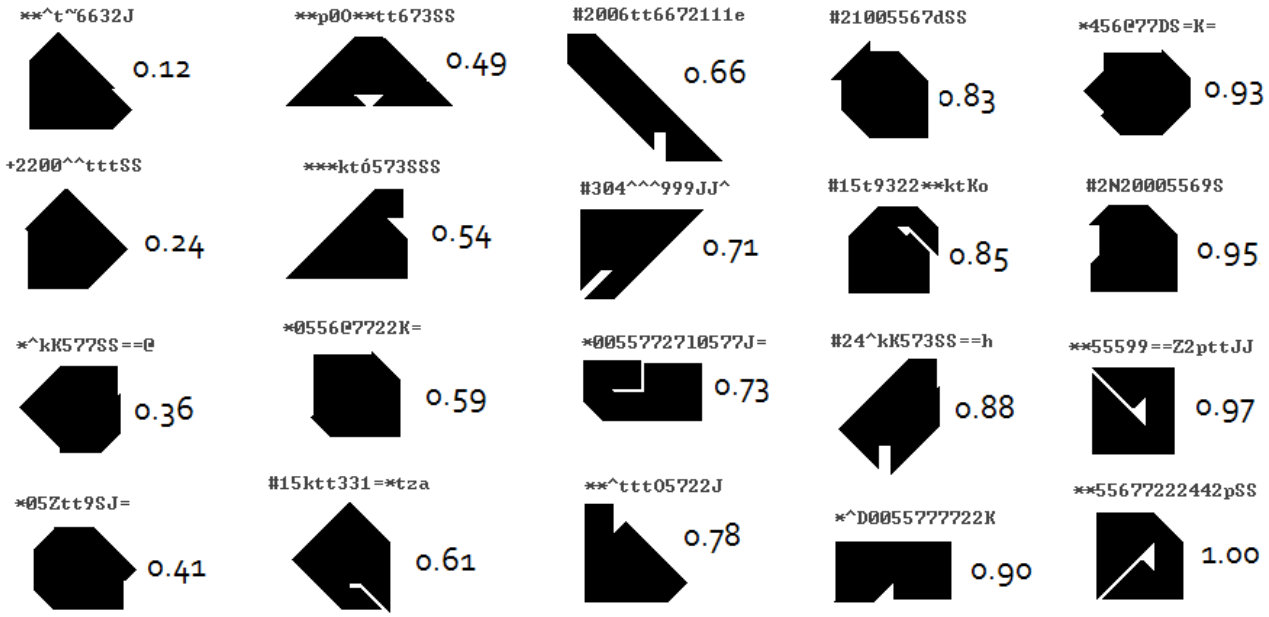


Illustration 86: 20 formes hétérogènes non convexes de convexités différentes, inférieures ou égales à un triangle : valeurs approchées au centième et forme canonique

Chapitre 11 :
La grande famille des polyabolos

Les assemblages homogènes sont le domaine des polyabolos. L'étude de ces formes est un objet d'étude passionnant en soi qui permet de mesurer la capacité combinatoire du Tangram

Le *Tangram* est un puzzle dont toutes les pièces sont issues d'un même procédé de fabrication : l'assemblage homogène de triangles isocèles rectangles. Les *polyabolos* – aussi appelés *polytans* – sont des polygones constitués de plusieurs triangles isocèles rectangles superposables, assemblés de façon homogène : côte à côte, sans superposition et sans juxtaposition d'un côté du carré unitaire avec une de ses diagonales. Ces polygones sont un cas particulier de *polyformes* où l'on accole entre elles des formes identiques. Ici, ce sont des demi-carrés, mais historiquement on a commencé à accoler entre eux des carrés. Les *polycarrés* – on dit plutôt *polyominos* ou *polyminos* selon la dénomination de Solomon W. Golomb qui en fit l'étude en 1 952 – sont les mieux connus du public. Deux jeux les ont popularisés : le premier utilise la famille des douze *pentaminos* (polyformes issues de cinq carrés) ; le second est Tetris, ce célèbre jeu vidéo créé en 1 984 par Alexei Pajitnov, qui utilise la famille des *tétraminos* (quatre carrés). Beaucoup d'autres familles de polyformes ont été étudiées (triangles équilatéraux, demi-triangles équilatéraux, hexagones réguliers, etc.), pour leur simplicité et leurs grandes

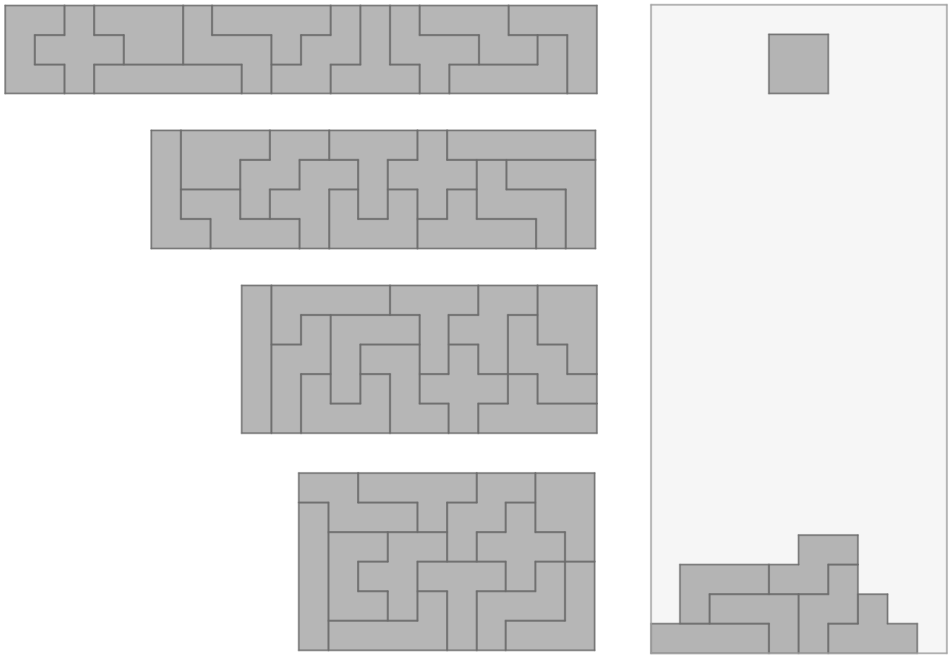


Illustration 87: Rectangles obtenus par assemblage des 12 pentaminos et plateau du jeu Tetris avec les 5 tétraminos (à droite) dont 2 sont doublés car sans axe de symétrie ils nécessitent un retournement pour paraître différents, or seules les rotations sont permises avec ce jeu

capacités combinatoires. Avec les progrès formidables de la capacité de calcul (vitesse, mémoire) apportés par les ordinateurs, les problèmes que l'on se pose à leur propos n'ont cessé d'évoluer.

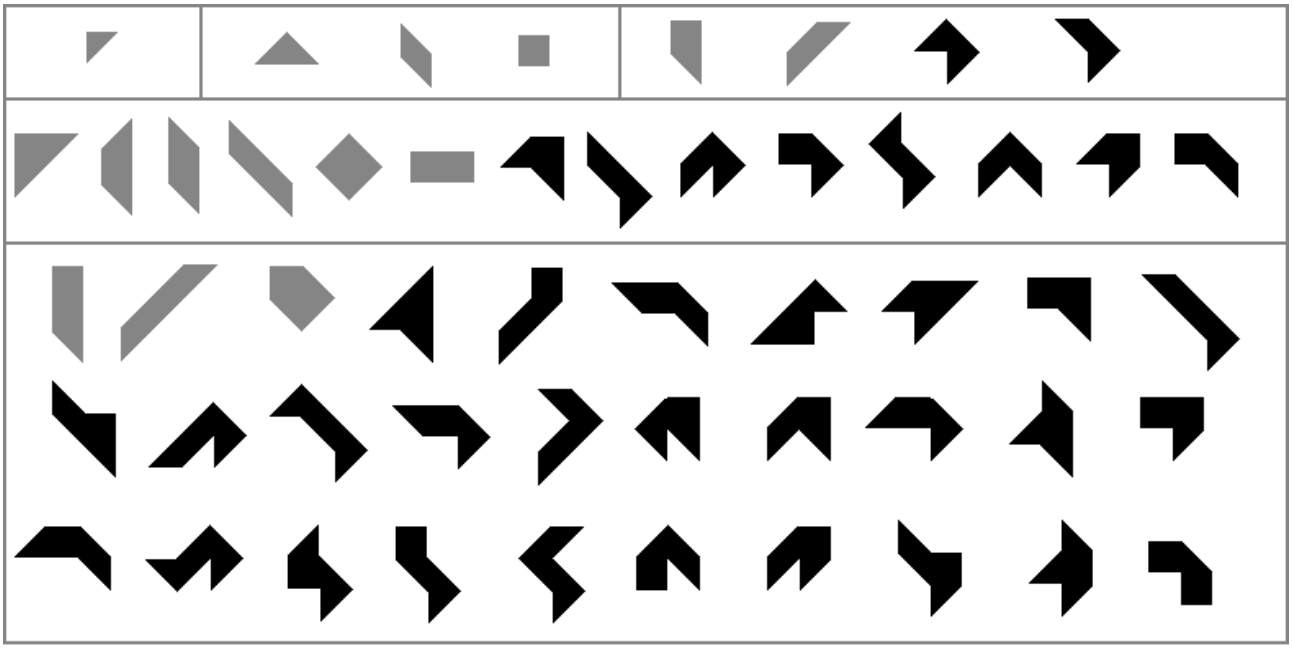


Illustration 88: Les polyabolos d'aire inférieure ou égale à 5 petits triangles : 1 monoabolo, 3 diabolos, 4 triabolos, 14 tétrabolos et 30 pentabolos. En gris, les formes convexes qui se raréfient

Le terme « polyabolo » a été forgé sur le modèle des polyominos en accolant au préfixe poly- la fin du mot diabolo. Mais, alors que pour les polyominos, le modèle étant le domino (deux carrés assemblés par un bord), l'appellation avait du sens, la dénomination de polyabolo choisie par S. J. Collins (1961) apparaît plus douteuse. Dans le monde réel, en effet, le diabolo est cet objet en forme de sablier que l'on manipule avec une ficelle. La forme stylisée du diabolo réel, en coupe longitudinale, n'est donc pas un polyabolo, car les deux triangles isocèles qui la composent ne se joignent que par leur sommet. Dans un *diabolo* géométrique, les deux triangles doivent mettre en commun un côté entier. Il y a ainsi, selon la manière d'assembler les deux triangles, trois formes de diabolos géométriques, dont aucune n'est celle du diabolo réel… Cette dénomination fallacieuse est restée, et l'on parle du *monoabolo* (le petit triangle dont tous les autres polyabolos sont issus), des trois diabolos, des quatre *triabolos*, des quatorze *tétrabolos*, etc. (voir la figure ci-dessus) Après les *dodécabolos* (formés de douze triangles), la liste officielle des préfixes en usage étant moins connue, nous utilisons des dénominations plus explicites où le nombre *n* de petits triangles est écrit en chiffre (*13abolo*, *14abolo*, *15abolo*, *16abolo*, etc.) ce qui conduit à remplacer le terme vague de polyabolo par *n*-abolo. Les formes homogènes réalisées avec le Tangram contenant seize monoabolos sont donc des membres honorables de la famille des 16abolos.

La super-famille des polyabolos contient donc, non seulement les pièces du Tangram, mais aussi l'ensemble des formes homogènes que nous avons obtenues en combinant les pièces du jeu entre elles (chapitres 6 et 7) ou seulement une partie de ces pièces (chapitres 2 et 4), et également l'ensemble des enveloppes convexes de ces formes homogènes. Comme, par définition, le nombre de triangles unitaires constituant un polyabolo n'est pas limité, cette super-famille est infinie. Elle constitue l'alpha et l'oméga des assemblages homogènes. On peut voir aussi les polyabolos comme les formes que l'on construit en joignant les sommets d'un quadrillage selon les côtés du quadrillage ou selon ses diagonales, sans croiser les côtés. Les polyabolos sont, par là même, particulièrement simples à dessiner à main levée, sur une feuille de papier quadrillé, comme les polyominos.

Les pièces du Tangram sont convexes, et nous nous intéressons naturellement davantage aux formes convexes car elles sont plus simples et leur variété est plus limitée. À partir des triabolos, on commence cependant à rencontrer des polyabolos non-convexes : deux des quatre triabolos sont non-convexes. En ajoutant un triangle supplémentaire, on trouve quatorze tétrabolos dont six sont convexes. Parmi les trente pentabolos, trois seulement sont convexes, soit une forme sur dix. La fraction convexe des hexabolos n'est plus que de 6.5%, et celle des heptabolos est inférieure à 3.5%. Le nombre des polyabolos différents pleins contenant *n* triangles unitaires est donné dans le tableau suivant pour $n \leq 16$.

À côté des formes pleines, on va rencontrer des formes à trou dès que *n*, le nombre de triangles constituant l'aire, atteint sept. Au début, les formes à trou ne sont pas nombreuses et les trous ne sont encore que des baies (des trous « ouverts » sur l'extérieur de la forme par un point du bord). Il existe deux heptabolos avec une

	Côtés																
Triangles	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Total
1	1																1
2	1	2															3
3	0	2	2														4
4	1	5	2	6													14
5	0	3	6	12	9												30
6	0	5	9	29	33	31											107
7	0	3	11	42	87	107	66										316
8	1	9	9	63	163	321	347	192									1 105
9	1	2	16	81	259	651	1 037	1 103	517								3 667
10	0	6	19	115	394	1 169	2 481	3 683	3 397	1 554							12 818
11	0	2	23	139	557	1 915	4 806	9 321	12 430	10 638	4 458						44 289
12	0	11	24	176	752	2 957	8 667	20 056	34 292	42 043	33 648	13 107					155 733
13	0	3	28	191	1 024	4 345	14 107	37 980	79 335	125 224	141 935	104 598	38 487				547 257
14	0	6	31	247	1 330	6 056	22 174	67 092	161 819	308 994	451 801	476 386	327 818	113 337			1 937 091
15	0	4	26	268	1 626	8 360	33 083	110 291	302 246	671 578	1 185 862	1 608 402	1 589 721	1 025 888	332 907		6 870 262
16	1	13	31	325	1 982	10 937	47 554	175 058	528 695	1 326 781	2 726 852	4 485 875	5 689 037	5 276 394	3 210 730	982 983	24 463 248
Total	6	76	237	1 694	8 216	36 849	134 322	424 776	1 122 731	2 486 812	4 544 556	6 688 368	7 645 063	6 415 619	3 543 637	982 983	34 035 945
Tangram	100%	46,2%	71,0%	61,5%	62,8%	58,4%	57,0%	51,9%	46,8%	40,3%	33,6%	26,4%	18,9%	11,3%	4,8%	1,1%	19,8%

Tableau 45: Effectifs et répartitions des polyabolos pleins selon leur aire (unité d'aire : petit triangle) et le nombre de côtés du bord pour une aire inférieure ou égale à 16 triangles (l'aire du Tangram). La dernière ligne donne les pourcentages de formes réalisées par le Tangram

pleins	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
P=4	3		1												
P=5		4		1											
P=6			13		4		2								
P=7				29		15		4		1					
P=8					103		65		30		9		3		1
P=9						301		262		138		55		16	
P=10							1 038		1 089		730		359		154
P=11								3 401		4 355		3 406		2 063	
P=12									11 699		17 342		15 822		11 114
P=13										39 795		67 868		69 958	
P=14											137 652		263 490		303 725
P=15												475 928		1 014 052	
P=16													1 657 417		3 880 286
P=17														5 784 173	
P=18															20 267 968
total	3	4	14	30	107	316	1 105	3 667	12 818	44 289	155 733	547 257	1 937 091	6 870 262	24 463 248
Baie	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
P=9						2									
P=10							11		4						
P=11								76		43		11		2	
P=12									417		349		148		43
P=13										2 139		2 323		1 383	
P=14											10 238		13 755		10 318
P=15												46 839		74 550	
P=16													206 688		379 846
P=17														887 861	
P=18															3 735 253
total	0	0	0	0	0	2	11	76	421	2 182	10 587	49 173	220 591	963 796	4 125 460
Trou	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
P=10									1						
P=11										5		3		1	
P=12											38		32		14
P=13												205		257	
P=14													1 115		1 753
P=15														5 529	
P=16															26 340
total	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	38	208	1 147	5 787	28 107
total	3	4	14	30	107	318	1 116	3 743	13 240	46 476	166 358	596 638	2 158 829	7 839 845	28 616 815

Tableau 46: Dénombrements des polyabolos ayant entre 1 et 16 triangles d'aire, pour les 3 catégories de forme topologique (pleines, avec baie et avec trou), répartis selon le nombre de segments du bord

baie. Il faut chercher dans la famille des décabolos (*n*=10) pour trouver la première forme ayant un vrai trou (ayant un bord interne sans contact avec le bord externe). Au fur et à mesure que *n* augmente, l'importance des formes à trou se fait de plus en plus sentir. Pour *n*=7, une forme sur cent cinquante-huit est une forme à trou. Pour *n*=10, on est déjà à une forme sur trente-et-un. Pour *n*=16, c'est presque un polyabolo sur sept qui présente un trou (un vrai trou ou une baie).

Illustration 89: Les 2 premiers polyabolos à trou sont des heptabolos (le trou est appelé baie car il communique avec l'extérieur). Le premier vrai trou apparaît chez les décabolos. Le premier polyabolo ayant deux trous séparés est un 17abolo

La répartition des polyabolos selon leur type topologique (plein/baie/trou) est donnée dans le tableau suivant. Dans ce tableau, nous avons réparti les formes selon le nombre de segments sur le bord, ce paramètre jouant un rôle important dans la relation de Pick ($P+2I=n+2$ où P est le nombre de nœuds du quadrillage sur le Périmètre, I le nombre de points à l'Intérieur et n le nombre de petits triangles) qui relie l'aire et le périmètre des formes sur quadrillage quand elles sont pleines. On avait déjà remarqué, grâce à cette relation, que le nombre de segments sur le bord (noté P comme Périmètre dans le tableau) était nécessairement pair pour le Tangram. Ceci se généralise pour les polyabolos dont l'aire, mesurée en petits triangles, est paire comme le Tangram où n=16, alors que le Périmètre P est impair lorsque n est impair.

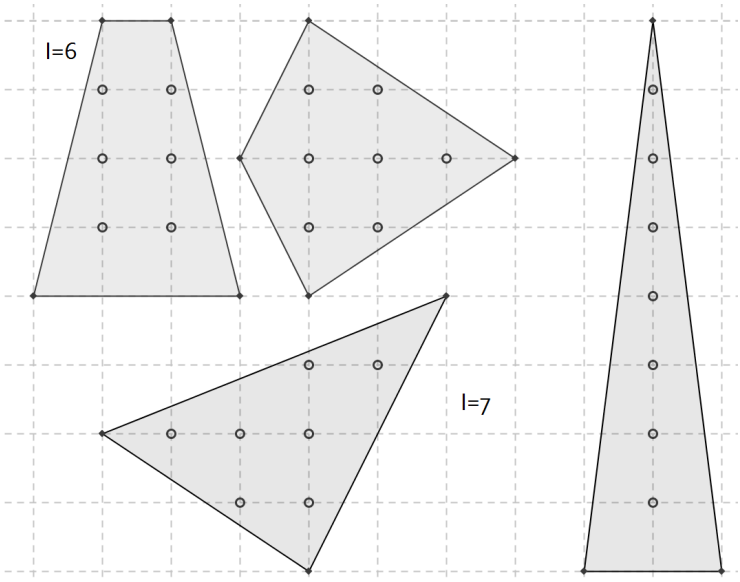


Illustration 90: Quelques polygones sur quadrillage d'aire égale à 16 petits triangles qui réussissent à englober 6 et même 7 points du quadrillage ce que les polyabolos ne peuvent pas réaliser du fait de leur contrainte de forme

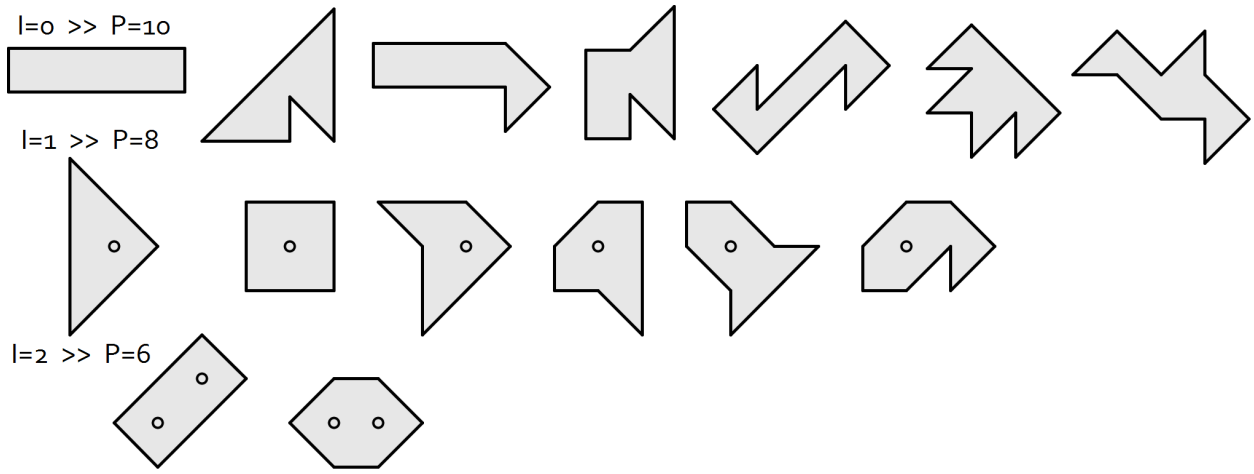


Illustration 91: Un exemplaire de chaque sorte d'octobolo, le nombre de côtés allant de 3 à 10 (de gauche à droite) et le nombre de segments P prenant les valeurs 6, 8 ou 10 selon la valeur du nombre I de points du quadrillage à l'intérieur de la forme (I varie entre 0 et 2)

La plupart des octobolos (1 049 sur 1 116) correspondent à I=0, c'est-à-dire des formes qui n'englobent aucun point du quadrillage. Ensuite, il y en a 65 qui renferment un point du quadrillage et deux seulement qui renferment deux points du quadrillage. Du fait de leur plus grand nombre, on trouve plus de variétés dans les octobolos ayant un périmètre P=10. La figure ci-dessus montre cette variété pour ce qui concerne le nombre de côtés. Alors que l'on trouve sept valeurs possibles du nombre de côtés lorsque P=10 (entre 4 et 10), il n'y en a plus que six pour P=8 (entre 3 et 8) et seulement deux pour P=6 (4 et 6). D'une façon générale, le nombre de côtés d'un polyabolo contenant n triangles varie entre 3 et n+2. P est maximal lorsque I est nul (la forme est alors étendue), la relation devenant $P=n+2$. Pour avoir un maximum de côtés, chaque point sur le bord est un sommet du polygone et P mesure alors le nombre de côtés qui vaut donc n+2 au maximum. Une autre explication donnée pour les tangrams homogènes vaut pour les polyabolos : lors du processus d'agrégation des n triangles qui conduit à un n-abolo, les segments unitaires se dissimulent dans la forme deux par deux. Au départ, il y en avait $3\times n$, car chaque triangle unitaire porte trois segments unitaires. Le périmètre est maximum lorsque la forme agrège à chaque fois les triangles unitaires par un seul côté. Dans ce cas, il y a $2\times(n-1)$ segments unitaires qui disparaissent de l'ensemble car il faut procéder à $n-1$ agrégations. Le nombre de segments unitaires visibles qui constituent le nombre de côtés de ces formes en serpent est égal à $3\times n-2\times(n-1) = n+2$.

Nous avons vu pour les tangrams homogènes que le nombre de segments unitaires sur le périmètre ne pouvait prendre que des valeurs paires allant de 8 à 18, soit six valeurs différentes avec une seule forme correspondant à 8 (le carré). Qu'en est-il pour les n-abolos lorsque n varie ? Nous avons appliqué la formule de Pick pour n

variant de 2 à 18. Le tableau ci-dessous donne tous les résultats positifs pour *P*, car *P* ne peut pas être négatif. En gris, nous avons surligné les valeurs possibles relevées expérimentalement. Par exemple, pour *n*=16 on a grisé les cases où *I* varie de 0 à 5, ce qui correspond à *P* variant entre 8 et 18. Ce qui apparaît, c'est une valeur minimale qu'il semble difficile de prévoir par une formule. Pourquoi n'y a-t-il aucun 16abolo renfermant six points du quadrillage, ce qui conduirait à un périmètre de 6 comme le prévoit la formule de Pick ? Rappelons-nous que cette formule concerne tous les polygones sur quadrillage. Il est possible d'en dessiner un qui renferme six points du quadrillage et qui a une aire de seize petits triangles, mais alors ce n'est pas un polyabolo. Les polyabolos sont des polygones sur quadrillages particuliers. Leurs côtés ne peuvent emprunter que quatre directions : les deux directions du quadrillage et les deux des diagonales. Les polyabolos sont ainsi limités par cette contrainte de forme.

Dans un de nos programmes, nous avons utilisé cette formule pour minorer le périmètre *P* d'un polyabolo : $P \geq E(2\sqrt{n})$, où *E* est la fonction « partie entière ». On ne retient ainsi que les valeurs du périmètre *P* qui valent au moins autant que le double de la racine carrée de *n*, tronquée pour ne garder que les chiffres « avant la virgule ». La dernière ligne de notre tableau donne cette valeur minimale, l'égalité n'étant atteinte que pour *n*=4 et pour *n*=16, soit à chaque fois qu'il est possible de tracer un carré ayant ses côtés selon les diagonales du quadrillage. Cette égalité reste valable pour toute la série des carrés de ce type qui vérifient $n=4c^2$ (*c* étant le nombre de segments de longueur $\sqrt{2}$ sur le côté du carré, voir plus loin, illustration 96 notamment), car alors $4n=4\times 4c^2=16c^2=(4c)^2=P^2$ et donc, $P=\sqrt{4n}=2\sqrt{n}$.

n triangles	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
I=0	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
I=2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I=3			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
I=4					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I=5							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I=6									0	1	2	3	4	5	6	7	8
I=7											0	1	2	3	4	5	6
I=8													0	1	2	3	4
I=9															0	1	2
I=10																	0
minorant de *P*	2	3	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8

Tableau 47: Différentes valeurs du Périmètre P lorsque n et I varient, calculés à l'aide de la formule de Pick. Les cases grisées indiquent les valeurs possibles. Sur la dernière ligne nous avons calculé $E(2\sqrt{n})$*, un minorant acceptable pour P, au moins pour le domaine de variation considéré*

Les polyabolos couvrant une aire de seize triangles – les *16abolos* – contiennent les formes homogènes qui peuvent être reconstituées avec le Tangram. D'autres jeux voisins du Tangram, bien que possédant également sept pièces extraites des polyabolos et totalisant, comme le Tangram, une aire de seize petits triangles,

peuvent reconstituer beaucoup plus de 16abolos que lui. L'évaluation de la capacité combinatoire du jeu de Tangram peut se faire en mesurant la fraction des 16abolos qu'il permet de reconstituer : 5 583 516 sur 28 616 815, cela ne fait même pas un sur cinq. Comparativement, nous avons trouvé des jeux qui avaient de bien meilleures capacités allant jusqu'à reconstituer dix-neuf formes sur vingt (voir au chapitre 13). Les plus grandes lacunes du Tangram concernent les formes ayant plus de dix côtés, les pourcentages de formes réalisées par le Tangram tombant en dessous de 50% à partir de onze côtés. Les polyabolos ayant quatorze côtés sont les plus nombreux (plus de cinq millions de formes), mais le Tangram n'en reconstitue qu'un peu plus de un sur quatre. La dernière ligne du tableau 45 nous détaille les capacités combinatoires du Tangram selon le nombre des côtés, et le graphique qui suit permet de visualiser cette défaillance combinatoire considérable du jeu.

La 6 074ème suite de nombres entiers de Sloane (l'OEIS, the On-line Encyclopedia of

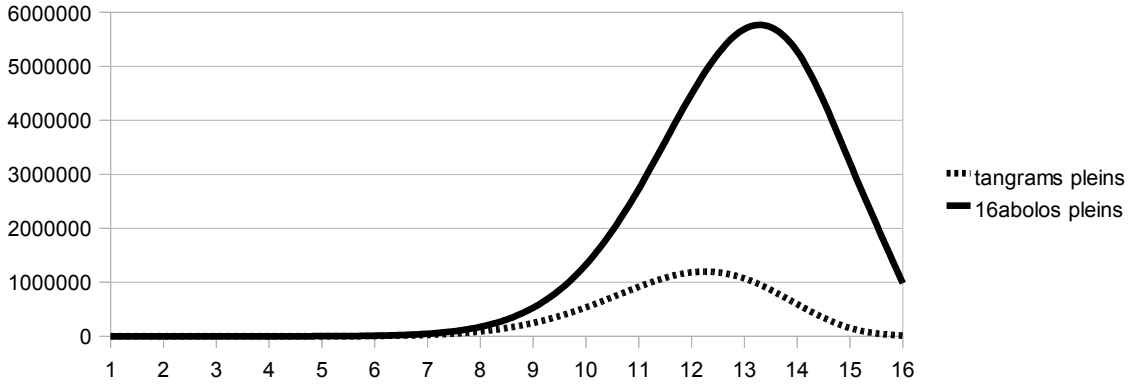


Illustration 92: Les répartitions selon le nombre de côtés des 16abolos et des tangrams montrent une défaillance du Tangram pour reconstituer les formes ayant le plus de côtés

n	Q(*n*)	Rapport Q(*n*)/Q(*n*-1)
2	3	3,000000
3	4	1,333333
4	14	3,500000
5	30	2,142857
6	107	3,566667
7	318	2,971963
8	1 116	3,509434
9	3 743	3,353943
10	13 240	3,537270
11	46 476	3,510272
12	166 358	3,579439
13	596 638	3,586470
14	2 158 829	3,618323
15	7 839 845	3,631527
16	28 616 815	3,650176

Tableau 48: Les rapports entre les nombres de polyabolos d'aires consécutives s'approchent d'une valeur moyenne approximativement égale à 3.6

N°	P	Périmètre réel	rat.	irr.	Pleins	Baie	Trou	Total	Tangram présents
1	10	10,828	8	2	2	0	0	2	100%
2	8	11,314	0	8	1	0	0	1	100%
3	10	11,657	6	4	31	0	0	31	94%
4	12	12,000	12	0	2	0	0	2	100%
5	10	12,485	4	6	86	0	0	86	88%
6	12	12,828	10	2	131	0	0	131	100%
7	10	13,314	2	8	31	0	0	31	84%
8	12	13,657	8	4	1 929	0	0	1 929	92%
9	14	14,000	14	0	21	0	0	21	90%
10	10	14,142	0	10	4	0	0	4	0%
11	12	14,485	6	6	5 421	11	5	5 437	78%
12	14	14,828	12	2	2 359	4	3	2 366	90%
13	12	15,314	4	8	3 359	32	9	3 400	60%
14	14	15,657	10	4	35 776	447	115	36 338	83%
15	16	16,000	16	0	90	0	1	91	65%
16	12	16,142	2	10	272	0	0	272	32%
17	14	16,485	8	6	126 314	3 819	724	130 857	63%
18	16	16,828	14	2	14 694	437	50	15 181	73%
19	14	17,314	6	8	114 895	5 089	788	120 772	44%
20	16	17,657	12	4	274 170	17 049	1 478	292 697	66%
21	18	18,000	18	0	250	5	0	255	22%
22	14	18,142	4	10	23 605	956	119	24 680	22%
23	16	18,485	10	6	1 233 105	113 448	8 623	1 355 176	48%
24	18	18,828	16	2	39 896	3 284	0	43 180	40%
25	14	18,971	2	12	755	3	3	761	0%
26	16	19,314	8	8	1 637 070	179 424	12 076	1 828 570	28%
27	18	19,657	14	4	804 973	112 713	0	917 686	42%
28	14	19,799	0	14	0	0	1	1	0%
29	16	20,142	6	10	651 325	65 189	3 747	720 261	11%
30	18	20,485	12	6	4 414 210	813 204	0	5 227 414	32%
31	16	20,971	4	12	68 575	4 242	346	73 163	0%
32	18	21,314	10	8	8 204 626	1 650 664	0	9 855 290	16%
33	16	21,799	2	14	1 257	57	18	1 332	0%
34	18	22,142	8	10	5 467 365	987 061	0	6 454 426	5%
35	16	22,627	0	16	0	0	1	1	0%
36	18	22,971	6	12	1 251 506	161 858	0	1 413 364	0%
37	18	23,799	4	14	84 010	6 404	0	90 414	0%
38	18	24,627	2	16	1 132	56	0	1 188	0%
		Total			24 463 248	4 125 456	28 107	28 616 811	20%

Tableau 19 : Répartition des 16abolos selon leur périmètre. Les différentes catégories sont classées par périmètre réel croissant, ce paramètre pouvant prendre ici, 38 valeurs différentes échelonnées entre $8+2\sqrt{2}\approx 10.828$ *et* $2+16\sqrt{2}\approx 24.627$ *. La dernière colonne donne la capacité de reconstitution de ces formes par le Tangram*

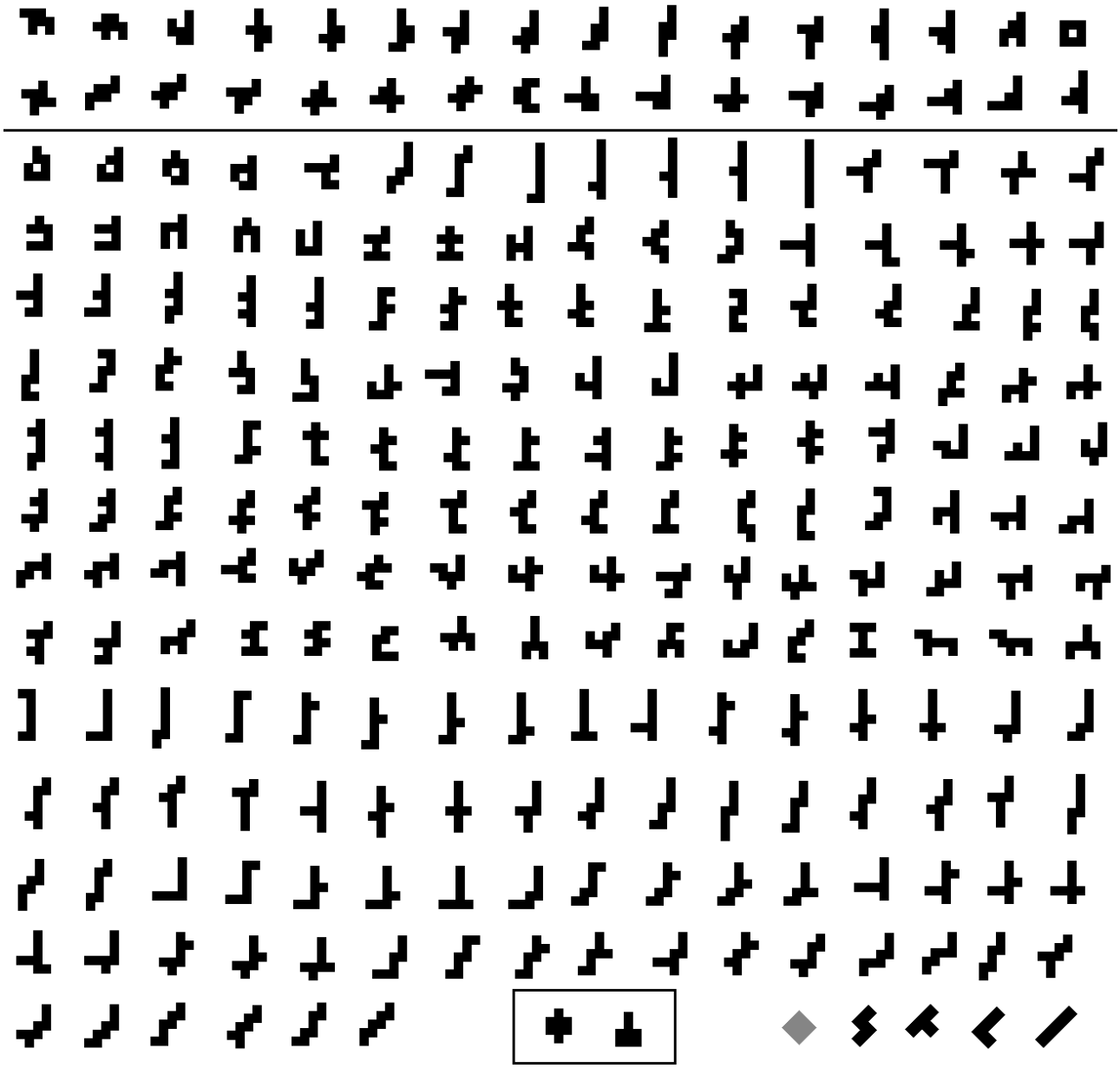


Illustration 93: Les 233 octominos irréalisables avec le Tangram (les réalisables sont figure 54) se composent principalement des formes élancées ayant 18 segments de longueur 1. En bas à droite, les 4 tétraminos irréalisables en noir et, pour mémoire en gris, le carré qui est le seul tétramino réalisable

Integer Sequences a pour projet de lister les suites connues d'entiers), la suite A006074, concerne le nombre de *n*-abolos. Les mises à jour de cette encyclopédie ne sont pas automatiques mais fréquentes, vous ne trouverez peut-être encore à l'adresse http://oeis.org/A006074, comme nous à l'écriture de ce livre en 2 013, que les nombres correspondants à $n \leq 14$[7]. L'information doit déjà atteindre les bonnes personnes, et des vérifications et/ou un processus de validation doivent confirmer les nouvelles valeurs. Ainsi, malgré la publication en 2 004 de ces valeurs jusqu'à

7 En août 2 013, une 15ème valeur a été apportée à cette suite par George Sicherman, plus connu pour avoir découvert en 1 978, la seule paire de dés (numérotés 1, 2, 2, 3, 3, 4 et 1, 3, 4, 5, 6, 8) ayant la même loi de probabilité, à l'égard de la somme obtenue à chaque tirage, que les dés ordinaires.

n=14 par R. Read, il fallut attendre le 6 septembre 2 012 pour qu'un certain Juris Cernenoks apporte cette contribution à l'encyclopédie de Sloane.

Nous avons personnellement été jusqu'à *n*=16 (en réalité *n*=18, mais avec moins de certitudes pour cette dernière valeur) dans les années 2 009-2 010, car nous voulions mesurer cette capacité combinatoire du Tangram, mais il ne serait pas très difficile d'aller un peu au-delà. Tout le problème est l'optimisation des ressources (temps de calcul, capacité de stockage des résultats) et la motivation. Car, après tout, pourquoi irions-nous plus loin ? Si l'on se base sur la suite des rapports de deux nombres consécutifs de cette suite (notés Q(n)/Q(n-1) dans le tableau ci-dessus), comme on constate que ces rapports tendent à se stabiliser sur la valeur 3.6, on

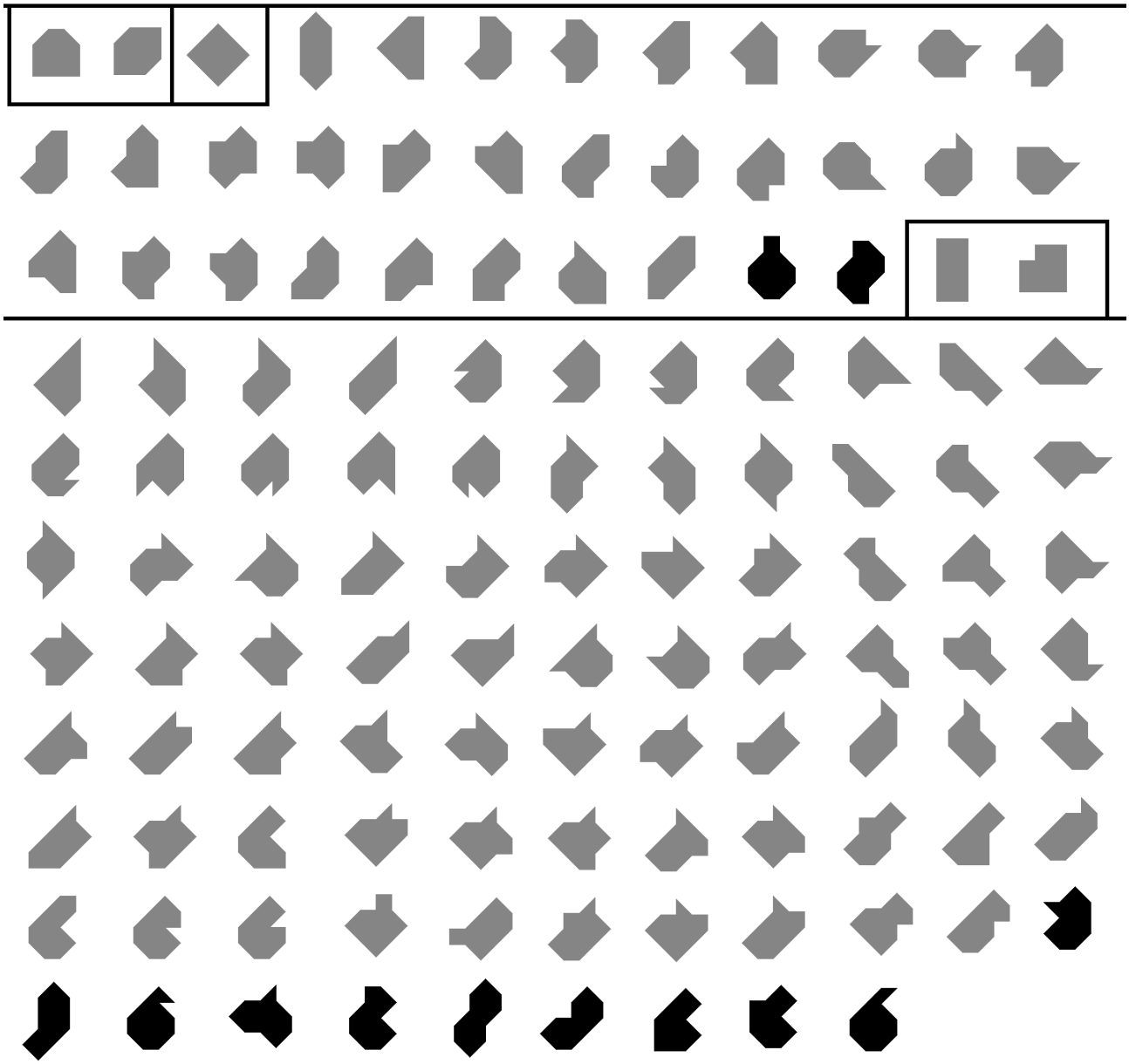


Illustration 94: Les 122 16abolos des 5 catégories inférieures du périmètre réel (de 10.828 à 12.485 environ). En gris, les formes réalisables avec le Tangram et en noir celles qui ne les ont pas

peut estimer le nombre de 17abolos à plus de cent millions (nous en avons trouvé 104 811 987, sans oublier l'unique forme à deux trous) et celui des 20abolos à près de 4.8 milliards. L'obtention des valeurs exactes de ces nombres nous apparaît pour l'instant trop coûteuse (en temps de calcul) et superflue. Ce défaut de motivation nous prive momentanément des quelques valeurs exactes suivantes, d'autant plus que ce que nous aimerions connaître n'est pas le nombre de 20abolos mais plutôt celui des 32abolos (environ 22 800 000 000 000 000) et aussi celui des 36abolos (environ 3 830 000 000 000 000 000, soit 134 milliards de fois plus que les 16abolos...). En effet, pour ces aires de 32 et 36 petits triangles, les jeux peuvent reconstituer un grand carré, alors qu'avec vingt petits triangles cela est forcément impossible. Ces nombres étant tellement élevés, les difficultés techniques et la contrainte temporelle nous découragent d'emblée.

Nous avons parlé du périmètre *P* – le nombre de segments unitaires qui forment le bord de la forme – indépendamment de la longueur de ces segments unitaires. Dans le langage courant, cependant, le périmètre d'un polygone est la longueur réelle de son bord. Comme il y a deux types de segments, ceux qui mesurent une unité (le côté de la pièce carrée) et ceux qui mesurent $\sqrt{2}$ unités, une part du périmètre réel est rationnelle (c'est le nombre de segments de longueur 1), et l'autre part est irrationnelle (le nombre de segments de longueur $\sqrt{2}$). Nous avons déjà vu cela, la longueur réelle du périmètre est donc un nombre qui s'écrit sous la forme $a+b\sqrt{2}$, où *a* et *b* sont des nombres entiers (le nombre *a* est parfois noté rat. pour la part rationnelle tandis que le nombre *b* est noté irr. pour la part irrationnelle). Comme nous l'avons vu aussi, les différentes valeurs des nombres *a* et *b* sont comprises entre 0 et *n*+2 pour un *n*-abolo.

Pour les 16abolos, les différentes combinaisons des entiers *a* et *b* entre 0 et 18 produisent 38 catégories différentes de périmètres, alors que le Tangram n'en réalise que 29. Il faut dire que certaines catégories sont particulièrement pauvres : une seule forme de périmètre $14\sqrt{2}\approx 19.799$ et une seule aussi de périmètre $16\sqrt{2}\approx 22.627$! Mais ces catégories sont marginales, les six autres non représentées avec le Tangram sont les trois de périmètres supérieurs $6+12\sqrt{2}\approx 22.971$, $4+14\sqrt{2}\approx 23.799$ et $2+16\sqrt{2}\approx 24.627$ ainsi que celles de périmètres $2+12\sqrt{2}\approx 18.971$, $4+12\sqrt{2}\approx 20.971$ et $2+14\sqrt{2}\approx 21.799$. On pourrait penser que ces catégories de formes ont toutes en commun une certaine étroitesse qui les rend irréalisables avec les grosses pièces du Tangram mais, en réalité, l'explication de ces absences tient au nombre de segments irrationnels disponibles avec le Tangram. Dans les sept pièces de ce jeu, il n'y a que dix segments de longueur $\sqrt{2}$. Alors, tous les périmètres nécessitant plus de dix longueurs irrationnelles sont hors de portée, et ce sont justement les huit catégories que nous

avons relevées. La figure ci-dessous donne quelques-unes de ces formes trop irrationnelles pour le Tangram. Nous n'avons pas la même limitation pour une part rationnelle trop importante, car les pièces du Tangram totalisant vingt segments rationnels, cela suffit amplement, le nombre de segments du bord ne dépassant jamais 18.

Si l'on examine l'autre extrémité de l'échelle des périmètres, les formes réalisables avec le Tangram sont très majoritaires : ces formes sont plus compactes et s'accommodent bien des grosses pièces du jeu, mais cette caractéristique s'estompe progressivement, au fur et à mesure que le périmètre augmente. La

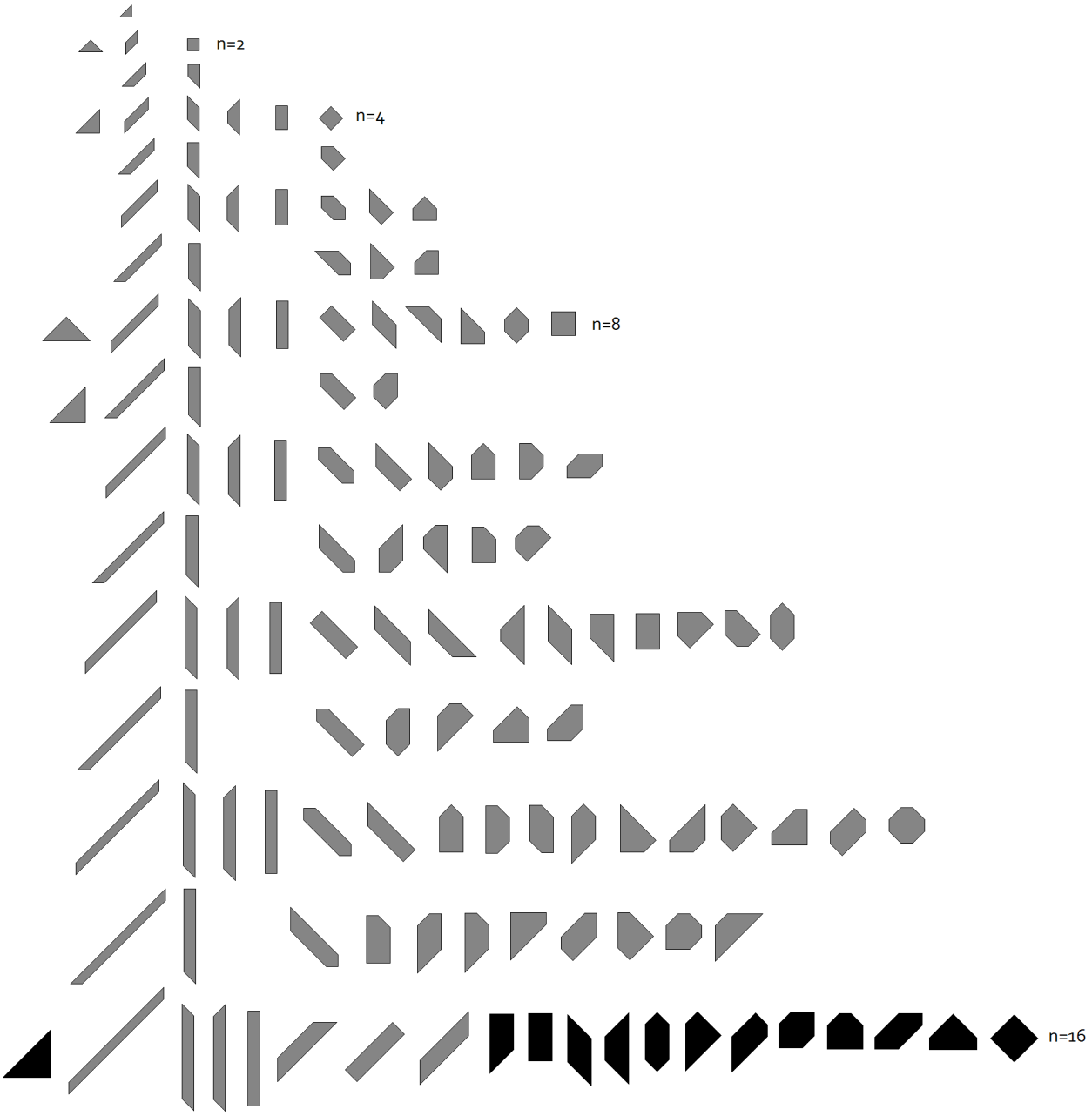


Illustration 95: Les polyabolos convexes de taille inférieure ou égale à 16. En noir, les 16abolos reconstituables avec le Tangram

dernière colonne du tableau 19 montre que dans la 3ème catégorie (périmètre égal à $6+4\sqrt{2}\approx 11.657$) 6% environ des formes ne sont pas réalisables, tandis que dans la 5ème catégorie (périmètre égal à $4+6\sqrt{2}\approx 12.485$), il y a déjà près de 12% des formes qui ne sont pas réalisables. La prédominance de formes irréalisables avec le Tangram ne vient que graduellement, et de façon irrégulière. Mais dans la 11ème catégorie, lorsque les formes trouées arrivent, 22% environ des polyabolos sont irréalisables. Rappelons que sur l'ensemble des polyabolos, il y en a plus de 80% qui sont irréalisables avec le Tangram.

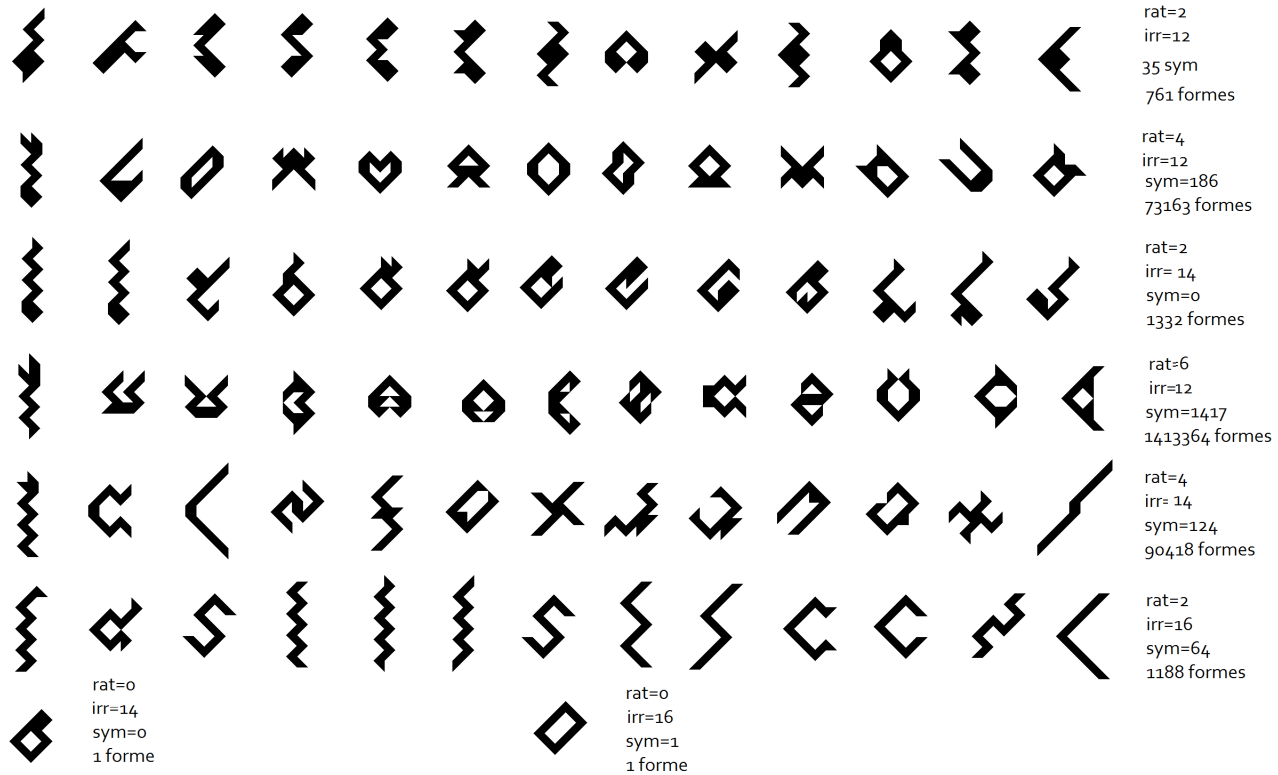


Illustration 96: Quelques 16abolos des 8 catégories irréalisables par le Tangram du fait d'une part irrationnelle trop importante.

Lorsque le nombre *a* prend la valeur 0, la forme a des côtés irrationnels uniquement et, lorsque c'est *b* qui vaut 0, la forme a des côtés rationnels uniquement. Dans ces deux cas, les angles ne peuvent prendre alors que les deux valeurs, 90° et 270°, pour conserver la direction des côtés du quadrillage (cas où *b* vaut 0) ou ceux des diagonales (cas où *a* vaut 0). Le cas *b*=0 ne se produit que lorsque *n* est pair, les formes obtenues peuvent être considérées comme des assemblages de *n*/2 carrés, des octominos formés de carrés dans le sens du quadrillage de référence. Le cas *a*=0 ne se produit que lorsque *n* est un multiple de 4, les formes obtenues peuvent être considérées comme des assemblages de *n*/4 carrés, des tétraminos formés de carrés dans le sens des diagonales du quadrillage de référence. Alors que le carré est la seule forme qui a tous ses côtés irrationnels (*a*=0) réalisables avec le Tangram,

avec les 16abolos on peut réaliser les cinq tétraminos. Il y a 136 formes (voir la figure 54) qui ont tous leurs côtés rationnels (*b*=0) et qui sont réalisables avec le Tangram. Ces formes représentent environ 37% des 369 octaminos qui sont, bien entendu, tous réalisables avec les 16abolos. Qu'est-ce qui fait qu'un octamino est ou n'est pas réalisable avec le Tangram ? Il n'y a pas de problème pour trouver jusqu'à vingt segments de longueur unité avec les pièces du jeu, donc la difficulté ne vient pas de là. Les octominos sont de quatre types lorsqu'on compte les segments sur le bord : tous ceux qui en ont douze (et trois points du quadrillage englobés dans la forme) sont réalisables (il ne sont que 2!) ; parmi ceux qui en ont quatorze (ils sont 21 et englobent deux points du quadrillage) 90% sont réalisables (seuls deux ne le sont pas!) ; 65% de ceux qui en ont seize (ils sont 91) sont réalisables (ils englobent un point du quadrillage, sauf celui qui est troué qui n'en englobe aucun), tandis que 22% des 255 qui en ont dix-huit le sont. On constate donc que la difficulté est liée à l'étroitesse des formes : moins il y a de points du quadrillage englobés par la forme, plus le périmètre est grand et plus la forme se montre réfractaire à un pavage avec les grosses pièces encombrantes du jeu. Comparez les octominos irréalisables de la

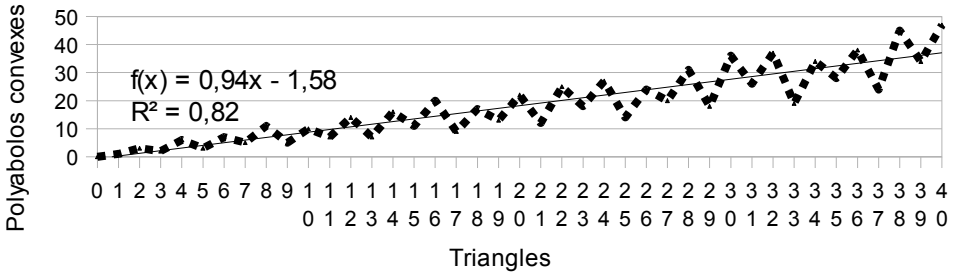
n	3	4	5	6	7	8	Totaux
1	1	0	0	0	0	0	1
2	1	2	0	0	0	0	3
3	0	2	0	0	0	0	2
4	1	5	0	0	0	0	6
5	0	2	1	0	0	0	3
6	0	5	1	1	0	0	7
7	0	3	2	0	0	0	5
8	1	9	0	1	0	0	11
9	1	2	1	1	0	0	5
10	0	5	2	3	0	0	10
11	0	2	4	1	0	0	7
12	0	11	1	2	0	0	14
13	0	2	3	2	0	0	7
14	0	6	5	4	0	1	16
15	0	4	5	1	1	0	11
16	1	13	2	4	0	0	20
17	0	3	3	2	1	0	9
18	1	7	2	6	1	0	17
19	0	2	6	5	0	0	13
20	0	11	5	5	0	1	22
21	0	4	2	5	1	0	12
22	0	5	8	10	1	1	25

n	3	4	5	6	7	8	Totaux
23	0	3	11	2	2	0	18
24	0	19	1	6	1	0	27
25	1	2	3	6	1	1	14
26	0	5	7	8	3	1	24
27	0	4	6	8	2	0	20
28	0	12	7	10	1	1	31
29	0	2	6	7	3	0	18
30	0	10	7	14	2	3	36
31	0	3	13	7	3	0	26
32	1	17	7	10	1	1	37
33	0	4	4	6	4	1	19
34	0	6	8	13	6	1	34
35	0	4	8	12	3	1	28
36	1	16	5	12	3	1	38
37	0	2	5	13	3	1	24
38	0	5	13	19	3	5	45
39	1	6	14	20	4	6	51
50	1	7	7	23	8	8	54
64	1	21	15	27	8	3	75
72	1	28	8	32	12	2	83
99	1	8	13	37	47	19	125
100	1	16	14	59	19	14	123

Tableau 49: Nombres de n-abolos convexes selon le nombre n de triangles unitaires qui les composent, répartis selon le nombre de côtés. Les lignes grises correspondent aux valeurs de n pour lesquelles le carré est réalisable

figure 94 et les réalisables de la figure 54 : ne se ressemblent-ils pas ?

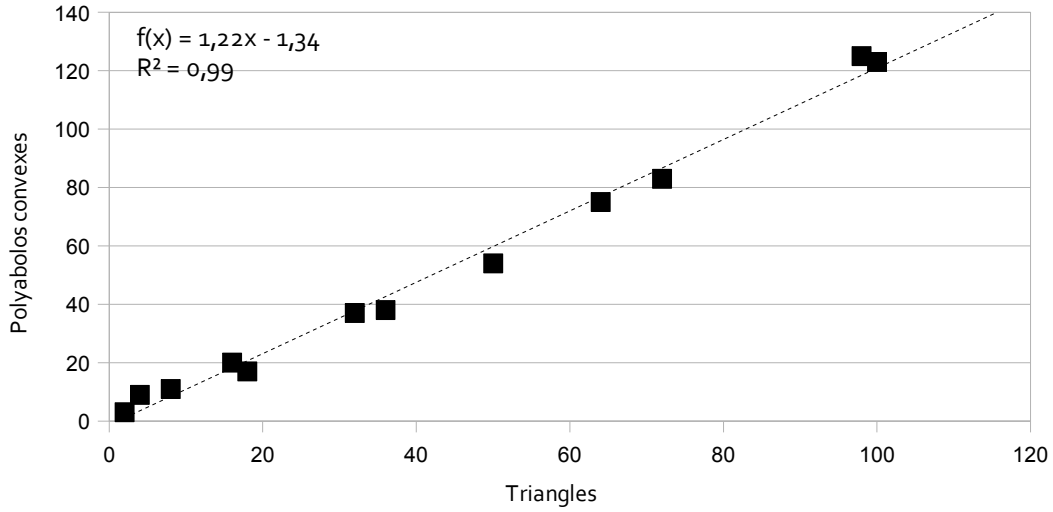
Les polyabolos convexes sont particulièrement intéressants car ils paraissent plus simples, et ils sont moins abondants. Plus simples, parce que leur nombre de côtés est limité à huit, les angles internes ne pouvant prendre que les trois valeurs 45°, 90° et 135° (135=3×45). Lorsqu'on tourne de 135°, on se dévie de sa direction de 45° (180–135=45), si bien que lorsqu'on tourne huit fois de suite de 135°, on finit par revenir dans sa direction d'origine (8×45°=360°) ; dans ce cas, la forme dessinée est un octogone. Les formes convexes sont peu abondantes, beaucoup moins abondantes que les formes non-convexes. Cela est d'autant plus vrai que l'aire du polyabolo augmente, comme nous l'avons fait remarquer au début de ce chapitre (voir figure 96). Dans la famille des 16abolos, il n'y a que vingt formes convexes alors que les formes non-convexes sont près de trente millions, cela ne représente plus qu'une fraction infime de l'ensemble (0.00007%) ! La caractéristique convexe est souvent préférée pour faire d'un polyabolo une pièce de puzzle (toutes les pièces du Tangram le sont ; voir au chapitre 13 des jeux ayant au moins une pièce non-convexe), mais aussi pour dessiner une forme à reconstituer : elles sont plus simples et aussi plus ludiques car plus difficiles à reconstituer du fait d'une meilleure dissimulation des bords au sein de la forme. C'est pour toutes ces raisons que les formes convexes du Tangram furent étudiées historiquement en premier (article cité, datant de 1942).



Graphique 7: Évolution du nombre de formes convexes dans les n-abolos selon le nombre n de triangles unitaires et droite de régression associée

Les nombres de *n*-abolos convexes pour une aire *n* donnée, répartis selon leur nombre de côtés, sont indiqués dans le tableau ci-dessus jusqu'à *n*=39. Nous indiquons aussi ces nombres pour les cinq valeurs suivantes de *n* qui permettent la réalisation du grand carré. En observant ces chiffres, grâce aux graphiques qui suivent notamment, nous constatons que le nombre de formes convexes est

approximativement égal au nombre *n* de triangles qui constituent le *n*-abolo. L'équation de la droite de régression obtenue à partir des quarante premières valeurs est Q(*n*)=0.94×*n*–1.58 avec un coefficient de corrélation de 0.82 qui indique une assez forte cohésion des valeurs autour de cette relation. Le coefficient 0.94 est très proche de 1, et le terme correctif –1.58 est presque nul, ce qui fait qu'on a Q(*n*)≈*n.* Le nombre de formes convexes est moins élevé pour les nombres impairs de triangles et plus élevé pour les nombres pairs.



Graphique 8: Évolution du nombre de formes convexes dans les dissections du carré en n-abolos, selon le nombre n de triangles unitaires et droite de régression associée

Pour les petites valeurs de *n*, il y a plus de quadrilatères (13 quadrilatères pour *n*=16) alors que, pour de plus grandes valeurs (supérieures à 40), ce sont les hexagones qui dominent (4 pour *n*=16 mais 59 pour *n*=100). Pour des valeurs plus grandes encore de *n*, ce sont les heptagones et les octogones qui dominent. Les octogones, ayant le plus grand nombre possible de côtés, ont la plus grande possibilité combinatoire des *n*-abolos dès que la longueur totale des bords devient assez grande pour permettre la répartition de cette longueur entre les huit côtés. Le premier octogone se rencontre chez les 14abolos ; il s'agit du sage et très symétrique octogone de côté 1 (quatre côtés mesurent une unité, les quatre autres $\sqrt{2}$ unités). Lorsque *n*=50, il y a déjà huit heptagones et huit octogones différents (voir l'illustration). Pour *n*=98, on trouve pas moins de 47 heptagones différents.

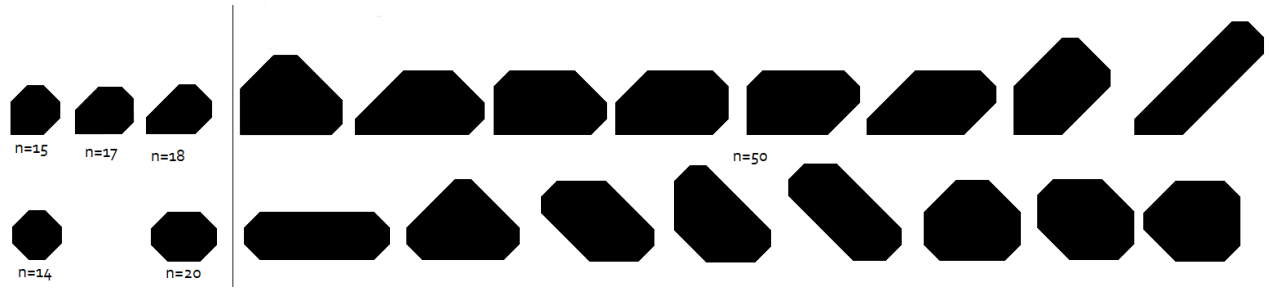


Illustration 97: À droite, les premiers heptagones et octogones ; à gauche, la diversité combinatoire produit 8 heptagones et 8 octogones lorsque n=50

Lorsqu'on se restreint aux valeurs de *n* pour lesquelles on peut avoir le carré, la droite de régression a pour équation Q'(*n*)=1.22×*n*–1.34 avec une corrélation beaucoup plus forte (0.99), ce qui indique une cohérence très élevée entre ces treize données (on a ajouté la valeur 0 pour *n*=0). Lorsque le carré est possible, il y a 22% de formes convexes en plus du nombre *n* de triangles. Si cette relation se maintient sur un plus grand intervalle, on peut s'attendre à trouver pas loin de 1 220 formes convexes lorsque *n* vaut environ 1 000. En réalité, comme on le verra plus loin, le carré qui a l'aire la plus proche de 1 000 triangles est un 1024abolo qui mesure $16\sqrt{2}$ de côté (huit fois celui du Tangram).

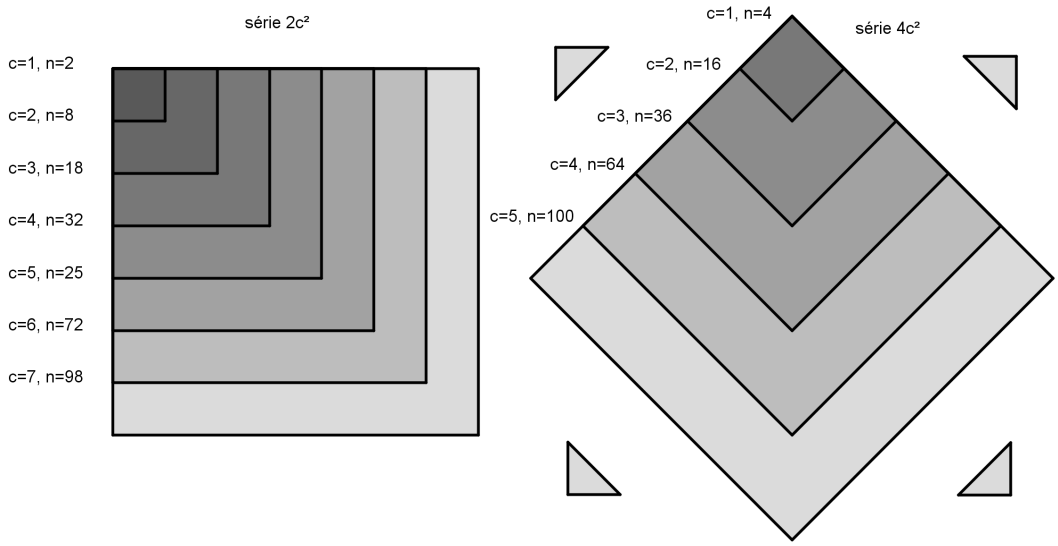


Illustration 98: Les différentes tailles des carrés pouvant être disséqués à l'aide de polyabolos font partie de 2 familles, selon l'orientation des côtés

Le carré a une place centrale dans notre étude, car c'est la forme d'où dérive le petit triangle (par division en deux selon une diagonale) et les autres polyabolos (par agrégation de ces demi-carrés). C'est aussi un polygone qui a tous les éléments de symétrie possibles pour un polyabolo (4 axes et un centre d'ordre 4) et qui est le plus familier dans notre monde. Certains problèmes que nous détaillerons plus loin ne concernent que les dissections du carré en polyabolos. Pour qu'un *n*-abolo soit un carré, le nombre *n* de triangles unitaires le composant doit nécessairement être un de cette liste : 2 - 4 - 8 - 16 - 18 - 32 - 36 - 50 - 64 - 72 - 98 - 100 - etc. Il s'agit des séries $2c^2$ (2, 8, 18, 32, 50 et 72) et $4c^2$ (4, 16, 36, 64 et 100), où *c* est le nombre de segments sur chaque côté du carré. Ces segments sont des côtés du carré pour la série $2c^2$, et des diagonales du carré pour la série $4c^2$ (voir figure suivante). Le Tangram (*n*=16) est une dissection du carré de la série $4c^2$ avec *c*=2, car les côtés du carré mesurent deux diagonales du carré, donc $2\sqrt{2}\approx 2.828$ unités. Un polyabolo carré d'aire *n*=1000 n'existe pas, car l'égalité $2c^2=1000$ conduit à $c=10\sqrt{5}$ tandis que l'égalité $4c^2=1000$ conduit à $c=5\sqrt{2}$, et ni l'une ni l'autre de ces valeurs ne sont

entières. Le carré d'aire la plus proche de 1 000 est le carré de la série $4c^2$ avec c=16 (4×16^2=1 024), donc le côté de ce carré vaut $16\sqrt{2}\approx22.63$ unités, et l'on peut s'attendre à trouver $1024\times1.22\approx1250$ polyabolos convexes qui ont cette aire.

On peut définir l'enveloppe convexe sur quadrillage d'un *n*-abolo comme le polyabolo convexe d'aire minimale qui contient le *n*-abolo. La différence entre l'aire de cette enveloppe convexe et celle du *n*-abolo a été appelée convexité sur quadrillage du *n*-abolo (on a aussi employé l'expression « convexité au sens de Elffers » au début du chapitre 8). Un *n*-abolo convexe coïncide avec son enveloppe convexe, il a une convexité sur quadrillage nulle. La convexité sur quadrillage maximum des *n*-abolos est donnée dans le tableau suivant en fonction de *n*. Une autre mesure de la convexité, plus naturelle sans doute, et généralisable aux formes hétérogènes, est donnée par l'écart entre l'aire de l'enveloppe convexe réelle et l'aire du polyabolo. Bien entendu, nous appelons enveloppe convexe réelle le polygone convexe qui ceinture au plus près le polyabolo. Cette forme est un polygone sur quadrillage mais ce n'est généralement pas un polyabolo. Elle obéit à la relation de Pick, et son aire s'exprime par un nombre entier de petits triangles (voir, au chapitre 8, la détermination de cette caractéristique avec l'algorithme de Graham).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Dimension maxi	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64
Convexité rectgl. Maxi	1	2	5	8	13	18	25	32	41	50	61	72	85	98	113
Convexité quadr. maxi	0	0	2	2	4	8	10	12	16	20	24	28	34	40	44
Convexité réelle maxi	0	0	1	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24	28

Tableau 50: Convexité et dimension maximum d'un polyabolo d'aire n comprise entre 1 et 16 triangles

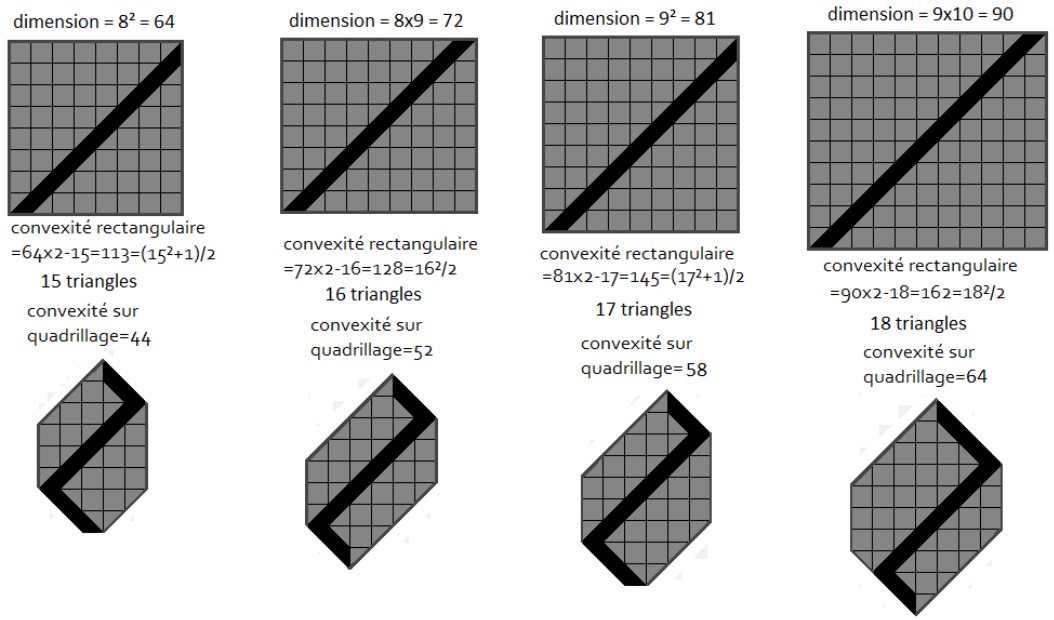
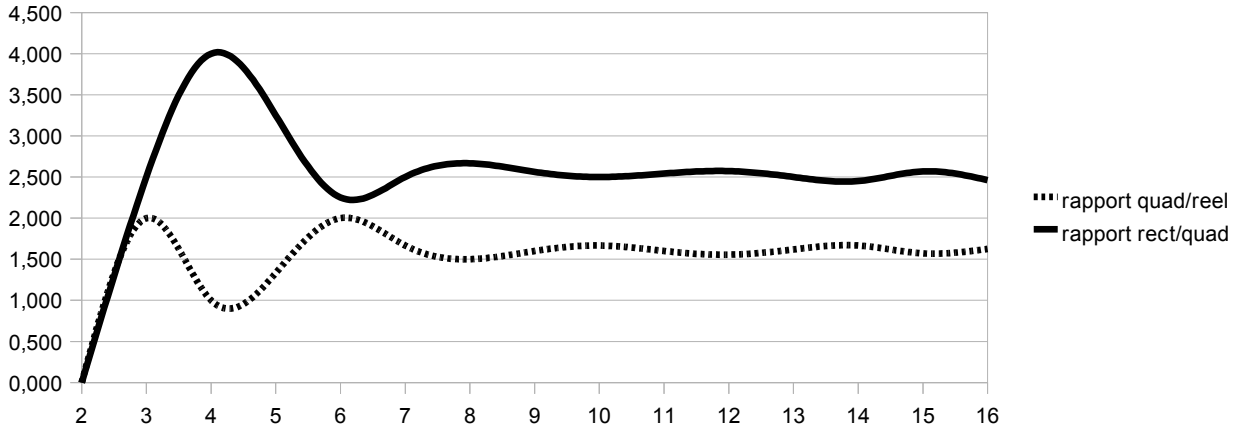


Illustration 99: Polyabolos de dimensions, de convexités rectangulaires (en haut) et de convexités sur quadrillage (en bas) maximum pour n allant de 15 à 18

Le tableau précédent donne aussi la convexité rectangulaire maximum des *n*-abolos en fonction de *n.* Cette convexité se calcule à partir de la dimension du *n*-abolo, c'est-à-dire la dimension de sa matrice d'encodage, ou aussi l'aire du rectangle minimum qui contient le *n*-abolo. Nous mesurons habituellement la dimension en carrés du quadrillage (la pièce carrée du Tangram) car elle s'obtient naturellement en multipliant la longueur du rectangle par sa largeur. La suite des valeurs maximales prises par la dimension est la suite des carrés : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, etc. qui s'intercale avec la suite des produits de deux entiers consécutifs : 2=1×2, 6=2×3, 12=3×4, 20=4×5, 30=5×6, 42=6×7, 56=7×8, 72=8×9, 90=9×10, etc. Ceci vient de la forme des *n*-abolos de dimension maximum : un parallélogramme lorsque *n* est pair et un trapèze lorsque *n* est impair (voir figure 99). Ces formes, toujours les mêmes à la longueur des grands côtés près, conduisent aux suites de dimensions d_1 et d_2 : $d_1(n)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ pour *n* impair et $d_2(n)=\frac{n\times(n+2)}{4}$ pour *n* pair. Pour calculer la convexité rectangulaire, nous convertissons l'unité d'aire en petits triangles (pour obtenir des grandeurs comparables), et nous enlevons l'aire du polyabolo (donc nous enlevons *n* pour un *n*-abolo). Les convexités rectangulaires maximales se calculent donc à l'aide des formules très simples : $c_1(n)=\frac{(n+1)^2}{2}-n=\frac{n^2+1}{2}$ pour *n* impair et $c_2(n)=\frac{n\times(n+2)}{2}-n=\frac{n^2}{2}$ pour *n* pair.



Graphique 9: L'évolution des rapports entre les 3 types de convexité montre qu'on s'approche assez rapidement de valeurs d'équilibre

Le graphique montre la progression des rapports entre ces trois types de convexité. Nous nous apercevons que ces rapports semblent s'approcher assez rapidement de valeurs d'équilibre : 2.5 pour le rapport convexité rectangulaire maxi sur convexité sur quadrillage maxi ; 1.6 pour le rapport convexité sur quadrillage maxi sur convexité réelle maxi. On peut aussi donner la valeur du rapport d'équilibre convexité rectangulaire maxi sur convexité réelle maxi qui doit être approximativement égal à 4 car 2.5×1.6=4. Même si ce ne sont que des valeurs

obtenues de façon empirique, elles permettent d'estimer les convexités maximales pour d'autres valeurs de *n* ; par exemple, pour *n*=32 (un carré deux fois plus grand que celui du Tangram) on peut s'attendre à avoir une convexité rectangulaire maximale de $c_2(32)=\frac{32^2}{2}=512$ et, compte tenu des rapports d'équilibre, une convexité sur quadrillage maximale de $c_{quad}(32)=\frac{c_2(32)}{2.5}\approx 205$ et une convexité réelle maximale de $c_{reel}(32)=\frac{c_2(32)}{4}=128$. Cela peut servir notamment à calibrer une recherche dans cette famille très peuplée de polyabolos (la famille des 32abolos contient 37 formes convexes dont le carré et l'effectif total de la famille a été estimée à 22 800 000 000 000 000).

Convexité Dimension	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	total
4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
5	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
6	2	13	57	34	4	0	0	0	0	0	0	0	0	110
8	2	0	24	46	40	70	26	0	0	0	0	0	0	208
9	2	8	8	52	134	76	59	59	16	0	0	0	0	414
10	0	0	0	0	5	0	7	0	5	0	0	0	0	17
12	0	0	14	15	0	18	92	76	16	53	33	0	3	320
15	0	0	0	0	2	0	0	0	5	0	0	0	4	11
16	0	0	0	0	6	7	3	0	0	5	6	1	1	29
20	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	3
total	11	21	103	147	191	171	188	135	42	58	39	1	9	1116

Tableau 51: Croisement de la dimension et de la convexité sur quadrillage chez les octobolos

Pour aller plus loin dans l'étude des rapports entre convexités et dimension on peut croiser les paramètres deux par deux pour l'ensemble des polyabolos d'une même famille. C'est ce que nous avions fait pour les tangrams, ce sous-groupe des 16abolos. Curieusement, on avait remarqué, dans les lignes de ce tableau correspondant aux tangrams d'une certaine dimension, des valeurs de convexité impossibles encadrées de valeurs possibles. On assiste au même phénomène avec les polyabolos. Par exemple, pour les octobolos de dimension 12, alors que la ligne est presque pleine, on remarque qu'il n'y en a aucun de convexité 4. Ce phénomène doit avoir une explication, car il est loin d'être exceptionnel. Il ne se produit pas pour toutes les dimensions, par exemple il ne se produit pas pour les octobolos de Dimension 9.

Convexité / Dimension	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
8	2																			
9	4	15	41																	
10	2	29	425	1 092	541															
12	4	29	1 256	7 050	10 709	37 317	71 724	39 127	5 207											
14					1 144		7 176	11 256	10 922	21 088	12 386	1 704	42							
15	2	46		1 443	15 121	38 268	25 068	122 762	343 100	244 030	183 413	297 529	179 276	34 356	1 610					
16	2	15	275	1 763	7 430	23 979	88 227	135 864	52 296	255 895	488 636	242 866	173 805	217 252	96 234	13 420	393			
18			158				28 369	29 453		57 427	271 479	322 534	96 815	451 006	570 251	185 401	150 523	141 592	39 970	3 004
20				1 007	5 204	11 130	54 013	57 735	42 727	393 062	574 561	701 840	687 925	625 407	1 767 755	1 243 564	222 883	973 955	854 545	201 343
21									5 385				75 163	36 436		38 477	218 223	159 462	25 275	152 694
24	1						8 704	9 176	13 613			85 171	188 172	198 031	355 958	170 827	97 239	754 987	679 895	609 022
25	2	9	32			996		19 111	49 301	19 460		73 014	138 018	217 264	208 993	244 768	609 201	252 723	56 063	601 029

Tableau 52: Extrait de la répartition croisée entre dimension et convexité sur quadrillage chez les 16abolos

4	1	5	0	3														9
5	0	1	1	1	1													4
6	0	4	2	7	3	11												27
7	0	1	3	2	2	2	1											11
8	1	8	0	13	4	27	9	26										88
9	1	1	1	2	5	10	7	2	5									34
10	0	4	2	19	9	65	17	93	15	70								294
11	0	1	1	6	8	13	20	14	22	13	10							108
12	0	10	2	18	13	103	32	230	42	297	40	207						994
13	0	1	1	6	9	23	28	42	67	57	70	25	23					352
14	0	4	6	24	11	148	47	420	123	847	134	941	98	589				3 392
15	0	2	2	4	14	34	41	76	111	160	202	170	214	70	73			1 173
16	1	11	2	35	11	206	71	654	214	1708	377	2914	443	3152	239	1653		11 691
17	0	1	3	6	15	46	53	129	185	333	448	518	673	515	572	206	232	3 935
18	1	6	2	31	19	269	100	1 007	335	3 100	797	6 624	1 250	10 227	1 359	9 970	675	4 833	40 605

n-abolos à baie symétriques — nombre de côtés

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Totaux
7	0	1	0												1
8	0	0	0	0											0
9	0	0	0	2	2										4
10	0	0	0	5	0	0									5
11	0	3	2	2	4	3	3								17
12	0	0	1	7	1	8	4	8							29
13	0	1	3	2	7	17	19	11	10						70
14	0	6	2	6	1	34	8	58	19	34					168
15	1	2	3	7	9	26	40	55	71	25	30				269
16	1	0	0	10	10	66	32	192	62	274	51	145			843
17	0	1	0	4	15	51	81	115	167	178	235	87	110		1 044
18	0	0	1	18	16	133	66	436	173	915	255	1 148	168	672	4 001

n-abolos à trou symétriques — nombre de côtés

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Totaux
10	0	0	0	1	0	0	0									1
11	0	0	1	0	0	0	0	0								1
12	0	0	2	3	1	0	2	0	0							8
13	0	0	1	1	1	4	2	0	0	0						9
14	0	2	1	0	11	13	11	3	3	0	0					44
15	1	1	0	5	4	8	8	8	9	4	0	0				48
16	1	0	5	5	21	20	41	35	73	15	12	0	0			228
17	0	1	1	2	14	25	30	53	32	36	24	12	0	0		230
18	0	0	1	13	10	52	125	86	240	121	258	61	66	0	0	1 033

Tableau 53: Répartition des n-abolos symétriques selon leur nombre de côtés et selon le type de forme (pleins, à baie et à trou) jusqu'à n=18 triangles

Chez les 16abolos, il n'y a aucune lacune parmi les formes de dimension 10, 12, 16 ou 20, alors qu'il y en a parmi celles de dimension 14, 15, 18, 21, 24 ou 25. Nous avons reproduit une partie du tableau de cette répartition croisée entre Dimension et Convexité sur quadrillage pour les 16abolos, afin d'illustrer ce point. Le tableau complet est plus imposant et déborderait de cette page, la convexité sur quadrillage allant jusqu'à 52 et la dimension jusqu'à 72. Pour la dimension 42 par exemple, il y a des formes de convexités 6 et 7 (respectivement 682 et 739 formes), puis plus rien jusqu'aux convexités 15 à 18 ((respectivement 3 366, 9 764, 10 612 et 3 641 formes), puis plus rien jusqu'aux convexités 22 à 48 où il existe des formes pour vingt-cinq valeurs de la convexité (toutes sauf pour 24 et 47)! On pourrait penser que cela provient des différentes sortes de rectangles d'aire 42 (2×21, 3×14, 6×7), mais le même phénomène se produit pour les rectangles qui n'ont qu'une seule décomposition, par exemple pour la dimension 49 (7×7 est le seul rectangle possible car dans le rectangle 1×49, il ne peut entrer de 16abolo).

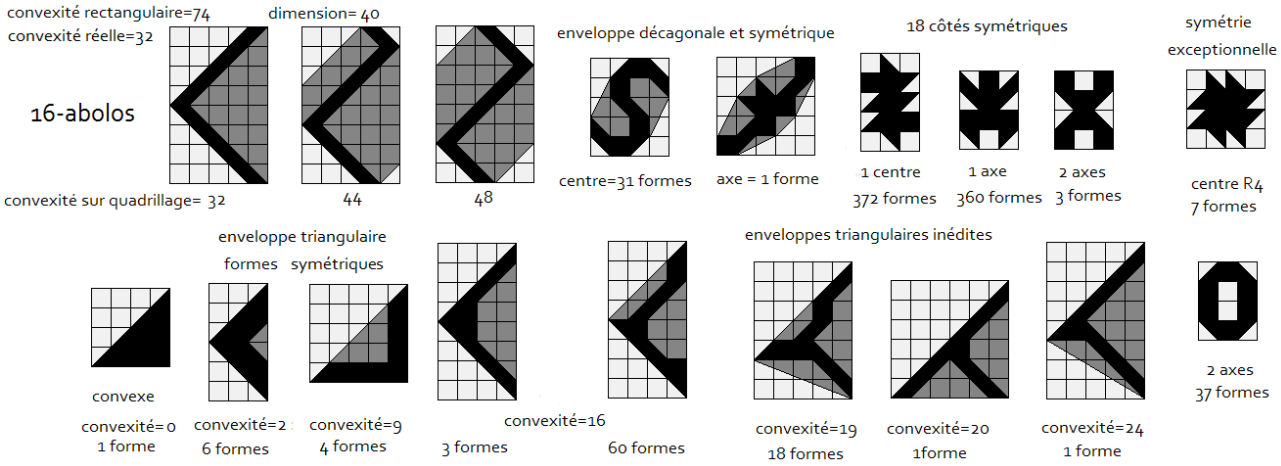


Illustration 100: Quelques 16abolos remarquables par leur convexité réelle maximale, leur symétrie malgré une enveloppe triangulaire ou décagonale. Les formes ayant 18 côtés sont nombreuses (982 983 dont 734 ont un élément de symétrie) comparées à celles que reconstitue le Tangram (12 276 seulement)

Les 16abolos forment une grande famille que l'on connaît surtout pour ses vingt formes convexes. Mais la convexité réelle peut s'élever jusqu'à 32 triangles (pour trois formes seulement certes, mais 3 136 formes de convexité supérieure ou égale à 27. Rappelons que le Tangram réalise des polyabolos pouvant aller jusqu'à une convexité réelle de 27, mais il n'y a que quatre formes qui atteignent cette valeur. L'enveloppe convexe des 16abolos peut avoir entre trois et dix côtés. Alors que onze tangrams seulement avaient une enveloppe décagonale, la super-famille des 16abolos en compte 682. Il y a 470 tangrams qui ont une enveloppe triangulaire, chez les 16abolos il y en a 2 164 répartis dans onze catégories, quatre de plus que pour les tangrams : quatre-vingts 16abolos ayant des convexités de 16, 19, 20 ou même 24 s'entourent ainsi de ces types d'enveloppes triangulaires inédites (voir

figure 100).
La grande diversité des 16abolos entraîne aussi dans son sillage une grande richesse de formes symétriques : Parmi les 28 616 815 16abolos, 12 762 présentent des éléments de symétrie, soit 1 sur 2 242 (0,0446%) : 6 505 ont un axe seulement, 6 202 ont un centre de symétrie seulement, 45 ont deux axes, sept ont un centre d'ordre 4 et trois ont quatre axes. La répartition des formes symétriques selon leur nombre de côtés et selon le type de forme (pleine, avec baie ou avec trou) est donnée dans le tableau 53 pour les *n*-abolos dont l'aire *n* est comprise entre 1 et 18. Pour obtenir les 18abolos symétriques (particulièrement intéressants car, avec 18 triangles, comme avec 16, le carré est reconstituable), nous avons produit l'ensemble des 17abolos, et ensuite généré uniquement les formes symétriques à 18 triangles. Les formes non symétriques devant être environ 375 millions, ce n'est pas aisé de les générer toutes. Nous avons ainsi trouvé 45 663 formes symétriques, ce qui nous donne un rapport de 1 pour 8 212 (0,0122%), soit quatre fois moins que pour les 16abolos. La répartition de ces 18abolos symétriques est la suivante : 21 157 ont un axe seulement, 23 821 ont un centre de symétrie seulement, 67 ont deux axes, seize ont un centre d'ordre 4, et deux ont quatre axes.

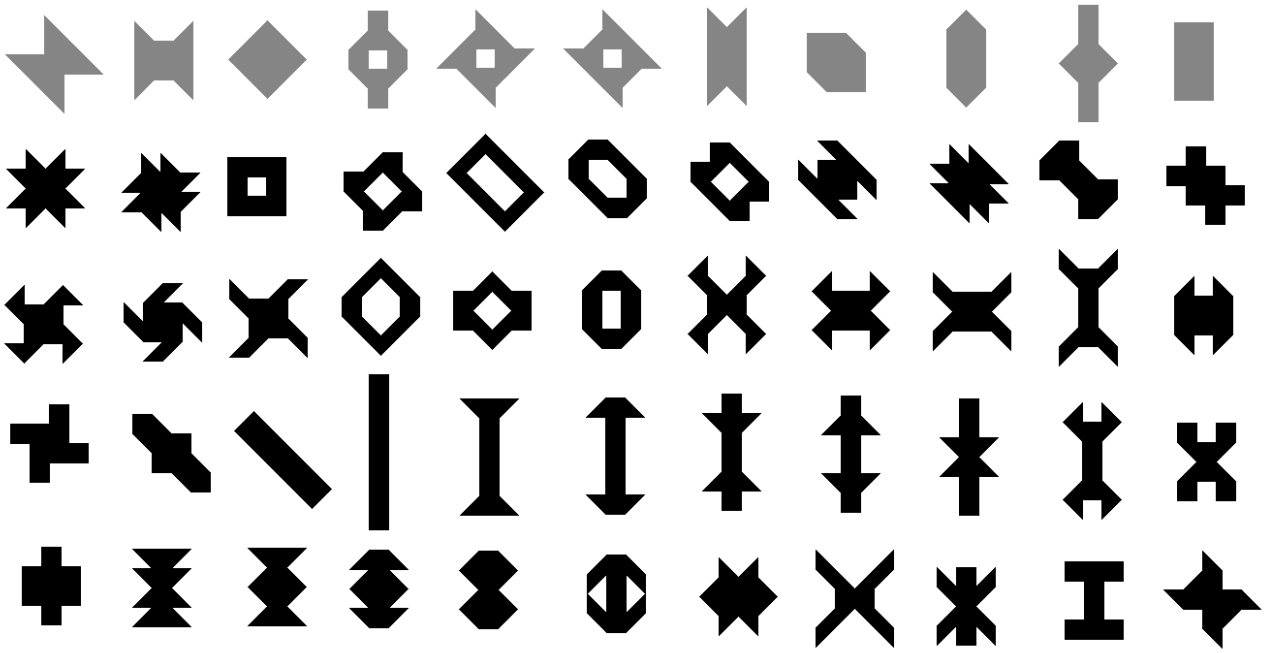


Illustration 101: les 55 formes symétriques remarquables de la famille des 16abolos dont les 11 qui sont réalisables avec le Tangram (en gris)

Les polyabolos symétriques sont trop nombreux pour illustrer une de ces pages, pourtant nous aimerions les exposer car ils sont beaux. Il est entendu que les formes symétriques sont belles, mais les plus belles sont-elles les plus symétriques ? Nous appelons formes symétriques remarquables celles qui ont deux ou quatre axes et

aussi celles qui ont un centre d'ordre 4. Parmi les 16abolos, il y a 55 formes symétriques remarquables dont onze seulement sont reconstituables avec le Tangram. Chez les 18abolos, il y en a 85. L'intérêt de constituer un groupe restreint de formes remarquables réside en partie seulement dans cette possibilité d'affichage. Nous verrons plus loin qu'on peut en faire une sorte d'objectif à atteindre, la fraction reconstituée du groupe remarquable étant un critère pour départager différents jeux. Nous venons de dire que le Tangram réussit à reconstituer onze formes symétriques remarquables sur 55, peut-on trouver un jeu de sept pièces qui en reconstitue davantage ? Le premier groupe remarquable dans une famille de polyabolo est l'ensemble des formes convexes. Historiquement, ce sont ces formes que l'on a comptabilisées en premier (Wang et Hsiung, 1942) et, de par leur très faible nombre (égal à 1.22 fois le nombre *n* de triangles pour les valeurs de *n* où le carré est possible) et leur grande simplicité, elles constituent le groupe le plus remarquable. Les formes symétriques sont plus difficiles à obtenir toutes, mais lorsqu'on se limite au groupe le plus symétrique, on définit un ensemble remarquable particulièrement attractif (voir les figures 101 et 102 pour les 16abolos et les 18abolos).

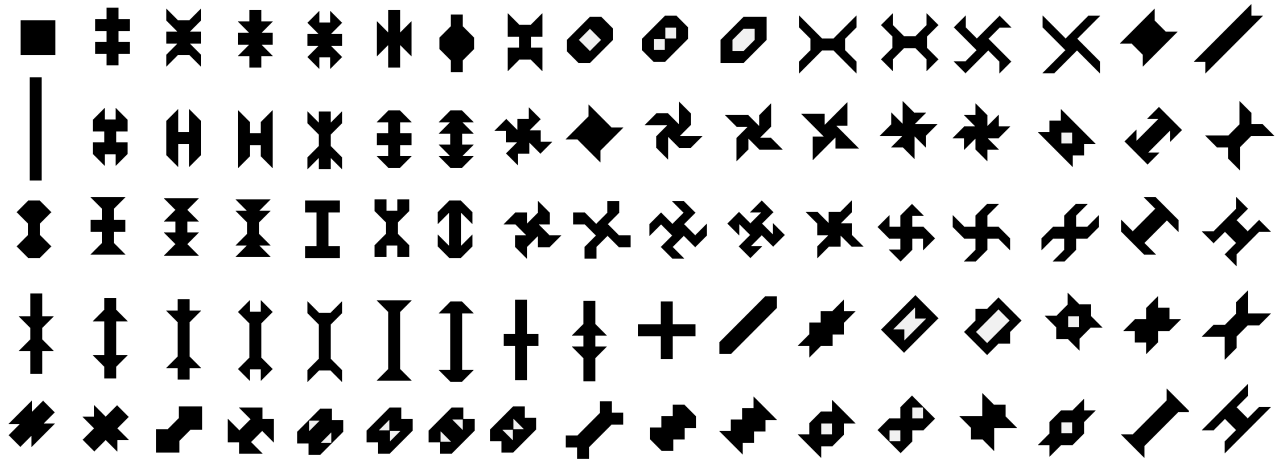


Illustration 102: les 85 formes symétriques remarquables de la famille des 18abolos

<u>Question 11</u> : Nous avions fait l'inventaire, au chapitre 6, des tangrams à trou en nous intéressant à la forme possible d'un trou. Il n'y a que treize trous différents pour les tangrams (voir la figure 45).

a) Dans la famille des 16abolos (dont les tangrams homogènes sont issus), quelles sortes de trou rencontre-t-on ? Y en a t-il d'autres que les treize déjà identifiés ? D'une façon plus générale, on peut essayer de répondre à ces questions pour tous les *n*-abolos que nous avons envisagés (jusqu'à *n*=18).

b) Lorsqu'on s'intéresse simultanément aux formes symétriques et à la présence d'un trou, un troisième groupe très limité de polyabolos émerge (le premier étant l'ensemble des formes convexes, et le second l'ensemble des formes symétriques

remarquables) : l'ensemble des formes symétriques ayant un trou (voir la figure 56 pour les différents types avec le Tangram). On voudrait savoir combien ce groupe contient de formes pour *n* allant de 1 à 18. Même chose pour l'ensemble des polyabolos ayant un bord externe convexe et un trou (voir les figures 46 et 57 pour les tangrams).

Chapitre 12 :
Les assemblages polycompacts

Les assemblages hétérogènes sont le domaine des polycompacts. Ceux-ci sont extrêmement nombreux et posent de sérieux problèmes de génération dès que le nombre de triangles augmente, mais leur grande variété justifie cet effort

Ce que nous appelons polycompact est, aux tangrams hétérogènes, ce que les polyabolos sont aux tangrams homogènes. Nous envisageons ici les assemblages hétérogènes de *n* triangles unitaires (le triangle unitaire est la plus petite pièce triangulaire du Tangram, que nous appelons parfois de façon abusive le triangle), exactement comme nous avons envisagé au chapitre précédent les assemblages homogènes de *n* triangles. Le terme « compact » vient de la façon dont Ronald Read désigne les tangrams hétérogènes : cet expert en Tangram dit compact-tangrams, et nous avions commencé par reprendre son expression. Il disait aussi snug-tangram pour les tangrams homogènes. Ce n'est pas tant le côté anglophone intraduisible de ce terme *snug* (snug serait un adjectif pour désigner des choses bien

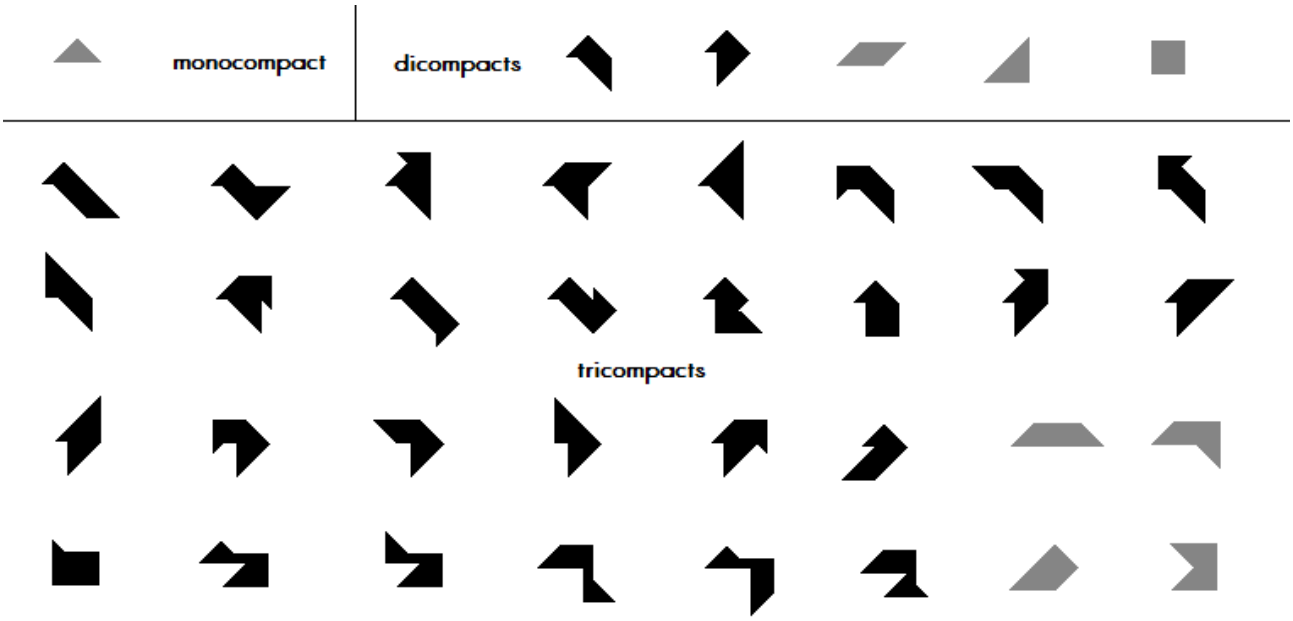


Illustration 103: Les premiers polycompacts : les 5 dicompacts contiennent les 3 diabolos et parmi les 32 tricompacts on retrouve sans peine les 4 triabolos (en gris)

rangées) que le sens de compact qui me semble prêter à confusion. Les assemblages hétérogènes ne sont pas vraiment plus compacts que les homogènes, dans le sens habituel que l'on donne à compact (ramassé, serré) et que l'on évalue à l'aide du périmètre réel (à aire égale, plus le périmètre est petit, plus la forme est

compacte). Nous avons préféré utiliser les termes homogènes et hétérogènes qui traduisent plus clairement la nature des règles d'assemblage. Mais pour désigner les formes qui nous intéressent ici, on pouvait difficilement dire les poly-hétéro-abolos. Nous garderons donc, faute de mieux, le terme de polycompact.

Le seul monocompact est évidemment l'élémentaire petit triangle. Les dicompacts sont les formes que l'on peut fabriquer, en assemblant deux triangles selon la règle hétérogène (un sommet en commun et une partie du bord, quelle que soit sa longueur). Il y a cinq dicompacts (voir la figure 103) qui contiennent les trois diabolos, car les assemblages homogènes sont un cas particulier d'assemblage hétérogène. Deux dicompacts non-homogènes ont un côté mesurant $\sqrt{2}-1 \approx 0.414$, une longueur que nous avions tout d'abord notée *a* (chapitre 3), puis que nous avons renommée longueur n°4 (chapitre 9, tableau 29 notamment). Les tricompacts sont les formes que l'on peut fabriquer avec trois triangles. Il existe 32 tricompacts (6.4 fois le nombre de dicompacts) alors que les triabolos ne sont que quatre (soit 1.3 fois le nombre de diabolos). Cette explosion combinatoire est caractéristique des polycompacts, et elle s'amplifie encore lorsque le nombre *n* de triangles augmente. Les tétracompacts sont ainsi 353 (11.0 fois le nombre de tricompacts), alors que les tétrabolos ne sont que quatorze (3.5 fois le nombre de triabolos). Les formes homogènes sont très vites noyées dans la très grande diversité hétérogène.

Les ensembles de *n*-compacts, pour ce qui est des premières valeurs de *n*, sont assez simples à obtenir, en procédant comme pour les assemblages hétérogènes d'un jeu à *n* pièces, mais avec des pièces triangulaires toutes identiques. Par contre, assez rapidement, on se trouve confronté à de sérieux problèmes de taille de mémoire, de manipulation de gros fichiers, de protocoles complexes d'élimination des doublons et d'optimisation des durées de traitement. Nous avons construit successivement ces ensembles de *n*-compacts pour *n* allant de 1 à 9. Nous avons ainsi obtenu les effectifs (qui pourraient constituer une nouvelle série de nombre entiers à communiquer à

Triangles	Effectif	Ei/Ei-1
1	1	
2	5	5,00
3	32	6,40
4	353	11,03
5	4 024	11,40
6	48 957	12,17
7	605 577	12,37
8	7 608 121	12,56
9	96 479 706	12,68
10	1 230 116 252	12,75
11	15 745 488 019	12,80
12	202 329 521 047	12,85
13	2 608 027 526 292	12,89
14	33 721 795 914 959	12,93
15	437 371 693 017 011	12,97
16	5 685 832 009 221 140	13,00

Tableau 54: Les effectifs Ei des poly-compacts sont multipliés par plus de 12 à chaque triangle ajouté, à partir de 6 triangles. En gris, les effectifs et les coefficients estimés.

Sloane pour son encyclopédie) de ces ensembles, et nous avons aussi pu déterminer les principales caractéristiques (périmètre, convexité, symétrie, etc.) des formes qu'ils contiennent.

Le coefficient multiplicateur entre deux effectifs de *n*-compacts consécutifs est particulièrement intéressant, car il va nous permettre d'estimer les effectifs manquants. On s'aperçoit en effet que ce coefficient, qui est fortement croissant au départ, semble se stabiliser assez rapidement sur une valeur supérieure à 12 ou, si ce n'est pas une stabilisation, la croissance se ralentit de plus en plus, un peu comme celle de la fonction logarithme. Ces remarques permettent d'évaluer le nombre de 16compacts. Ces formes, les polycompacts à seize triangles, sont les formes hétérogènes que l'on peut espérer construire avec des jeux qui totalisent seize triangles comme le Tangram et dont les pièces sont elles-mêmes des assemblages homogènes de ces triangles (personne n'ayant encore, je crois, utilisé un jeu avec des pièces hétérogènes qui ne soient homogènes). Il est donc fort intéressant de connaître ces formes à l'avance, au moins leur effectif, pour imaginer les jeux qui pourraient en reconstituer le plus grand nombre ou le maximum d'une catégorie donnée (par exemple, les polycompacts symétriques).

On a vu que le Tangram ne parvient à reconstituer que trois formes symétriques non-homogènes ayant plus d'un élément de symétrie. Ceci est très peu. Il existe sans doute beaucoup de polycompacts symétriques ayant plus d'un élément de symétrie, mais il serait heureux de déterminer ce fait en les exhibant tous. On pourra alors se mettre à la recherche de jeux pouvant en reconstituer quelques-unes, que ces jeux aient toutes leurs pièces homogènes ou qu'ils en aient seulement quelques-unes, les autres étant hétérogènes.

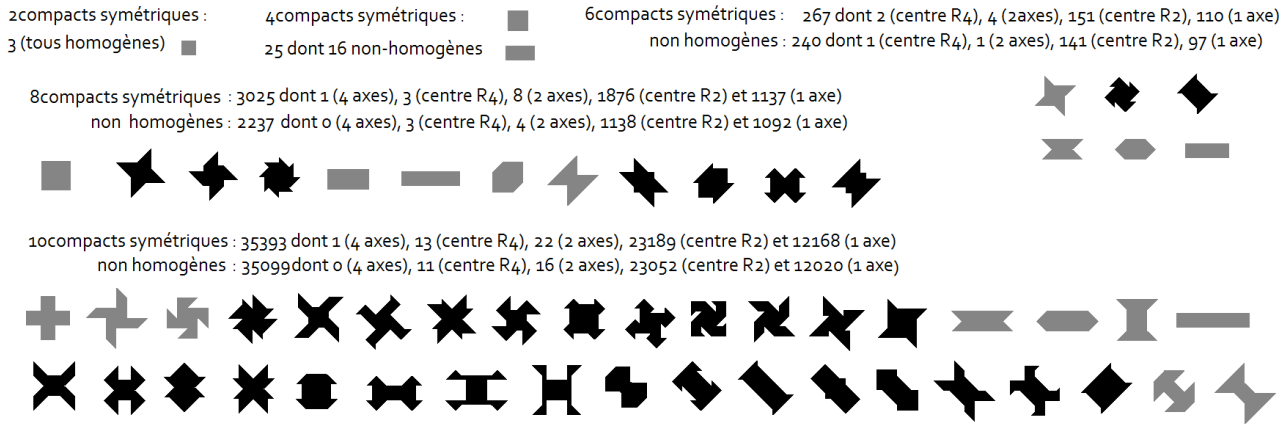


Illustration 104: 2compacts, 4compacts, 6compacts, 8compacts et 10compacts à la symétrie remarquable (plus d'un élément de symétrie). Les formes homogènes (en gris) se noient peu à peu dans la diversité hétérogène

Le nombre de 16compacts, évalué grâce aux valeurs réelles obtenues jusqu'à *n*=9, est incroyablement élevé. Il s'agit de 5.7×10^{15}, près de six millions de milliards de

formes, un million de fois plus que les tangrams hétérogènes (voir tableau 54). Ce nombre gigantesque décourage un chercheur amateur tel que l'auteur de ces lignes. Nous n'avons pas été plus loin que *n*=9 alors que l'étape suivante est à notre portée (juste un peu plus d'un milliard de formes !). Après, il faut ajouter des codes pour tenir compte de toutes les longueurs de segments possibles (nous envisagerons ce point un peu plus loin). Nous pourrions envisager de calculer les seize milliards de 11compacts, car c'est juste un peu plus du double des tangrams hétérogènes. Au rythme qui a été le nôtre, il nous faudrait peut-être un ou deux ans de calcul… Mais il ne saurait être question de faire les dix ou vingt ans de calcul pour obtenir les 202 milliards de 12compacts. Avec notre équipement et notre méthodologie, il nous faudrait environ 430 000 années de calcul ininterrompu pour obtenir les 16compacts ! Il faut donc raisonnablement abandonner ce projet de les obtenir tous. Laissons cela aux générations futures qui développeront sans doute les moyens et les méthodes d'appréhender une telle abondance.

Triangles	Syms (1)	Syms (2)	homogènes	syms homo	ratio sh/sym	Ei/Ei-1
1	1	1	1	1	1.00	
2	3	3	3	3	1.00	3.00
3	3	3	4	2	0.67	1.00
4	25	25	14	9	0.36	8.33
5	24	24	30	4	0.17	0.96
6	267	267	107	27	0.10	11.13
7	235	235	316	11	0.047	0.88
8	3 025	3 025	1 105	88	0.029	12.87
9	2 482	2 482	3 667	34	0.014	0.82
10	35 393	35 393	12 818	294	0.0083	14.26
11	26 341	27 253	44 289	108	0.0041	0.77
12	451 818	430 591	155 733	994	0.0022	15.80
13	320 000	314 332	547 257	352	0.0011	0.73
14	6 784 000	5 406 504	1 937 091	3 392	0.0005	17.20
15	5 865 000	3 784 553	6 870 262	1 173	0.00020	0.70
16	116 910 000	70 014 221	24 463 248	11 691	0.00010	18.50

Tableau 55: Poly-compacts symétriques. Les formes homogènes étant connues, nous en déduisons une estimation complémentaire pour les valeurs manquantes

Pour se faire une idée de ce que l'on peut s'attendre à obtenir en matière de figures symétriques, nous avons été jusqu'à calculer les 10compacts symétriques qui sont près de 35 000. À partir de ces résultats, et de deux manières différentes, nous pouvons estimer qu'il doit y avoir entre 70 et 120 millions de 16compacts symétriques. La première manière (notée *sym1* dans le tableau ci-dessus) utilise les effectifs des polyabolos symétriques (notés *syms homo*) et les rapports entre polyabolos symétriques et polycompacts symétriques (rapports notés *ratio sh/sym*, estimés sur la base des rapports connus). La seconde manière (notée *sym2*) utilise les rapports entre deux effectifs de polycompacts symétriques consécutifs (notés

E_i/E_{i-1}). Ceci dit en passant, il est assez étonnant de constater que les effectifs consécutifs E_{2n} et E_{2n+1} sont quasiment égaux, l'effectif d'indice impair étant légèrement, mais de plus en plus, inférieur à l'effectif d'indice pair qui le précède ($E_2=E_3$, $E_4 \approx E_5$, $E_6 \approx E_7$, etc.). Ceci est dû à l'absence des formes ayant un centre de symétrie pour les nombres impairs de triangles.

Les formes symétriques remarquables sont celles qui possèdent plus d'un élément de symétrie. Nous avons un bel échantillon de ce que l'assemblage compact de dix triangles peut produire comme formes symétriques remarquables : treize formes ayant un centre R4 (dont deux homogènes), 22 formes ayant deux axes (dont six homogènes) et une forme homogène ayant quatre axes. La progression est importante, même pour ces catégories rares de formes hétérogènes : on passe de douze formes symétriques remarquables pour huit triangles (dont cinq homogènes) à 36 formes pour dix triangles (dont neuf homogènes). Avec une telle progression, qui triple lorsqu'on ajoute deux triangles, on peut s'attendre à un millier de formes symétriques remarquables pour seize triangles, sur lesquelles le Tangram n'en reconstitue que 3 ! Parmi les formes symétriques remarquables pour huit triangles, s'en trouve une qui a une symétrie qui n'a encore jamais été rencontrée parmi les formes homogènes et parmi les tangrams hétérogènes. Une des formes données pour avoir un centre de rotation d'ordre 4 possède en fait un centre de rotation d'ordre 8 ! Par une rotation d'*un huitième* de tour, cette forme se superpose à elle-même. Ceci est une nouveauté dans notre exploration de l'univers des formes rattachées au Tangram, mais ne devrait pas être une surprise dans la mesure où l'on s'est autorisé à assembler des triangles unitaires à la mode hétérogène. Ces formes ayant un centre de symétrie R8 vont se retrouver chez les 16compacts parmi lesquels se trouveront donc au moins les trois formes de notre illustration, qui se déduisent simplement de ce 8compact en ajoutant huit triangles de façon à respecter la symétrie de rotation d'ordre 8. Une autre forme de symétrie exceptionnelle se rencontre chez les 16compacts : notre illustration à la fin de ce chapitre (figure 113) montre un magnifique octogone régulier troué qui possède huit axes de symétrie radiaux !

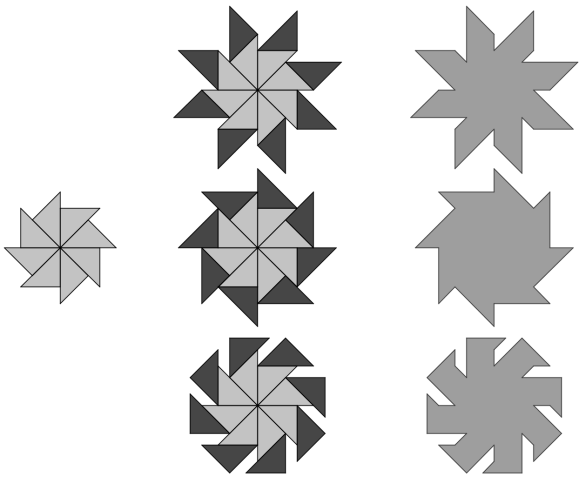


Illustration 105: Polycompacts ayant un centre de rotation d'ordre 8. La plus petite de ces formes possède 8 triangles et sert à construire les 3 autres qui en possèdent 16

Ces premiers 16compacts symétriques obtenus nous encouragent à rechercher, un

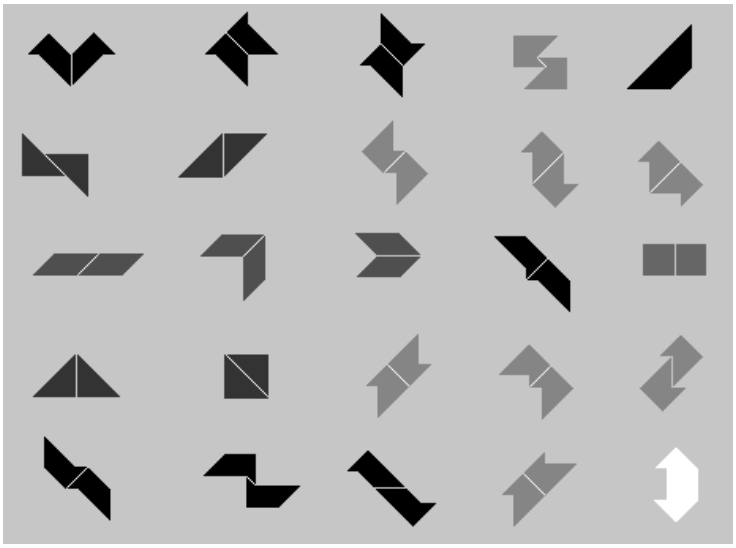


Illustration 106: Tentative de génération des tétracompacts symétriques à partir des dicompacts, utilisant 2 exemplaires identiques d'un même dicompact

peu plus obstinément, une méthode pour construire cet ensemble des 16compacts symétriques sans devoir passer par la génération, impossible à notre niveau, des 15compacts. Les 16compacts symétriques ne sont pas assez nombreux pour être inaccessibles (cent millions de membres seulement !). Serait-il possible alors d'obtenir tout cet ensemble en exploitant une propriété élémentaire de la symétrie ? Une première idée de méthode : prenons les 8compacts, les uns après les autres, et assemblons-les, de toutes les façons possibles, avec leur image par une symétrie axiale ou un demi-tour. Nous obtiendrons ainsi des 16compacts symétriques. Nous avons tenté de générer les 4compacts symétriques à partir de l'ensemble des dicompacts. Peut-on générer avec ces cinq formes, par l'assemblage compact d'une forme et de son symétrique, tous les 25 tétracompacts symétriques ? La réponse est non. Il reste une forme symétrique (en blanc sur la figure 106) qui ne peut être décomposée en deux dicompacts identiques. Il faut juxtaposer deux dicompacts différents pour obtenir ce tétracompact symétrique récalcitrant. Notre rêve d'obtenir tous les 16compacts symétriques par cette méthode est donc une chimère. Si nous procédions ainsi, il manquerait toujours une partie de l'ensemble.

Une deuxième idée de méthode nous vient alors : serait-il possible de générer l'ensemble des 16compacts symétriques à partir de celui des 14compacts symétriques ? Les 14compacts symétriques étant obtenus à partir des 12compacts symétriques qui ont eux-même été obtenus à partir de 10compacts symétriques que nous connaissons déjà. Si on ajoute deux triangles à une forme symétrique en respectant la symétrie, on obtient une nouvelle forme symétrique contenant deux triangles de plus. Mais va-t-on obtenir ainsi toutes les formes symétriques d'un ensemble ? Peut-on déjà obtenir tous les tétracompacts symétriques de cette façon ? La réponse est encore non. Il reste deux formes symétriques (en blanc sur la figure 108) qui ne peuvent être décomposées en un dicompact symétrique et deux triangles disposés comme il convient. L'assemblage compact se produit, pour ces tétracompacts, en un point de référence qui est créé par l'addition des triangles périphériques. En l'absence de ces triangles additionnels, la forme obtenue n'est

pas un dicompact valide : les deux triangles centraux n'ont pas vocation à s'assembler en dehors des points de référence existants ! Nous devons à nouveau abandonner cette idée d'obtenir tous les 16compacts symétriques par adjonctions, de 2 en 2, des triangles manquants aux 10-compacts symétriques.

Les deux constructions précédentes ont échoué pour des raisons complémentaires : dans le premier cas il manquait une forme ayant un axe, et dans le second cas il manquait deux formes ayant un centre. De cette remarque surgit cette troisième idée : si l'on applique les deux méthodes complémentaires, en éliminant les doublons, on obtient l'ensemble de tous les tétracompacts symétriques. Peut-on généraliser cette remarque et espérer générer ainsi l'ensemble des 16compacts symétriques ? Il va nous falloir examiner la construction sur un exemple plus vaste, à la recherche de contre-exemples éventuels qui nous forceraient à abandonner ou à compléter cette méthodologie. Nous avons examiné les 267 hexacompacts symétriques : ceux qui ont un centre de rotation d'ordre 2, nous n'avons eu aucune difficulté à les construire à partir de deux images symétriques d'un des tricompacts existants ; ceux qui ont un axe de symétrie, nous les avons décomposés en un tétracompact symétrique auquel se rajoutent deux triangles symétriques. Nous avons buté alors sur une forme qui ne peut être reconstituée de cette manière : elle a un axe de symétrie qui s'est constitué lors de l'adjonction des deux derniers triangles. Nous pouvons éventuellement remarquer qu'elle est constituée d'un pentacompact symétrique auquel se rajoute un 6ème triangle qui respecte la symétrie existante. Si nous devions retenir ce 3ème mode de construction des compacts symétriques ayant un nombre pair de triangles, il faudrait puiser dans l'ensemble des compacts symétriques ayant un nombre impair de triangles ; il faudrait donc générer aussi ces ensembles, et donc en examiner les modes de construction nécessaires et suffisants, comme ici pour les ensembles de compacts symétriques pairs. Mais serions-nous certain alors, en ayant employé ces trois

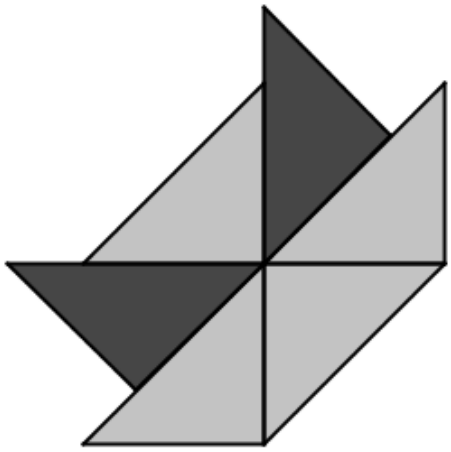


Illustration 107: Le seul hexacompact symétrique qui ne peut être construit par l'une des 2 méthodes proposées

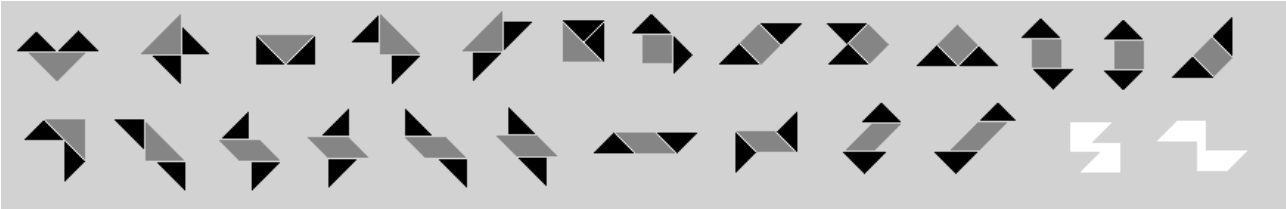


Illustration 108: Tentative de génération des tétracompacts symétriques à partir des dicompacts, ajoutant 2 triangles à un dicompact symétrique

méthodes, d'avoir généré l'ensemble complet ? Ne peut-il y avoir une forme qui n'a aucun ancêtre symétrique dans les familles de quatorze et quinze triangles et qui devient symétrique pour seize triangles ? Nous l'ignorons.

Sinon, pour générer sans rien oublier l'ensemble des 16compacts symétriques à partir des 8compacts, on peut prendre chacun de ces sept millions de 8compacts et les confronter à chacun des autres, dans toutes les positions possibles (il y en a seize en général) et, à partir de tous les points de référence possibles (on n'a pas calculé leur nombre moyen mais il doit bien y en avoir une douzaine en moyenne pour les 8compacts), déterminer si la forme produite est symétrique ou non. L'ampleur de ce projet nous décourage d'emblée. Ce n'est pas la taille de la mémoire nécessaire qui est la cause de ce doute (il n'y a que cent millions de formes à générer) mais la durée du traitement qui pourrait s'avérer techniquement et humainement déraisonnable.

Les segments formant le bord des tangrams hétérogènes peuvent avoir douze longueurs différentes, et l'on va retrouver ces longueurs progressivement, en construisant les ensemble de polycompacts. À partir des 11compacts, il se rajoute une treizième longueur $5\sqrt{2}-6\approx1.071$ qui nécessite que cinq hypoténuses de triangle soient opposées à six petits côtés (voir la figure 109). Les 12compacts accueillent une autre nouvelle longueur $5\sqrt{2}-7\approx0.071$ qui nécessite qu'un 7ème petit côté soit soustrait aux cinq hypoténuses. Les 13compacts voient arriver deux nouvelles longueurs : la quinzième $7-4\sqrt{2}\approx1.343$ pourrait se suffire de onze pièces pour apparaître comme longueur de côté (voir l'illustration, figure du haut), mais alors ce sont deux segments concaténés qui mesurent 1 et $6-4\sqrt{2}\approx0.343$ (la longueur n°3, anciennement notée *j*) ; pour que cette quinzième longueur originale de segment apparaisse en

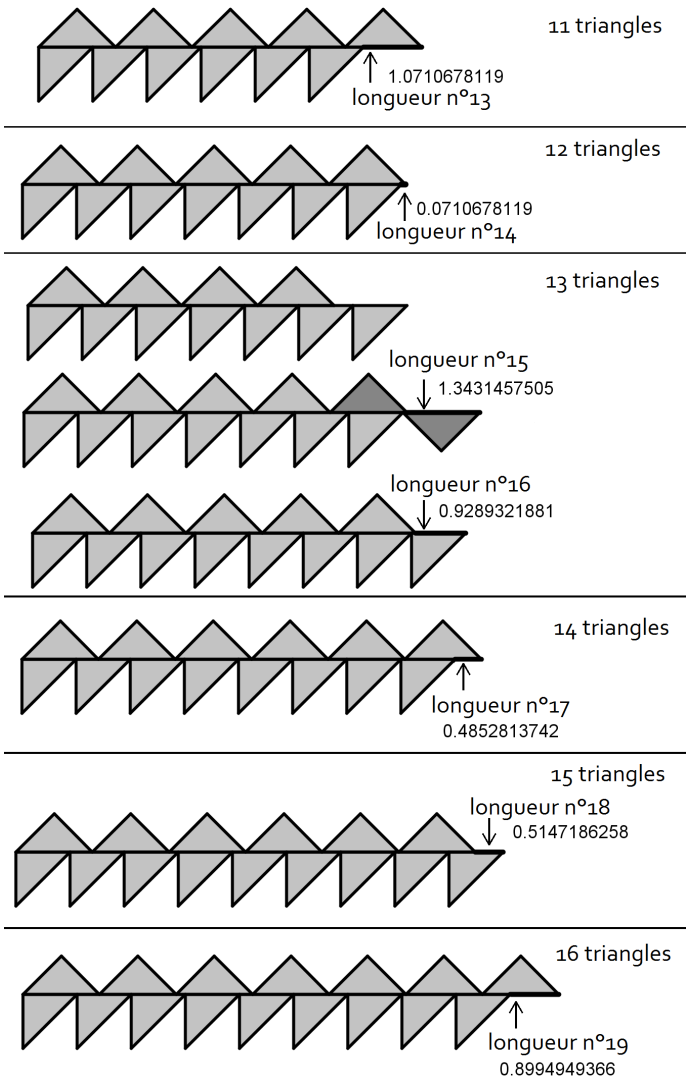


Illustration 109: Les 7 premières nouvelles longueurs de segments qui s'ajoutent aux douze déjà rencontrées avec les tangrams hétérogènes

tant que telle, il faut adjoindre, de part et d'autre de la ligne de jonction, une hypoténuse additionnelle qui constitue la base sur laquelle va pouvoir se dégager cette nouvelle longueur de segment (voir l'illustration, figure du bas). La seizième nouvelle longueur de segment mesure $8-5\sqrt{2}\approx 0.929$ et se dégage plus naturellement que la quinzième puisqu'elle est inférieure à l'unité.

Les illustrations que nous avons dessinées semblent bien monotones, car nous avons disposé les triangles de façon très régulière, à la façon d'une frise. Il faut imaginer la grande diversité des dispositions possibles pour les triangles qui s'assemblent selon un petit côté, l'angle droit pouvant être disposé de deux manières, à droite ou à gauche. Le segment qui réalise la nouvelle longueur peut souvent être disposé ailleurs qu'à l'extrémité de la ligne de jonction. Notre illustration suivante présente quelques-unes des variations possibles pour la treizième longueur, avec seulement les onze triangles qui nécessitent sa construction.

Le tableau que nous avions ébauché au chapitre 4 peut être complété pour n'importe quelle valeur de *n*. Nous sommes allé jusqu'à *n*=16 à titre indicatif, pour constater qu'il existe, à ce niveau, 19 valeurs de longueurs de segment potentiellement réalisables avec seize triangles, qui soient comprises entre 0 (exclus) et $\sqrt{2}$ (inclus). Les douze premières sont connues avec les tangrams hétérogènes, et nous avons déjà présenté les quatre valeurs suivantes qui apparaissent chez les 11compacts, les 12compacts et les 13compacts. Les trois dernières à apparaître jusque-là en théorie dans l'ensemble des 16compacts sont les longueurs : $6\sqrt{2}-8\approx 0.485$ qui apparaissent avec quatorze segments minimum,

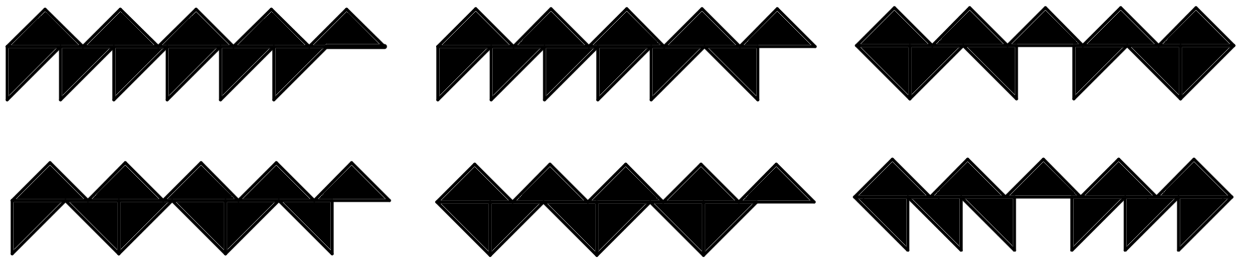


Illustration 110: Quelques variations pour les 11compacts réalisant la treizième longueur

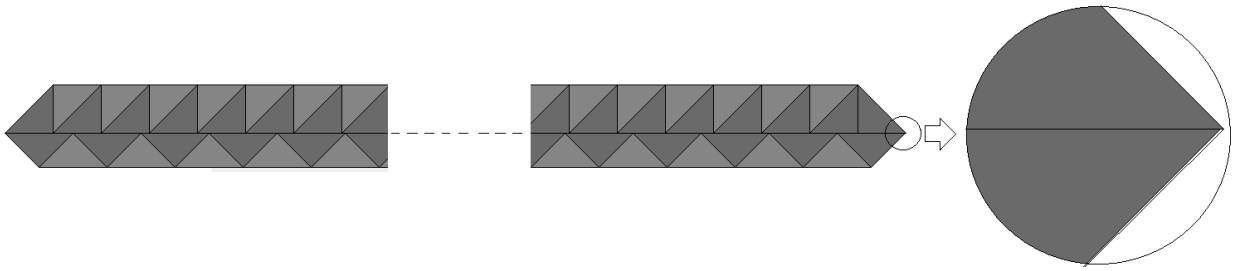


Illustration 111: L'enveloppe convexe de ce n-compact (n= 874 261) dont la convexité ne dépasse pas un centième est hexagonale. Le triangle qui manque a un côté d'environ 0.007 unités

$9-6\sqrt{2}\approx 0.515$ qui apparaît avec quinze segments minimum, et $7\sqrt{2}-9\approx 0.899$ qui apparaît avec seize segments minimum. Nous avons essayé de réaliser au moins un exemplaire de chacune de ces longueurs avec un *n*-compact minimal pour vérifier qu'elles sont bien réalisables dans la réalité. Ces trois dernières nouvelles longueurs sont illustrées sans peine avec des 14compacts, des 15compacts ou des 16compacts, ce qui prouve que la totalité de ces 19 longueurs différentes existent bien chez les 16compacts. Il faudra donc modifier l'encodage adopté jusqu'alors pour que le nouvel encodage tienne compte de cette propriété.

rat/ irrat	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0		1.414	2.828	4.243	5.657	7.071	8.485	9.899	11.314	12.728	14.142	15.556	16.971	18.385	19.799	21.213
1	1.000	0.414	1.828	3.243	4.657	6.071	7.485	8.899	10.314	11.728	13.142	14.556	15.971	17.385	18.799	20.213
2	2.000	0.586	0.828	2.243	3.657	5.071	6.485	7.899	9.314	10.728	12.142	13.556	14.971	16.385	17.799	~~19.213~~
3	3.000	1.586	0.172	1.243	2.657	4.071	5.485	6.899	8.314	9.728	11.142	12.556	13.971	15.385	~~16.799~~	~~18.213~~
4	4.000	2.586	1.172	0.243	1.657	3.071	4.485	5.899	7.314	8.728	10.142	11.556	12.971	~~14.385~~	~~15.799~~	~~17.213~~
5	5.000	3.586	2.172	0.757	0.657	2.071	3.485	4.899	6.314	7.728	9.142	10.556	~~11.971~~	~~13.385~~	~~14.799~~	~~16.213~~
6	6.000	4.586	3.172	1.757	0.343	1.071	2.485	3.899	5.314	6.728	8.142	~~9.556~~	~~10.971~~	~~12.385~~	~~13.799~~	~~15.213~~
7	7.000	5.586	4.172	2.757	1.343	0.071	1.485	2.899	4.314	5.728	~~7.142~~	~~8.556~~	~~9.971~~	~~11.385~~	~~12.799~~	~~14.213~~
8	8.000	6.586	5.172	3.757	2.343	0.929	0.485	1.899	3.314	~~4.728~~	~~6.142~~	~~7.556~~	~~8.971~~	~~10.385~~	~~11.799~~	~~13.213~~
9	9.000	7.586	6.172	4.757	3.343	1.929	0.515	0.899	~~2.314~~	~~3.728~~	~~5.142~~	~~6.556~~	~~7.971~~	~~9.385~~	~~10.799~~	~~12.213~~
10	10.000	8.586	7.172	5.757	4.343	2.929	1.515	~~0.101~~	~~1.314~~	~~2.728~~	~~4.142~~	~~5.556~~	~~6.971~~	~~8.385~~	~~9.799~~	~~11.213~~
11	11.000	9.586	8.172	6.757	5.343	3.929	~~2.515~~	~~1.101~~	~~0.314~~	~~1.728~~	~~3.142~~	~~4.556~~	~~5.971~~	~~7.385~~	~~8.799~~	~~10.213~~
12	12.000	10.586	9.172	7.757	6.343	~~4.929~~	~~3.515~~	~~2.101~~	~~0.686~~	~~0.728~~	~~2.142~~	~~3.556~~	~~4.971~~	~~6.385~~	~~7.799~~	~~9.213~~
13	13.000	11.586	10.172	8.757	~~7.343~~	~~5.929~~	~~4.515~~	~~3.101~~	~~1.686~~	~~0.272~~	~~1.142~~	~~2.556~~	~~3.971~~	~~5.385~~	~~6.799~~	~~8.213~~
14	14.000	12.586	11.172	~~9.757~~	~~8.343~~	~~6.929~~	~~5.515~~	~~4.101~~	~~2.686~~	~~1.272~~	~~0.142~~	~~1.556~~	~~2.971~~	~~4.385~~	~~5.799~~	~~7.213~~
15	15.000	13.586	~~12.172~~	~~10.757~~	~~9.343~~	~~7.929~~	~~6.515~~	~~5.101~~	~~3.686~~	~~2.272~~	~~0.858~~	~~0.556~~	~~1.971~~	~~3.385~~	~~4.799~~	~~6.213~~
16	16.000	~~14.586~~	~~13.172~~	~~11.757~~	~~10.343~~	~~8.929~~	~~7.515~~	~~6.101~~	~~4.686~~	~~3.272~~	~~1.858~~	~~0.444~~	~~0.971~~	~~2.385~~	~~3.799~~	~~5.213~~

Tableau 56: Les différences entre longueurs rationnelles et longueurs irrationnelles, si elles sont comprises entre 0 et $\sqrt{2}$, constituent les 12 longueurs de segments rencontrées avec les tangrams hétérogènes (en gris) et les 7 longueurs de segments additionnelles rencontrées avec les 16compacts (en blanc sur fond noir les 17ème, 18ème et 19ème longueurs). Barré : nécessite plus de 16 triangles

Pour ce qui est des *n*-compacts que nous avons pu générer (*n*<10), sur les douze longueurs de segments qui se rencontrent dans les tangrams hétérogènes, il s'en présente onze : seule, la longueur n°3 n'est pas encore possible avec les 9compacts. Les assemblages hétérogènes amènent successivement les longueurs n°4 (dans les 2compacts), 5 (dans les 3compacts), 8 (dans les 4compacts), 1 et 11 (dans les 6compacts), 2 (dans les 7compacts), 7 et 10 (dans les 8compacts) et 6 (dans les 9compacts). Ces rangs d'apparition peuvent se déduire assez facilement de l'expression de la longueur. Par exemple la longueur n°3 que nous n'avons pas vu apparaître encore a pour expression $6-4\sqrt{2}$. Pour la voir apparaître, nous devons réunir six segments de longueur 1 et soustraire à cette longueur quatre segments de longueur $\sqrt{2}$. Il faut pour cela dix triangles au minimum, les variantes apparaissent ensuite. Ainsi, les longueurs 1 et $\sqrt{2}$ perdent progressivement leurs prédominance : au début, elles se partagent dans la proportion un tiers – deux tiers (un seul triangle a la même répartition des longueurs que les sept pièces du Tangram !), Dans les 9compacts, ces longueurs unitaires ne représentent plus que 22% et 53% environ.

Ces répartitions de longueurs ne peuvent se deviner. Nous les déterminons à partir de nos fichiers de *n*-compacts. La longueur n°4 qui n'existe pas au départ est devenue presque aussi fréquente que la n°12 dans les 9compacts. Peut-on supposer que cette longueur va dépasser la longueur n°12 qui est « naturelle », mais soumise à un fort processus d'érosion. Un équilibre peut-il s'établir alors que de nouvelles longueurs apparaissent toujours ? Certains spécialistes des systèmes dynamiques sauraient peut-être répondre à ces difficiles questions, mais nous nous contenterons de cette brève contribution.

n/len	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	66,7%	0%	0%	33.3%
2	0%	0%	0%	9.1%	0%	0%	0%	0%	63,6%	0%	0%	27.3%
3	0%	0%	0%	15.8%	1.98%	0%	0%	0%	56,4%	0%	0%	25.7%
4	0%	0%	0%	17.3%	2.66%	0%	0%	0.142%	55,7%	0%	0%	24.1%
5	0%	0%	0%	18.4%	3.15%	0%	0%	0.244%	54,9%	0%	0%	23.4%
6	0.0502%	0%	0%	19.1%	3.42%	0%	0%	0.309%	54,2%	0%	0.00144%	23.0%
7	0.0702%	0.00041%	0%	19.6%	3.62%	0%	0%	0.355%	53,7%	0%	0.00326%	22.7%
8	0.0860%	0.00106%	0%	20.0%	3.76%	0%	0.000029%	0.388%	53,3%	0.000014%	0.00493%	22.4%
9	0.0986%	0.00179%	0%	20.4%	3.87%	0.0000020%	0.000079%	0.413%	53,0%	0.000040%	0.00634%	22.2%

Tableau 57: Répartitions des longueurs de segments dans les n-compacts, pour n allant de 1 à 9

Notre génération des premiers *n*-compacts nous permet de récolter quelques informations précises sur ces formes très abondantes au sein desquelles on peut entrevoir la richesse combinatoire des assemblages hétérogènes. Une de ces informations est la répartition, pour une valeur de *n* donnée, des *n*-compacts selon le nombre de côtés. Le nombre de côtés d'un *n*-compact varie entre 3 et 2*n*+1, car lorsqu'on ajoute un triangle supplémentaire, on ajoute au mieux deux côtés à la forme. En partant de trois côtés pour *n*=1, cela conduit à un nombre de côtés égal à $3+2\times(n-1)$, égalité dont découle l'expression indiquée. Pour les formes à trois côtés, il ne peut y avoir qu'un seul triangle, le triangle isocèle rectangle qui provient toujours d'un assemblage homogène, et donc cette colonne (C=3) coïncide exactement avec celle des *n*-abolos (voir le tableau 53).

Triangles	C=3	C=4	C=5	C=6	C=7	C=8	C=9	C=10	C=11	C=12	C=13	C=14	C=15	C=16	C=17	C=18	C=19	total
1	1	0																1
2	1	2	2	0														5
3	0	3	8	8	13	0												32
4	1	5	11	53	99	94	90	0										353
5	0	3	25	87	327	813	1 193	926	650	0								4 024
6	0	6	27	166	812	2 610	6 413	11 583	13 525	9 081	4 734	0						48 957
7	0	3	35	259	1 463	6 239	21 760	55 671	105 695	150 236	145 213	84 392	34 611	0				605 577
8	1	9	36	333	2 450	13 145	54 097	180 890	483 352	998 325	1 550 919	1 819 827	1 492 979	759 245	252 513	0		7 608 121
9	1	3	50	446	3 609	22 737	115 605	475 693	1 566 367	4 237 128	9 226 763	15 863 509	20 862 986	20 832 350	14 796 623	6 635 682	1 840 154	96 479 706

Tableau 58: Répartition du nombre de côtés des n-compacts pour les valeurs de n<10

Pour une valeur de *n* fixée, la proportion de formes homogènes parmi les *n*-compacts est naturellement décroissante lorsque le nombre de côtés augmente. Partant de 100% de formes homogènes pour C=3, dès que *n* dépasse un triangle on arrive toujours à 0% de formes homogènes pour C=2*n*+1, car le maximum de côtés pour une forme homogène est *n*+2 et l'inégalité 2*n*+1 >*n*+2 est réalisée dès que *n*>1.

La décroissance de cette proportion est toujours très rapide, même si les formes homogènes croissent rapidement, elles croissent toujours moins rapidement que les formes hétérogènes. Les 9abolos à dix côtés, par exemple, sont les plus fréquents des 9abolos, mais pourtant ils sont largement noyés dans la multitude des 9compacts à dix côtés, alors même que ces derniers ne représentent que 0.5% des 9compacts.

Triangles	C=3	C=4	C=5	C=6	C=7	C=8	C=9	C=10	C=11	C=12
1	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	100%	100%	0%	-	-	-	-	-	-	-
3	-	67%	25%	0%	0%	-	-	-	-	-
4	100%	100%	18%	11%	0%	0%	0%	-	-	-
5	-	100%	24%	14%	2.8%	0%	0%	0%	0%	-
6	-	83%	33%	17%	4.1%	1.2%	0%	0%	0%	0%
7	-	100%	31%	16%	5.9%	1.7%	0.3%	0%	0%	0%
8	100%	100%	25%	19%	6.7%	2.4%	0.6%	0.11%	0%	0%
9	100%	67%	32%	18%	7.2%	2.9%	0.9%	0.23%	0.033%	0%

Tableau 59: Pourcentages des formes homogènes à l'intérieur des n-compacts

La convexité réelle d'un *n*-compact – la différence entre l'aire de son enveloppe convexe et l'aire *n* de la forme (l'unité d'aire étant le triangle) – prend des valeurs qui s'écrivent $a+\frac{b\sqrt{2}}{2}$ où *a* et *b* sont des entiers. Lorsque le nombre *n* de triangles augmente, cette convexité prend des valeurs de plus en plus variées : de deux valeurs lorsque *n*=2, on passe progressivement à 614 valeurs différentes possibles lorsque *n*=9. L'étalement des valeurs de *a* et de *b* est illustré par ces nuages allongés

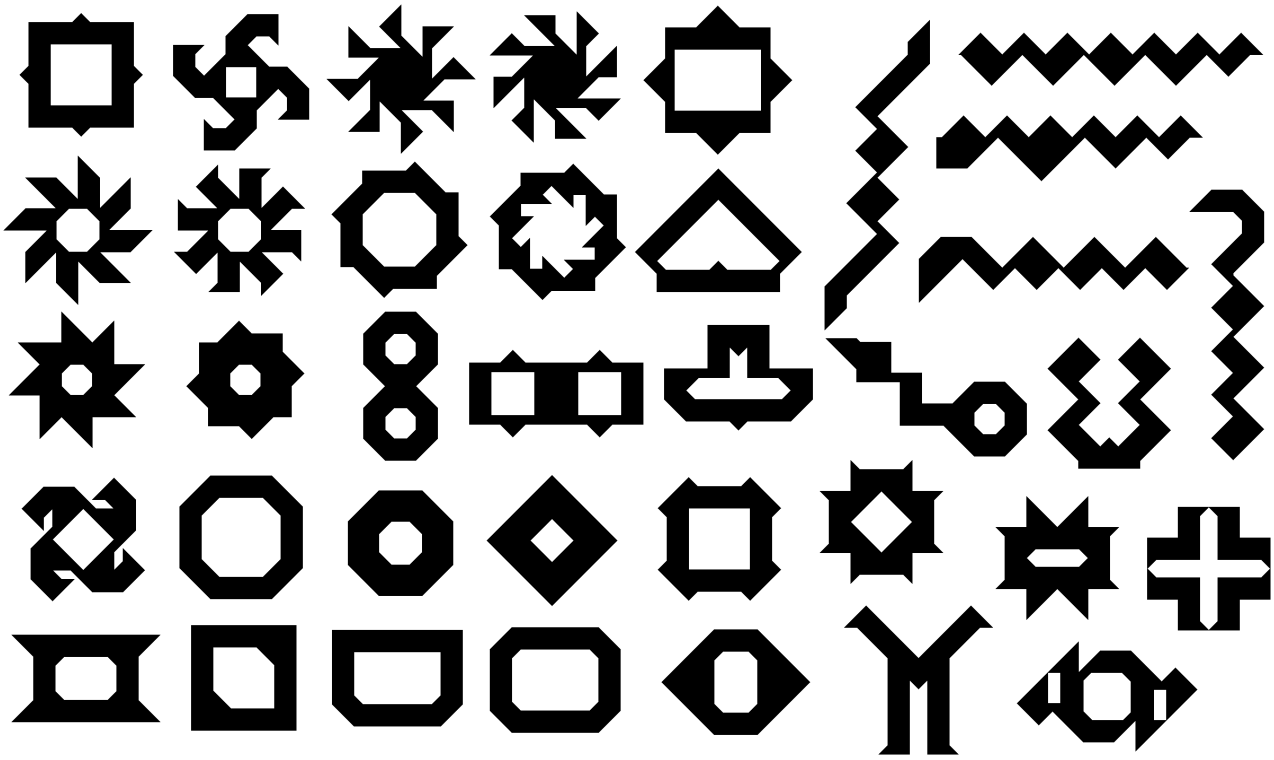


Illustration 113: Quelques 16compacts, la plupart symétriques et avec des trous. Découvrez l'emplacement des pièces (16 triangles identiques).

où nous avons donné à chaque pixel représentant un couple de nombres (*a*;*b*), et une couleur plus claire lorsque l'effectif est plus important. Ces graphiques sont à comparer avec celui de la figure 75 qui a été dressé selon le même principe pour les tangrams homogènes. Même si on ne dispose pas du nuage des convexités de 16compacts, on peut l'imaginer beaucoup plus allongé que celui des tangrams homogènes (plus de valeurs extrêmes) et aussi plus régulier. L'abondance anormale des formes dont le coefficient irrationnel *b* de la convexité est nul ne se retrouve pas pour les *n*-compacts (la « rayure » de la figure 75). Mais surtout, c'est l'extraordinaire diversité des assemblages *n*-compacts qui va se manifester, car les chiffres que l'on obtient jusqu'à *n*=9 laissent à penser qu'il n'y aura pas moins d'une centaine de milliers de valeurs différentes possibles pour la convexité réelle des 16compacts. Un modèle exponentiel basé sur la progression observée des valeurs jusqu'à *n*=9 donne un nombre égal à $0{,}85 \times 2.08^n$ qui conduit à 104 336 valeurs pour *n*=16. Les tangrams homogènes ne peuvent réaliser que 1 939 valeurs seulement de la convexité réelle des 16compacts (50 fois moins de diversité) !

Rang cvx	rat	irr.	valeur dec.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0.0	0.00	1	3	2	6	3	7	5	11	5
2	-2	1.5	0.12	0	0	0	0	0	0	1	4	6
3	-4	3.0	0.24	0	0	0	0	0	0	1	5	8
4	-6	4.5	0.36	0	0	0	0	0	0	0	1	2
5	-1	1.0	0.41	0	2	10	16	24	22	31	31	37
6	-8	6.0	0.49	0	0	0	0	0	0	0	2	3
7	-3	2.5	0.54	0	0	0	0	2	6	6	15	36
8	2	-1.0	0.59	0	0	0	0	0	0	0	1	4
9	-5	4.0	0.66	0	0	0	0	2	10	29	45	85
10	0	0.5	0.71	0	0	2	6	8	11	13	19	29
11	-7	5.5	0.78	0	0	0	0	0	0	2	4	15
12	-2	2.0	0.83	0	0	6	43	85	169	216	326	400
13	-9	7.0	0.90	0	0	0	0	0	0	0	0	9
14	-4	3.5	0.95	0	0	0	1	5	21	50	84	142
15	1	0.0	1.00	0	0	4	19	53	74	102	129	214
16	-6	5.0	1.07	0	0	0	0	1	14	73	222	363
17	-1	1.5	1.12	0	0	3	25	88	182	283	428	581
18	4	-2.0	1.17	0	0	0	0	0	2	3	6	14
19	-8	6.5	1.19	0	0	0	0	0	1	3	27	93
20	-3	3.0	1.24	0	0	0	24	129	403	1 055	1 815	2 758
21	2	-0.5	1.29	0	0	0	2	4	26	54	93	134
22	-10	8.0	1.31	0	0	0	0	0	0	0	5	42
23	7	-4.0	1.34	0	0	0	0	0	0	0	0	1
24	-5	4.5	1.36	0	0	0	0	7	40	134	432	1 031
25	0	1.0	1.41	0	0	3	48	187	469	749	1 206	1 799

Tableau 60: Les 25 premières valeurs de la convexité réelle (lorsqu'on observe le phénomène jusqu'à n=9), et les effectifs réalisant ces valeurs chez les n-compacts

Quand on examine en détail la progression des convexités réelles possibles chez les *n*-compacts, on observe une intéressante indentation (voir les vingt-cinq premières valeurs dans le tableau 60) : les valeurs possibles, au départ très peu, sont enrichies progressivement (quand *n* augmente) par densification. Par exemple, entre les valeurs 0.83 et 0.95 qui sont possibles, respectivement à partir de *n*=3 et *n*=4, il y a la valeur 0.90 qui vient s'insérer à partir de *n*=9. Et si l'on poursuit la construction des *n*-compacts, il y aura une autre valeur de *n*, supérieure à 9, pour laquelle une autre

valeur de la convexité viendra s'insérer entre 0.83 et 0.90. Ce phénomène explique pourquoi le nuage de points de la convexité est de plus en plus allongé (il y a de plus en plus de valeurs proches). Pour prendre un exemple plus concret, on peut imaginer l'agencement des triangles d'un *n*-compact ayant la convexité cvx_0 aussi petite que l'on veut (mais non nulle). Si l'on veut que $0<cvx_0<0.01$ (jusqu'à $n=9$, le minimum est $-2+1.5\sqrt{2}\approx 0.12132$), il suffit de prendre 874 261 triangles, d'en disposer 256 066 en alignant leurs côtés de longueur 1 et 181 066 de l'autre côté en alignant leurs hypoténuses. Les triangles restants comblent les espaces vides entre la forme et son enveloppe convexe, sauf un minuscule triangle à l'extrémité de la ligne de démarcation. Ce triangle a une hauteur de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et une base égale à $256066-181066\sqrt{2}\approx 0.007$, ce qui conduit à une convexité égale à $64016.5\sqrt{2}-90533\approx 0.003$. Notre 87261compact fait donc bien l'affaire car, sans être convexe, sa convexité ne dépasse pas un centième de triangle et nous pouvons le dessiner (voir la figure 111).

<u>Question 12</u> : Avec les *n*-compacts nous avons entamé un chapitre plein de promesses mais un peu frustrant, car nous ne pouvons aller bien loin dans cette quête. Nous avions déjà mis de côté notre désir de connaître les tangrams hétérogènes à trou faute de moyens d'investigation suffisants. Maintenant c'est tout l'énorme potentiel des 16compacts, cette super-famille contenant bien plus que tous les tangrams hétérogènes, que nous devons laisser en attente. C'est comme si nous avions découvert un système solaire très prometteur qui, on le suppose, abrite un monde peuplé d'êtres inconnus, et que nous ne pouvions concevoir d'expédition exploratoire car, tout simplement, ce système est trop loin de nous.

a) Pour patienter, nous pouvons toujours revenir à l'activité traditionnelle du Tangram : un catalogue de formes à reconstituer et un jeu de pièces polyaboliques. Ici, nous avons un jeu de seize pièces : seize triangles isocèles rectangles de même taille. Un bien piètre jeu me direz-vous ! Mais qui permet six millions de milliards de formes hétérogènes. Examinez les figures ci-contre qui ont toutes été fabriquées avec ce jeu. Retrouvez les emplacements des pièces et dites si toutes respectent la règle hétérogène. En d'autres termes, combien de ces formes sont des 16compacts ? Certaines des ces formes sont-elles possibles avec le Tangram ?

b) D'une façon plus générale, combien de côtés au maximum doit-on s'attendre à avoir chez les 16compacts, et combien de côtés au maximum doit-on s'attendre à en trouver dans les enveloppes convexes des 16compacts ?

Chapitre 13 : Recherche d'un meilleur jeu

Le Tangram et ses variantes historiques peuvent se mesurer sur le terrain de la capacité combinatoire. De meilleurs jeux existent-ils? Une fois définis les termes de cette question, on peut commencer à y répondre

Le Tangram n'est pas un jeu sorti du néant. Il est apparu en Chine sous la forme qu'on lui connaît aux alentours des années 1800. L'activité géométrique combinatoire était déjà développée dans ces contrées où l'on pratiquait des assemblages de tables de banquet (tables papillons) aux formes proches de celles des pièces du jeu.

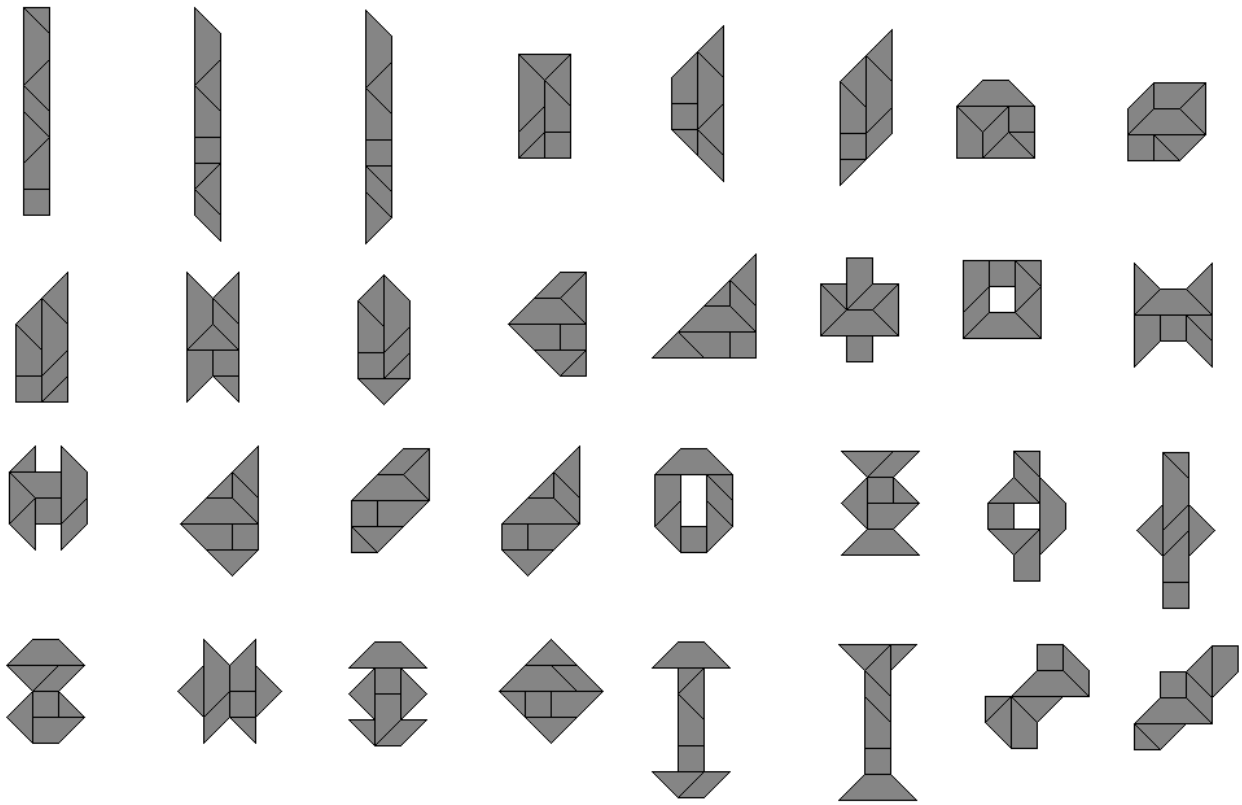


Illustration 114: Les 32 formes remarquables (convexes et/ou à plus d'un élément de symétrique) réalisables avec Chie-no-ita, le précurseur japonais du Tangram

Au Japon, un jeu apparu dans les années 1 750 et attribué de façon honorifique à Sei Shonagon – femme de lettres de la fin du Xème siècle dont on connaît surtout les « notes de chevet » – semble être le véritable précurseur du Tangram. Ce jeu, appelé Chie-no-ita, est très voisin du Tangram : comme lui, il possède sept pièces

polyaboliques totalisant seize triangles. Comme lui, il reconstitue le carré plein mais aussi un autre carré percé en son centre que ne reconstitue pas le Tangram, comme le fit remarquer Martin Gardner dans son article du Scientific American qui dévoila cette proche parenté. Les capacités combinatoires du jeu de Sei Shonagon peuvent ainsi être comparées à celles du Tangram qu'il dépasse sur bien d'autres points que la reconstitution d'un carré. Tangram peut réaliser treize formes convexes alors que Chie-no-ita peut en réaliser seize (le Tangram ne réussit pas les quadrilatères allongés à cause de la présence des deux grands triangles). Sur le plan des formes symétriques remarquables, le Tangram ne parvient qu'à en reconstituer sept qui ne sont pas convexes (voir la figure 101), alors que le jeu japonais en réalise seize. Si l'on veut pousser la comparaison plus loin, il peut être intéressant de construire l'ensemble des formes homogènes réalisables avec Chie-no-ita : celui-ci contient pas moins de 10 889 227 formes (la progression des assemblages de deux à sept pièces étant 83(2P), 1693(3P), 29128(4P), 369245(5P), 2996085(6P) et 10889227(7P)), et dépasse donc largement en nombre les capacités combinatoires du Tangram qui ne réussit qu'à en reconstituer la moitié (seulement 5 583 516 formes homogènes réalisables avec le Tangram selon la progression 41(2P), 683(3P), 11548(4P), 154580(5P), 1356547(6P) et 5583516(7P)). La grande richesse combinatoire de Chie-no-ita provient vraisemblablement de la forme plus étroite de ses pièces qui peuvent toutes être découpées dans un rectangle de papier huit fois plus long que large, de la largeur de la pièce carrée (voir la 1ère forme remarquable, figure 114).

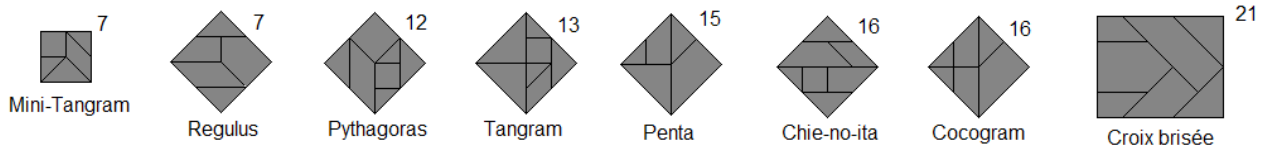


Illustration 115: D'autres jeux historiques proches du Tangram. Le nombre indiqué correspond au nombre de formes convexes réalisables avec le jeu

Chie-no-ita est un proche voisin du Tangram qui a plus de capacité combinatoire et qui était antérieur à l'invention du Tangram. On peut se poser la question des raisons de son déclin relatif, comparativement au succès croissant qu'eut le Tangram. Hormis le caractère assez ludique des trois espèces de triangles propres au Tangram (petits, moyen et grands), aucun fait objectif ne prédispose ce jeu à la prévalence qu'il eut parmi les autres jeux voisins. Sorti des frontières asiatiques par un effet secondaire du commerce maritime avec la Chine, la popularité du Tangram en occident fut assez fulgurante. On édita de nombreux livrets au XIXe siècle qui recopiaient largement les livrets chinois, mais c'était toujours et exclusivement le « jeu chinois » (ancien nom occidental du Tangram). Les autres jeux, tel le Chie-no-

ita japonais, n'existaient pour ainsi dire pas, et ce ne fut qu'ensuite, une fois son succès bien établi, que naquirent des variantes, vers la fin du XIXe et le début du XXe. La firme Richter qui commercialisait des Tangrams en pierre artificielle (Anchor stone) depuis 1 891 commença à lancer d'autres puzzles aux pièces polyaboliques tels que Pythagoras, Regulus, Cocogram, la croix brisée, etc. (voir figure 115) Certains des jeux, en forme de cœur ou d'œuf, avaient quelques bords de pièces faits de demi-cercles ou de quarts de cercle. Cela permettait de sortir un temps de la gamme un peu monotone des polygones. D'autres jeux avaient certaines pièces, voire toutes, en dehors de la famille pourtant infinie des polyabolos. On put ainsi explorer d'autres familles de formes comme celles générées par les angles de 60°, 120° et 30° du triangle équilatéral et de sa moitié. Il fallait en passer par là, le succès entraînant toujours sur sa lancée de multiples épiphénomènes. Tous sont potentiellement intéressants, mais restent finalement dans l'ombre du leader incontesté de la lignée. Notre propos dans cette recherche n'est pas de trouver un successeur à ce jeu simple et beau qui règne sans partage depuis plus de deux siècles sur les jeux de dissection géométriques. Nous voulons seulement mettre en lumière les possibilités combinatoires de ceux qui lui sont comparables.

Ces autres jeux sont inconnus pour la plupart. Si l'on se limite aux jeux ayant sept pièces polyaboliques totalisant seize petits triangles, avec deux petits triangles et deux grands polyabolos d'aire 4 en double (pour le Tangram ce sont les deux grands triangles), cela fait seulement quatorze jeux différents : seule, la qualité du polyabolo d'aire 4 pouvant changer. Si on est plus souple dans la proximité des jeux et qu'on tolère que les pièces doublées ne soient pas forcément les deux petites et les deux grandes, si l'on accepte que des pièces ne soient pas doublées, ou qu'il n'y en ait qu'une qui le soit, ou qu'elle soit triplée... Si on accepte, de plus, des pièces d'aire 3 (il y en a 4), d'aire 5 (il y en a 30), ou 6 (il y en a 107) ou plus encore... Si on examine enfin des jeux totalisant plus ou moins de seize triangles... Alors, le nombre de jeux possibles n'a plus de limite. Pour pouvoir rester dans le domaine du comparable, il paraît raisonnable de n'envisager que des possibilités de variantes finies. Comme nous aimons aussi nous lancer des défis, nous pourrons aussi envisager certaines questions portant sur des ensembles infinis.

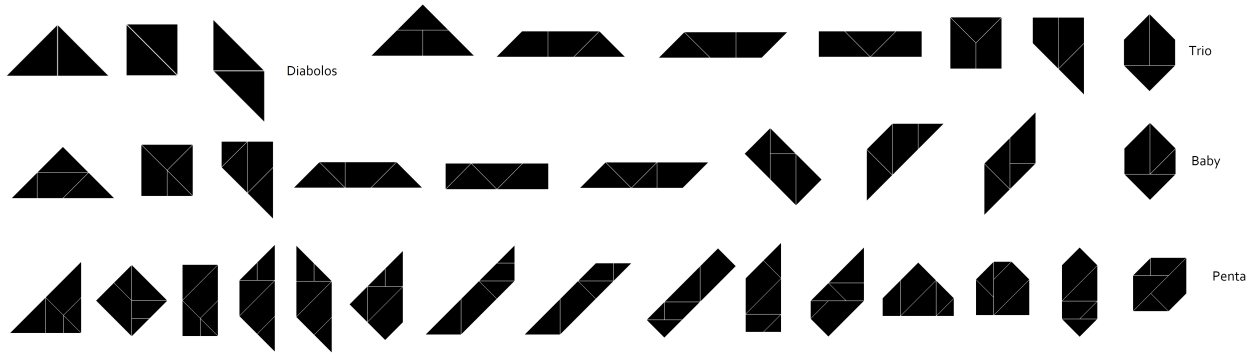


Illustration 116: Les dissections du carré en n pièces polyaboliques réussissant à reconstituer le maximum de formes convexes, pour n variant de 2 à 5

La première question qui nous interpelle est la possibilité de reconstitution des formes convexes. Sans tenir compte forcément de l'aire totale du jeu, nous admettons à priori la possibilité des jeux totalisant trente-deux ou cent triangles. La seule contrainte est de prendre sept pièces polyaboliques, et le seul critère de comparaison est la faculté de constituer des formes convexes. Parmi les jeux historiques, Tangram réussit à reconstituer treize formes convexes, Chie-no-ita en reconstitue seize, Pythagoras douze et la croix brisée vingt-et-un. La croix brisée fait mieux que les autres, car son aire vaut beaucoup plus que seize triangles, mais elle ne parvient pas à reconstituer le carré (elle totalise quarante triangles alors que le carré est possible pour 16, 18, 32, 36 puis cinquante triangles mais pas pour 40). Cette possibilité de reconstitution du carré tient une place importante dans notre étude, car il nous apparaît fondamental de pouvoir au moins se comparer au Tangram sur cette seule forme. Un puzzle ne reconstituant pas le carré nous apparaît comme une variante tout à fait étrangère au voisinage immédiat du Tangram. Donc, nous avons reformulé notre question et nous sommes lancés à la poursuite de la dissection d'un carré en sept pièces polyaboliques qui reconstituerait le maximum de formes convexes. Cette quête concerne potentiellement un nombre infini de jeux. Afin de circonscrire cette recherche à un domaine restreint, il est nécessaire de passer par l'étude des dissections d'un carré en *n* pièces polyaboliques, *n* prenant des valeurs entières à partir de 2. Pour *n*=2 évidemment il ne peut y avoir qu'une seule dissection possible, et on reconstitue alors forcément trois formes convexes. On ne peut pas faire mieux que cela, et cela est atteint déjà avec un jeu totalisant deux triangles d'aire. Il est inutile d'examiner des jeux contenant plus de deux triangles car on ne fera pas mieux. Pour *n*=3, on peut trouver une dissection polyabolique du carré en trois pièces totalisant huit triangles d'aire qui peut reconstituer sept formes convexes. Nous avons baptisé ce jeu « Trio » et, malgré une recherche exhaustive parmi les dissections d'un carré d'aire 16 ou 18 triangles en trois pièces, nous n'avons rien trouvé de mieux. Force est de constater qu'à partir d'une certaine aire, dépendant de *n*, les possibilités combinatoires sont plus grandes, mais cela ne favorise pas la reconstitution des formes convexes. Nous

avons ainsi trouvé le facteur limitant qui permet de restreindre l'infini potentiel à une multitude dénombrable. Nous avons confirmé cette observation sur les dissections à quatre pièces : on ne peut pas faire mieux que ce que réalise un jeu totalisant huit triangles lui aussi, que nous avons baptisé « Baby ». Baby réussit à reconstituer dix formes convexes. Pour les dissections du carré en cinq pièces, on trouve le meilleur jeu parmi ceux totalisant, comme le Tangram, seize triangles. Ce jeu, que nous avons baptisé « Penta », réussit à reconstituer quinze formes convexes.

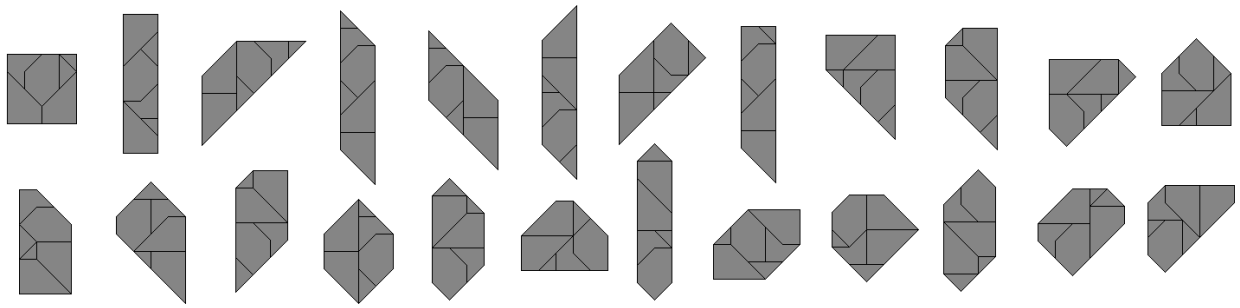


Illustration 117: Hextan, la dissection du carré en 6 pièces polyaboliques qui réussit à reconstituer 24 formes convexes, est un jeu totalisant 32 triangles

En poursuivant avec les dissections du carré en plus de cinq pièces, on arrive dans le domaine des grandes aires, 32 et 36 triangles, pour lesquelles il existe de très nombreuses variantes. En effet, pour disséquer un carré d'aire 32 en six pièces, il faut envisager des pièces d'aire au moins égale à 8. Or, les octobolos sont très nombreux puis qu'il y en a 1 116. Si nous voulons être exhaustif avec les jeux d'aire 32, il faudrait aller jusqu'à examiner des jeux contenant un 27abolo et cinq petits triangles. Cette multitude est trop importante pour le temps et l'espace de mémoire que nous pouvons y consacrer. Nous avons ciblé notre inquisition aux ensembles les plus favorables, et nous y avons déniché un jeu qui obtient un score tout à fait honorable et non dépassé jusqu'à présent, même par les dissections du carré d'aire supérieure à 32. Ce record est donc détenu jusqu'à une confirmation ultérieure ou un détrônement légitime, par « Hextan », notre découverte réussissant à reconstituer 24 formes convexes.

Nous en venons alors aux dissections à sept pièces où, vous le devinez, le pâle score du Tangram et celui à peine plus brillant de Chie-no-ita sont largement dépassés. Notre champion est issu de la très respectable famille des dissections du carré d'aire 36. Il parvient à reconstituer 31 formes convexes et nous l'avons baptisé « Nconvex ». Ce n'est pas seulement à cause du caractère premier du nombre 31, mais nous serions prêt à parier sur le fait qu'il doit être possible de faire mieux (au moins 32 formes convexes), mais nous n'avons pas trouvé de meilleur jeu malgré les nombreux essais sporadiques au sein de cette famille.

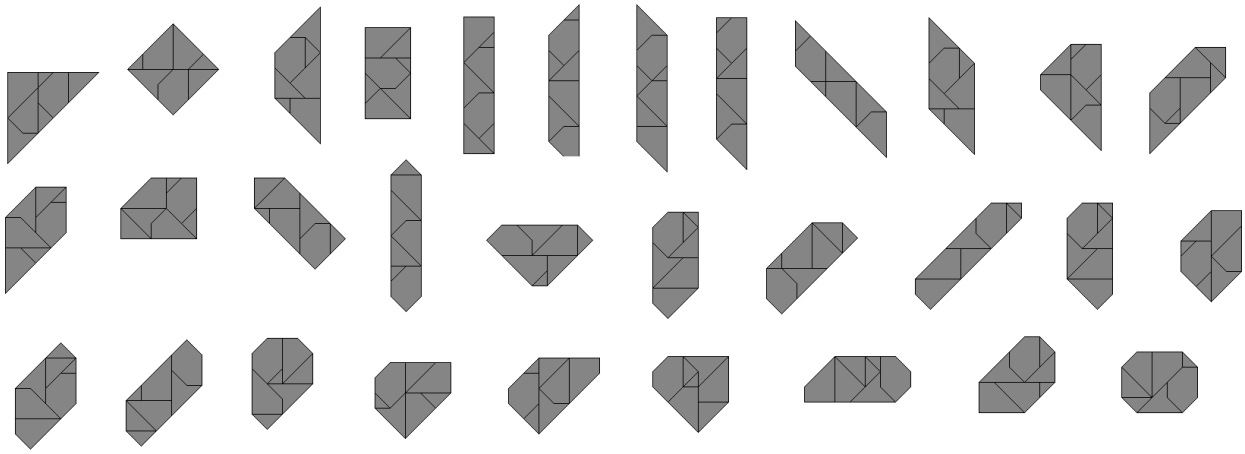


Illustration 118: Nconvex est un jeu d'aire 36 qui réussit à reconstituer 31 formes convexes, un record inégalé jusqu'à présent pour les dissections du carré en 7 pièces polyaboliques

Comme nous l'avons dit, le nombre de candidats est énorme, et techniquement notre programme était bridé (il nous empêchait d'utiliser des pièces d'aire supérieure à dix triangles et, pour les pièces d'aire supérieure à 6, nous n'utilisions que la très infime partie des polyabolos possibles que représentent les polyabolos convexes). La question pourrait être limitée aux pièces convexes, ne serait-ce que parce que les pièces du Tangram le sont, mais cela permettrait aussi de n'envisager qu'un nombre beaucoup plus restreint de jeux. Remarquons tout de même que Hextan comme Nconvex contiennent chacun une pièce non-convexe, d'aire 5 pour Hextan et 6 pour Nconvex. Les vraies meilleures dissections contiennent peut-être davantage de pièces non-convexes, choisies parmi les ensembles très vastes des polyabolos d'aire supérieure à 6.

Laissons-nous cette possibilité d'être surpris par les dissections du carré avec des pièces par forcément convexes, et créons une mention spéciale pour les dissections

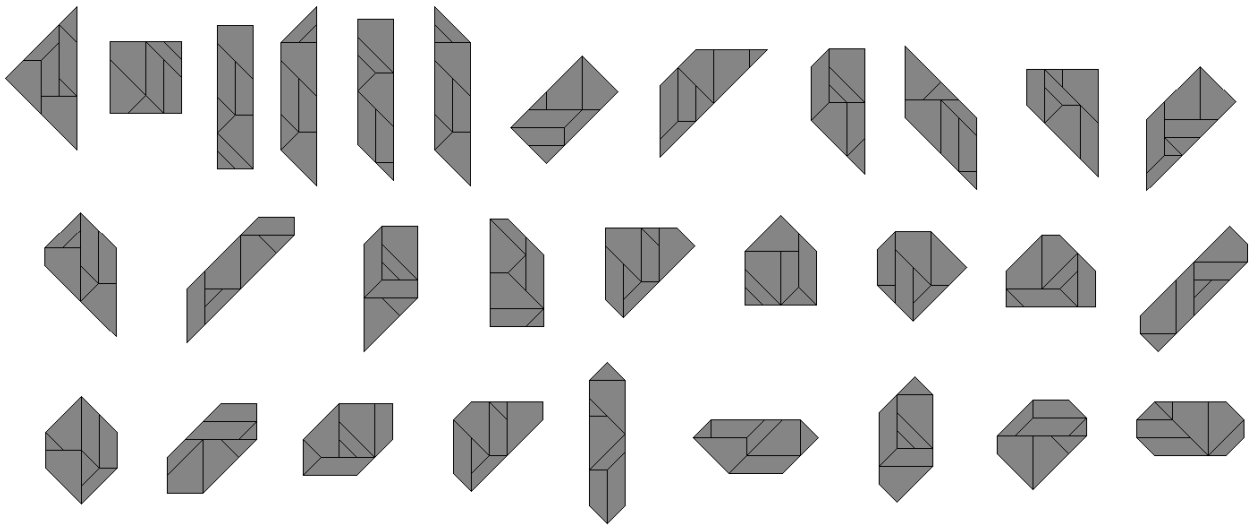


Illustration 119: Convexs est notre champion des dissections du carré en 7 pièces polyaboliques convexes qui réussit à reconstituer 30 formes convexes . Il provient des jeux d'aire 32

en pièces convexes. Lorsqu'on restreint ainsi l'ensemble des pièces, nous régressons un tout petit peu : notre champion se situe parmi les jeux d'aire 32, nous avons baptisé celui-ci « convexs » tout simplement. Convexs réussit avec ses sept pièces convexes à reconstituer trente formes convexes. Sans prétendre que là se situe l'extrême limite des dissections en sept pièces convexes (car encore ici nous n'avons pas fait une recherche exhaustive), nous avons certainement mieux approché cette limite que celle que devraient atteindre les dissections en sept pièces pas forcément convexes.

La question du nombre de formes convexes maximum réalisables avec *n* pièces n'a pas été systématiquement examinée pour *n*>7. Les jeux sont trop nombreux, et les ensembles de pièces possibles trop vastes. Nous avons essayé certains ensembles de pièces, un peu au hasard, pour tester des dissections de carrés d'aire 50, 64 ou cent triangles. Avec nos limitations portant sur l'aire maximale d'une pièce, nous étions obligé de prendre beaucoup de pièces assez grandes. Nous étions donc bien handicapé au point de n'effectuer qu'un semblant de recherche du meilleur jeu. La figure suivante résume cette incursion modeste dans la cour des grands. On y voit des dissections réalisant des quantités très impressionnantes de formes convexes : quarante-huit formes convexes avec le jeu baptisé « WinZ49 » qui a dix pièces et une aire de cinquante triangles ; soixante formes convexes avec le jeu baptisé « WinZ60 » qui a dix pièces aussi et une aire de 64 ; quatre-vingt-sept formes convexes (dont 46 hexagones!) avec le jeu baptisé « Hectogram » qui a douze pièces et une aire de 100.

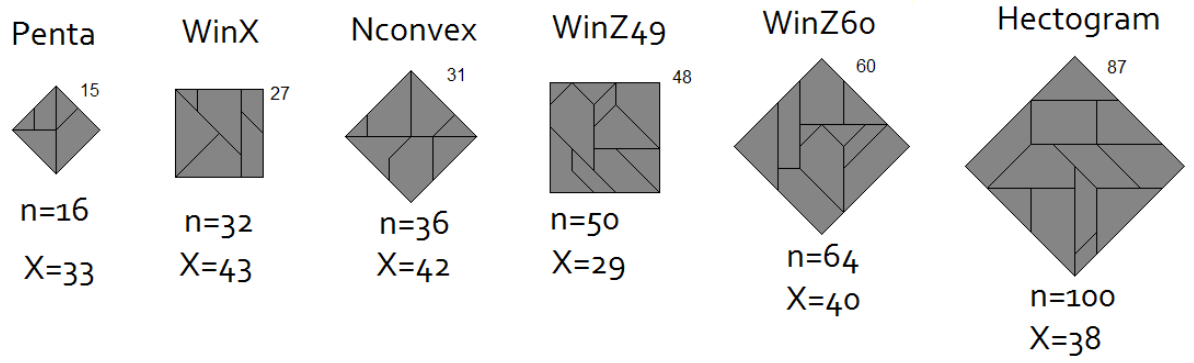


Illustration 120: Les scores X de quelques jeux d'aire n variable, les nombres de formes convexes réalisables sont indiqués à droite des carrés

Les noms un peu hermétiques « WinZ49 » et « WinZ60 » méritent bien une explication : au tout début de notre recherche sur le Tangram, nous avions mis au point une sorte de score composite qui tenait compte, non seulement du nombre de formes convexes réalisables, mais aussi d'autres facteurs qui s'ajoutaient (reconstitution du carré, nombre de longueurs et d'angles différente sur l'ensemble des pièces) ou se retranchaient (nombre de pièces et nombre de pièces en double). Ce score composite, baptisé Z, était au maximum égal à 19 pour les jeux d'aire

inférieure ou égale à 18 (le Tangram obtient le score Z=12 tandis que Chie-no-ita obtient 16, Pythagoras 10 et Penta 18). Nous avions alors modifié notre programme initial pour explorer les jeux d'aire supérieure à 18, et avions trouvé ces champions (winners) dont le score Z atteignait 49 ou même 60, d'où les noms donnés à ces jeux.

Le score Z est illimité comme le nombre de formes convexes. Si l'on ne restreint pas le nombre de pièces des jeux, en prenant des aires de plus en plus importantes, le score Z et le nombre de formes convexes augmentent indéfiniment. Pour que la compétition entre jeux soit équilibrée, il faut que les jeux d'aire importante soient pénalisés s'ils utilisent davantage de pièces. Nous avons alors pensé qu'un score composite pouvait rendre compte de cela, et nous avons construit le score X, en remplaçant le terme $-n$ (on retranche n, le nombre de pièces) par $+n(7-n)$. Le terme $n(7-n)$ a la propriété d'être maximum pour $n=3.5$ et décroissant ensuite lorsque n augmente. Ainsi il ajoute 6 lorsque $n=6$, il ne change pas le score lorsque $n=7$ et il diminue le score pour $n>7$ pénalisant les jeux qui utilisent trop de pièces. Le jeu Hectogram, par exemple, qui utilise douze pièces se voit pénalisé de $12\times5=60$ points de score, le score X de ce jeu est donc égal au score Z diminué de $60-12=48$ points et passe de 86 à 38. Cette correction du score composite a le mérite de remettre les petits jeux dans la course. Le jeu Penta, avec ses cinq pièces, obtient l'excellent score de X=33, loin devant le Tangram qui n'obtient que X=19. Chie-no-ita, comme toujours, se défend mieux et obtient X=23 tandis que les champions WinZ49 et WinZ60 obtiennent respectivement 29 et 40. Le record du score X que nous avons trouvé est un jeu à six pièces d'aire 32 : avec ses vingt-sept formes convexes, il obtient le score pour l'instant inégalé de X=43, et pour cela nous l'avons nommé, très banalement, « WinX ». En fait ce jeu n'est pas le seul à obtenir ce score maximum, nous en avons trouvé plusieurs dans la même veine des jeux à six pièces d'aire 32. Il est très vraisemblable que l'on puisse faire mieux, voire beaucoup mieux que X=43, mais nous pensons que ce score composite est majoré par un nombre supérieur à 43 qui reste à découvrir. La différence avec notre première compétition est qu'ici les jeux ont tous leur chance : il n'y a pas de limite au nombre de pièces. Par la suite, nous avons abandonné cette idée de score composite car elle contient des éléments arbitraires : pourquoi avons-nous comptabilisé la variété des angles et des longueurs de côtés ? Pourquoi utiliser cette expression $+n(7-n)$ et pas $+n(6-n)$? En modifiant la définition du score X, on modifie le classement des jeux, sans véritable raison.

Nom	1 pièce	2 pièces	3 pièces	4 pièces	5 pièces	6 pièces	**7 pièces**
Pythagoras	5	27	314	3 314	28 747	172 100	**516 692**
Tangram	5	41	683	11 548	154 580	1 356 547	**5 583 516**
Chie-No-Ita	6	83	1 693	29 128	369 245	2 996 085	**10 889 227**
Trapèze	6	86	1 921	35 222	441 970	3 308 934	**11 326 050**
Heptex	5	77	1 502	26 382	357 887	3 263 455	**14 367 257**
TTPs (Revathi)	7	95	2 178	42 287	578 422	4 529 416	**14 681 663**
PPTs	7	96	2 227	43 477	593 530	4 748 165	**17 084 031**
PPTr	7	120	3 003	60 221	808 753	5 916 023	**17 184 876**
TTPr	7	127	3 439	74 184	1 053 174	7 995 591	**22 818 110**

Tableau 61: Nombres de formes homogènes obtenus dans les agrégats de 2 à 7 pièces pour quelques jeux à 7 pièces d'aire 16. On constate, à part pour Heptex, que les meilleurs résultats pour 7 pièces sont déjà perceptibles dans les agrégats de 2 pièces

Lorsque nous avons construit l'ensemble des formes homogènes réalisables avec le Tangram, nous avons obtenu un ensemble de formes de plus de cinq millions d'individus. Ce nombre paraît très important mais, au regard des 16abolos dont les tangrams homogènes font partie, cette impression de multitude fait place à la certitude objective que ce jeu ne réalise pas plus du cinquième de cet ensemble : 5 583 516 sur 28 816 815. De là, l'idée de mesurer les jeux d'aire 16 avec cette fraction des 16abolos qu'il réussissent à reconstituer. Le Tangram obtient ainsi une note, exprimée en pourcentage, de 19.38 environ. Que font les autres jeux de cette gamme des proches voisins du Tangram ? Nous pouvons centrer notre recherche sur les jeux à cinq, six ou sept pièces comme précédemment, sachant que plus le nombre de pièces augmente, plus la faculté de reconstitution des 16abolos va s'accroître naturellement : au pire, avec un jeu de seize pièces triangulaires, on va nécessairement reconstituer 100% des 16abolos. Nous allons donc scinder, comme pour la première compétition, l'ensemble des jeux selon le nombre de pièces et désigner un vainqueur par catégorie.

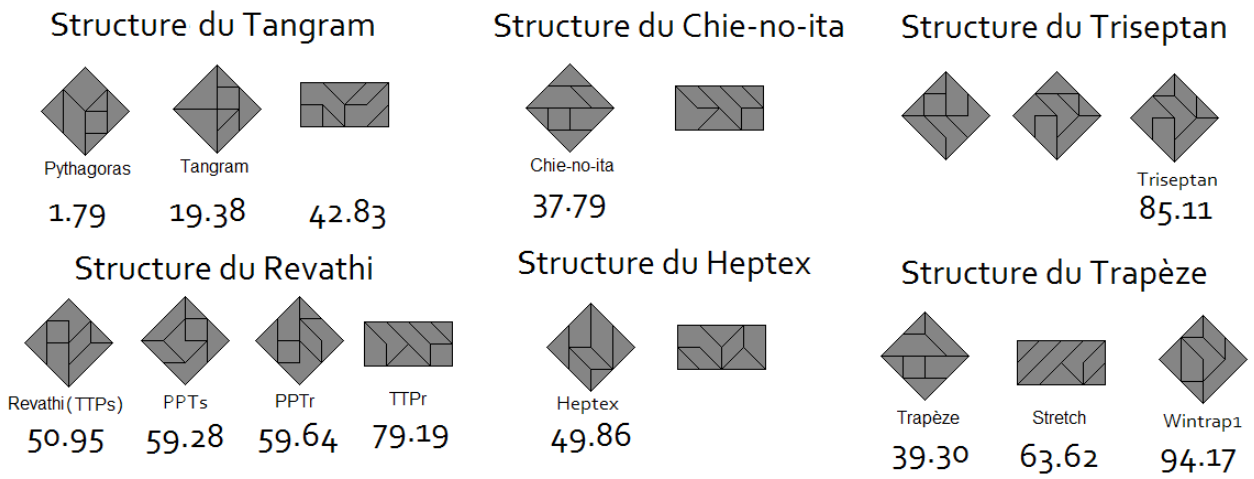


Illustration 121: Les scores de certains jeux de 7 pièces d'aire 16, mesurés par leur capacité de reproduction de l'ensemble des 16abolos. Dans chacune des 6 structures illustrées, les jeux sont classés par score croissant et représentés par une reconstitution du carré quand celui-ci est possible

Pour commencer, nous allons nous intéresser aux jeux à sept pièces. Les traitements pour un seul jeu étant très longs, nous avons dû procéder à une sélection des meilleurs jeux sur la base de leur capacité combinatoire précoce, c'est-à-dire du nombre de formes obtenu dans les agrégats à deux pièces, puis trois pièces, etc. Nous éliminons ainsi à chaque étape de l'agrégation, les jeux les moins prometteurs d'une structure donnée (voir plus loin), pour réserver la plus grande partie du temps de traitement aux champions potentiels. C'est l'observation du tableau précédent, obtenu pour les quelques jeux que nous connaissions, qui nous incita à procéder ainsi. Nous avons constaté dans ce tableau que les jeux qui obtenaient les meilleurs résultats avec la totalité des pièces étaient déjà les mieux placés avec les agrégats de deux ou trois pièces. Il y a quelques exceptions à cette règle, comme Heptex, qui révèlent plus tardivement que les autres leur qualité combinatoire. Nous pensons que, pour Heptex, les mauvaises performances du début sont liées aux deux pièces doublées, tandis que les bonnes performances finales sont dues au fait que les pièces étant moins symétriques que dans les autres jeux, elles possèdent plus d'alias qui diversifient davantage les formes. Quoi qu'il en soit, notre système de crible qui élimine les jeux peu prometteurs fonctionne bien s'il effectue les éliminations progressivement : en ne gardant qu'une fraction optimisée de l'ensemble, on ne construit les agrégats de sept pièces que pour deux ou trois jeux. Le gain de temps est considérable, car il y a vraiment beaucoup de jeux.

Nous procédons par structure de jeux : le Tangram par exemple a une structure de jeux qui contient deux pièces d'aire 1, trois pièces d'aire 2 et deux pièces d'aire 4, soit une structure notée 1.1.2.2.2.4.4 et, si on veut ajouter la précision des pièces doublées, il y a deux doubles. Dans la structure de jeu du Tangram – la structure 1.1.2.2.2.4.4 avec deux doubles – nous avons 560 jeux possibles car, si le deuxième double est d'aire 2, on a 3×2=6 choix possibles pour les pièces d'aire 2 (en notant les pièces selon leur ordre d'apparition dans la figure 88 : 2 le triangle, 3 le parallélogramme et 4 le carré, on a 223, 224, 233, 244, 334 et 344) et 14×13÷2=91 choix possibles pour les deux pièces d'aire 4 qui ne sont alors pas doublées. Cela fait donc 6×91=546 jeux possibles, auxquels il faut ajouter les jeux obtenus si le deuxième double est d'aire 4. Dans ce dernier cas, on a un seul choix possible pour les pièces d'aire 2, et quatorze choix possibles pour la pièce d'aire 4 qui est doublée. Le total fait donc 546+14=560. Dans cette structure – on y rencontre Pythagoras qui fait le très mauvais score de 1.79 – le meilleur score est 42.83, obtenu par un jeu très voisin du Tangram : au lieu d'avoir deux grands triangles, il possède deux tétrabolos non-convexes (la dernière forme à droite de la ligne des tétrabolos, sur la figure 88). Ce jeu a une bonne capacité combinatoire mais, en revanche, il ne réussit pas à reconstituer le carré ! Le Chie-no-ita appartient à une autre structure qui

contient 168 jeux constitués d'un petit triangle, quatre pièces d'aire 2 dont une en double, une d'aire 3 et une d'aire 4 (il faut choisir la pièce en double parmi les trois et ensuite choisir les pièces d'aire 3 et 4 pour lesquelles on a quatre et quatorze choix, ce qui mène à 3×4×14=168 jeux possibles). Le meilleur jeu de cette structure n'est pas Chie-no-ita mais un jeu constitué des pièces 1.2.3.3.4.5.15 dont les agrégats précoces sont 116(2P)-2 731(3P)-51 087(4P)-685 661(5P)-5 520 038(6P). Même sans le nombre final de formes homogènes (les agrégats de sept pièces), nous sommes presque certain qu'il est le meilleur de sa catégorie. Mais comme il est dépassé sur ces agrégats précoces par d'autres jeux provenant d'autres structures, nous pouvons éviter d'aller jusqu'à la fin du processus d'agrégation. Cela explique pourquoi ce jeu, représenté sur notre figure 121, n'a pas de score associé. Nous pouvons supposer que son score est approximativement de 55 car il y a juste un peu moins d'agrégats de six pièces qu'avec PPTr qui a un score de 59.64.

Pour les jeux à sept pièces d'aire 16, nous avons dénombré 67 structures regroupant environ 90 000 jeux différents (il y en a davantage si on utilise toutes les pièces possibles ayant une aire supérieure à 6). Nous avons testé ces structures les unes après les autres jusqu'à déterminer la structure la plus prometteuse : il s'agit de la structure 1.1.2.2.3.3.4 avec la pièce d'aire 1 en double qui contient 252 jeux. Beaucoup de ces jeux sont intéressants, mais nous avons retenu le meilleur, appelé « Wintrap1 » qui obtient le score inégalé de 94.17 avec 27 136 415 formes homogènes.

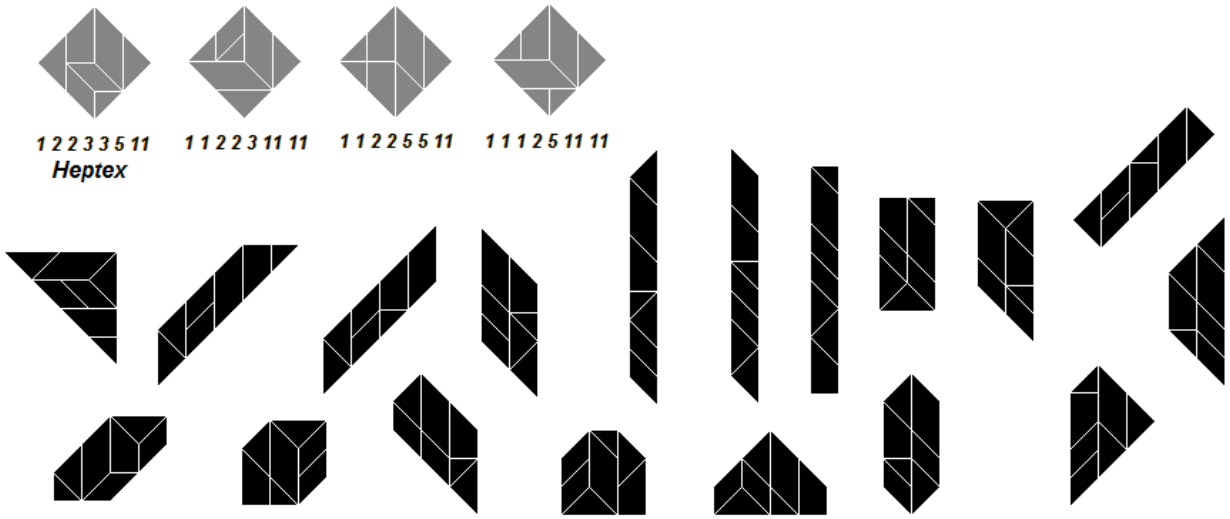


Illustration 122: Le jeu Heptex reconstitue 19 formes convexes et ne possède que 2 doubles. Trois jeux contenant davantage de pièces en double font aussi bien que lui

Dans la même structure, le jeu aux performances juste inférieures, obtenu en échangeant le tétrabolo avec celui du vainqueur de la structure du Tangram (le n°22 au lieu du n°16) ne parvient pas à reconstituer le carré ! Un autre jeu de cette structure, du nom de « Stretch », est présent sur notre illustration : il s'agit d'un jeu qui avait été sélectionné pour réussir à reconstituer une forme de convexité

maximale (convexité sur quadrillage maximale 52 pour les 16abolos, voir la figure 99). Le jeu qui a donné son nom à la structure est « Trapèze ». Ce jeu, qui est caractérisé par trois pièces trapézoïdales (deux triabolos et un tétrabolo), parvient seulement à reconstituer 11 326 050 formes homogènes.

D'autres structures sont intéressantes, et d'autres jeux arrivent à de bonnes performances, mais nous ne pouvons les décrire et les nommer tous. La structure 1.1.2.3.3.3.3 avec juste la pièce d'aire 1 en double est remarquable car elle ne possède que trois jeux : le seul choix est le triabolo. Si on choisit le parallélogramme, on obtient le jeu que nous avons appelé « Triseptan » qui réussit un bon score (85.11) avec 24 525 154 formes homogènes.

Comment ne pas aussi parler de la structure 1.2.2.2.3.3.3 qui est unique car elle est la seule à n'avoir aucun double. Remarquez que cette structure contient les sept premiers polyabolos : un seul tétrabolo doit être retiré à la collection complète monoabolo+diabolos+tétrabolos qui a une aire de 19 triangles. Cette structure ne contient que quatre jeux selon le tétrabolo qu'on enlève de la collection. Si l'on enlève le pentagone symétrique (Ps), on obtient le jeu noté TTPr (les deux Trapèzes et le Pentagone non symétrique) dans le tableau 61, qui obtient le score assez honorable de 79.19 mais qui ne reconstitue pas le carré ! Viennent ensuite les trois autres jeux qui reconstituent tous le carré, mais obtiennent de moins bon scores allant de 59.64 à 50.95 pour celui qui reconstitue le plus de formes convexes (il en reconstitue quinze) et que nous avons appelé « Revathi » ou aussi PPTs (les deux Pentagones et le Trapèze symétrique). Pour l'anecdote, Revathi est le prénom de ma fille. Avec ses sept lettres différentes, il m'est apparu approprié pour désigner cette structure unique. Le choix de faire porter ce brillant nom (Revathi est aussi le nom d'une constellation d'étoile dans le zodiaque indien) au jeu TTPs a été fait à la détermination des formes convexes : TTPs en reconstituant quinze arrivait devant les autres, et pour cette raison était mon préféré. Par la suite, il s'avéra que ce jeu réussissait le plus mauvais score des quatre aux formes homogènes... D'une façon générale, les jeux qui réussissent beaucoup de formes homogènes sont ceux qui contiennent les pièces les moins régulières, et le pentagone symétrique de TTPs est le plus régulier des tétrabolos. Le moins régulier des tétrabolos est le pentagone non symétrique, le seul absent de TTPs.

Les jeux qui réussissent le mieux dans leur capacité combinatoire pour produire des formes homogènes ne sont pas forcément ceux qui reconstituent le plus de formes convexes. Wintrap ne réussit qu'à en reproduire treize, comme le Tangram et Trapèze. Stretch qui obtient une bonne note aux formes homogènes (63.61) parvient à en reconstituer 15, mais parmi ces quinze forme ne se trouve pas le carré! Le jeu de sept pièces d'aire 16 qui réussit le mieux à reconstituer des formes

convexes est le jeu que nous avons appelé « Heptex » : il parvient à en reconstituer 19, c'est-à-dire tous les 16abolos convexes sauf le plus étroit, et son score aux formes homogènes n'est pas si ridicule (49.86) mais ce n'est pas le meilleur dans sa structure selon ce critère (la structure 1.2.2.2.2.3.4 avec un double contient 504 jeux). Heptex n'est pas le seul à réaliser 19 formes convexes – trois autres jeux issus d'une autre structure parviennent au même résultat – mais il y arrive avec seulement deux pièces en double alors que les autres en ont trois.

Les jeux d'aire 16 ayant cinq ou six pièces réussissent forcément de plus mauvais scores en moyenne que les jeux à sept pièces. Ces jeux sont, par contre, plus nombreux que les jeux à sept pièces car, possédant moins de pièces, celles-ci peuvent être plus grandes et les grands polyabolos sont beaucoup plus nombreux que les petits. La seule structure 1.1.1.2.5.6 avec deux doubles contient 9 630 jeux à six pièces différents ! Pour ces deux raisons, nous n'avons pas cherché tout de suite le meilleur de ces jeux pour reconstituer les formes homogènes, gardant cela pour notre question de fin de chapitre. Mais nous avons tout de même testé les quelques jeux que nous avions déjà identifié : Penta, si prometteur avec ses cinq pièces, ne reconstitue que 232 904 formes homogènes, ce qui lui attribue le score de 0.81. Regulus, avec ses 100 067 formes homogènes n'arrive qu'à 0.35 ! Du côté des jeux à six pièces, Cocogram avec ses 1 287 383 formes obtient la note de 4.47.

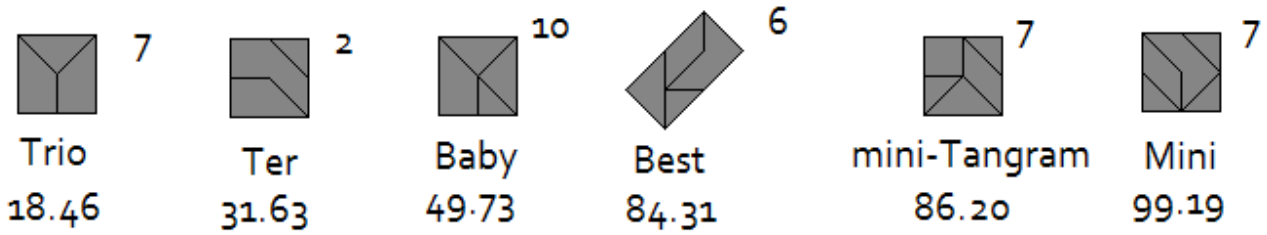


Illustration 123: Quelques jeux d'aire 8 triangles à 3, 4 et 5 pièces, avec pour chacun le nombre de formes convexes reconstituables (à droite) et le score aux formes homogènes

Pour les jeux d'aire inférieure à seize triangles, nous avons seulement eu de l'intérêt pour les jeux d'aire 8, car alors le carré est reconstituable. Nous connaissons déjà les capacités combinatoires d'un jeu d'aire 8 pour les avoir envisagées au chapitre 4. Il s'agit du mini-Tangram – ce jeu constitué des cinq plus petites pièces du Tangram – qui réussit à reconstituer 86.20% des 1 116 octobolos (962 formes), ce qui est un très bon résultat. Parmi les jeux à cinq pièces d'aire 8 (il n'y en a que 36), le meilleur selon ce critère est un jeu que nous avons appelé « Mini » qui réussit à obtenir l'excellente note de 99.19 avec 1 107 formes homogènes. Mini échoue à reconstituer neuf formes seulement, parmi toutes celles qui sont possibles. Mais il faut dire que le très faible nombre de ces formes (comparé à celui des 16abolos) rend la prouesse moins extraordinaire. Les jeux de petite aire n'ont aucune peine à parvenir à de meilleurs scores aux formes homogènes. À l'extrême, on trouve le jeu d'aire 2

constitué de deux petits triangles qui parvient à reconstituer 100% des formes homogènes. Pas difficile, il n'y en a que trois (les diabolos) ! Pour en revenir aux jeux d'aire 8, parmi les 121 jeux différents à quatre pièces, nous avons déjà mentionné Baby qui parvient à reconstituer dix formes convexes. Ce jeu obtient un assez bon score aux formes homogènes puisqu'il en reconstitue 555, soit 49.73% des octobolos. Le meilleur de ces jeux à quatre pièces est un jeu que nous avons appelé « Best » qui reconstitue 941 formes homogènes et obtient ainsi le score très honorable de 84.31 – presqu'autant que le mini-Tangram – sans pourtant parvenir à reconstituer le carré ! Pour les jeux à trois pièces d'aire 8, les scores aux formes homogènes sont moins bons, et le meilleur n'arrive qu'à 31.63 en reconstituant 353 formes. Ce jeu que nous avons baptisé « Ter » dépasse tout de même le champion des formes convexes, un jeu que nous avions baptisé Trio, qui n'arrive qu'au score modeste de 18.46 avec ses 206 formes convexes.

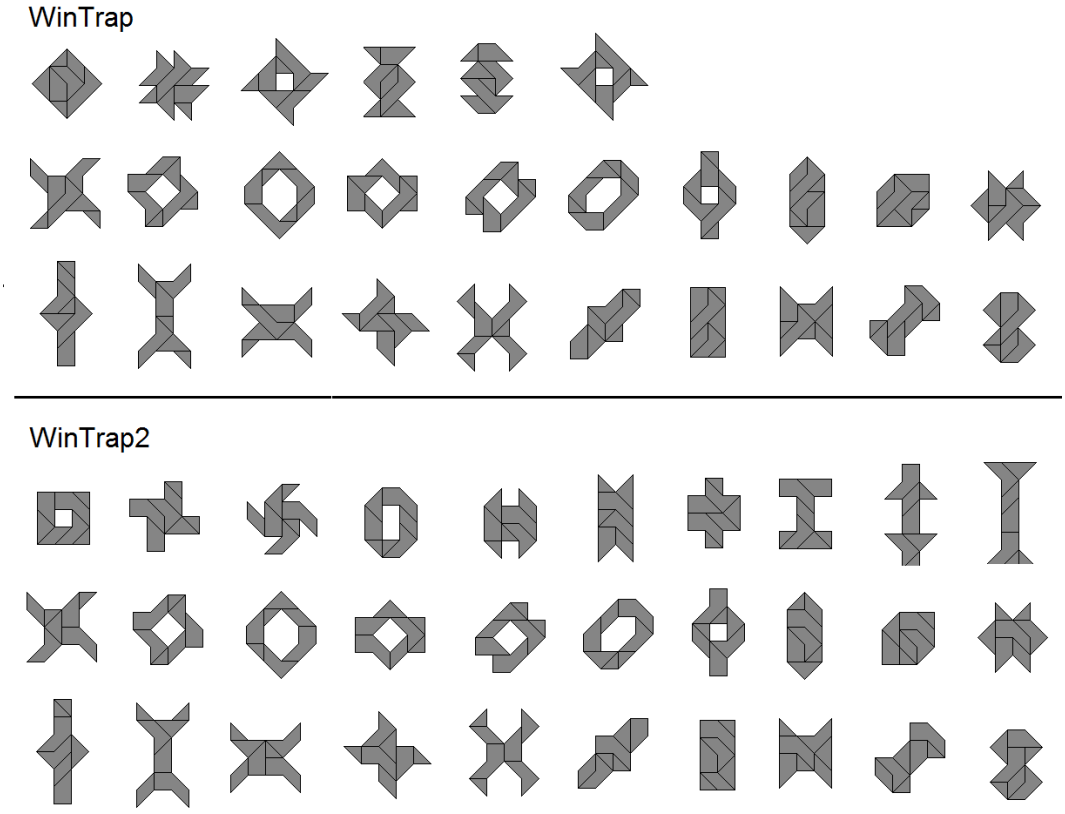


Illustration 124: Des deux jeux Wintrap, le premier réussit le plus de formes homogènes mais le second réussit mieux aux formes homogènes symétriques, même si il ne réussit pas à reconstituer le carré. Ici, seules les formes homogènes symétriques remarquables sont montrées pour les deux jeux

La capacité de reconstitution des formes homogènes est un indicateur légitime sans aucun doute, mais un peu abstrait pour le joueur. Celui-ci sera plus sensible aux performances d'un jeu sur des ensembles plus restreints. Nous avons déjà examiné le critère du nombre de formes convexes qui est un standard du genre. Les autres ensembles restreints sur lesquels nous avons évalué les différents jeux sont :

- l'ensemble des formes homogènes symétriques qui, chez les 16abolos, contient 12 762 formes. Le Tangram ne parvient qu'à en reconstituer 15.84%.
- L'ensemble plus restreint encore des formes homogènes symétriques remarquables (au moins deux éléments de symétrie) qui n'en contient plus que 55 sur les 12 762. Le Tangram ne parvient qu'à en reconstituer 20%.
- L'ensemble composite formé des formes homogènes symétriques remarquables auxquelles on ajoute les formes convexes (20 au total mais seulement quatorze qui n'ont pas de symétrie remarquable), soit 69 formes que nous appelons simplement remarquables. Le Tangram ne parvient qu'à en reconstituer 29%.

On peut imaginer d'autres ensembles remarquables : nous avons limité notre effort aux formes homogènes, mais on pourrait étendre nos ensembles de formes symétriques aux formes hétérogènes ; nous pourrions aussi bien nous intéresser aux pentagones reconstituables (31 chez les 16abolos dont 70% sont reconstituables par le Tangram) ou aux hexagones, ou encore aux formes de périmètre ou de convexité minimum, etc.

Nous avons donc examiné, pour commencer, les différents jeux à sept pièces d'aire seize triangles. Pour ces trois critères assez limités, l'examen de tous les jeux est rapide. Le jeu qui obtient le meilleur résultat pour les formes symétriques réussit à en reconstituer 75.57%. Il s'agit d'un jeu proche de notre Wintrap que nous avons baptisé « Wintrap2 ». Sa très bonne performance (9 644 formes symétriques) est associée à une excellente capacité combinatoire puisqu'il obtient le score 92.81 avec ses 26 745 393 formes homogènes. Le seul gros handicap de ce jeu : il ne réussit pas à reconstituer le carré plein (je précise plein, car il reconstitue cet autre carré percé d'un trou carré qu'on a déjà rencontré avec Chie-no-ita) ! Avec ses trente formes homogènes symétriques remarquables et ses 39 formes remarquables, ce jeu est un des plus performants sur tous nos critères, mais peut-on lui pardonner de

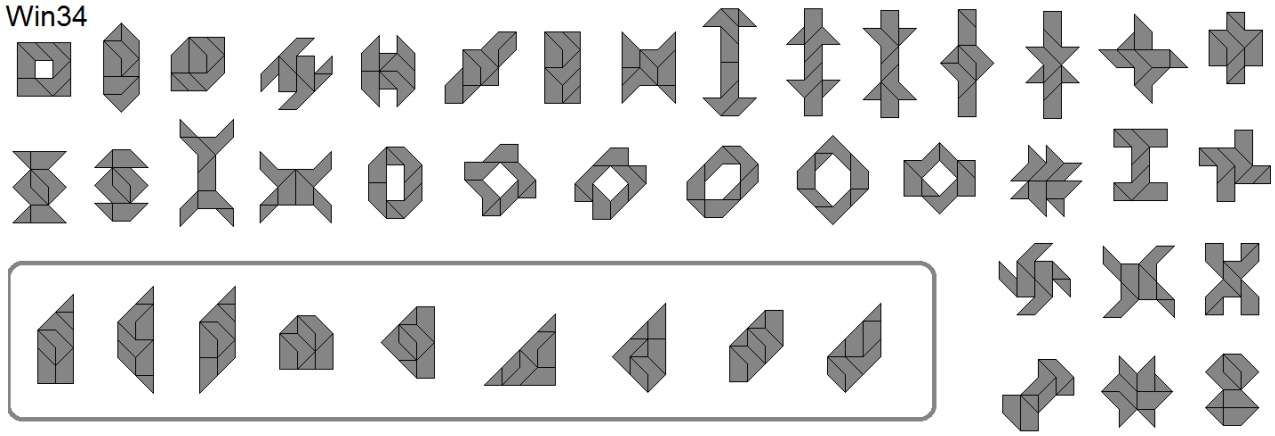


Illustration 125: Les 43 formes remarquables reconstituées par le jeu Win34 qui décroche simultanément 2 records sans parvenir à reconstituer le carré

ne pas s'assembler en carré ?

Concernant les formes homogènes symétriques remarquables, le meilleur score est obtenu par un jeu ayant trois pièces doublées que nous avons appelé « Win34 », car il réussit à en reconstituer 34 sur les 55 possibles, soit une note de 61.82 avec, encore une fois, cette impossibilité à reconstituer le carré ! Ce jeu est aussi le meilleur pour ce qui est de reconstituer des formes remarquables puisqu'il reconstitue encore neuf formes convexes et totalise ainsi 43 des 69 formes remarquables. Win34 est un bon jeu aussi pour les formes homogènes symétriques dont il reconstitue 69.93% (8 925 formes). Sa force lui vient de ses trois pièces en double car, la septième et unique pièce en un seul exemplaire ayant un centre de symétrie (il s'agit du parallélogramme), les trois paires de pièces n'ont aucun mal à se disposer symétriquement par rapport à cette pièce symétrique. Pour sa capacité combinatoire, il reconstitue 24 473 185 formes homogènes, ce qui lui donne la note très honorable de 84.93. Ce jeu obtient, par ailleurs, le meilleur score aux formes homogènes dans sa propre structure (1.1.2.3.3.3.3 avec trois doubles) qui contient 54 jeux différents.

Il est assez surprenant de constater que nos deux meilleurs jeux ne réussissent pas à reconstituer ce carré. Il est vrai que cette forme est assez particulière, puisqu'elle a tous ses bords irrationnels. Il faut, pour la reconstituer, pouvoir disposer huit

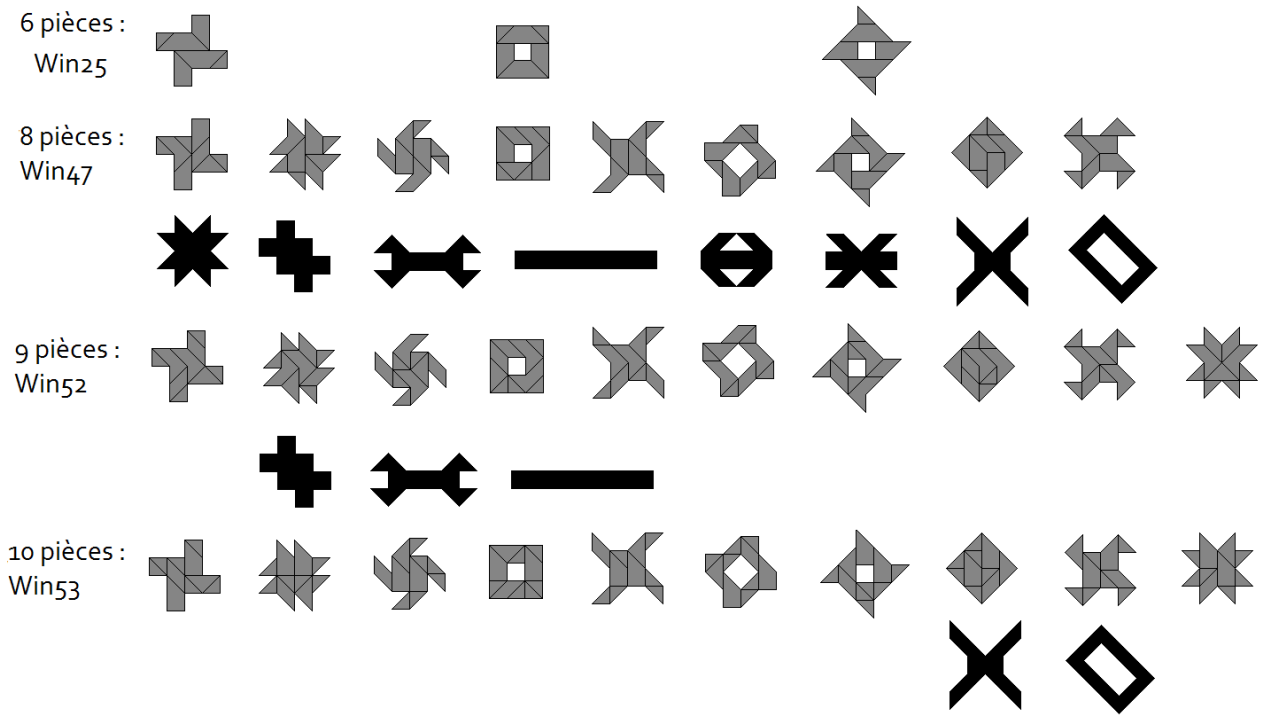


Illustration 126: Les meilleurs jeux de 6, 8, 9 et 10 pièces d'aire 16 pour la reconstitution des formes homogènes à la symétrie remarquable. Seules les formes exceptionnelles (les 10 formes ayant un centre d'ordre 4, il y en a 10 chez les 16abolos) reconstituées sont montrées ici, avec les formes symétriques remarquables non reconstituées en noir (sauf les 30 de Win25)

segments de longueur $\sqrt{2}$ sur le pourtour de la forme en réalisant les quatre angles droits, ce qui n'est pas joué d'avance. Le Tangram réalise ce tour de force d'une seule façon. On pourrait dire que c'est par chance, car il ne réussit pas bien à reconstituer les autres formes remarquables. Mais ce serait raisonner à l'envers : le Tangram ayant vraisemblablement été découvert par dissection du carré, il ne faut pas s'étonner qu'il le reconstitue !

La reconstitution des formes symétriques remarquables par les jeux de sept pièces d'aire 16 n'est pas si bonne que l'on pourrait espérer, puisque le meilleur jeu (Win34) ne dépasse pas 70% de réussite. Pour cette raison, nous avons cherché parmi les jeux de huit à dix pièces quelles étaient les meilleures réussites en ce domaine. Avec huit pièces, nous avons trouvé un jeu qui parvient à en reconstituer 47 sur 55 ; avec neuf pièces notre meilleur jeu en reconstitue 52 et avec dix pièces, le meilleur parvient à 53 formes, soit 96.36% des formes homogènes à la symétrie remarquable. Remarquons pour ces jeux (voir la figure 126) le nombre croissant des petits triangles qui favorise la réalisation de ces diverses formes, et aussi la taille des pièces qui est toujours inférieure ou égale à 3 (les grands triangles du Tangram ont une aire de 4). Notre préférence entre ces trois champions va à Win47, qui réussit un très bon score sans accumuler trop de ces petites pièces en double qui finissent par dénaturer le jeu. La même recherche concernant les jeux à six pièces nous a montré un jeu capable de reconstituer 25 des ces formes symétriques remarquables mais, parmi ces formes, ne se trouve pas le carré, comme avec Win34 ! Le premier champion pour ces formes symétriques remarquables qui reconstitue le carré est donc notre Win47 à huit pièces qui ne contient que trois petits triangles.

On peut imaginer étendre la recherche aux jeux d'aire supérieure à 16, mais nous allons nous heurter à de sérieuses difficultés de taille de mémoire et de temps de calcul. L'aire succédant à seize triangles et qui permet la reconstitution du carré est 18, donc on serait tenté de chercher des jeux d'aire 18. Mais les 18abolos sont considérablement plus nombreux que les 16abolos (rappelons que l'on multiplie

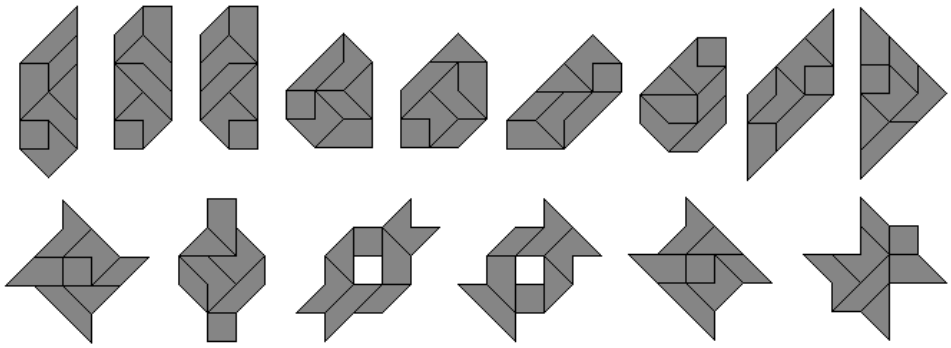


Illustration 127: Les quelques formes remarquables par leur convexité ou leur symétrie réalisées par le jeu à 7 pièces d'aire 18 appelé DiMixTri ne contiennent pas le carré. Voir les nombreuses formes symétriques remarquables des jeux d'aire 18 à la figure 103

l'effectif des *n*-abolos par 3.6 à chaque triangle supplémentaire). Si on veut trouver le jeu à sept pièces d'aire 18 reconstituant le plus de formes homogènes, il faut s'apprêter à un travail considérable. Nous n'avons pas fait grand-chose dans ce domaine mais, juste pour essayer au moins un de ces jeux, nous avons cherché le nombre de formes homogènes reconstituées par un jeu assez spécial que nous avons nommé « DiMixTri », car il combine les trois diabolos et les quatre triabolos. Il s'agit d'un jeu assez peu performant sans doute, comparé à d'autres de la même taille, car il n'utilise aucun petit triangle qui permet, lorsqu'il est présent, de diversifier au maximum les formes. Les résultats bruts sont sans appel : DiMixTri pulvérise complètement les records des champions d'aire 16. Il réussit à reconstituer 98 168 645 formes homogènes dont 78 179 528 pleines, 19 641 478 avec baie, 347 626 avec un trou et 13 avec deux trous. Parmi ces formes, 5 376 sont symétriques. Cette abondante production contraste avec une grande pauvreté de formes remarquables : seulement neuf formes convexes parmi lesquelles ne figure pas le carré, et six formes ayant plus d'un élément de symétrie (il y en a 85 chez les 18abolos). Si l'on voulait donner une note à DiMixTri pour sa capacité de reconstitution des formes homogènes à 18 triangles, il faudrait diviser ce nombre déjà considérable par le nombre encore plus impressionnant des 18abolos que l'on a estimé à 380 000 000, ce qui conduit à la note médiocre de 25.83.

Les jeux d'aire 18 peuvent reconstituer au maximum 17 formes convexes et 45 663 formes symétriques dont 85 sont remarquables. Si l'on ajoute les quatorze formes convexes sans symétrie remarquable, cela fait 99 formes remarquables. Nous avons alors passé en revue tous les puzzles d'aire 18 qui contiennent des pièces d'aire inférieure ou égale à 6. Cela fait tout de même approximativement 180 000 puzzles à prendre en compte mais, pour l'ensemble réduit des 99 formes, c'est assez rapide. Le meilleur puzzle que nous ayons trouvé contient trois doubles et réussit à reconstituer 43 des 99 formes remarquables. Il contient les mêmes six pièces que Win25 (dont l'aire égale seize triangles) plus une septième pièce carrée d'aire 2. Ce jeu réussit à reconstituer le maximum de formes remarquables mais très peu de formes exceptionnelles (ayant un centre d'ordre 4) : seulement trois de ces formes, alors qu'il y en a 18. Nous avons alors cherché parmi les jeux d'aire 18 contenant des pièces d'aire inférieure ou égale à 5, lequel reconstituait le maximum de ces formes symétriques exceptionnelles et avons trouvé un jeu ayant trois doubles qui en reconstitue 9. Ce jeu, que nous avons appelé « Sept », reconstitue 42 formes remarquables (une de moins seulement que le champion anonyme précédent) dont les neuf qui ont une symétrie exceptionnelle.

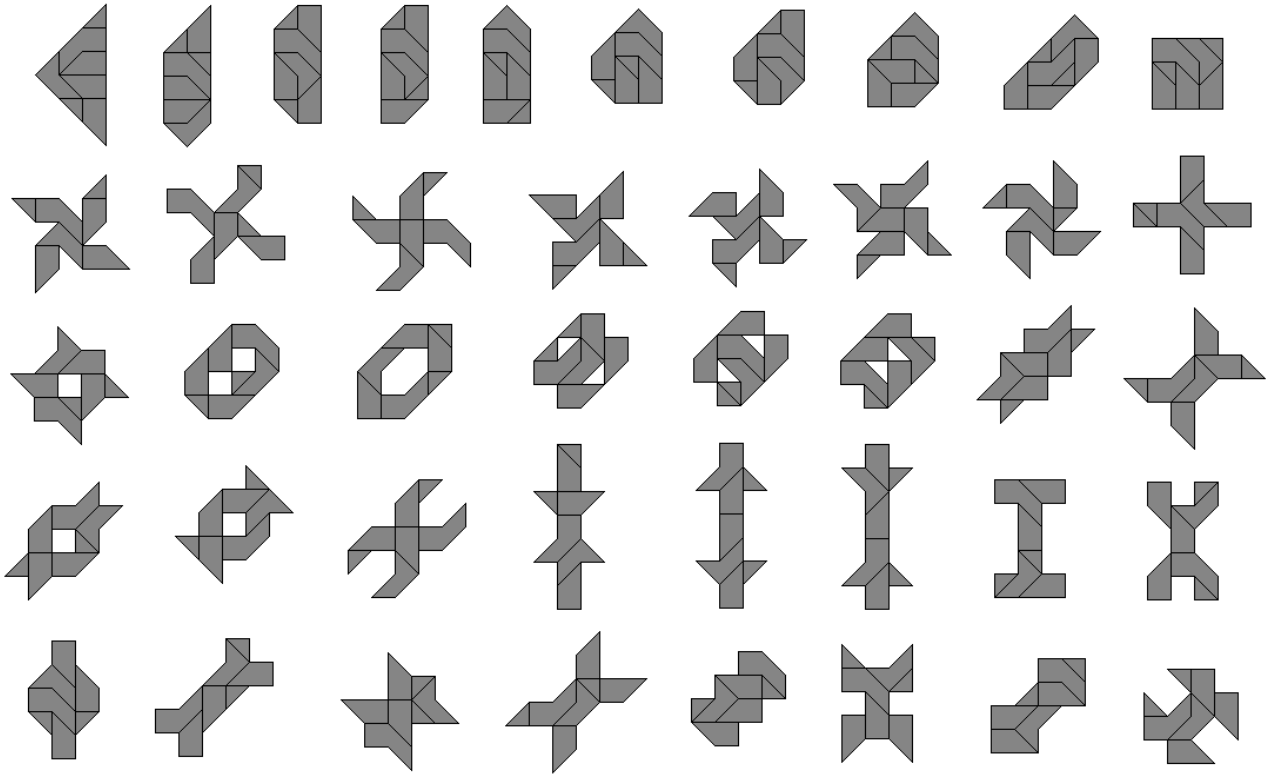


Illustration 128: Les 42 formes remarquables reconstituées par Sept, le jeu à 7 pièces d'aire 18 qui réussit à reconstituer le maximum de formes à la symétrie exceptionnelle (2ème ligne plus le carré)

Question 13 : Notre recherche du meilleur jeu d'aire 16 a souvent laissé de côté les jeux à cinq et six pièces, car leurs performances sont un peu moins bonnes que celles des jeux à sept pièces.

a) L'algorithme à employer pour tester tous les jeux possibles doit essayer, pour chaque jeu, au pire, chacune des pièces dans chacune des positions possibles et dans toutes les orientations différentes possibles. Combien cela fait-il de vérifications à faire pour les jeux à cinq pièces dans leur capacité de reconstitution des 69 formes homogènes remarquables, sachant que ces formes ont une dimension moyenne de seize unités (la matrice d'une forme moyenne contient quatre lignes et quatre colonnes) ?

b) Quelles sont les meilleures performances de ces jeux de cinq et six pièces pour les critères que nous avons examinés (reconstitution des formes remarquables, des formes convexes, des formes homogènes) ?

Chapitre 14 : Autres assemblages finis

Les formes hétérogènes à trou, les assemblages réglés par les milieux ou par une butée, les assemblages infinis réductibles au fini. Les premiers jalons sont posés pour repousser les limites de l'univers fini du Tangram qui reste à explorer

Lorsque je me lançai, il y a quelques années, dans la construction et l'étude des tangrams hétérogènes, Ronald Read en avait déjà établi de solides fondations. Il me suggéra de me limiter aux formes pleines car elles constituent un ensemble dont la génération réserve suffisamment de difficultés et, pour ce qui est des formes ayant un vrai trou, il y a une difficulté supplémentaire d'encodage. La génération des formes pleines était une entreprise considérable en effet, mais les difficultés étaient surtout techniques : nous devions gérer de très gros fichiers pour expurger les doublons, et les moyens informatiques ordinaires dont nous disposions, bien que performants, semblaient un peu sous-dimensionnés pour l'ampleur de cette tâche. Je dois ajouter qu'en ce qui me concerne, les compétences dans le domaine assez spécialisé du traitement de grosses quantités de données ne dépassaient pas celles d'un grand débutant. Pourtant, comme depuis le début de cette recherche, je ne cesse de garder à l'esprit une certaine curiosité pour les formes à trous, et afin de ne garder aucun regret à l'égard de ce pan inexploré de l'univers du Tangram, je voudrais avancer ici la réflexion sur l'encodage afin d'en concevoir au moins un principe viable, quitte à l'améliorer lors de la phase de réalisation.

Les tangrams hétérogènes ayant des trous obéissent, à priori, aux même règles d'assemblage que les formes pleines : les bords des pièces s'assemblent en mettant en commun au moins un point de référence et un morceau de leur bord. Les segments unitaires (de longueurs 1 et $\sqrt{2}$) vont être réduits au maximum de dix

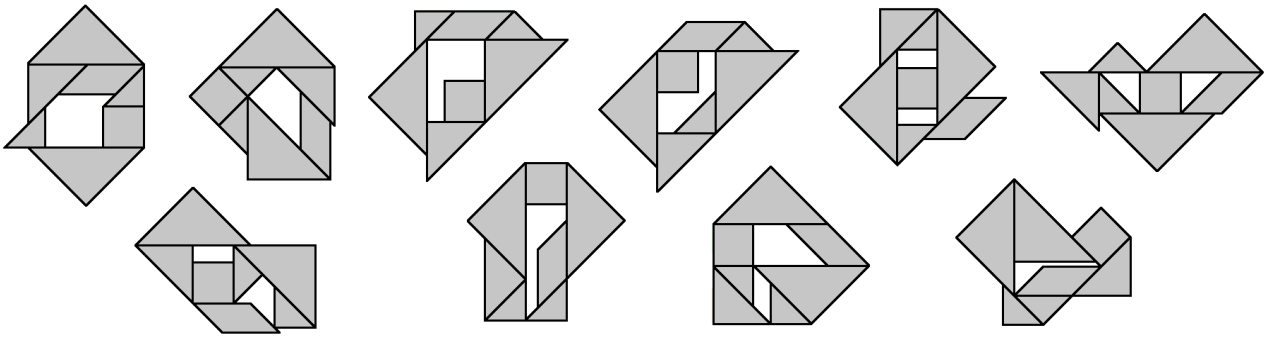
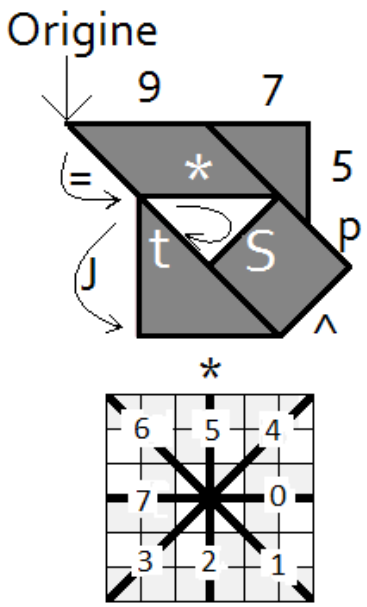


Illustration 129: Quelques tangrams hétérogènes à trou ou à baie (les 3 premiers de la ligne du bas), laissant entrevoir la grande variété des trous qu'il faut s'attendre à trouver

façons différentes, ce qui conduit aux douze types de segments déjà rencontrés. La codification des bords peut employer la même méthode qui synthétise, avec des caractères choisis dans une table en contenant 96, la direction et la longueur des segments. Ce que nous avons dit des sommets – qu'ils ont toujours pour coordonnées des nombres de la forme $a+\frac{b}{2}\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers – reste valable pour les formes à trous. Alors, où est la difficulté pour travailler avec ces formes à trous ? Il y aura, certes, la difficulté technique due aux grandes dimensions des fichiers, mais le problème est d'abord conceptuel : comment codifier un trou ? Comment traduire, simplement mais sans ambiguïté, son emplacement et son orientation par rapport au bord extérieur ? Afin d'éviter de créer des doublons (des formes identiques qui coexistent du fait d'une codification différente), il est absolument impératif de disposer d'une forme canonique qui identifie le bord extérieur, le bord intérieur et l'agencement de celui-ci dans celui-là. Lorsque nous avons généré les tangrams homogènes, la codification matricielle retenue (des codes de 0 à 5) permettait de bien définir les formes à trou, car on bénéficiait du fait que les formes homogènes s'inscrivent toujours dans une grille de référence. Si nous avions voulu utiliser un système de codification des bords, comme celui que nous avons dû développer pour les formes hétérogènes pleines (elles ne s'inscrivent pas dans une grille), nous aurions alors été en face de la même difficulté d'encodage pour les formes à trou et forcés à analyser cette difficulté, ainsi que nous nous proposons de le faire maintenant.

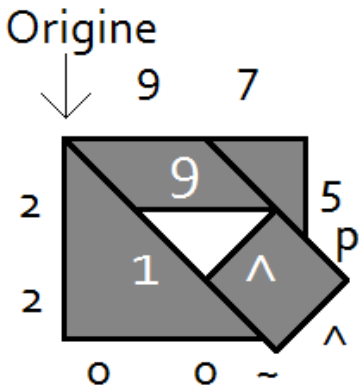
Nous savons définir une forme canonique pour le bord d'un tangram hétérogène plein. Disons tout de suite que cette forme canonique seule peut très bien permettre de codifier les formes hétérogènes ayant des baies. Une baie ne pose en effet pas de problème conceptuel, les baies peuvent être considérées comme des formes pleines invaginées. Avec un seul mot constitué de tous les caractères nécessaires, on codera indistinctement le bord externe de la forme et le bord interne de la baie (ou des baies s'il y en a plusieurs). Une simple procédure peut ultérieurement permettre la reconnaissance des baies (existence d'un ou plusieurs sommets sur une autre partie du bord) et lancer les traitements additionnels éventuels. L'illustration ci-dessous nous montre ainsi une forme hétérogène ayant une baie et le système d'encodage de cette forme. Si nous n'avons pas généré les formes à baie en même temps que les formes pleines, c'était uniquement pour nous concentrer sur les pleines, ainsi que le sage conseil de Ron nous le préconisait. L'obtention des formes à baie aurait cependant eu pour conséquence de faire ressentir encore plus fortement l'absence des formes à trous.

La codification employée pour les formes pleines, si elle est utilisable telle quelle pour les formes à baie, n'est pas transposable simplement aux formes ayant un vrai trou. Nous pouvons cependant commencer par déterminer la forme canonique du



code forme à baie
=*StJ*^p579

longueurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
direction=0	~	!	"	#	ó	%	&	'	0	(	)	*
direction=1	+	,	-	¿	/	:	;	<	=	>	?	1
direction=2	@	A	B	C	D	E	F	G	2	H	I	J
direction=3	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	3
direction=4	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_	ú	4
direction=5	a	b	c	d	e	f	g	h	5	i	j	k
direction=6	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	6
direction=7	w	x	y	z	{	¡	}	º	7	8	á	9



Bord externe : 2200~^p579

Trou : la plus petite permutation entre 1^9, ^91 et 91^

Coordonnées de l'origine du trou : (sqrt(2)/2;sqrt(2)/2) pour 1^9

code forme à trou : 2200~^p579 1^9 1 0 1 0

Illustration 130: La codification d'une forme à baie ne nécessite pas d'aménagement de notre méthode qui utilise 96 caractères. Pour une forme à trou, il faut préciser la position et l'orientation du trou par rapport au bord externe en donnant le code du trou et les coordonnées de son origine (deux nombres de la forme $\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$ *où a et b sont des entiers)*

bord externe. L'algorithme peut choisir, par exemple, parmi les seize alias de cette forme externe (les différentes dispositions de la forme par rapport au quadrillage ont été illustrés à la figure 85), celui qui vient en premier dans l'ordre alphanumérique connu du langage de programmation employé. Pour cela, chaque alias est, au préalable, représenté par permutation circulaire de ses caractères qui arrive en premier dans cet ordre (signalons que dans les deux exemples de la figure 130, pour simplifier, les codes ne sont pas donnés sous une forme canonique stricte car l'alias n'est pas orienté scrupuleusement selon cette règle). La codification employée pour un alias entraîne l'orientation des axes (et réciproquement), ce qui fait que le bord interne – le bord du trou – ne peut disposer à son tour d'une véritable forme canonique, indépendante de celle du bord externe. Les deux bords

doivent être exprimés avec la même orientation des axes car ils sont solidaires l'un de l'autre. Dès lors que l'on définit la forme canonique du bord externe, on peut écrire celle, concomitante, du bord interne. L'origine du bord interne peut alors être choisie de façon unique, par exemple en écrivant toutes les permutations circulaires de cet alias bien orienté du trou, et en choisissant celle qui vient en premier dans l'ordre alphanumérique. On peut ainsi repérer le point d'origine du bord interne, dans un repère lié à l'origine du bord externe et à l'orientation définie par le choix de l'alias de ce bord. Finalement, la forme canonique d'une forme à trou sera constituée par la succession des mots décrivant les bords, externe et interne, et des coordonnées de l'origine du trou. Cela signifie qu'il faut mémoriser une suite de six chaînes de caractères (les deux mots et les quatre entiers nécessaires à la transmission de deux nombres de la forme $\frac{a\sqrt{2}}{2}+b$) qu'il convient de différencier par un caractère de séparation. Nous avons choisi l'espace vide, qui ne fait pas partie des 96 caractères, pour notre exemple de forme canonique hétérogène à trou dans la figure précédente.

Lors du processus d'agrégation des pièces entre elles, un trou peut apparaître assez rapidement (les trous commencent à apparaître à partir de quatre pièces), disons qu'il apparaît dès la 4ème pièce disposée. Si l'on repère alors l'origine de la forme canonique du bord interne selon le bord externe de cet agrégat de quatre pièces, l'ajout d'une 5ème pièce modifie généralement le bord externe de la forme, ce qui conduit à modifier la forme canonique de ce bord, et donc également l'origine et l'orientation de cette forme. Il faut donc prévoir des formules de changement de repère à chaque pièce ajoutée. Dans le cas où la pièce ajoutée vient combler partiellement le trou, seule la forme du bord interne est modifiée. Il suffit de recalculer la forme canonique du nouveau bord interne (sans modification du repère) et les coordonnées de sa nouvelle origine. Pour nous résumer, si une pièce vient s'ajouter sur le bord externe d'un trou déjà constitué, il faut redéfinir la forme canonique de ce bord externe, déterminer quel sommet est la nouvelle origine, et la formule de changement de repère (généralement, l'origine et l'orientation sont changées simultanément), il faut ensuite traduire la forme du bord interne avec les formules de changement de repère, déterminer quel sommet du trou est la nouvelle origine de ce bord interne et enfin, recalculer les coordonnées de cette origine dans le repère lié au bord externe. Si la pièce est ajoutée dans le trou, la procédure est plus simple puisque les deux premiers points sont inchangés. Il n'y a qu'à redéfinir la nouvelle forme et la nouvelle origine du trou.

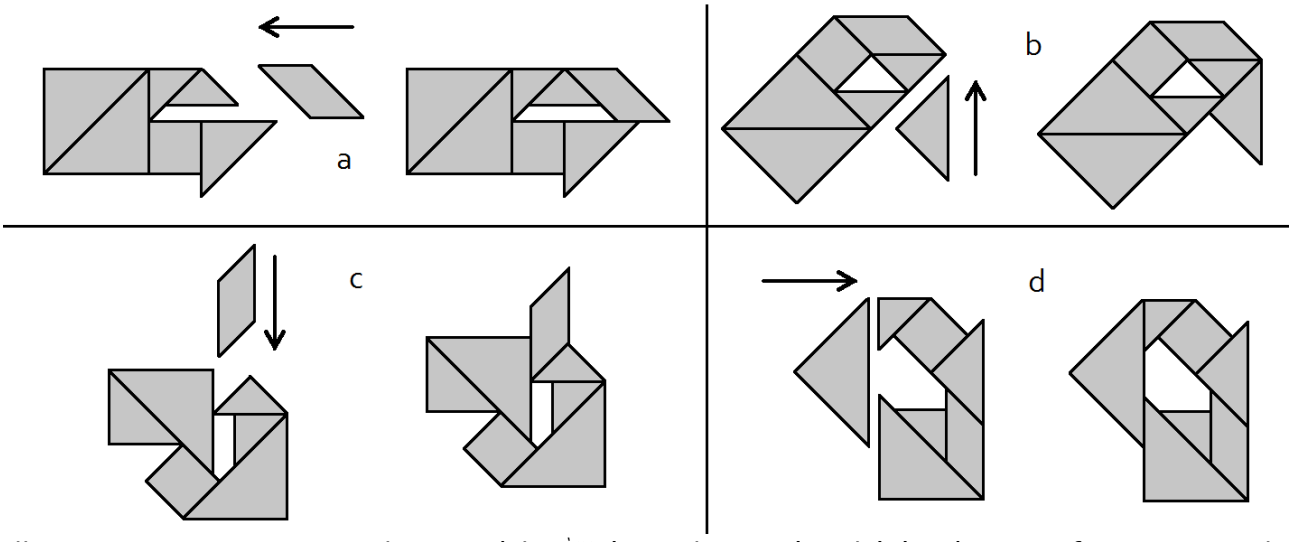


Illustration 131: Constitution d'un trou à la 7ème étape d'un agrégat hétérogène : par fermeture simple (a et d) ou par oblitération d'une baie (b et c).

Ce que nous venons de dire est une partie de la solution du problème qui se joue lors du processus d'agrégation des pièces, lorsqu'un trou ayant déjà été créé, une autre pièce est ajoutée. L'autre partie du problème est la détection en amont d'un trou qui vient de se former. À une forme pleine ou une forme à baie, décrite par une forme canonique simple, on ajoute une pièce selon la règle hétérogène et l'ensemble du bord se scinde en deux, ce qui déclenche une complexification de la forme canonique (passage de un à six mots). Il faut pouvoir détecter qu'un des autres sommets de la pièce ajoutée (pas celui qu'elle met en commun avec la forme) se retrouve sur un des autres bords de la forme externe (pas la partie adjacente du bord où se réalise l'assemblage). Cet autre sommet doit se retrouver sur une autre partie du bord qui soit espacée de la première par des segments qui ne sont pas tous alignés avec la partie assemblée (sinon l'assemblage ne créerait pas de trou) et ce, quel que soit le sens emprunté pour tourner autour du bord externe. Précisons que non seulement un sommet se retrouve sur un des autres bords, mais une partie du bord de la pièce issue de ce sommet doit aussi s'assembler avec une partie du bord externe (sinon on ne ferait que créer une baie). Nous devons aussi penser au cas où c'est un des autres sommets du bord de la forme qui se retrouve sur un des bords de la pièce (espacé du premier par des segments du bord qui ne sont pas tous alignés avec la partie assemblée). L'oblitération d'une baie déjà existante est une des façons de créer un trou (voir la figure 131) qu'il n'y a pas lieu de séparer des autres façons d'oblitérer une certaine invagination du bord. Pour nous résumer, il s'agit dans tous les cas de poser un « bouchon », une pièce s'assemblant sur un des segments du bord externe selon la règle hétérogène ordinaire, de manière à ce qu'un autre des segments du bord, espacé du premier par des segments non-tous-alignés, soient couverts par un des segments de la pièce.

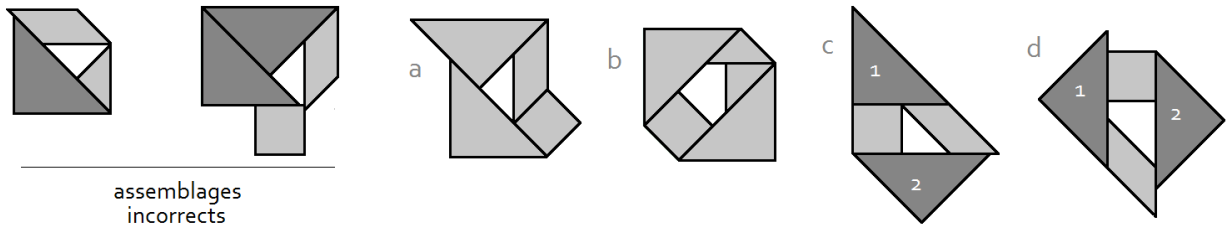


Illustration 132: Quelques assemblages hétérogènes à trou (a à c) pour lesquels la création du trou ne génère pas de longueur de segment originale. Les assemblages marqués incorrects ne respectent pas la règle hétérogène.

Une telle détection de la superposition, *quelque part* sur le bord externe, de deux morceaux de segment n'est pas aisée à faire appréhender au programme. Bien sûr, nous avons déjà eu besoin, pour la génération des formes pleines, d'une procédure qui détecte si deux segments se croisent. Disposant des coordonnées des extrémités des segments dont on veut tester le croisement, un test de superposition partielle peut être mis au point. Ici, il va falloir détecter l'alignement de quatre points (deux sur le bord de la pièce et deux sur le bord de la forme), pour toutes les combinaisons possibles des segments de la pièce et du bord. Comme on sait très facilement identifier des segments parallèles, on peut imaginer une procédure qui balaie ces différentes combinaisons en sélectionnant les couples de segments parallèles et en rejetant les couples qui, s'ils étaient partiellement superposés, réaliseraient un chevauchement des pièces (il suffit d'avoir une égalité sur les directions des segments). Avec les coordonnées des extrémités de ces segments (huit nombres entiers), on écarte alors les couples de segments réalisant un parallélisme strict (sur deux droites parallèles et disjointes). Il reste à tester ensuite dans quelle disposition sont les segments alignés : disjoints, l'un inclus complètement dans l'autre, ou bien l'un et l'autre se chevauchant partiellement. Il n'y a que le cas où les segments sont disjoints qui ne correspond pas à une fusion d'un morceau du bord externe avec un morceau du bord de la pièce que l'on ajoute. Il faut donc tester cela dans cet ordre : parallélisme, alignement et disjonction. On peut imaginer se passer du test du parallélisme, car en testant l'alignement on obtiendra forcément cette condition plus faible, mais c'est par souci d'optimisation de l'algorithme qu'on effectue ce premier test, qui ne demande pas de recourir aux coordonnées. Les caractères codant la direction fournissent un moyen simple de détection du parallélisme, éliminant rapidement la plupart des couples de segments qui, de toutes façons, auraient échoué au test d'alignement.

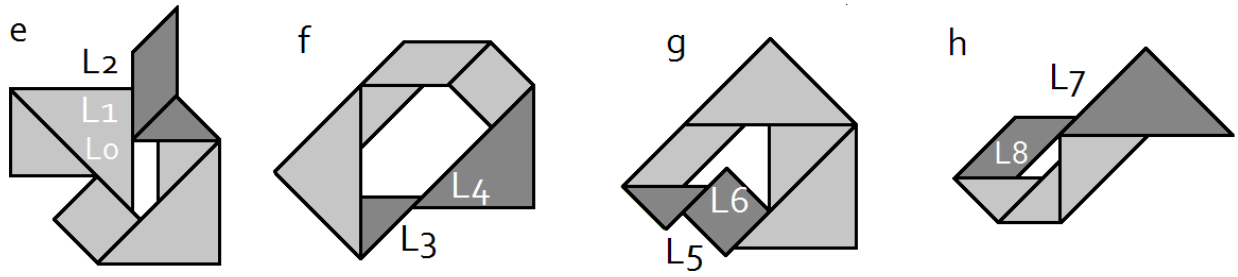


Illustration 133: Quelques autres exemples de formes à trou pour lesquels il n'est pas évident que les longueurs générées par la création du trou soient déjà connues

Le raisonnement que nous venons de pousser jusqu'à ce terme supposait que les bords externes et internes des trous pouvaient être décrits à l'aide des douze longueurs de segment et du système à 96 codes qui en découle. Cette supposition semble naturellement fondée si l'on examine les quelques exemples de formes à trou de l'illustration ci-dessus, pour lesquels les segments créés lors de la formation du trou ne dérogent pas à la règle des tangrams hétérogènes. Pour la forme *a* par exemple, le segment du bord externe apparaissant à la création du trou mesure $4-2\sqrt{2}$, ce qui est un exemplaire de la longueur n°10. Lorsqu'on examine d'autres formes à trou, comme les exemples de l'illustration ci-dessous, il n'apparaît pas aussi évident que l'on réalise toujours une longueur de segment connue. La figure *e* par exemple, qui est devenue un tangram hétérogène à trou par oblitération de la baie (figure *c* de la figure 131), présente un segment d'un longueur « douteuse » L1 pris à l'intérieur de la forme et un autre L2 à l'extérieur. Il n'est pas immédiat de déterminer ces longueurs, mais on sait déjà que L1+L2= $\sqrt{2}$. On peut faire appel aux coordonnées (le programme pourrait utiliser cette méthode) ou faire une analyse

–	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	-14	-1	-2	-4	-17	-5	-6	-8	-9	-13	-11
2	14	0	-22	-1	-3	-4	-18	-5	-7	-16	-9	-10
3	1	22	0	-14	-2	-21	-4	-17	-6	-8	-19	-13
4	2	1	14	0	-1	-2	-3	-4	-5	-7	-8	-9
5	4	3	2	1	0	-14	-1	-2	-4	-5	-6	-8
6	17	4	21	2	14	0	-22	-1	-3	-18	-5	-7
7	5	18	4	3	1	22	0	-14	-2	-4	-17	-6
8	6	5	17	4	2	1	14	0	-1	-3	-4	-5
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-4
10	9	16	8	7	5	18	4	3	1	0	-14	-2
11	13	9	19	8	6	5	17	4	2	14	0	-1
12	11	10	13	9	8	7	6	5	4	2	1	0

Tableau 62: Table de soustraction des douze longueurs de segment des formes hétérogènes

spécifique de la situation, mais il vient facilement des égalités comme L1+2= $2\sqrt{2}$ (faire le total des hauteurs de cette figure, de deux façons différentes), et donc que L1= $2\sqrt{2}-2$ et L2= $\sqrt{2}-(2\sqrt{2}-2)=2-\sqrt{2}$. Cette longueur L2 n'a finalement rien d'original car il s'agit de la longueur n°5, la longueur L1 est connue aussi puisqu'il s'agit de la longueur n°8. Une autre longueur de segment, notée Lo, sera nécessaire pour décrire le trou (entre l'extrémité du parallélogramme et le milieu du grand

triangle) mais elle vaut $1-L1=1-(2\sqrt{2}-2)=3-2\sqrt{2}$, ce qui est un exemplaire de la longueur n°1. Cette figure à trou ne pose donc pas de problème d'encodage, mais cela ne va pas nous rassurer pour autant car, les coordonnées des sommets des formes hétérogènes ayant la fâcheuse disposition à se mettre sous la forme $a+\frac{b}{2}\sqrt{2}$, les longueurs qui vont apparaître lors de la formation d'un trou pourraient très bien avoir cette allure qui, lorsque *b* est impair, n'entre pas dans le tableau des 96 caractères.

Examinons notre 2ème exemple « douteux » : la petite longueur L3 du bord externe de la forme à trou *f* peut paraître « douteuse » ; en réalité, les lecteurs vérifieront qu'elle mesure $4-2\sqrt{2}$ et qu'il s'agit donc d'un exemplaire de la longueur n°10. Dans le bord interne de la même forme, un segment de longueur L4, « douteuse » aussi, mesure de la pointe du petit triangle au milieu de l'hypoténuse du grand, la même longueur n°10. Passons à la forme *g* qui contient un segment externe et un segment interne « douteux » au contact entre le carré et le petit triangle. Ces deux segments ont des longueurs L5 et L6 égales qui valent $\sqrt{2}-1$. Ce sont donc des segments de longueur n°4 – une longueur très bien connue. Les segments « douteux » auraient-ils la bonne idée de toujours être d'une longueur déjà identifiée ? Examinons encore un exemple : dans la figure *h*, le parallélogramme enlève une partie d'un segment de longueur 1 sur le grand triangle. Le calcul de la longueur résiduelle L7 (mesurée de la pointe du parallélogramme au milieu du côté du grand triangle) fait intervenir la dangereuse quantité $\frac{\sqrt{2}}{2}$, mais celle-ci a le bon goût de disparaître, pour donner finalement $2-\sqrt{2}$, une longueur n°5, qui a son complément à $\sqrt{2}$ à l'intérieur du trou avec la longueur L8 qui mesure $2\sqrt{2}-2$, soit une longueur n°8. Sommes-nous en présence de quatre gentils exemples particuliers qui essaient de nous faire croire que tous les segments issus de la formation d'un trou prennent une des douze longueurs déjà identifiées, alors que la propriété est fausse en général ? En réfléchissant à la façon de prouver que, dans toutes les formations de trou, les segments résiduels (sur les bords externes et internes) ont nécessairement une des douze longueurs précédemment définies, je me remémore la définition de ces longueurs : issues du développement de *F*, le polynôme caractéristique de Read, qui indique quels sont les résultats possibles des différences entre les contributions rationnelles et irrationnelles des pièces du jeu *lorsque celles-ci sont disposées sur une même ligne*. Parmi les valeurs possibles, nous avions retenu pour ces fractions de segment les seules valeurs comprises entre 0 et $\sqrt{2}$. On aimerait que l'explication de notre phénomène ne tienne qu'à ces mots « les seules », mais il faut bien reconnaître que le mode de formation du trou ne peut pas se résoudre à un alignement des segments sur une même ligne de partage.

Il faut se décider à affronter le monstre d'un peu plus près : examinons la table de

soustraction des douze longueurs de segment qui peuvent se rencontrer avec un tangram plein. On l'obtient en simplifiant les expressions des différences entre les douze longueurs. Certaines cases sont occupées par des valeurs supérieures à 12, car elles nous font sortir du domaine balisé des tangrams pleins : au croisement de la ligne « 2 » et de la colonne « 1 » par exemple, on trouve le résultat de la soustraction des longueurs n°2 ($-4+3\sqrt{2}$) et n°1 ($3-2\sqrt{2}$). Or, $-4+3\sqrt{2}-(3-2\sqrt{2}) = -7+5\sqrt{(2)} \approx 0.071$, cette longueur ne figure pas au palmarès des douze longueurs du développement de *F*, mais nous l'avons baptisée n°14 au chapitre 12 (voir la figure 109 et aussi la question du chapitre 1) car elle peut apparaître chez les 16compacts. Cette longueur se rencontre sans doute naturellement dans des formes pleines réalisées avec d'autres jeux de la famille du Tangram, car elle fait partie des longueurs possibles pour les 16compacts (voir le tableau 56), mais elle n'est pas d'actualité avec les tangrams pleins. Le tableau 29 nous rappelle, en outre, que ces longueurs n°1 et n°2 peuvent survenir dans des agrégats de trois et quatre pièces au moins. La longueur n°1 mobilise cinq segments (3 de longueur 1 auxquels s'en retranchent 2 de longueur $\sqrt{2}$) tandis que la longueur n°2 en mobilise sept (3 de longueur $\sqrt{2}$ auxquels s'en retranchent 4 de longueur 1) ; cela fait beaucoup de segments et de pièces mobilisés pour la réalisation de cette longueur, sans compter qu'il faut aussi que les pièces dessinent la forme d'un trou ! Cette longueur n°14 peut-elle tout de même survenir lors de la formation d'un trou ? En regardant bien cette table, on s'aperçoit que la longueur n°14 peut théoriquement arriver de cinq façons différentes (viennent ensuite la longueur n°17 qui peut arriver de trois façons différentes, les longueurs 13, 18 et 22 qui peuvent arriver chacune de deux façons différentes et puis les longueurs 16, 19 et 21 qui n'arrivent que d'une seule façon). Pour être convaincu de l'existence de ces longueurs, il faudrait pouvoir en exhiber au moins un spécimen, produit avec les pièces du Tangram. Nous n'avons pas réussi à produire cet exemplaire de longueur additionnelle, bien au contraire, nos essais négatifs nous ont plutôt persuadé que cette longueur était irréalisable. Nous bâtirions volontiers notre algorithme de génération des formes à trou en considérant que celles-ci ne contiennent que les douze longueurs connues. Par précaution, en l'absence d'une preuve formelle de non existence, il faudra que cet algorithme détecte le cas improbable où une de ces longueurs « irréalisables » se réalise, et qu'il écrive au minimum un message sur la console du programme, avec les informations permettant de reconstituer manuellement l'agencement des pièces de cette exceptionnelle forme trouée. On peut aussi prévoir des codes additionnels pour ces cas improbables, et laisser prudemment l'exécution du programme confirmer ou infirmer notre conjecture.

Nous voilà donc assuré – avec le bémol que nous venons de poser pour les improbables longueurs additionnelles – de pouvoir écrire les procédures qui

mèneront aux formes à trou. Il n'y a plus qu'à imaginer comment limiter les difficultés techniques liées à la gestion des fichiers énormes qui ne manqueront pas d'être produits. Nous devrions pouvoir nous aider de nos fichiers contenant les agrégats de formes pleines, à tous les niveaux de l'agrégation. Ces fichiers ne sont pas obsolètes : on peut très bien prendre un agrégat plein de cinq pièces et, lors de l'adjonction d'une sixième pièce, obtenir une forme à trou. Les trous n'apparaissant qu'à partir de quatre pièces, il suffit donc de partir du fichier des agrégats de trois pièces, disons qu'il se nomme « agreg3plein » (ce fichier ne contient que 5 965 formes), pour produire le fichier « agreg4trou » qui contiendra tous les agrégats de quatre pièces ayant une baie ou un trou (on peut aussi séparer ces types). Lors de la production d'une forme pleine, celle-ci est rejetée puisque nous disposons déjà des fichiers « agreg4plein » (323 944 formes), « agreg5plein » (13 885 990 formes), « agreg6plein » (396 016 788 formes) et « agreg7plein ». Le lecteur qui voudra se lancer dans cette construction procèdera peut-être autrement mais, en faisant ainsi le travail en deux étapes, on peut économiser sur les procédures d'élimination des doublons, très coûteuses en terme de temps à cause des opérations d'entrée-sortie sur le disque. Pour terminer la description du projet, pour générer le fichier « agreg5trou », on va lire les fichiers « agreg4trou » et « agreg4plein » et faire les traitements appropriés (ajout de la 5ème pièce), et puis on fera de même pour générer successivement « agreg6trou » (par lecture/traitement des fichiers « agreg5trou » et « agreg5plein ») et « agreg7trou » (par lecture/traitement des fichiers « agreg6trou » et « agreg6plein »). On peut avoir intérêt à garder séparé, au moins provisoirement, le fichier « agreg7trou » selon ses deux origines : la partie obtenue par lecture du fichier « agreg6plein » contient sans doute les trous les plus grands, ceux qui réalisent une sorte de couronne et qu'il pourrait être intéressant d'étudier pour eux-mêmes. Il faut néanmoins éliminer les doublons entre ces deux parties, « agreg7trou_issuDe6trou » et « agreg7trou_issuDe6plein », en les supprimant, par exemple, du dernier fichier qui ne contiendrait plus alors que les trous réalisés par l'ajout de la 7ème pièce.

Combien de formes à trou et à baie doit-on s'attendre à générer ? Les tangrams homogènes contiennent 4 842 205 formes pleines, 731 951 formes avec baie et 9 360 formes avec trou. De leur côté, les tangrams hétérogènes pleins sont au nombre de 6 380 137 818. En supposant que les deux séries sont proportionnelles, un ordre d'idée du nombre de tangrams hétérogènes à baie est obtenu par le produit en croix $\frac{6\,380\,137\,818 \times 731\,951}{4\,842\,205} \approx 964\,425\,970$ et le nombre de tangrams hétérogènes à trou par $\frac{6\,380\,137\,818 \times 9360}{4\,842\,205} \approx 12\,332\,830$, soit environ un milliard pour les formes à baie et douze millions pour les formes à trou. Il faut, par ailleurs, s'attendre à des trous extrêmement variés par leur forme, leur nombre et/ou leur dimension. Quel est le plus grand trou que l'on puisse obtenir ? Quel est celui qui a le plus grand

périmètre ? Quel est le nombre maximum de côtés dans un trou ? Combien y a t-il de formes à trou ayant une enveloppe externe convexe ? Combien y a-t-il de formes à trou symétriques ? Nous avons ainsi mille questions à nous poser sur ces formes à trou. Nous aimerions aussi déterminer le *meilleur jeu*, celui qui, parmi les cousins du Tangram, réalise le plus de formes à trou, et nous aimerions pour finir avoir la liste des formes à trou, possibles chez les 16compacts, mais irréalisables avec le Tangram.

Après avoir étudié les assemblages homogènes et hétérogènes des pièces du Tangram, formes à trous comprises, l'univers fini du Tangram a t-il été exploré dans les régions les plus éloignées, ou bien n'avons-nous eu qu'un aperçu, vaste mais parcellaire, des possibilités combinatoires de ce jeu ? Avant de répondre à cette question, nous avons voulu savoir quelle fraction des formes répertoriées dans les manuels historiques du jeu respectait les règles de l'assemblage hétérogène. Car nous savons qu'il existe des formes qui ne respectent pas ces règles très restrictives : les formes figuratives (celles qui ressemblent à quelque chose) ont souvent, au moins une pièce disposée librement, sans contact ou avec un contact ponctuel avec les autres pièces. Ces formes échappant aux règles hétérogènes appartiennent à des ensembles infinis, car une seule pièce isolée peut être disposée d'une infinité de façons différentes (en faisant varier sa position ou son orientation d'une infime façon, par translation d'une longueur réelle ou rotation d'un angle réel). Nous avons donc passé en revue l'ensemble des formes présentées dans le livre de Jerry Slocum[8] – un superbe document sur le jeu qui en retrace l'histoire, notamment à travers plus de 2 000 formes originales, restituées à leurs premiers auteurs – et nous avons découvert que les formes hétérogènes représentaient, tout de même, près de 40% du total des formes. Le tiers de ces formes hétérogènes est constitué par les assemblages homogènes (dont les formes convexes) qui sont ainsi largement sur-représentées (elles représentent en réalité moins de une forme hétérogène sur mille). Pour les 60% restant, il y a très peu de formes déconnectées (2%), par contre plus de la moitié (31% du total) sont des formes « propres » non-hétérogènes, selon la terminologie de R. Read. Les formes propres se caractérisent par un bord entièrement connecté par les côtés des pièces, mais la nécessité d'ajuster les assemblages par les sommets a disparu, ce qui fait qu'il y a souvent des pièces assemblées de façon non limitative, un peu n'importe où sur les bords de la forme. Cette règle des assemblages propres n'est pas assez forte pour limiter l'ensemble à un nombre fini de combinaisons. Les formes hétérogènes sont des formes propres limitées par un sommet, mais la règle hétérogène n'est pas la seule règle pouvant limiter les formes propres au fini. Nous avons remarqué qu'un grand nombre de ces formes propres non-hétérogènes respectaient certaines autres

8 *The Tangram Book, The story of the chinese puzzle*, Jerry Slocum, Sterling Publishing Co., 2001

règles qui, par essence, conduisent à des ensembles finis. Nous voulons ici énoncer deux de ces règles qui restreignent les formes propres et examiner les premières propriétés de ces formes que nous avons simplement appelé « réglées ».

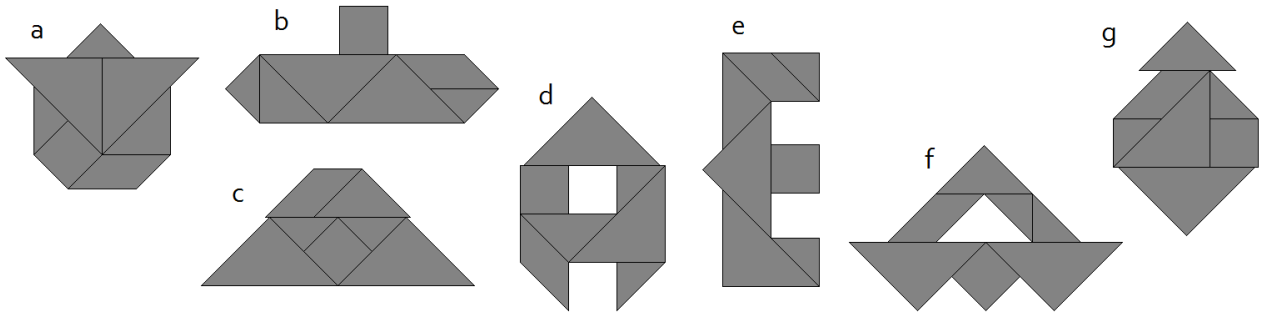


Illustration 134: Quelques tangrams réglés par les milieux et symétriques, extraits du livre de J. Slocum (a, b, c, e : p.100; g : p.105; d : p.131; f : p.120)

La première façon d'être réglée pour une forme propre est d'obéir aux règles des assemblages hétérogènes, sauf pour une pièce (ou un groupe de pièces, ou plusieurs pièces) qui a le droit de s'assembler au reste de la forme par le milieu d'un des côtés (au lieu que ce soit par un des sommets), à condition de respecter la symétrie de la forme. La plupart des exemples qui illustrent cette règle (formes *a*, *b*, *d* et *e*) montrent une seule pièce qui s'assemble ainsi au reste de la forme qui respecte, quant à elle, la règle hétérogène (et parfois la règle homogène comme dans la forme *b*). Dans la règle hétérogène, le milieu d'un segment de longueur 1 ou $\sqrt{2}$ n'a pas vocation à servir de point de référence d'un assemblage. C'est pourtant ce point qui va s'assembler à un autre milieu, sur le reste de la forme celui-là, que ce milieu soit un point de référence (comme sur les formes *a* et *e*) ou non (formes *b* et *d*). Le cas de la forme *d* est particulier (on retrouve cela pour la forme *f*) en ce sens que le côté n'existe pas vraiment : deux côtés, dans le prolongement l'un de l'autre, sont couronnés par la pièce (forme *d*), ou le groupe de pièces (forme *f*) en faisant coïncider le milieu de cet ensemble avec celui de la pièce ou du groupe qui le couronne. Les formes *c* et *f* montrent comment deux assemblages indépendants peuvent s'assembler pour créer une forme propre réglée par les milieux : deux pièces d'un côté et cinq de l'autre comme pour la forme *c*, ou trois pièces d'un côté et quatre de l'autre comme pour la forme *f*. L'important est encore ici que les deux groupes respectent chacun la règle hétérogène, et que l'ensemble ait la même symétrie que chacune des parties. La forme *g* montre un exemple de forme où deux pièces sont accolées au reste de la forme selon cette règle de milieux.

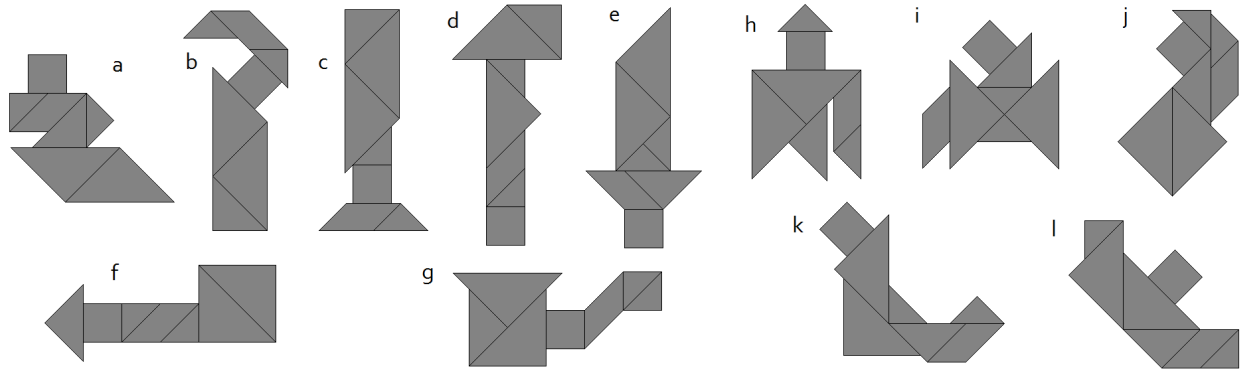


Illustration 135: Quelques exemples de tangrams réglés par les milieux mais non symétriques dont certaines proviennent des livres historiques (a : p.109; b et c : p.111; d, e et f : p.112; g : p.131)

Définie ainsi, la règle des milieux conduit à un ensemble assez pauvre de belles formes symétriques, où la symétrie se limite presque exclusivement à la possession d'un axe. Cette règle semble pourtant particulièrement attractive pour les auteurs, car on en trouve de nombreux exemples dans la littérature du Tangram si l'on se réfère à la compilation de J. Slocum. Nous n'avons rien dit des formes symétriques mais, d'une façon générale, elles sont très présentes dans les formes proposées. Elles ne représentent pas moins de 56% des 2 000 formes proposées par le *Tangram Book*. C'est dire l'importance que les auteurs portent à la symétrie, et c'est bien naturel pour plusieurs raisons : les formes symétriques sont belles, rares et facilement mémorisables. Les auteurs du Tangram ont donc trouvé ce moyen d'agrandir le nombre des formes symétriques hétérogènes. Dès le début, de façon informelle, ils ont inventé toutes les règles d'assemblage, dont cette règle des milieux. Ceci dit, nous pouvons discuter de la pertinence de la deuxième partie de notre définition de la règle des milieux, le « à condition de respecter la symétrie de la forme » n'a pas vraiment de raison d'être, si ce n'est de conduire à des formes symétriques. Nous pourrions tout aussi bien supprimer cette exigence sans sortir des limites du fini. Pour qu'une forme soit réglée par les milieux, il suffit qu'au moins un des assemblages se fasse par les milieux, quelle que soit la symétrie de l'ensemble et celle des parties. De cette façon, on se retrouve avec un groupe très vaste sans doute, dont les formes symétriques très prisées que cette règle a apportées et dont nous avons donnés quelques exemples. La figure 134 nous donne quelques exemples de ces assemblages non-symétriques mais pourtant réglés par les milieux. Les premiers exemples proviennent du livre de J. Slocum et montrent que cette règle d'assemblage par les milieux a été employée dès le début, pour générer indistinctement des formes symétriques et non-symétriques. Nous n'avons donc aucune raison de vouloir écarter, par une règle plus stricte, ces formes non-symétriques. L'assemblage par les milieux apparaît donc comme un des outils naturels que l'on emploie pour générer des formes originales, car le milieu d'un côté est aisé à situer (des arguments de symétrie y aident, comme « il faut que le

segment qui dépasse d'un côté ait la même longueur que celui qui dépasse de l'autre »).

Lors du processus d'agrégation des pièces, lorsqu'un assemblage par les milieux a été créé, de nouvelles longueurs de segments sont générées qui n'existaient pas avec les formes hétérogènes. Pour trouver « ce qui dépasse d'un côté », il faut soustraire les deux longueurs de côtés (on trouve alors une longueur connue), et puis diviser par deux. C'est dans cette division par deux que vont apparaître des nombres inconnus des tangrams hétérogènes. La forme *a* de la figure 136 montre une forme assemblée par les milieux du carré et du petit côté d'un grand triangle. Cet assemblage génère une longueur égale à $\frac{1}{2}=0.5$ qui ne fait pas partie des douze longueurs connues. En accolant par les milieux un petit triangle et un carré comme en *b*, on génère des deux côtés de l'assemblage une longueur égale à $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\approx 0.207$ qui est également inconnue. De même, les assemblages *c*, *d* et *e* génèrent des longueurs nouvelles, égales respectivement à $\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.293$, $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\approx 0.914$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$. Seul, l'assemblage *f* n'amène rien de nouveau puisqu'il génère une longueur égale à $\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$ qui est bien connue (longueur n°4). Pour ce qui est de la forme *d*, nous avons dit que les segments qui dépassent de l'hypoténuse du grand triangle, une fois positionné le petit triangle, mesurent $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$, mais cette nouvelle longueur de segment en génère une autre, lorsqu'un côté de longueur $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ est constitué de deux segments, comme sur la forme du bas où un des segments mesure 1. L'autre mesure alors $1-(\sqrt{2}-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\approx 0.086$. Dans cette même forme, il y a deux assemblages par les milieux qui produisent quatre segments de longueur $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$. Ces exemples ne sont que des essais sporadiques, limités aux répercussions des assemblages réglés par les milieux de deux pièces du Tangram. On doit s'attendre à obtenir douze nouvelles longueurs au moins, les moitiés des douze longueurs de segments déjà connus. Ainsi $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ est la moitié de la longueur n°1 tandis que $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les moitiés des longueurs n°9 et 12 (les longueurs des segments unitaires) et les longueurs $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{2}-1$ sont

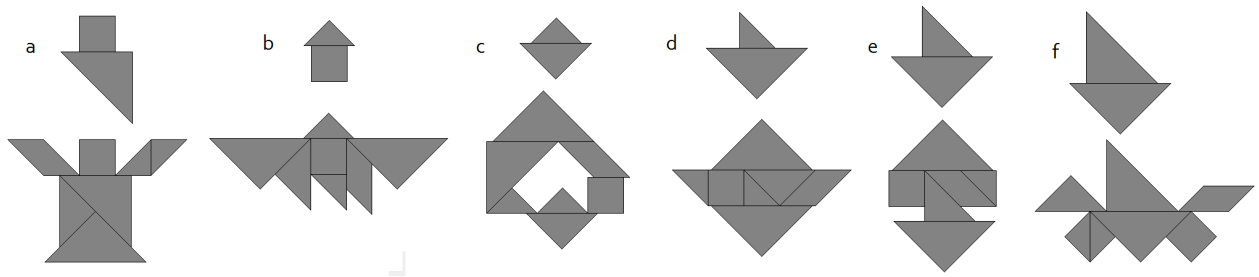


Illustration 136: Quelques formes assemblées par les milieux qui produisent des longueurs nouvelles (sauf la forme f), inconnues des tangrams hétérogènes

les moitiés des longueurs n°5 et n°8. Seule la longueur $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ ne correspond pas à la moitié d'une longueur connue, car son double, $2\sqrt{2}-1\approx 1.828$, dépasse la longueur possible d'un segment (un segment obtenu par assemblage hétérogène ne peut dépasser $\sqrt{2}$). Et il faut s'attendre à d'autres longueurs de segments qui s'obtiennent en divisant par deux des longueurs comprises entre $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$.

Nous ne voulons pas aller beaucoup plus loin ici sur ce mode d'assemblage réglé par les milieux, mais notre tour d'horizon des autres types d'assemblages conduisant à des ensembles finis doit s'enrichir d'un autre type d'assemblage fini, assez peu utilisé par les différents auteurs du Tangram, mais qui complète heureusement la panoplie dans certaines situations. Il s'agit de faire coïncider deux côtés d'une pièce (ou d'un groupe de pièces) avec deux côtés d'une autre partie qui forment un angle égal à l'angle existant entre les côtés de la pièce (ou du groupe). Une image valant souvent mieux qu'un long discours, nous proposons ces quelques exemples (figure 137), tous extraits du même livre de J. Slocum. Fort heureusement, tous ces exemples ne conduisent pas toujours à un assemblage symétrique, car c'est dans les espaces non-symétriques que ce moyen de liaison trouvera ses plus nombreuses applications. La forme *f*, qui est censée dessiner la lettre « o » dans l'alphabet de Bertinazzi (1818), montre un petit triangle ainsi assemblé, par butée de ses deux cathètes sur les bords d'une vaste baie qu'il vient ainsi obstruer. Les autres exemples réalisent aussi des butées d'un groupe de deux ou trois pièces sur un autre groupe de cinq ou quatre pièces, de façon toujours symétrique, même si la symétrie de la forme n'est qu'un attracteur qui n'a rien à voir avec le mode d'assemblage. La forme *d* est une situation particulière, à mi-chemin entre le réglage par les milieux et le réglage par la butée que l'on peut considérer ici comme un intrus (il se fait par coïncidence des axes de symétrie des deux blocs assemblés). Ces exemples ne montrent pas tout le potentiel de la règle d'assemblage par butée qui conduit toujours, par essence, à des formes à trou (sinon il s'agirait d'assemblages hétérogènes). Ce que nous pouvons remarquer, à propos des longueurs de segments qui dépassent, c'est que, pour le moins, ils n'ont pas des longueurs aisées à déterminer. Dans la forme *a*, le carré s'assemble à l'hypoténuse du grand triangle après une longueur de 1, ce qui laisse dépasser vers le bas une longueur égale à $2\sqrt{2}-2$ qui est connue pour être la longueur n°8. Dans la forme *b*, les cathètes du

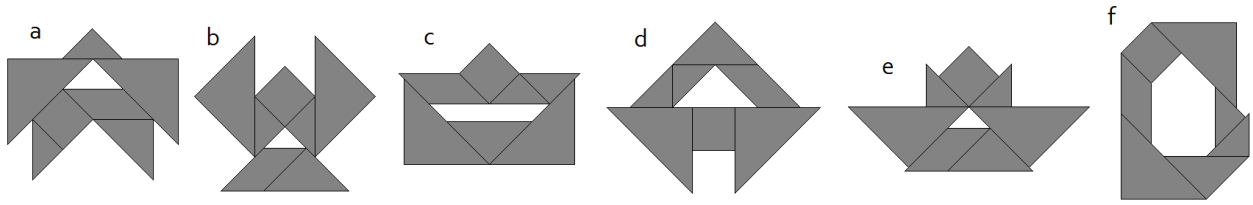


Illustration 137: Quelques exemples de tangrams réglés par butée qui apparaissent dans le livre de J. Slocum (respectivement aux pages 109, 110, 133, 143, 157 et 169)

trou triangulaire mesurent chacune $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le morceau qui dépasse du parallélogramme mesure, quant-à-lui, $\sqrt{2}-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1\approx 1.121$, une longueur jamais rencontrée mais qui fait partie des moitiés de longueurs de la forme $a\sqrt{2}+b$ inférieure à $2\sqrt{2}$ dont nous avons parlé à propos des premières formes réglées. Dans la forme *c*, le petit bout qui dépasse mesure $3-2\sqrt{2}$ qui est connue pour être la longueur n°1 et à l'intérieur du trou, les petits côtés mesurent $2-\sqrt{2}$, soit une longueur n°5. Dans la forme *d*, les petits bouts mesurent tous $\frac{1}{2}$. Dans la forme *e*, on retrouve le petit trou triangulaire du *b* et les petits dépassements mesurent $\sqrt{2}-(2-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\approx 0.121$, soit la moitié d'un segment de longueur n°2.

La forme *f* enfin, qui n'est pas symétrique, semble avoir un trou heptagonal symétrique. En réalité, il n'en est rien, il aurait fallu que l'angle droit du petit triangle se joigne à la pointe de l'autre petit triangle. Pour déterminer les longueurs des segments en jeu, commençons par la longueur L1 qui mesure $2\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$ (L1 est en réalité composé d'un segment de longueur $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'un autre de longueur $\sqrt{2}-1$); la longueur L2 mesure alors $2\sqrt{2}-1-(\frac{3\sqrt{2}}{2}-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (comme la hauteur relative à l'hypoténuse d'un petit triangle); la longueur L3 finalement mesure $2\sqrt{2}-(\frac{3\sqrt{2}}{2}-1)-2\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, la moitié de la longueur n°5. Il reste à déterminer les longueurs qui dépassent de l'hypoténuse du petit triangle et qui semblent moins évidentes. Un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra) nous indique qu'à l'intérieur du trou, L5 mesure environ 0.29289 ce qui correspond à $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et L4, la longueur de la corne qui dépasse, mesure $\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\approx 0.12132$, le lecteur vérifiera à titre d'exercice ces valeurs. De ces exemples, nous gardons l'impression que les longueurs de segments entrant en jeu dans ces assemblages réglés par la butée d'une pièce ou d'un groupe de pièces sont au moins aussi variées que celles qu'on a rencontrées avec les assemblages réglés par les milieux. Peut-être s'agit-il, dans les deux cas, des mêmes longueurs dont on devra faire l'inventaire avant tout essai de programmation, afin de déterminer les tables d'encodage.

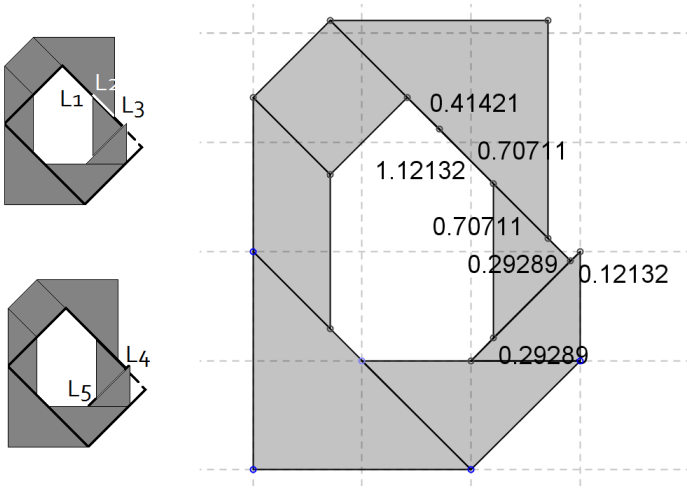


Illustration 138: Détermination de quelques longueurs relatives à un assemblage réglé par butée

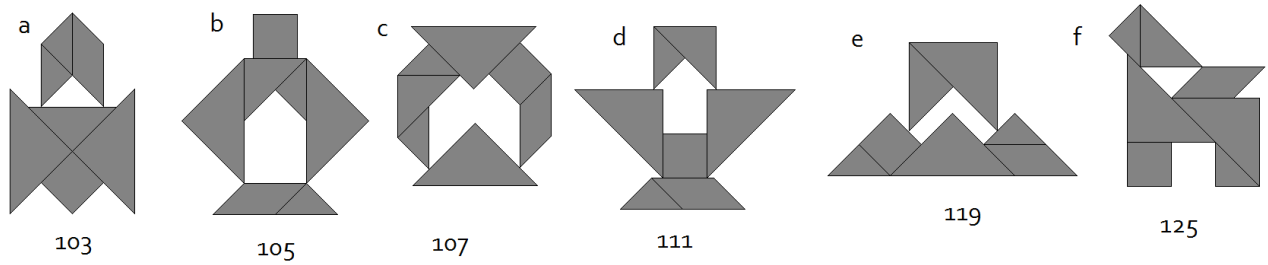


Illustration 139: Quelques formes générales qui présentent des assemblages pouvant rappeler les assemblages réglés des formes propres

Avec ces deux modes d'assemblages réglés, nous restons dans le champ des formes propres (accolées par des morceaux de segment). Si l'on s'écarte des formes propres pour examiner quelques formes générales obéissant à des règles assez contraignantes pour générer des ensembles finis, on peut déjà citer les équivalents généraux des assemblages propres et réglés. Dans un assemblage général, les bords des pièces sont contraints de rester connectés, mais la connexion d'une pièce (ou d'un groupe) peut se faire uniquement par un sommet (ou plusieurs), sans aucun contact avec d'autre partie du bord. Dans le livre de J. Slocum, nous rencontrons souvent ce type d'assemblage : général mais impropre et, d'une certaine façon, réglé par des milieux ou par une butée. La figure ci-dessus nous donne un aperçu de ces formes qui existent en nombre limité, mais dont nous ne chercherons pas davantage de détails car elles sortent de notre champ d'étude pour le moment. Ces quelques exemples montrent des assemblages impropres réglés par les milieux ou la coïncidence des axes de symétrie (*a* et *d*) ou par une butée (*c* et *e*). La forme *b* présente un assemblage impropre avec une butée par les sommets, ce dont on n'a pas d'équivalent pour les assemblages propres à moins de généraliser cette idée de coïncidence des axes de symétrie. La forme *f* présente, quant à elle, un assemblage réglé par butée qui est à moitié propre et qu'on peut considérer comme un exemple d'assemblage propre avec baie, réglé par butée.

<u>Question 14</u> : Les formes propres réglées par les milieux et peut-être aussi les formes réglées par butée sont constituées des douze sortes de segments hétérogènes auxquels il faut ajouter les moitiés des longueurs de la forme $a\sqrt{2}+b$ où *a* et *b* sont des entiers (positifs ou négatifs) tels que $\frac{a\sqrt{2}+b}{2}$ soit positif et inférieur à $\sqrt{2}$. Faire la liste des nouvelles longueurs possibles théoriquement et donner un exemple de forme réglée réalisant un segment de chacune de ces longueurs.

Chapitre 15 :
Problèmes avec des tangrams propres

Les formes propres sont en nombre infini, mais certaines questions – comme le problème de la ferme de Martin Gardner – cherchant à délimiter les formes extrêmes, nous conduisent à parcourir cet infini en nous basant sur la connaissance du fini

L'ensemble des formes propres est infini et indénombrable. Il suffit de prendre une forme propre sur laquelle un groupe de pièces n'est pas assemblé selon une des règles précédentes (homogène, hétérogène ou réglée) pour générer une infinité de positions différentes dudit groupe et, par voie de conséquence, une infinité de tangrams propres différents. Ronald Read montra ainsi que chercher à dénombrer tous les hexagones réalisables avec le Tangram était impossible, car ils sont en nombre infini. À partir de six côtés en effet, un tangram peut être propre sans être hétérogène. Une des pièces, ou un groupe de pièces, peut glisser continûment sur un des côtés de l'assemblage des autres pièces, comme le groupe des deux grands triangles de notre illustration.

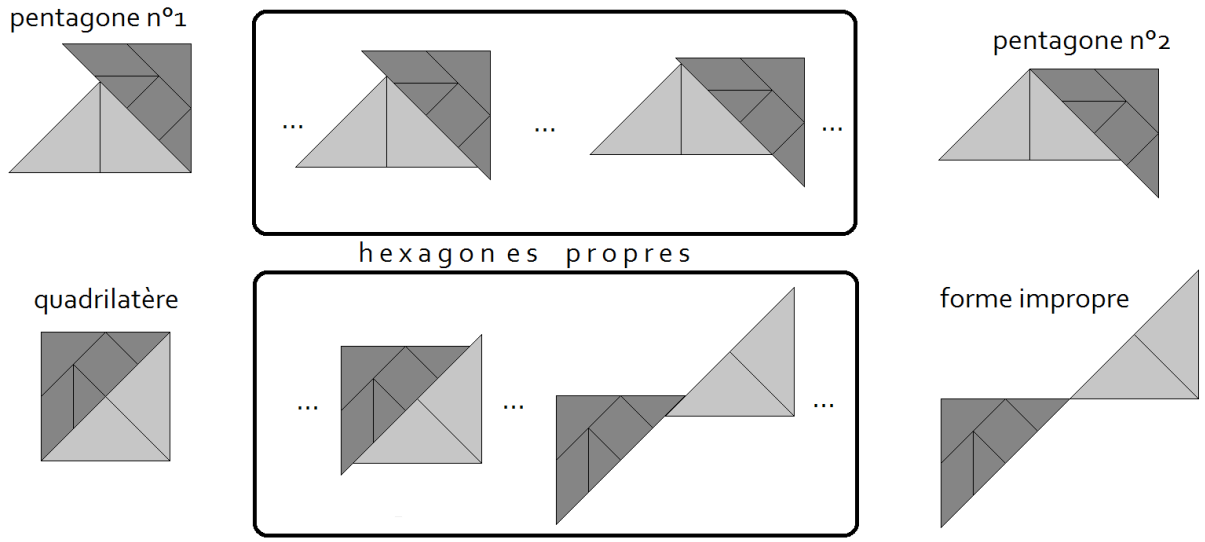


Illustration 140: Deux exemples de suites infinies d'hexagones propres construites à partir de 2 pentagones hétérogènes (ligne du haut) ou d'un quadrilatère homogène (le carré, ligne du bas)

Comme l'ensemble des formes propres est infini, on ne peut évidemment pas en générer tous les éléments. Certaines questions que nous avons pu traiter avec les assemblages hétérogènes, et que nous pourrions traiter avec les assemblages réglés (car ils existent en nombre fini), sont donc impossibles à traiter avec cet ensemble. Les périmètres possibles d'un tangram propre, par exemple, sont

indénombrables. On ne peut pas en faire la liste ni calculer leur moyenne. Cependant, on peut tout de même déterminer quelques particularités de ces périmètres propres, comme le plus grand des périmètres et le plus petit. Pour le plus petit, il y a fort à parier que ce sera le périmètre d'une forme hétérogène. Peut-on trouver un tangram propre qui ait un périmètre inférieur au plus petit des périmètres hétérogènes, c'est-à-dire $2\sqrt{2}+8\approx 10.828$? Nous voyons ci-dessous les dix seules formes hétérogènes qui réalisent cette valeur minimale du périmètre. Pour diminuer le périmètre, il faudrait pouvoir compacter davantage ces assemblages, ce qui n'est pas possible si on considère les formes propres obtenues à partir de ces dix formes (voir la figure 141). Mais peut-on compacter d'autres formes hétérogènes pour obtenir des valeurs inférieures du périmètre ? Ne peut-on pas réaliser des formes propres originales qui aient un périmètre inférieur ? Apporter des réponses, et des preuves acceptables à ce genre de question peut relever d'un raisonnement pur (lequel ?), mais un programme informatique pourrait-il calculer avec certitude la forme propre de périmètre minimal ?

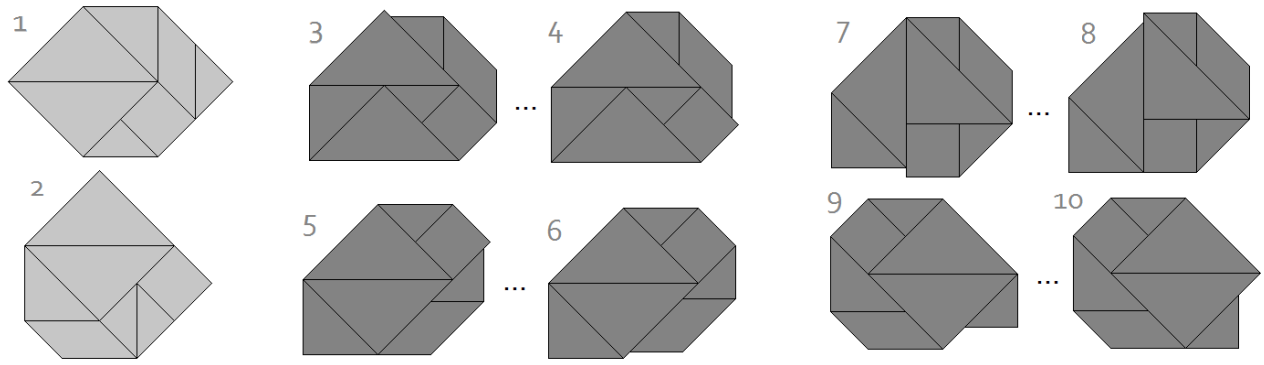


Illustration 141: Parmi les 10 tangrams hétérogènes de périmètre minimum (environ 10.828) les 8 qui ne sont pas homogènes forment 4 paires et autant de suites de formes propres ayant toutes la même valeur du périmètre, car le bloc mobile de 1 ou 2 pièces glisse sans changer le périmètre

Pour la forme propre de périmètre maximal, une nouvelle complication des formes propres émerge. En effet, comme on le voit sur notre figure 140, la suite des hexagones propres de la ligne inférieure a des périmètres qui vont en croissant, mais la forme de périmètre maximum pour cette suite est une forme impropre. Les deux parties de cette forme ne s'assemblent plus par un morceau de côté comme ils le devraient si c'était une forme propre. Quel est alors le périmètre maximal de cette suite de formes propres ? Pour cette suite infinie d'hexagones propres, les périmètres s'échelonnent continûment entre $8\sqrt{2}\approx 11.314$ inclus (le périmètre du carré) et $8\sqrt{2}+8\approx 19.314$ exclus (le périmètre de la forme impropre). Ils prennent donc leurs valeurs dans l'ensemble ouvert $[8\sqrt{2};8\sqrt{2}+8[$ et le périmètre maximum sera le plus grand nombre réel strictement inférieur à $8\sqrt{2}+8$. Si on veut décrire les possibilités des assemblages propres, on devra donc exclure les valeurs

limites appartenant aux assemblages impropres.

Bien sûr, le périmètre de la forme impropre de la figure 140 n'est pas le maximum possible avec le Tangram : même parmi les formes hétérogènes, on en trouve qui dépassent cette valeur, le maximum hétérogène $8\sqrt{2}+16\approx 27.314$ étant atteint pour vingt-et-une formes (voir le chapitre 9). Si l'on choisit une de ces formes maximales, il est toujours possible d'étirer le périmètre, en réalisant des formes propres, pour l'amener à la valeur extrême des tangrams totalisant toutes les longueurs des côtés $10\sqrt{2}+20\approx 34.142$. On admet facilement ici que cette valeur du périmètre ne peut être dépassée, même avec des formes impropres. Mais c'est une valeur limite qui ne peut être atteinte réellement par un tangram propre. Il n'y a donc pas de périmètre maximum pour un tangram propre ! On peut en trouver de périmètre 34, et aussi de périmètre 34.142 et encore de périmètre 34.14213562, mais aucun tangram propre n'aura le périmètre $10\sqrt{2}+20$, cette valeur étant le périmètre d'une forme impropre. Ces considérations subtiles ne nous empêcheront pas de considérer, un peu abusivement donc, que le périmètre maximum des tangrams propres est $10\sqrt{2}+20$, et il faudra considérer sous cet éclairage les formes impropres exhibées en illustration.

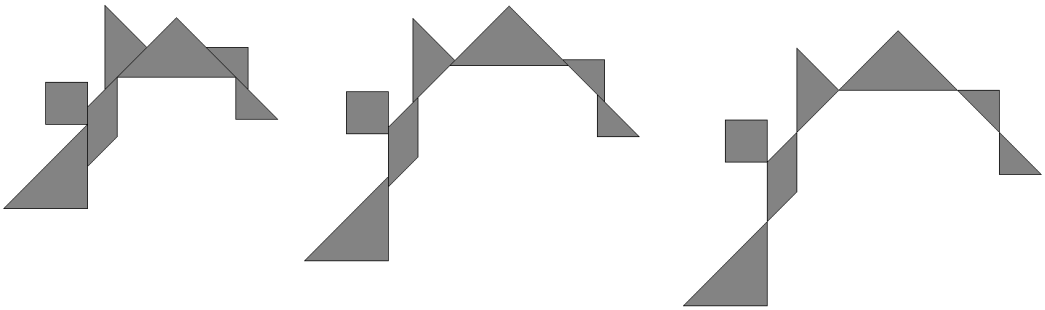


Illustration 142: Une forme hétérogène (à gauche) étirée continument en une suite infinie de formes propres (un exemplaire est donné au centre) aboutissant à la forme impropre de périmètre maximal majoré par 34.143 (à droite)

Ces considérations introductives nous permettront de mieux aborder quelques-unes des très intéressantes questions posées par Martin Gardner dans son article de 1974 du Scientific American. La première de ces questions a été intitulée « problème de la ferme » par Gardner. Il s'agit de trouver la disposition propre des pièces du jeu qui crée le trou d'aire maximum. On a déjà étudié les trous des formes homogènes : le plus grand possible a une aire de quatre triangles. Les formes hétérogènes à trous n'ont pas été générées à cause des difficultés techniques de l'encodage et de la gestion des gros fichiers (voir chapitre précédent), mais ici la question est plus générale puisqu'elle porte sur les formes propres. Sans doute qu'une des formes hétérogènes à trou pourra être déformée continûment pour produire des formes propres ayant des trous d'aire supérieure. La forme propre ayant le trou de plus grande aire sera sans doute, d'après ce que nous avons dit plus haut, une forme

impropre. Saura t-on déterminer cette forme ultime – la solution du problème de la ferme – à l'aide d'un programme informatique ? Notre objectif premier est de pointer quelques-unes des difficultés de ce problème que Martin Gardner ne s'est pas contenté d'énoncer : il a proposé une forme de ferme-solution dont l'aire est celle de la forme impropre qui est présentée sur notre illustration (au centre). L'aire de cette limite provisoire est $6\sqrt{2}+2.5\approx 10.9853$. Comment prouver que cette valeur est ou n'est pas le maximum cherché ?

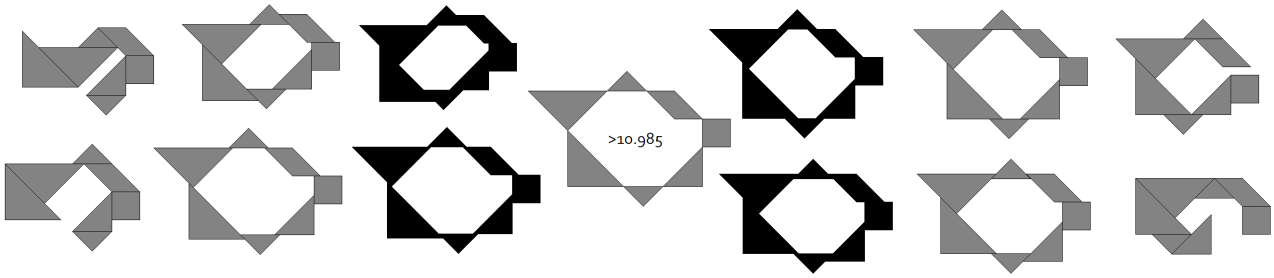


Illustration 143: La forme impropre d'aire maximale provisoire (au centre) et 4 possibilités d'agencement parmi d'autres (celle donnée par Martin Gardner en 1974 est en bas à gauche) pour les assemblages propres qui y conduisent ainsi que pour les assemblages hétérogènes pleins d'où ces formes propres pourraient provenir

On peut supposer que Martin Gardner trouva cette forme en appliquant son intelligence à la manipulation des pièces du jeu. Fortifié par l'expérience qu'il a de ce genre de situation et animé d'une saine curiosité, il trouva cette forme optimale et n'en trouva pas de meilleure. Mais si l'on doit programmer un ordinateur pour faire ce travail, il faut mettre à plat les données du problème et bâtir une stratégie de recherche. L'algorithme final doit pouvoir balayer toutes les configurations de pièces et déterminer pour chacune la position optimale. Cela ne semble pas si difficile lorsqu'on observe que la forme impropre vers laquelle se ramène la ferme-solution de Gardner est un anneau complètement impropre : toutes les pièces sont en contact avec deux voisines par un sommet à chaque fois. Aucun contact ne se fait par un morceau de côté. Cela ne doit pas faire beaucoup de possibilités à tester – quelques milliers peut-être, comme pour les tangrams en étoile du chapitre 2 – et lorsque l'anneau est possible, il suffit de calculer l'aire du trou impropre ainsi réalisé. Parmi les formes impropres disposées en anneau, certaines ne peuvent pas correspondre à des formes propres, car les côtés ne sont pas disposés pour que les pièces coulissent (voir l'exemple de gauche sur notre figure 145). Il faut donc éliminer ce genre de forme pour ne garder que les formes en anneaux coulissant convenablement, c'est-à-dire que l'on doit pouvoir les transformer en formes propres. La réponse définitive à cette énigme de Gardner n'est cependant pas aussi simple, car il est aussi possible d'avoir un anneau étiré jusqu'à sa limite impropre qui reste partiellement propre (dans la forme de droite de notre figure qui en montre un exemple, trois pièces restent assemblées proprement, même en étirant au

maximum la forme pour en faire une forme impropre). Même si on a des raisons de supposer que ce type de forme ne conduira pas au trou d'aire maximum (à cause justement de l'assemblage restant propre à la limite, gaspillant une possibilité d'extension), il serait souhaitable de passer aussi ces formes en revue pour établir définitivement la ferme d'aire maximum. Cela est difficile à réaliser par programme, les formes propres ayant des longueurs de segment à priori en nombre infini. Sur notre exemple, on peut déterminer les longueurs des segments de la forme impropre – la position du petit triangle qui verrouille la ferme est réglée par butée – mais un programme doit pouvoir les envisager toutes.

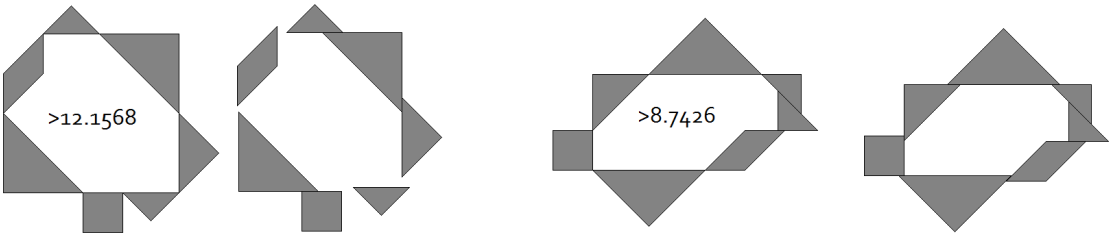


Illustration 144: Anneau ne conduisant pas une ferme propre (à gauche) et anneau n'ayant pas de forme complètement impropre mais qui pourtant constitue une ferme propre valide (à droite)

Nous avons donc cherché les anneaux complètement impropres – à la manière de la ferme-solution de Gardner – qui peuvent coulisser convenablement pour donner des fermes propres, c'est-à-dire que chaque pièce doit pouvoir coulisser sur les deux pièces qui la jouxte. Les quatre-vingt-dix ordres différents des pièces du jeu que nous avons identifiés pour les tangrams en étoile nous ont servi à examiner successivement toutes les combinaisons de pièces pour tenter de construire de tels anneaux. Ce programme nous a permis de vérifier, en examinant toutes les possibilités combinatoires, que la ferme-solution de Gardner conduisait à la plus grande aire. Cette solution est par ailleurs unique. Parmi tous les anneaux possibles qui conduisent à une ferme impropre convenable (il s'en trouve 6 747), le trou d'aire maximum est la forme donnée par Gardner qui a une aire de $6\sqrt{2}+2.5\approx 10.9853$ unités ! On trouve cette ferme dans l'anneau 46 correspondant à l'ordre 4319912 (voir chapitre 3). L'aire suivante, des fermes les plus proches de la ferme-solution, est $5\sqrt{2}+3.5\approx 10.5711$. Cette aire se rencontre dans vingt-quatre fermes différentes (voir la figure 145) qui s'apparient deux par deux, en raison de la possibilité du parallélogramme d'être disposé dans un sens ou dans l'autre. Cette possibilité n'existe pas pour la ferme de Gardner, car deux côtés consécutifs du parallélogramme sont utilisés pour bâtir les bords du trou. Il y a trois autres fermes intéressantes qui ont des possibilités d'extension jusqu'à des aires dépassant dix unités (le parallélogramme y est à chaque fois fixé par deux côtés). Ensuite, les aires des fermes continuent à décroître graduellement. Nous avons représenté sur nos illustrations les plus grandes fermes. Leurs aires maximales suivent cette liste : 10.985 (la ferme de Gardner), 10.571 (24 fermes distinctes appariées par 2), 10.485

(2 fermes distinctes), 10.071 (une seule ferme), 9.657 (une seule ferme), 9.571 (13 fermes dont une seule, huit appariées par deux et quatre appariées dans un seul groupe), etc. Ensuite, les aires maximales n'atteignent pas neuf unités. Les variantes qui apparaissent ne sont pas dues uniquement au parallélogramme : les triangles peuvent être disposés aussi parfois de deux façons différentes sans perdre la possibilité de coulissage. Dans les fermes d'aires supérieures, ce sont les petits triangles qui jouent ce rôle, mais rien n'empêche que pour certaines fermes il y ait des variantes dues aux autres triangles.

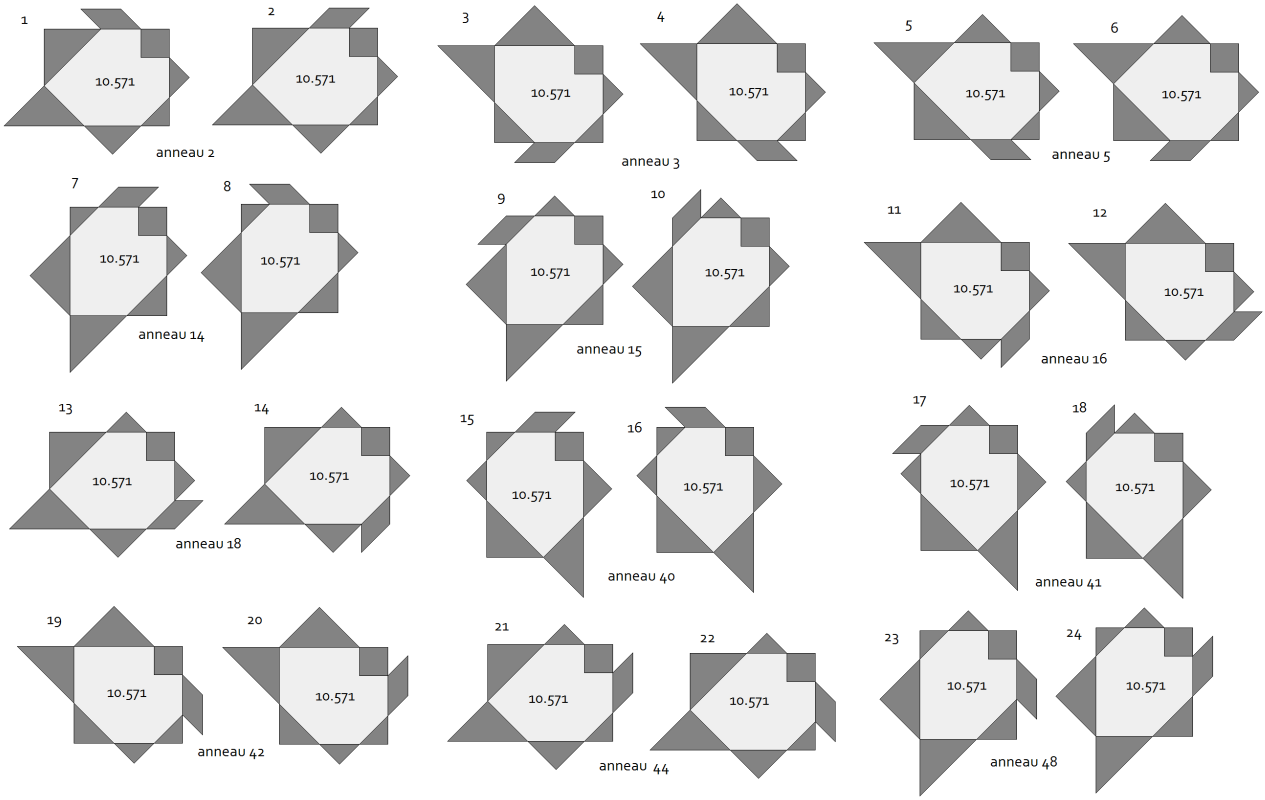


Illustration 145: Les 24 fermes dont l'aire vient en 2ème position, après la ferme de Gardner qui caracole seule en tête, s'apparient par couples, selon la disposition du parallélogramme

Parmi les quatre-vingt-dix ordres différents des pièces – ce que nous avons appelé anneau et que l'on à numéroté entre 0 et 89 – certains conduisent à de nombreuses fermes propres différentes. Ce sont des dispositions différentes des triangles ou du parallélogramme qui produisent ces variations pour un anneau. On a entre 24 et 150 variations par anneau. Le plus prolifique (on pourrait dire instable) est l'anneau 48 qui correspond à l'ordre 4391129, le plus stable (le moins prolifique) est l'anneau 65 qui correspondant à l'ordre 4912913. La moyenne des variations par anneau s'établit à 75. On peut voir cinq variations de l'anneau 46 sur la ferme de Gardner (figure 143) et les quatre fermes d'aire 9.571 de la figure 146, mais cet anneau en possède 102 en tout. On peut encore, en passant, mentionner l'anneau 30 dont la ferme d'aire maximum est le minimum (6.743) de la série.

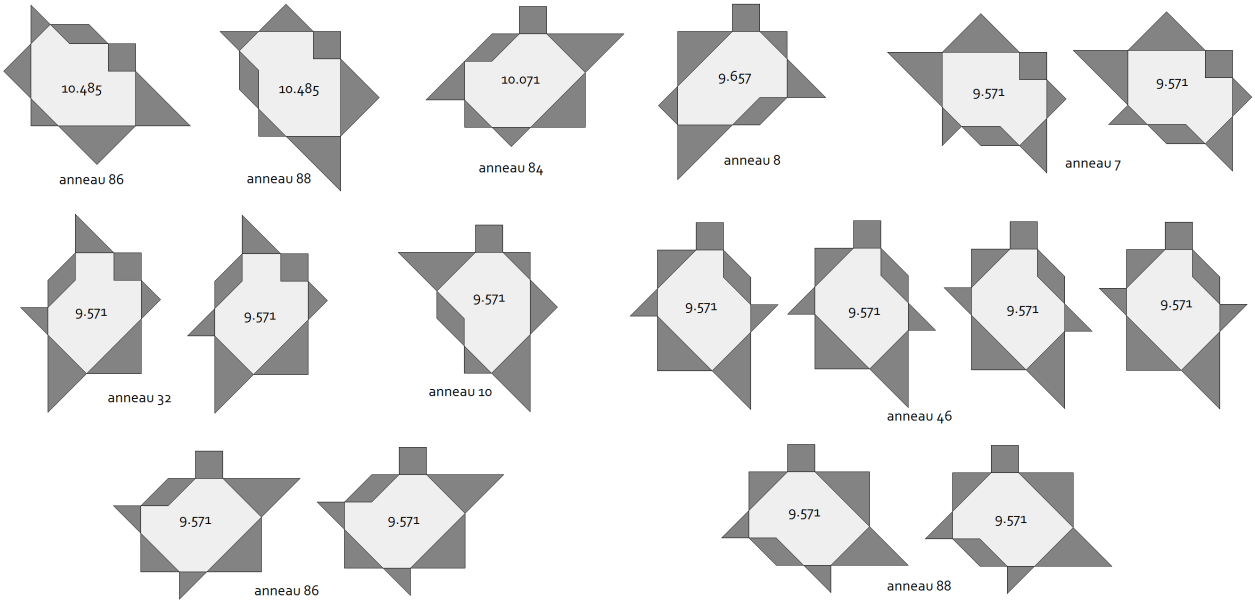


Illustration 146: Les autres formes impropres, d'aire supérieure à 9 unités qui peuvent se transformer en fermes impropres. Les appariements sont ici dus aux petits triangles

Les autres problèmes posés explicitement ou évoqués par Martin Gardner concernant les tangrams propres sont encore des interrogations sur les trous :

- Le nombre de côtés maximum d'un trou simplement connecté dans une ferme (trou unique) : Gardner propose treize, mais ne donne pas de solution. Son affirmation étant « le maximum est certainement treize », on peut penser qu'il a des arguments pour justifier que treize est une borne supérieure, indépassable pour quelque raison non exposée. Le nombre maximum de côtés d'une forme propre à trou étant 23 explique t-il cela ? Mais peut-on réaliser un trou ayant treize côtés ?
- L'aire maximum d'une ferme carrée, rectangulaire ou triangulaire : Gardner propose un trou triangulaire d'aire 2 et un trou carré d'aire 4 (il demandait tout d'abord à ses lecteurs de chercher ces formes, disant qu'elles étaient faciles à trouver, mais ensuite il suggérait de chercher celles d'aires maximums). Quels sont les aires maximums pour ces types de trous ? Qu'en est-il du trou rectangulaire d'aire maximum ? Est-ce un carré ? On peut envisager de compléter la question en se demandant quelle est l'aire de la plus grande ferme pentagonale, hexagonale, ... etc. jusqu'à des fermes ayant treize côtés ou davantage selon la réponse au premier problème.
- L'aire du plus grand ensemble de deux trous carrés ou bien de deux trous triangulaires ou encore d'un trou carré associé à un trou triangulaire : Gardner propose seulement de chercher une forme ayant deux trous carrés d'aire 1 et une forme à deux trous triangulaires d'aire 1 et ½. Il donne les solutions à ces problèmes et ajoute qu'il pense qu'une forme à deux trous triangulaires d'aire 1 n'existe pas. Pour le dernier problème, il propose une forme avec un trou

carré d'aire 1 et un trou triangulaire d'aire 1. On pourrait éventuellement s'interroger sur l'existence des formes à deux trous qui ne soient pas des trois types évoqués par Gardner, par exemple une forme avec un trou triangulaire et un trou parallélogramme (ou pentagonal, etc.) et dans ce cas encore chercher les formes ayant les plus grands trous.

- L'existence de formes à trois trous rectangulaires ou triangulaires : Gardner donne des formes à trois trous dont deux rectangulaires et un triangulaire ou deux triangulaires et un carré, mais pense qu'une forme ayant trois trous de même nature n'est pas possible.
- Le nombre maximum de trous dans une forme propre : Gardner ne pose pas explicitement la question mais, n'envisageant pas d'autre nombre que trois, il suppose que cette valeur est un maximum : est-ce bien le cas ?

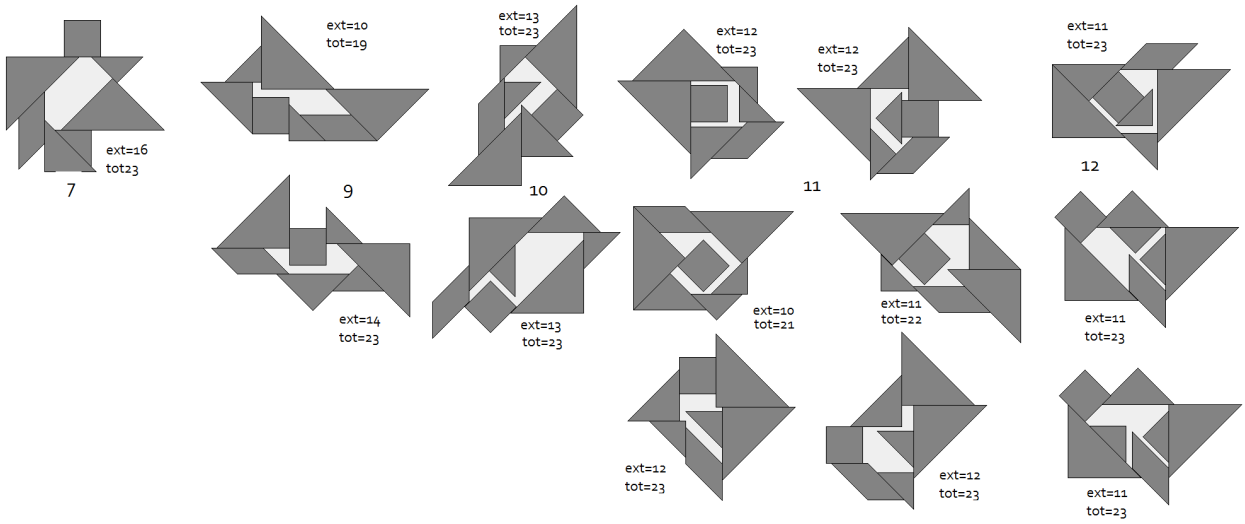


Illustration 147: Recherche manuelle de la ferme ayant le nombre maximum de côtés (ext et tot désignent les nombres de côtés à l'extérieur et au total). La valeur annoncée comme certaine par Gardner (trou à 13 côtés) n'a pas été trouvée

Toutes ces intéressantes questions sans réponse définitive ! Quel chemin à parcourir encore avant d'avoir complètement exploré ce si vaste univers du Tangram ! Nous pouvons difficilement faire autre chose que de vérifier les trouvailles de Gardner et envisager les quelques prolongements mentionnés. Par jeu, nous pouvons quand même rechercher une forme ayant un trou à treize côtés. Cela ne paraît pas si facile et le raisonnement fait par Gardner pour affirmer que le maximum est surement treize nous échappe. Sans doute se base t-il sur le fait qu'une forme propre ne peut avoir plus de vingt-trois côtés, même lorsqu'elle se ferme en un anneau. Mais pour arriver à treize côtés dans le trou, il faut que le bord extérieur, découpé au maximum (c'est-à-dire qu'à chaque jonction de pièces il ne doit pas y avoir coïncidence des sommets), ne possède que dix côtés. Nous n'avons pas trouvé de forme ayant un trou à treize côtés, alors que nous avons pu en trouver plusieurs

ayant jusqu'à douze côtés (voir la figure 147). Avec seulement dix côtés sur le bord extérieur, nous n'avons pas réussi à trouver mieux que onze côtés dans le trou. La conviction de Gardner traduit-elle seulement cette impression que la forme cherchée n'étant pas loin, elle est certainement possible ? Nous laisserons les lecteurs plus ingénieux que nous trancher cette question, mais répondre définitivement à cette question par un programme spécifique semble un objectif encore assez lointain.

Avec notre programme qui construit les fermes impropres ajustables par coulissage en fermes propres, nous rencontrons uniquement des fermes ayant sept, huit, neuf ou dix côtés. Pour les fermes impropres octogonales, l'aire maximum est celle de la ferme de Gardner (anneau 46). Les aires maximums rencontrées pour les fermes impropres à sept, neuf et dix côtés sont 8.5 (anneau 4), 10.485 (anneau 86) et 8 (anneau 81). Mais les fermes d'aire maximum de ce type sont-elles forcément toujours celles qui arrivent en premier lorsqu'on considère toutes les fermes impropres ? Une autre question qui apparaît dans notre recherche : les fermes ayant des trous convexes n'ont jamais plus de sept côtés (une ferme à huit côtés convexes est impossible avec le Tangram) mais quelles sont les aires maximums des fermes convexes à cinq, six et sept côtés ? Est-ce toujours des fermes convexes – dans la mesure où celles-ci sont possibles – qui ont la plus grande aire ?

Pour les autres problèmes, nos réponses ne vont pas faire beaucoup avancer la question. Tant que nous n'aurons pas conçu le programme d'investigation du type de forme sur lequel porte la recherche, nous sommes réduit à explorer le territoire en tâtonnant avec plus ou moins de chance, mais aussi plus ou moins de méthode. Gardner a mis la barre assez haut en posant des balises difficiles à franchir. Nous

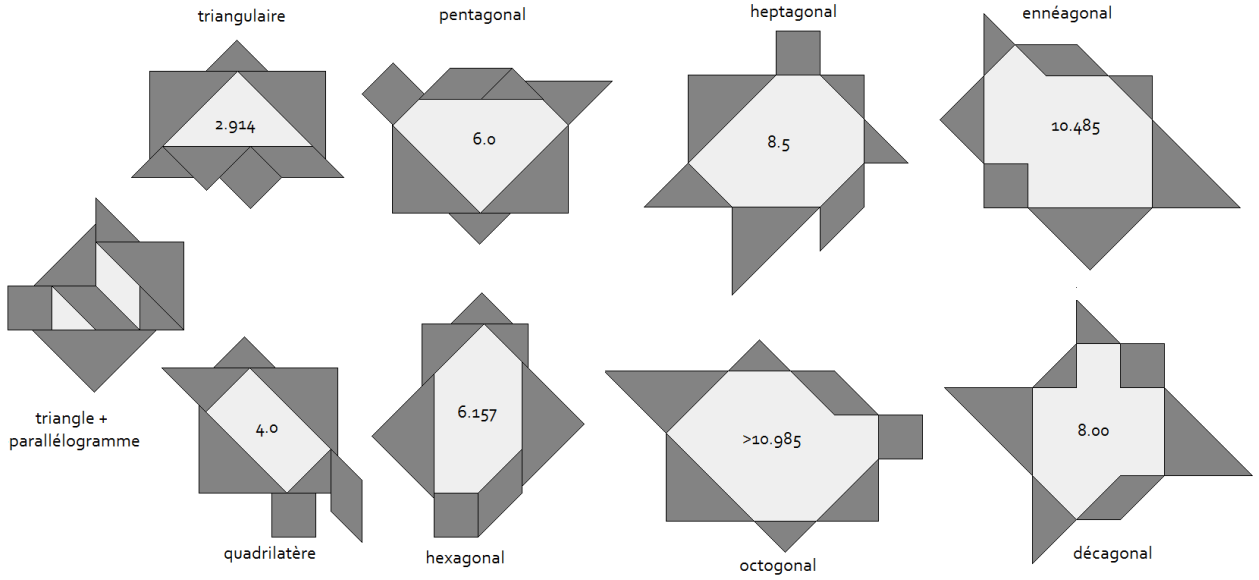


Illustration 148: Recherche manuelle de la ferme ayant n côtés d'aire maximum pour n≤10. Nous avons ajouté les fermes impropres d'aire maximum obtenues par programme pour n=7, 8, 9 et 10 ainsi qu'une forme ayant un trou triangulaire d'aire ½ et un trou parallélogramme d'aire 1

avons essayé de dépasser la valeur de Gardner pour le problème de la ferme, mais nous n'avons réussi qu'à valider la solution qu'il avait trouvée. Saurions-nous faire mieux pour les autres problèmes ?

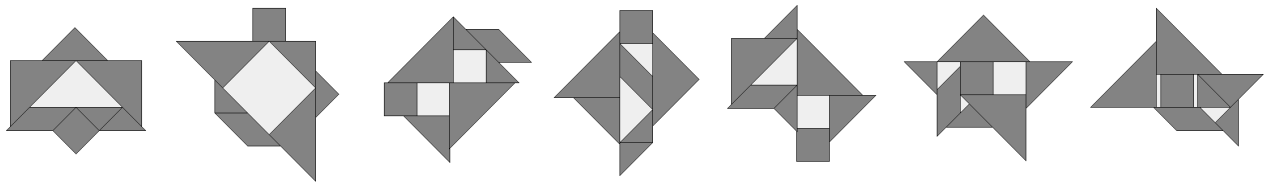


Illustration 149: Les solutions que Martin Gardner a lui-même proposé pour ces différents problèmes concernant les trous des formes propres

Problème 15 : D'autres tout aussi intéressantes questions pourraient encore être ajoutées à la liste déjà longue de Gardner. Les problèmes portant sur les trous de Gardner sont focalisés sur trois ou quatre points : l'existence et la nature des trous, le nombre de côtés maximum et l'aire maximum. La description des formes hétérogènes que nous avons menée nous a pourtant entraîné à étudier d'autres propriétés de ces formes, notamment le périmètre et la convexité réels.

a) La recherche de la ferme de périmètre maximum peut être menée parallèlement à celle d'aire maximum. Quelle est la ferme ayant le plus grand périmètre ? Quelle est la ferme la plus compacte (ayant le plus petit périmètre) ? Nous voyons sur la figure 150 que les fermes d'aire 10.485 sont celles qui, parmi nos différents essais, ont le plus grand périmètre (13.657). Mais cette valeur est-elle le maximum absolu pour une ferme ?

b) Nous avions développé le concept de convexité en mesurant l'écart entre l'aire de l'enveloppe convexe et celle de la forme extérieure. Ici, pour mesurer la convexité d'un trou, on peut procéder de même, mais on peut aussi s'intéresser à une autre sorte de convexité : l'écart entre l'aire du trou et l'aire de la plus grande forme convexe contenue à l'intérieur du trou. Pour ces deux types de convexité (notées cvx1 et cvx2 plus loin), une valeur nulle indique une ferme convexe, mais les deux convexités ne sont en général pas égales. Nous avons déterminé manuellement ces deux paramètres pour quelques-unes des fermes rencontrées et réalisons qu'il n'est pas du tout évident de déterminer les formes convexes de plus grande aire contenues à l'intérieur des fermes (la valeur de cvx2). Pour les quelques essais que nous avons faits, comme nous procédons au cas par cas, on arrive toujours à optimiser correctement l'emplacement des sommets de la forme convexe d'aire maximale incluse dans le trou. Mais pour une programmation éventuelle, l'algorithme est loin de couler de source…

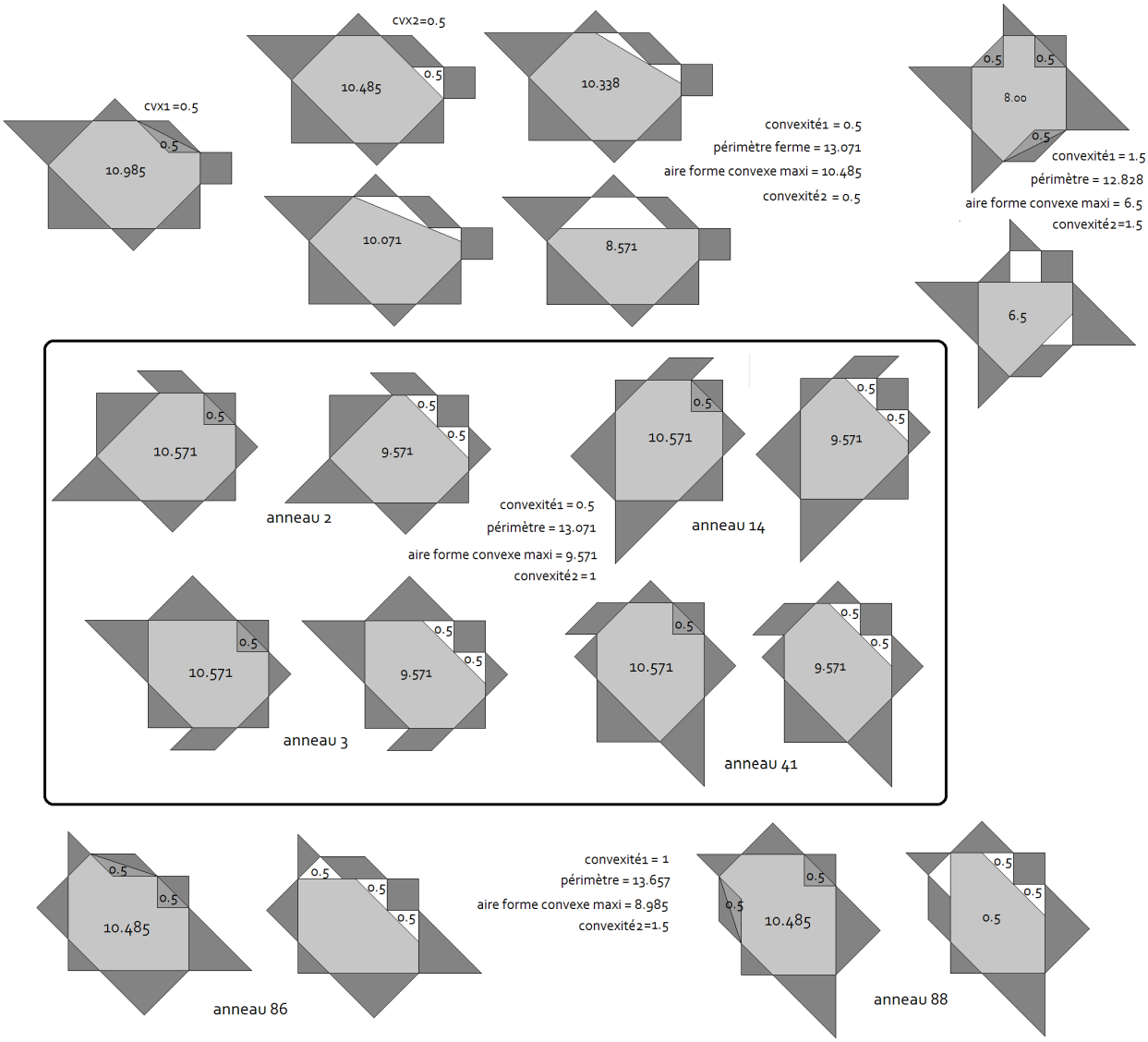


Illustration 150: Déterminations des périmètres réels et des convexités de type 1 et 2 pour quelques-unes des fermes propres déjà mentionnées

Chapitre 16 : Les assemblages simples

Après l'étude des tangrams homogènes et hétérogènes, de nouvelles règles d'assemblage ont été découvertes permettant d'identifier et de générer d'autres collections réduites de tangrams dont les simples et les naturels qui sont étudiés ici

La règle d'assemblage la plus simple et en même temps la plus contraignante est celle qui demande de joindre les pièces en joignant l'intégralité d'un côté. Les côtés des pièces du Tangram n'ont que quatre sortes de longueur : 1 (le côté de la pièce carrée), 2, $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ (l'hypoténuse des grands triangles). La règle d'assemblage la plus simple énoncée plus haut revient donc à l'exigence de réunir les pièces en joignant les côtés d'un même type : on peut joindre un côté de longueur 1 avec un côté de longueur 1, ou bien un côté de longueur $\sqrt{2}$ avec un côté de longueur $\sqrt{2}$, etc.

Ronald Read, qui inventa cette règle d'assemblage en 2013, développa alors les conséquences de ce type d'assemblage pour le Tangram. Les grands triangles qui n'ont que des côtés de longueur 2 et $2\sqrt{2}$ sont obligatoirement liés l'un à l'autre. Ils sont les seuls à posséder ces longueurs $2\sqrt{2}$, et pour cette raison ils vont nécessairement se lier aux autres pièces par un de leur côté de longueur 2. À part ces grands triangles, la seule pièce du jeu possédant un côté de longueur 2 est le triangle moyen. Donc le triangle moyen va se lier à un des grands triangles et assurer la liaison avec les quatre autres petites pièces. Les différents types d'assemblages du groupe des grands triangles et du triangle moyen se limitent à trois formes que Ronald appella les *bases*. En distinguant les formes obtenues par retournement autour d'un axe, on obtient cinq formes car une de ces bases possède un axe de symétrie (ligne du milieu sur notre illustration).

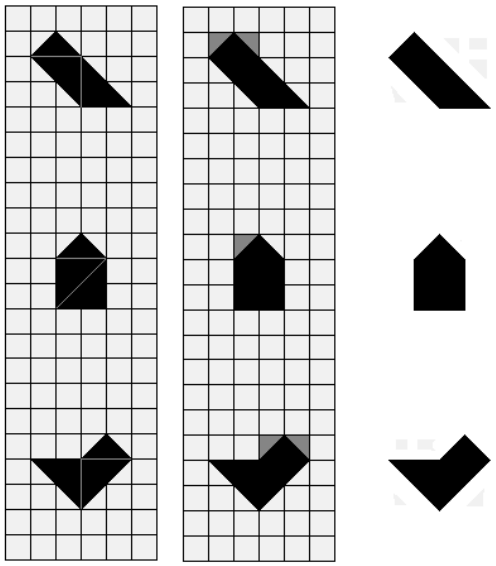


Illustration 151: Trois « bases » simples rassemblent les deux grands triangles et le moyen. En gris, les points d'attache de la « couronne » des autres pièces

Les quatre pièces qui s'ajoutent, par l'intermédiaire du triangle moyen, à la base forment un ensemble que Ronald Read appelle la *couronne*. Les liaisons simples entre les petites pièces de la couronne sont des liaisons homogènes classiques car, pour ces pièces, tous les points de référence des assemblages homogènes sont des

sommets. Nous savons générer toutes les formes homogènes et, par voie de conséquence, toutes les formes simples de couronnes. Il y a soixante-seize assemblages homogènes différents des quatre petites pièces (sans le triangle moyen) qui font un seul bloc. Nous avons grisé sur notre illustration les côtés sur lesquels peut s'accrocher la base : il s'agit toujours d'une diagonale qui, seule, peut constituer un site d'accroche convenable. Deux assemblages n'ont aucune diagonale disponible – ce sont des triminos – et par conséquent, doivent être retiré de la liste des couronnes potentielles. Les soixante-quatorze formes restantes possèdent de un à quatre points d'attache qui sont, parmi les diagonales accessibles, celles qui ne sont pas comptabilisées deux fois, du fait de la symétrie de l'assemblage. Cela conduit à un total de 201 points d'attache différents et donc 201 couronnes différentes (assemblages homogènes des quatre petites pièces,couronnant une base donnée de façon différente) dont la distribution est donnée dans le tableau suivant.

Attaches	0 point	1 point	2 points	3 points	4 points
Assemblages	2	13	21	14	26
Couronnes	0	13	42	42	104

Pour prévoir le nombre de tangrams simples qui résultent de l'assemblage de ces couronnes avec les bases, il faut également considérer la symétrie des couronnes et des bases. Nous avons déjà remarqué qu'une des bases possède un axe de symétrie. Parmi les couronnes acceptables (on ne compte plus les deux qui n'ont pas d'attache possible), huit ont un axe de symétrie et cinq un centre. La plupart du temps, en retournant les couronnes, il y a deux façons de les assembler aux bases autour d'un

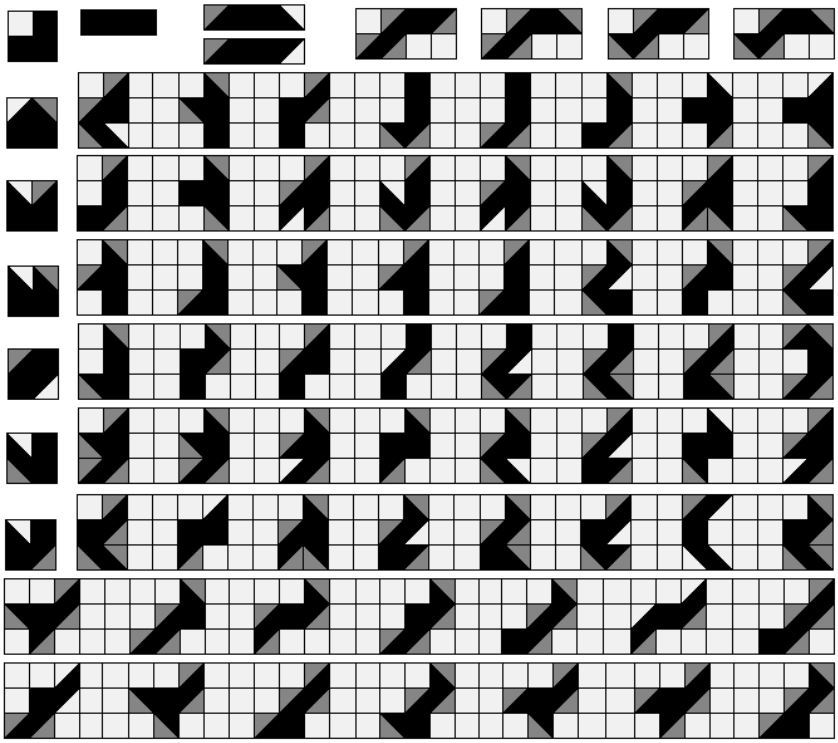


Illustration 152: Les 76 assemblages homogènes possibles contenant les 4 petites pièces (sans le triangle moyen). En grisant les points d'attache des bases, on voit que seulement 2 assemblages n'ont pas d'attache possible avec les bases et ne constituent pas des "couronnes" acceptables

point d'attache particulier. L'élément de symétrie de la couronne ne perturbe pas généralement ce dénombrement, car l'axe de symétrie n'est pas un axe de symétrie pour le côté qui s'attache. Mais pour deux couronnes au moins – l'hexagone convexe et le pentagone concave qui sont tous les deux à gauche de notre illustration – les assemblages formés avec une base ne se dédoublent pas. En comptant pour 1 ces cas particuliers et pour 2 toutes les autres couronnes (il y en a 199), cela fait 400 couronnes (2×1+199×2=400) à assembler à trois bases. On ne retourne pas les bases pour en faire cinq car on a déjà comptabilisé le retournement des couronnes, mais dans certains cas, avec la symétrie, le retournement de la base ou celui de la couronne ne dédouble pas la forme générée : il s'agit des cas illustrés sur la ligne du bas.

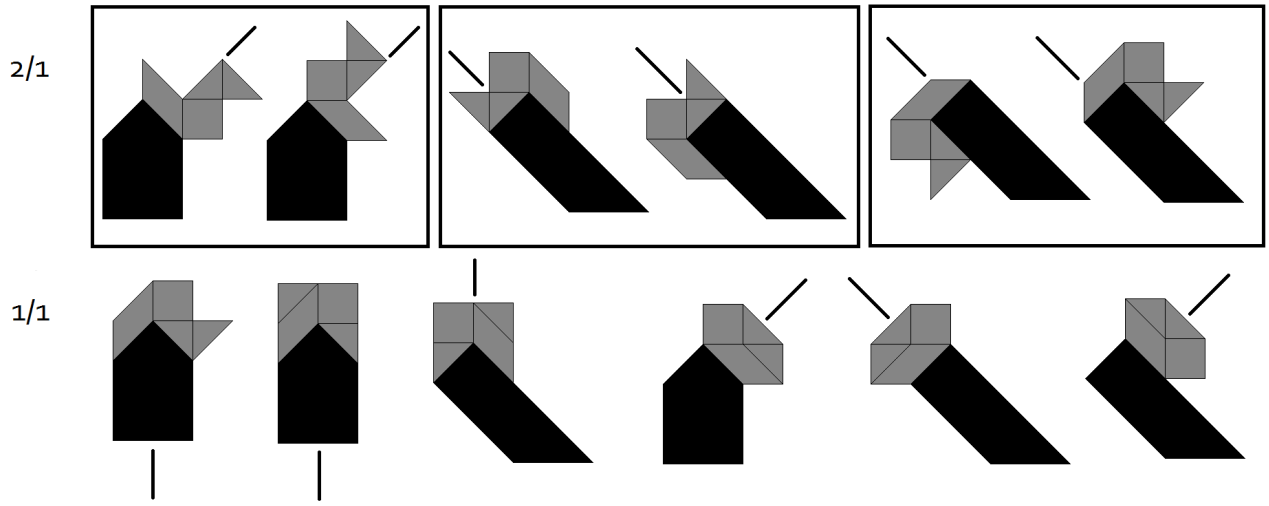


Illustration 153: Une couronne accrochée à une base par un de ses points d'attache conduit généralement à 2 tangrams simples (assemblages notés 2/1) mais dans certains cas, la symétrie réduit ce nombre à 1 comme sur la ligne du bas (assemblages notés 1/1)

Le nombre théorique de tangrams simples auquel aboutit ainsi notre réflexion est, sauf erreur, de 1 191 : (2×1+199×2)×2+(11×1+190×2)×1=800+391=1 191. À ce nombre, il faut enlever celui des formes impossibles à réaliser du fait du chevauchement de la base et de la couronne. Ces chevauchements sont difficiles à dénombrer sans examiner chaque assemblage, un par un. Le moyen le plus adapté pour se faire, sans risque d'erreur, et qui permet de vérifier (ou d'infirmer) notre dénombrement théorique est un programme. C'est ce que nous avions l'intention de faire, mais avant de débuter cette tâche difficile (le programme en question doit être spécifique à l'assemblage simple, ce qui va nécessiter une complète révision de l'un ou l'autre de nos programmes), nous voulons continuer à examiner à la main les conséquences de cette règle d'assemblage.

Les chevauchements éventuels peuvent concerner n'importe laquelle des trois bases (voir notre illustration) et peuvent empêcher la formation de 1 à quatre agrégations au moins sur les six que l'on obtient en général (2 par base avec le

retournement). Nous avons passé en revue manuellement quelques-unes des couronnes pour lesquelles se rencontrent le problème du chevauchement, et ce n'est pas forcément inimaginable de les passer toutes en revue, après tout il n'y en a que 74. Mais nous préférons nous épargner ce travail en écrivant le programme et ce, pour plusieurs raisons : tout d'abord, la recherche manuelle n'est pas simple à exécuter sans erreur, et ensuite, les erreurs sont par nature difficiles à repérer sans refaire tout le travail. Le programme n'a pas cet inconvénient, même si les erreurs y sont aussi possibles et parfois difficiles à détecter. Mais une fois corrigé, le programme donne un fichier des formes dont on pourra extraire toutes les informations utiles, à commencer par les images des formes obtenues.

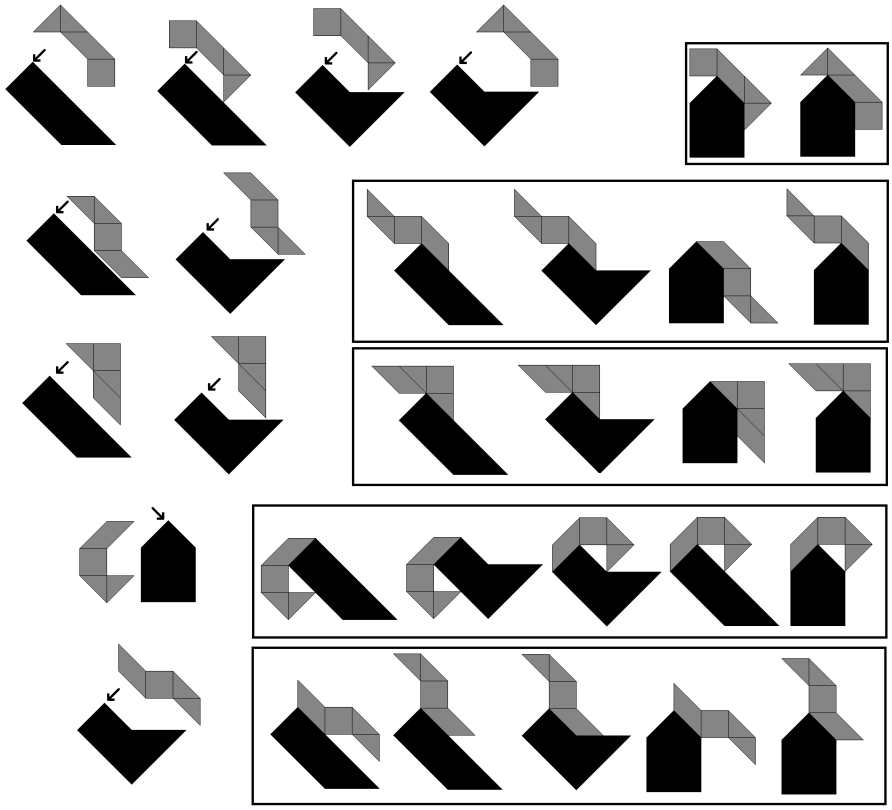


Illustration 154: À gauche, des formes simples impossibles du fait d'un chevauchement de la couronne (grisée) et de la base (noircie, la flèche indiquant le point d'attache). À droite, les formes possibles utilisant le même bord d'attache de la couronne (encadrées)

Hormis les couronnes en un seul morceau, il faut également considérer la possibilité d'accrocher une partie sur une des diagonales du triangle moyen et une autre partie sur l'autre diagonale. La couronne peut se scinder en deux si dans chaque partie, il y a une diagonale disponible pour s'accrocher à la base. Seul le carré ne peut être seul (il n'a pas de diagonale tournée vers l'extérieur pour s'accrocher de lui-même à la base), les groupes peuvent ainsi être de quatre sortes (nous notons 1:petit triangle ; 3:parallélogramme ; 4:carré) : 1-134, 14-13, 3-114 et 34-11. Les assemblages 11, 13,

14, 34, 114 et 134 sont des assemblages homogènes que nous pouvons construire facilement avec notre ancien programme. Ils ne sont pas très nombreux, mais leurs combinaisons le sont suffisamment pour qu'on ne tente pas de les dénombrer manuellement. Ceci dit, les éléments de cette analyse sont présents sur l'illustration suivante. Les assemblages 34, 14, 3 et 1 sont uniques. Face à ce groupe, nous avons trois, huit ou treize morceaux qui possèdent chacun entre 0 et trois segments d'attache (une diagonale étant déjà mobilisée de l'autre côté). Pour ne pas être comptabilisés deux fois, les couronnes bi-partites ne doivent pas fusionner en une seule. Il doit rester au moins un espace, un secteur angulaire d'au moins 45° et d'au plus 180°, entre les deux parties. Il faut aussi supprimer des combinaisons théoriques, celles qui conduisent à un chevauchement, que celui-ci soit entre la couronne et la base ou qu'il soit entre les deux parties de la couronne.

Comme le dénombrement final serait bien difficile à mener jusqu'à son terme, je préfère me fier aux résultats d'un programme. Nous devrions peut-être écrire celui-ci en partant de rien, mais nous disposons déjà de deux types de programmes qu'il est possible d'adapter : le premier construit les assemblages homogènes du jeu (la codification matricielle des carreaux exposée au chapitre 2, figure 12) et le second construit les hétérogènes (chaîne de caractères extraits de la table présentée au chapitre 9, tableau 31). La première méthode de codification a l'avantage de ne coder que les formes homogènes et les assemblages simples en font partie, dans une certaine mesure. Mais son principe examine les assemblages carreau par carreau alors qu'ici, on veut assembler des côtés pouvant s'étendre sur deux carreaux (dans le cas du Tangram au moins). Un autre problème : la notation matricielle ne conserve pas l'information sur l'emplacement des sommets des pièces. Pour ces raisons, nous ne pouvons la mettre en pratique ici

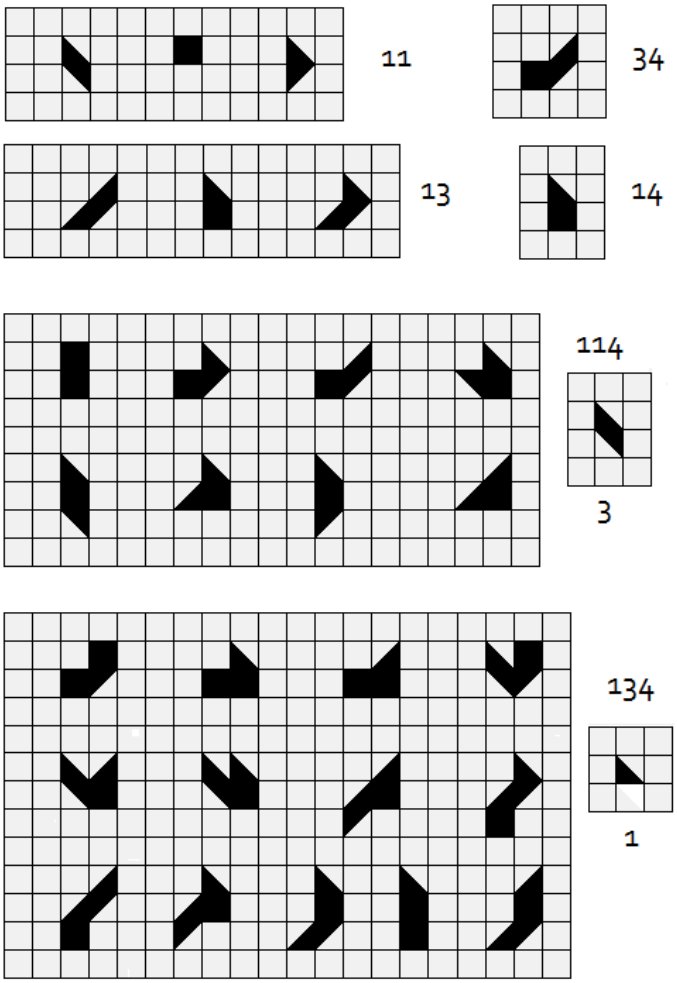


Illustration 155: Les différentes parties pouvant s'assembler indépendamment sur le triangle moyen pour constituer une couronne bi-partite

sans complexifier grandement la structure algorithmique. Nous abandonnons donc cette idée et nous tournons vers l'autre programme (celui qui conduit aux assemblages hétérogènes).

Nous devons utiliser une autre table qui code à la fois la longueur et la direction des segments, sachant que les longueurs d'un segment peuvent être égale, dans le cas du Tangram à 1, $\sqrt{2}$, 2 et $2\sqrt{2}$. Pour les assemblages hétérogènes, les longueurs de segments étaient 1 ou $\sqrt{2}$ au départ, mais au fur et à mesure des agrégations il s'ajoutait dix autres longueurs comprises entre 0 et $\sqrt{2}$. Pour les assemblages simples, nous avons davantage de longueurs de départ possibles, mais nous n'ajoutons pas d'autres longueurs, puisque tous les assemblages simples se font d'un début de segment jusqu'à une fin de segment. À cette simplification, nous pouvons aussi inclure celle apportée par le fait que les assemblages produits sont nécessairement inscriptibles dans le quadrillage. Ainsi les segments de longueur 1 ou 2 seront nécessairement orientés selon les directions du quadrillage alors que les segments de longueur $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$ seront orientés selon ses diagonales.

Une difficulté, non prévue au départ, a été de déterminer la forme canonique. Celle-ci est nécessaire pour éliminer les doublons et le programme de génération des hétérogènes n'est pas prévu pour expurger des formes identiques écrites avec des codes différents, hormis les cas répertoriés de rotation ou de symétrie des formes. Ici, nous pouvons avoir un segment d'une longueur rationnelle, disons 2, allant dans une certaine direction, disons vers l'Est (direction 0). Si nous avons deux longueurs 1 bout à bout (provenant de deux pièces ayant un côté 1), le code généré sera *AA* (voir la table de codification ci-dessous), alors que si nous avons une seule longueur 2 (provenant d'une grande pièce dotée d'un tel côté), le code généré sera uniquement *B*. Il faut pouvoir identifier de façon unique les formes (sinon on va se retrouver avec des doublons) et donc, on doit confondre, au moins à la fin du processus d'agrégation, les deux types de segments : *AA* et *B* sont un seul et même type de côté. Pour obtenir la forme canonique, nous décomposerons *B* en *AA*, et de même, tout côté long sera décomposé en segments unitaires de longueur 1 ou $\sqrt{2}$.

Nous passons sur les détails techniques de la transposition qui n'a pas été très aisée, car nous avions une procédure de gestion des alias de formes (les différentes formes d'apparition d'une pièce après rotation ou symétrie) qui ne tenait pas compte du quadrillage alors qu'ici, il nous faut utiliser uniquement les alias qui sont dans le quadrillage. Mentionnons qu'au passage, nous avons pensé aux autres jeux comparables au Tangram, qui utilisent des pièces de longueurs supérieures (Chieno-ita contient une pièce trapézoïdale dont un des côtés mesure trois unités). Nous avons par conséquent agrandi notre table (elle ne contenait que quatre longueurs au lieu de douze pour les hétérogènes) pour lui faire traiter des pièces dont un côté au moins mesure 3 ou $3\sqrt{2}$. La table utilisée pour coder nos six types de longueur et

huit directions possibles contient donc 48 caractères alors que pour la génération des tangrams simples, seize codes suffiraient (les majuscules des quatre premières colonnes).

dir./long.	1	sqrt2	2	2sqrt2	3	3sqrt2
0 (E)	A	a	B	b	C	c
1 (SE)	d	D	e	E	f	F
2 (S)	G	g	H	h	I	i
3 (SW)	j	J	k	K	l	L
4 (NE)	m	M	n	N	o	O
5 (N)	P	p	Q	q	R	r
6 (NW)	s	S	t	T	u	U
7 (W)	V	v	W	w	x	x

Tableau 63: Table d'encodage des formes simples. Pour le Tangram, les 4 premières colonnes suffisent, et si on oriente correctement les formes dans le quadrillage, les minuscules sont inutiles

Nous utilisons exclusivement les caractères en majuscules, car ils sont disposés selon le quadrillage, alors que les caractères en minuscule ne le sont pas (ils servent à détecter les alias ou les formes qui ne sont pas sur le quadrillage). Avec cette table de caractères (les directions sont celles que nous avons définies au chapitre 14, figure 130), les premiers polyabolos (les formes utilisées pour servir de pièces dans les différents jeux) sont codés : APJ (le seul monoabolo), BSJ, AMVJ, APVG (fin des diabolos), AQJG, EPSV, AGMSJ, DGMSV (fin des triabolos), BQK, CSVJ, DQSH, EPTG, DMSJ, BPWG, BPSGJ, GNSGJ, GMGMSJ, AGMSVG, GMSPJD, GMDPSJ, AGMPVJ, ADPSVG (fin des tétrabolos), etc.

Le programme me donne alors une valeur du nombre de formes simples réalisables avec le Tangram légèrement supérieure à celle communiquée par Ronald Read. Je

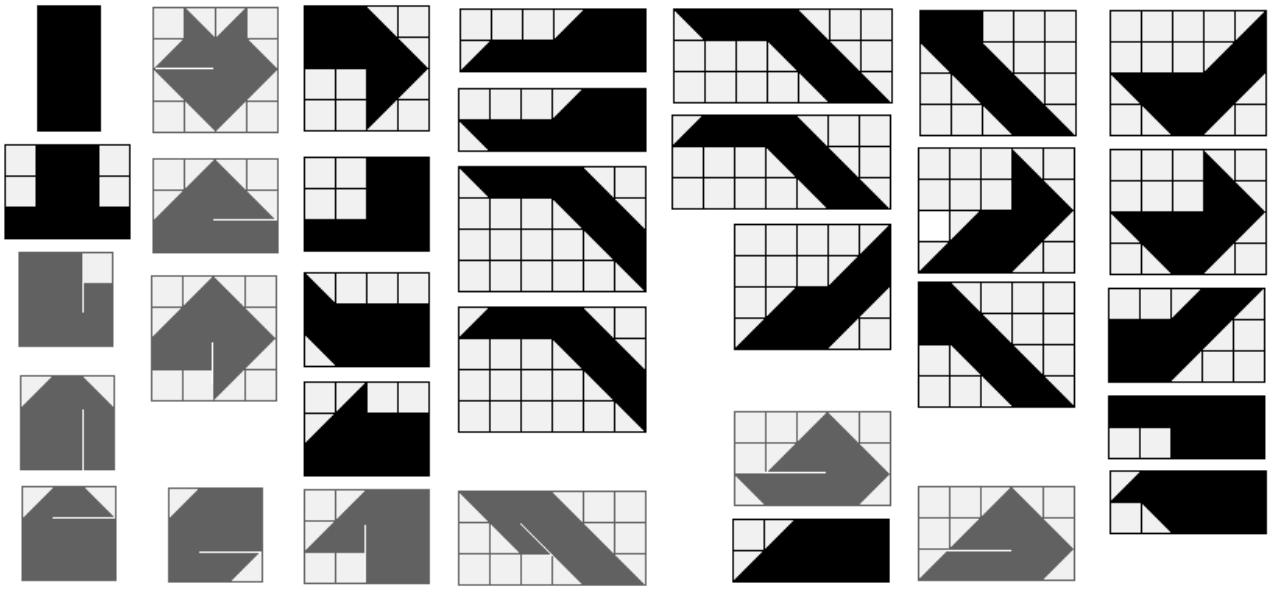


Illustration 156: Les formes simples réalisables avec le Tangram ayant un élément de symétrie, étant convexe, ou ayant un nombre de côtés inférieur ou égal à 6. Nous avons ajouté en gris, les formes qui, étant contractées (sans la rivière) ont une de ces 3 caractéristiques

cherche à déterminer si certaines formes ne sont pas aberrantes (ce qui signerait une erreur de conception) ou redondantes (une mauvaise procédure d'expurgation des doublons). Je classe les formes par nombre de côtés, les dessine, les observe sans trouver trace d'une erreur. L'illustration ci-dessus montre quelques-unes des formes obtenues : sept formes symétriques, six convexes et trente ayant au plus six côtés. Cela ne fait que 36 formes car certaines relèvent en même temps de plusieurs catégories. Le décompte des formes simples selon le nombre de côtés me montre qu'il ne peut y avoir plus de onze côtés alors que les tangrams homogènes peuvent en avoir jusqu'à 18 et les hétérogènes 23.

Je finis par comprendre qu'une partie des formes obtenues devait être éliminée car elles ne respectaient pas la règle simple (une des petites pièces était accolée sur un résidus de grand côté sans avoir de jonction simple avec le reste de la forme). À ce stade de ma réflexion, Ronald me fait part de cette remarque : pour lui, les formes simples fusionnent les côtés des pièces qui respectent la règle d'agrégation (un bord de pièce entier est mis en commun de part et d'autre), mais il peut se trouver que certains bords de pièces se trouvent en contact, sans respecter cette règle, alors que l'ensemble des pièces a été agrégé selon la règle. C'est le cas, par exemple, sur les 4ème et 5ème forme de la 1ère ligne de la figure 153 où une des petites pièces (en l'occurrence le parallélogramme ou un petit triangle) est accolée sur un côté d'un grand triangle sans respecter la règle (le côté de la petite pièce mesure $\sqrt{2}$ alors que le grand côté mesure $2\sqrt{2}$). Dans ce cas, pour Ronald, les bords en contact ne fusionnent pas vraiment : ils créent une sorte de ligne de démarcation qui subsiste à l'intérieur de la forme – une ligne que j'appèlerai *rivière* par la suite, par analogie aqueuse avec les *baies* déjà définies dans les tangrams – et cette ligne permet de distinguer certaines formes simples autrement que je ne le faisais.

J'avais trouvé sept formes symétriques, mais avec cette nouvelle perception, les *vraies* formes simples symétriques ne pouvaient être que deux. Les autres avaient quelque part à l'intérieur une rivière – une brisure – qui supprimait la symétrie de la bordure, reléguant la forme à un rang subalterne. Chose plus hérétique encore, la présence de cette blessure interne provoquait une confusion des sens : une forme que l'on aurait dit quadrilatérale se voyait en fait dotée de sept côtés ! Une autre, qui visiblement avait six côtés, se présentait dans sa « vraie » nature avec huit ou même neuf côtés ! Deux possibilités existent en effet pour cette forme qui peut avoir une rivière positionnée en deux endroits distincts, selon l'agencement interne des pièces (les deux formes du bas de la 1ère colonne, figure 156).

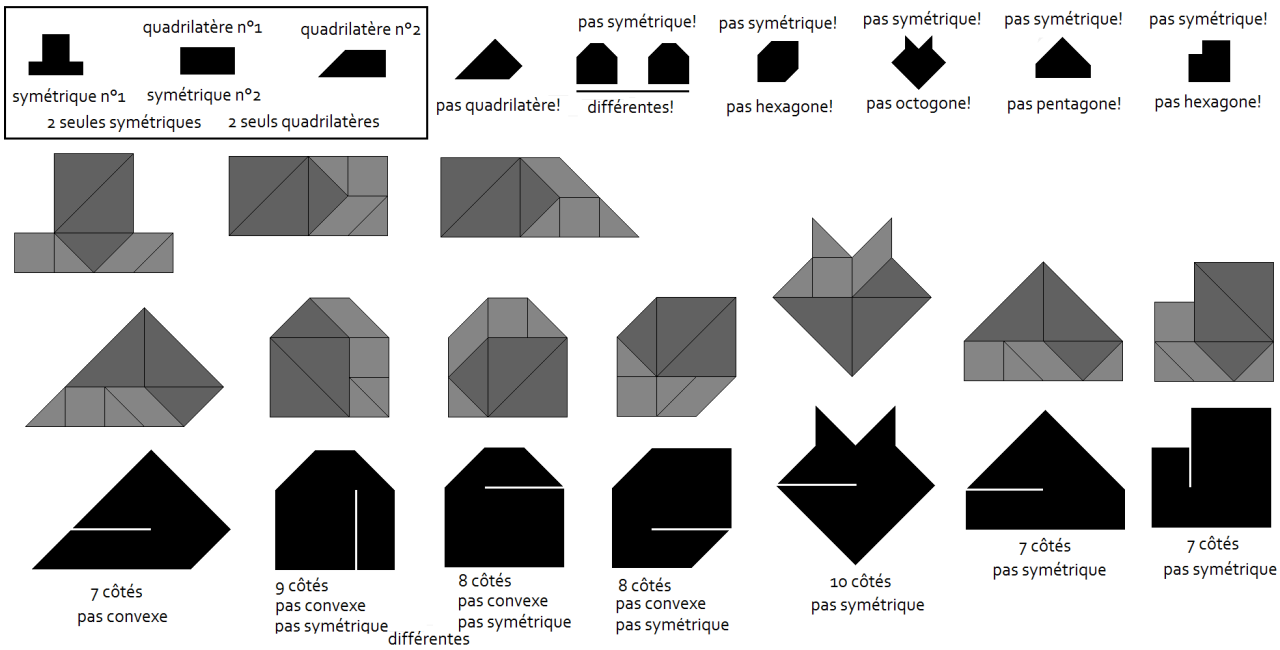


Illustration 157: Découverte des rivières, ces segments inclus dans l'intérieur de certaines formes simples et qui, pour peu qu'on leur accorde de l'importance, troublent la perception

Peu de formes simples possèdent ce type de segment intérieur et la première version de mon programme le leur avait retiré (il contractait les côtés qui fusionnent). Je ne m'intéressais alors qu'à la silhouette externe et, en un sens, je continue de penser que c'est l'élément le plus remarquable qu'il convient de conserver. Mais, comme le dit Ron, il s'agit essentiellement de s'accorder sur la définition que l'on veut avoir d'une forme simple. Je gardais pour moi la conviction qu'il ne fallait conserver que les silhouettes – ces rivières étant par essence invisibles et porteuses d'une information perturbant la perception – et me mis à lister toutes les formes simples contenant une rivière et celles en contenant deux alternativement, comme ce faux hexagone symétrique qui est tantôt octogone, tantôt ennéagone. Je me demandais combien ont une rivière de longueur 1 (un seul exemple, à droite sur ma figure 157) et combien en ont de longueur 2. Existe t-il des rivières de longueur irrationnelle, $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$? Existe t-il des formes ayant deux rivières distinctes (par exemple deux rivières de longueur 1) ?

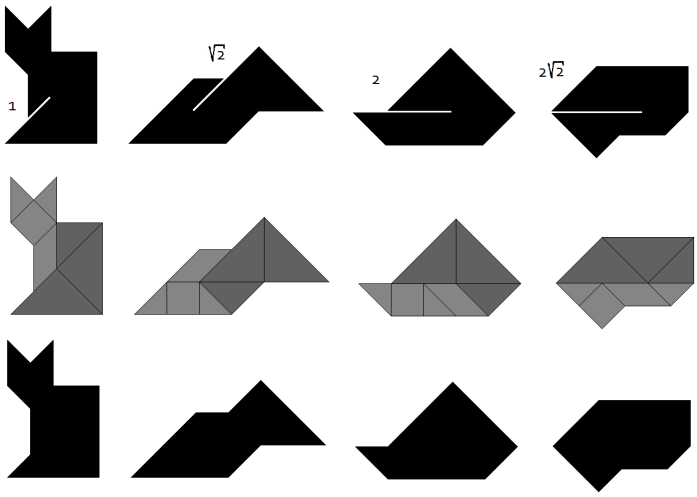


Illustration 158: Les quatre différentes sortes de rivières

Les questions d'existence ont des réponses aisées parfois, puisqu'il suffit d'exhiber un spécimen réalisant la condition. Ainsi on voit sur notre figure qu'il existe quatre longueurs de rivière différentes. Prouver qu'il n'existe aucune double rivière demande une explication différente qui distingue les cas : on examine chacune des bases et on essaie de créer des rivières sur les deux côtés du triangle moyen. À chaque fois, il faut se résigner à l'impossibilité d'une telle configuration.

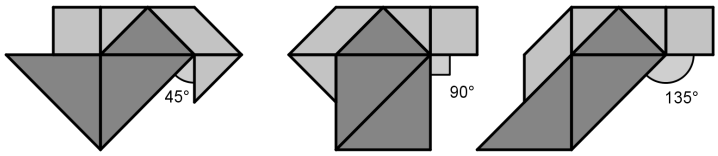


Illustration 159: Aucune des 3 bases ne permet de réaliser deux rivières, il manque toujours un secteur angulaire

Pour les questions de dénombrement, un programme spécifique doit permettre de trouver toutes les vraies formes simples (avec ou sans rivière), sans contracter les bords qui sont accolés mais non fusionnés car ne respectant pas la règle simple.

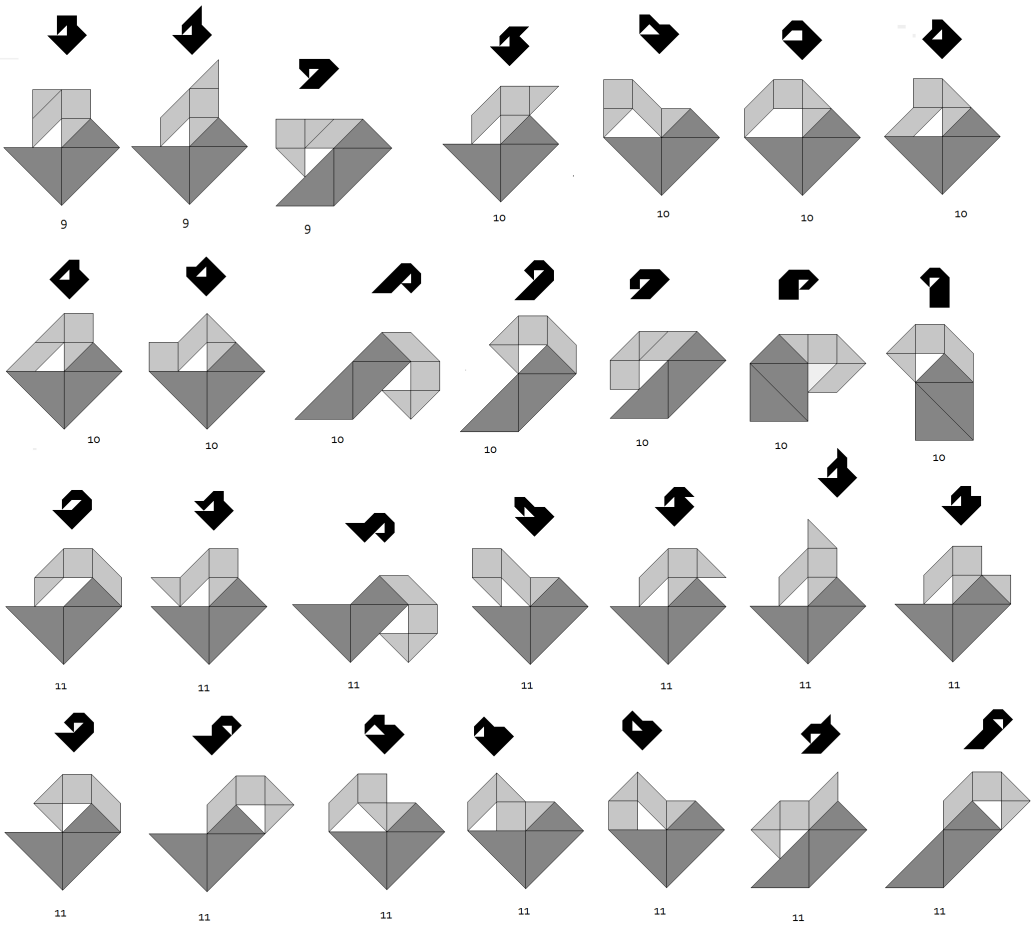


Illustration 160: Tangrams simples ayant une baie ou un lac (un vrai trou)

La mise au point de notre programme nous offre une bonne surprise : en plus de générer les rivières, celui-ci génère aussi les formes à baie et trouve même quatre formes ayant un vrai trou (Ronald propose de les rebaptiser des *lacs*, afin de

compléter le registre géographique). Pour y voir plus clair parmi les plus de deux mille formes obtenues, je détermine l'intersection des deux fichiers (celui des formes contractées et celui des non contractées). Nous trouvons alors 1 784 formes simples pleines – des plaines arides – n'ayant ni rivière, ni lac, ni baie. Les autres formes non contractées, obtenues par soustraction des fichiers, sont au nombre de 361. Lorsqu'on contracte le code des rivières pour ne garder que les silhouettes extérieures, ce nombre est réduit à 347.

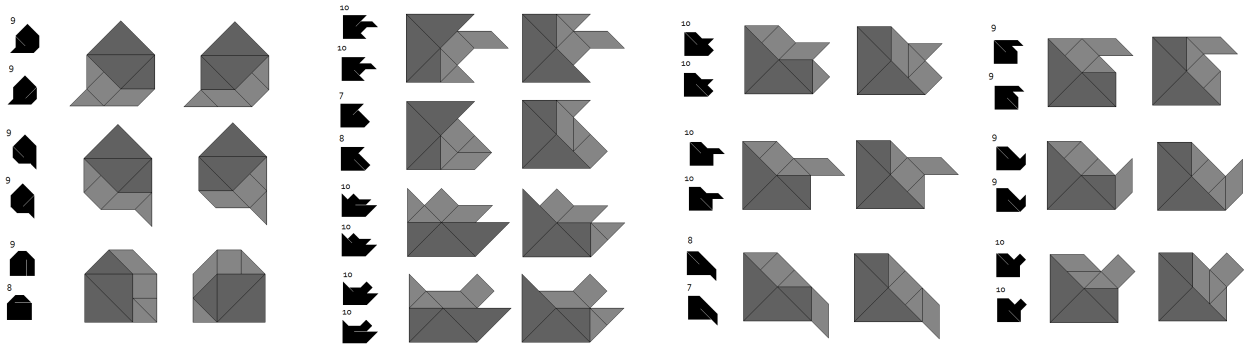


Illustration 161: Les 26 tangrams simples présents en double si on ne considère que les silhouettes externes. Un agencement différent des pièces conduit en effet, à 2 positions différentes de la rivière

Il n'y aurait ainsi que peu de formes dont la silhouette est produite en double (pas de triplet dans les tangrams simples), selon l'agencement des pièces. S'il n'y avait que des formes doublées, la différence étant de 14, on devrait trouver 28 formes (14 paires). En examinant les résultats, il y a seulement treize formes pleines en double (avec deux agencements différents des pièces conduisant à un emplacement différent de la rivière) et une forme à trou (les deux codes obtenus ne correspondent pas à deux formes différentes, car la jonction des deux parties du bord qui constitue le trou est une fusion mal prise en compte par notre codification). Le total final des formes simples est donc 2 145 dont 1 784 plaines, 333 rivières, 24 baies et 4 lacs.

côtés	4	5	6	7	8	9	10	11	total
sans rivière,baie ni trou	2	0	19	52	209	506	645	351	1 784
avec rivière,baie & trou	2	0	19	62	233	594	788	447	2 145
Rivière	0	0	0	10	24	85	132	82	333
Baie	0	0	0	0	0	3	8	13	24
Trou	0	0	0	0	0	0	3	1	4
Rivière+Baie+Trou	0	0	0	10	24	88	143	96	361

Tableau 64: Répartition des formes simples selon le nombre de côtés et le type (pleine/rivière/baie/trou)

Quelques répartitions des formes permettent de mieux connaître ce modeste ensemble remarquable de formes homogènes : les tableaux nous montrent qu'il n'y a que sept nombres de côtés possibles (4 et 6 à 11), la catégorie la mieux

représentée étant celle des décagones (37% des formes simples). La partie rationnelle du périmètre ne peut prendre que quatre valeurs (6, 8, 10 et 12), la valeur la plus fréquente comportant six segments rationnels.

côtés	4	5	6	7	8	9	10	11	total
avec rivière,baie&trou	2	0	19	62	233	595	788	446	2 145
Rat=6	0	0	6	20	90	274	386	241	1 017
Rat=8	0	0	6	25	73	183	236	113	636
Rat=10	1	0	3	8	30	71	112	81	306
Rat=12	1	0	2	8	36	67	53	11	178
Rat=14	0	0	2	1	4	0	1	0	8
total	2	0	19	62	233	595	788	446	2 145

Tableau 65: Répartition des formes simples selon le nombre de côtés et la part rationnelle du périmètre

Les agrégats simples et pleins (les formes pleines sont homogènes) ne représentent que 0.04% des formes homogènes pleines, soit une forme pleine simple pour 2 500 homogènes. Plus le nombre de côtés augmente et moins on a de chance de trouver une forme simple parmi les formes homogènes. Un quadrilatère sur trois est simple, mais aucun pentagone ne l'est. Un dixième des hexagones, un vingtième des heptagones, etc. (voir le tableau 66). Curieusement, aucun pentagone n'est simple.

côtés	4	5	6	7	8	9	10	11	total
simples	2	0	19	52	209	506	645	351	1784
% simples/homos	33%	0%	9.5%	4.2%	3.3%	1.9%	0.71%	0.14%	0.04%
homogènes	6	22	200	1 245	6 392	27 113	90 860	247 255	4 842 205

Tableau 66: Répartition des tangrams simples pleins selon le nombre de côtés

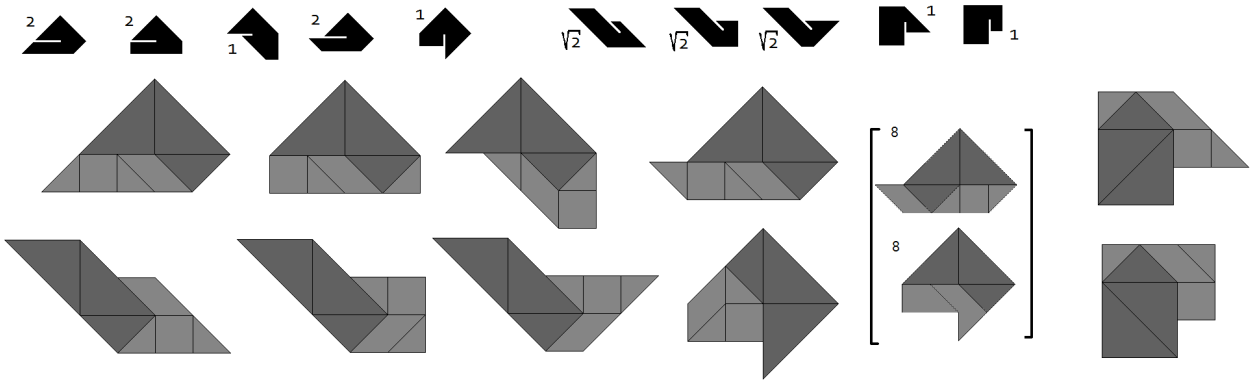


Illustration 162: Les dix rivières heptagonales. Nous avons mis entre crochets les 2 silhouettes identiques aux rivières situées à leur gauche, car du fait de l'agencement des pièces, la rivière est disposée autrement et la forme a finalement 8 côtés (et non 7)

<u>Question 16</u> : Les tangrams simples sont nés de l'idée de Ronald Read de trouver un ensemble intermédiaire entre celui des formes convexes qui contient treize formes et celui, beaucoup plus grand, des formes homogènes qui en contient 5 583 516 (4 842 205 si on ne considère que les formes pleines). Il a trouvé la règle

d'assemblage la plus simple que l'on puisse imaginer avec les pièces du jeu. Cela nous a conduit à imaginer une autre règle d'assemblage, plus naturelle que toutes les autres précédemment définies : assemblons les pièces par des côtés qui se correspondent car de même nature (longueurs 1 et 1, 2 et 2, 1 et 2, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$). Cela ne diffère pas des assemblages homogènes, sauf que nous voulons assembler les pièces en faisant coïncider uniquement les sommets. Oublions les sept points de référence du Tangram qui ne sont pas des sommets : le milieu de l'hypoténuse du triangle moyen et les milieux des côtés des grands triangles. Il nous reste vingt-trois sommets pour servir de points d'assemblage. Avec cette règle, nous allons générer les *tangrams naturels*, un sous-ensemble des formes homogènes qui contient nécessairement toutes les formes simples contractées (sans rivière). Mais combien de tangrams naturels y a t-il ? On peut se limiter aux formes pleines, mais il en existe à baie et à trou, bien évidemment. Notre image nous montre quelques formes homogènes naturelles (sur les côtés) et d'autres qui ne sont pas naturelles (encadrées au centre, elles nécessitent l'usage d'un des points de référence additionnels que l'on se refuse pour les formes naturelles). Ces formes non naturelles ne sont pas réalisables sans les points de référence situés au milieu des grands côtés. La partition des formes homogènes entre formes naturelles et non-naturelles est intrigante : quelle fraction des tangrams homogène est naturelle ? Les formes non-naturelles ont-elles des caractéristiques fondamentalement différentes des naturelles (périmètre, convexité) ?

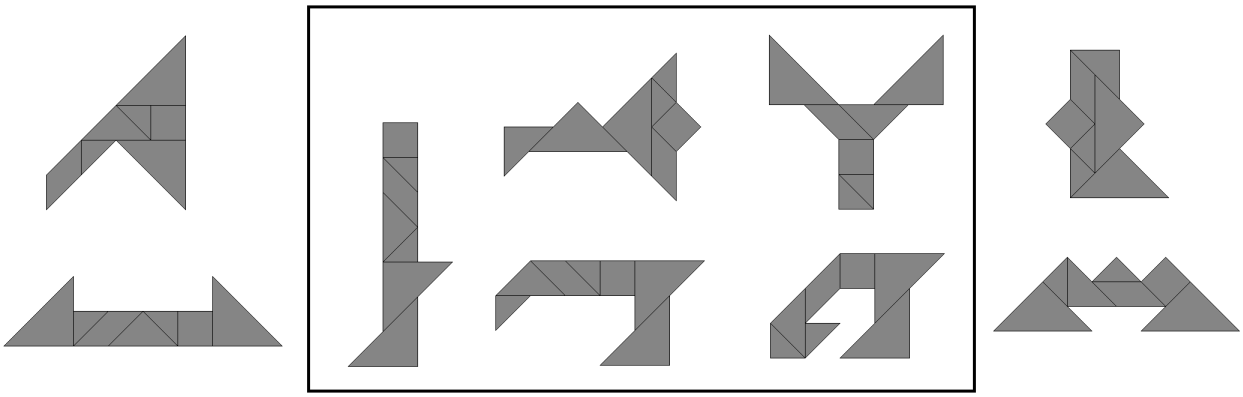


Illustration 163: Exemples de tangrams naturels (à gauche et à droite) et, encadrées, des formes qui ne sont pas naturelles à cause d'un assemblage qui se fait par les milieux de grands côtés

Chapitre 17 : Diamètres

Une caractéristique intéressante d'un tangram est fournie par le plus petit cercle le contenant. Notre recherche de l'ensemble des diamètres possibles pour les formes homogènes et hétérogènes nous révèle des valeurs étonnamment variées

Parmi les caractéristiques attachées aux tangrams, nombreuses sont celles qui tentent de mesurer la compacité des formes. Les écarts à la convexité – qu'ils soient mesurés sur le quadrillage ou réellement, ou encore par la dimension du rectangle (voir chapitre 8) – constituent une première approche. Les longueurs des périmètres – qu'elles soient mesurés réellement ou estimées par le nombre des segments constitutifs du bord (chapitres 7 et 8) – en constituent une seconde. On peut aussi évaluer la compacité d'une forme en mesurant le diamètre du plus petit cercle qui contient la forme, car plus ce diamètre sera petit, plus la forme se rapprochera d'un disque qui est la forme géométrique la plus compacte.

Le rapport entre le périmètre d'un cercle de rayon R et son aire vaut $\frac{2\pi R}{\pi R^2}=\frac{2}{R}$. Si l'aire du cercle est de huit unités (c'est l'aire des tangrams), son rayon vaut $\sqrt{\frac{8}{\pi}}\approx 1.5958$ unités et le rapport périmètre/aire vaut alors $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 1.2533$. Nous ne pouvons bien sûr pas atteindre cette valeur extrême du rapport périmètre/aire en prenant le périmètre du plus petit cercle qui contient un tangram (l'aire étant fixée à huit). Le tangram carré, par exemple, s'inscrit dans un cercle de rayon 2 (voir figure). Le périmètre du cercle circonscrit vaut alors 4π et le rapport est, dans ce cas, égal à $\frac{\pi}{2}\approx 1.5708$. Le tangram convexe qui a le plus grand cercle circonscrit[9] est le

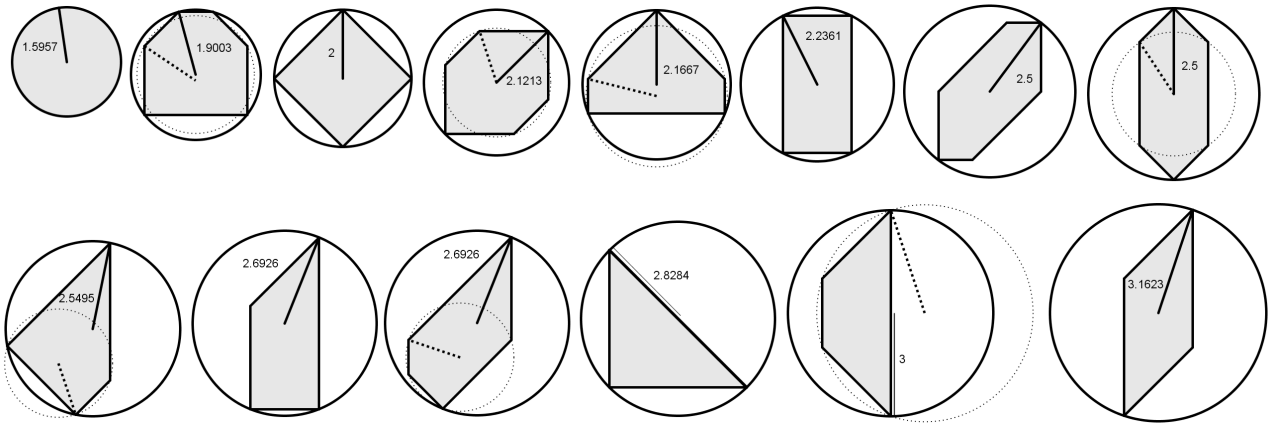


Illustration 164: Les 13 tangrams convexes et les plus petits cercles les contenant. Le disque en haut à gauche est la forme compacte extrême dont l'aire égale celle des tangrams

9 Nous utilisons l'expression *cercle circonscrit* à un Tangram alors qu'il faudrait continuer à dire *plus petit cercle contenant* le Tangram. Un cercle est rigoureusement circonscrit à un polygone s'il passe par tous ses sommets, ce que nous n'exigeons pas pour nos cercles.

parallélogramme (en bas à droite de la figure). Son rayon est $\sqrt{10} \approx 3.1623$ et dans ce cas, le rapport périmètre/aire atteint la valeur approximative de 2.4836, soit presque le double du rapport minimal. Ainsi, plus le rayon (ou le diamètre) du cercle circonscrit au tangram sera grand, plus la forme sera éloignée du cercle minimal, plus le rapport périmètre/aire sera grand et moins le tangram sera compact. La détermination du rayon des cercles circonscrits aux tangrams permet ainsi d'accéder à une autre mesure de la compacité. Par la suite, nous mesurerons des diamètres. Le diamètre d'un tangram sera ainsi, forcément supérieur à $2 \times \sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 3.1915$.

Les questions que nous nous posons à l'égard des cercles circonscrits aux tangrams sont nombreuses : combien de valeurs différentes, quelle valeur maximale, sous quelle forme s'expriment les diamètres, combien de sommets du tangrams se retrouvent au maximum sur ce cercle ? Autant de questions et une forme de joie d'introduire ici d'autres formes géométriques que celles des polygones : dans cet univers anguleux dominé par l'angle droit, planent enfin des cercles aux contours si purs qu'ils sont tous semblables. Un seul nombre en détermine la taille, son diamètre. Pour illustrer notre engagement dans cette nouvelle quête et nous faire la main, nous avons tracé figure 164 le cercle circonscrit de chacun des treize tangrams convexes, déterminé la valeur du rayon et rangé les formes selon l'ordre croissant. On vérifie que le carré est une forme très compacte mais le tangram le plus compact est l'hexagone (un carré de côté 3 coupé à deux sommets) : son rayon vaut approximativement 1.9 unités. L'expression exacte du diamètre est étonnamment compliquée : $\frac{\sqrt{130}}{3}$. On avait déjà remarqué que cette forme avait la plus petite valeur du périmètre réel : $8+2\sqrt{2} \approx 10.83$ (celui du carré vaut $8\sqrt{2} \approx 11.31$) ; ainsi, elle confirme sa plus grand compacité. Nous constatons, de plus, que pour ces treize cercles, nous obtenons onze valeurs différentes du rayon ! Seulement deux paires de formes convexes partagent une même valeur (l'une a pour rayon 2.5 et l'autre 2.6926), ce qui peut laisser à penser qu'il va y avoir beaucoup de valeurs différentes pour les collections plus vastes que ce modeste ensemble des formes convexes.

Si l'on examine maintenant combien de sommets appartiennent au cercle circonscrit, on trouve trois valeurs : 2 (pour six formes), 3 (pour quatre formes) et 4 (pour trois formes). On peut remarquer que lorsqu'il n'y a que deux sommets sur le cercle, ceux-ci sont diamétralement opposés. Parmi les formes ayant trois et quatre points sur le cercle, il y a aussi des formes contenant des sommets diamétralement opposés, il y en a même une majorité (5 sur 7). Il n'y a que deux formes pour lesquelles on ne peut pas trouver ainsi deux points diamétralement opposés :

l'hexagone minimal et le pentagone symétrique (son diamètre exact est $\frac{13}{3}$). La détermination du rayon du cercle est alors plus ardue : il faut prendre deux médiatrices d'un triplet de trois sommets situés sur le cercle, déterminer les coordonnées du centre du cercle à l'intersection de ces droites, et puis enfin calculer la distance entre ce point et l'un des trois sommets. Notre figure 165 montre cette méthode qu'un élève de fin de collège devrait pouvoir mettre en œuvre sans difficulté.

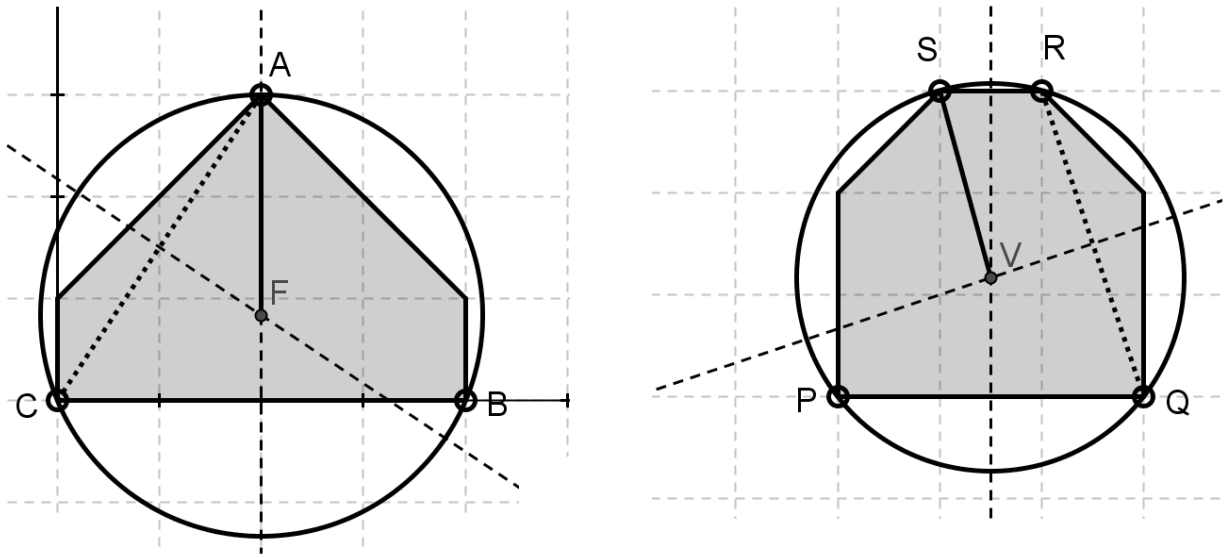


Illustration 165: En tiretets, les médiatrices de 2 segments joignant des sommets situés sur le cercle circonscrit qui permettent de déterminer les coordonnées du centre de celui-ci, et le rayon

Pour la première de ces figures par exemple, nous avons tracé les médiatrices des segments [*AC*] et [*BC*]. Dans un repère lié au quadrillage sous-jacent, les coordonnées des points *A*, *B* et *C* pouvant être *A*(2;3), *B*(4;0) et *C*(0;0), les équations des médiatrices s'en déduisent : *x*=2 pour la médiatrice de [*BC*] et $y=\frac{-2}{3}x+\frac{13}{6}$ pour la médiatrice de [*AC*]. Il suffit donc de remplacer par 2 la valeur de *x* dans la dernière équation pour trouver l'ordonnée du centre : $y=\frac{-4}{3}+\frac{13}{6}=\frac{5}{6}$. Le rayon du cercle se calcule à l'aide de la formule de Pythagore : $R^2=FC^2=(2)^2+(\frac{5}{6})^2=\frac{169}{36}$, et donc $R=\sqrt{\frac{169}{36}}=\frac{13}{6}\approx 2.1667$. Cela peut paraître étrange d'obtenir une valeur rationnelle dans ce contexte où la présence d'un radical indiquerait plutôt une valeur irrationnelle comme $\sqrt{2}$ (un nombre dont les décimales ne suivent pas un schéma régulier). Le 13 obtenu au numérateur provient de l'égalité pythagoricienne $12^2+5^2=13^2$. S'agit-il là d'une configuration exceptionnelle ou bien d'une généralité ? La détermination du rayon de la deuxième figure qui n'a pas deux points diamétralement opposés (l'hexagone minimal) montre que la forme standard conserve le radical, au moins au numérateur. Avec le mode opératoire

précédent, qui passe par la détermination des coordonnées de l'intersection *V* des médiatrices de [*RS*] et [*RQ*], on est conduit à la valeur irrationnelle déjà mentionnée $R=\frac{\sqrt{130}}{6}\approx 1.9003$. Il faut donc s'attendre aux deux types de nombres et l'écriture standard comportera un radical, au moins au numérateur. Dans le cas d'un rayon rationnel comme $\frac{13}{6}$ (mais il y a aussi 2, 2.5 et 3 comme on le voit sur la figure précédente), on peut toujours l'écrire sous la forme utilisant un radical ($\frac{13}{6}=\frac{\sqrt{169}}{6}$) alors que l'inverse n'est pas vraie. Le tableau ci-dessous donne les valeurs exactes des onze rayons. On y remarque sept valeurs irrationnelles, soit une petite majorité.

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Rayon	$\frac{\sqrt{130}}{6}$	2	$1.5\sqrt{2}$	$\frac{13}{6}$	$\sqrt{5}$	2.5	$0.5\sqrt{26}$	$0.5\sqrt{29}$	$2\sqrt{2}$	3	$\sqrt{10}$
Approx.	1.9003	2	2.1213	2.1667	2.2361	2.5	2.5495	2.6926	2.8284	3	3.1623

Par la suite, pour unifier les notations des diamètres, nous les ramènerons toujours à la forme $\frac{\sqrt{A}}{B}$ où *A* et *B* sont des entiers. Nos programmes doivent en effet, pour comparer les valeurs irrationnelles entre elles de façon exacte, travailler avec des nombres entiers. Il se trouve que, pour les tangrams homogènes au moins, les différentes valeurs des diamètres peuvent toujours s'écrire de cette façon. Les valeurs obtenues pour les formes convexes sont plus simples ainsi et on remarque que celles qui ont un dénominateur *B* différent de 1 sont aussi celles qui ont été obtenues par la méthode des médiatrices. Le fait d'avoir deux points diamétralement opposés simplifie l'expression du diamètre car les sommets opposés sont nécessairement situés sur le quadrillage et ils ont, pour cette raison, des coordonnées entières. Le carré de la distance qui les sépare est alors aussi, nécessairement, un entier.

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Diamètre	$\frac{\sqrt{130}}{3}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{18}$	$\frac{\sqrt{169}}{3}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{40}$
Approx.	3.80	4	4.24	4.33	4.47	5	5.10	5.39	5.66	6	6.32

Cette première approche nous a mis sur la voie d'un travail de plus grande ampleur. La collection des tangrams homogènes est assez conséquente (cinq millions de formes) mais les assemblages homogènes conduisant à des sommets toujours sur le quadrillage – des points aux coordonnées entières – la méthode simple décrite pour les formes convexes est applicable sans modification. Nous allons juste, dans les cas où deux points ne seraient pas diamétralement opposés, développer suffisamment les calculs conduisant aux coordonnées du centre du cercle pour que

l'algorithme aboutisse dans tous les cas. La première chose à faire est donc de déterminer si le plus grand des segments joignant deux sommets de l'enveloppe convexe peut être un diamètre du cercle circonscrit : si son milieu peut être le centre du cercle. Dans l'affirmative, le diamètre cherché est la distance entre les deux points constituant ce diamètre (on calcule le carré du diamètre car c'est un entier). Dans la foulée, on détermine le nombre de points situés sur le cercle : il y en a au moins deux et au mieux dix pour les tangrams homogènes qui peuvent avoir des enveloppes convexes décagonales. On verra dans la suite que le maximum de sommets sur le cercle n'est pas dix mais huit seulement.

Dans un deuxième temps, pour les formes n'ayant pas deux points diamétralement opposés, on doit examiner tous les triplets de sommets de l'enveloppe convexe. Pour chacun de ces triplets, on détermine les coordonnées de l'intersection de deux médiatrices (en vérifiant qu'elles ne sont pas parallèles) et on examine si le cercle dont le centre est ce point peut contenir les autres points de l'enveloppe convexe. Si c'est le cas, on garde en mémoire le diamètre obtenu car il faudra ensuite choisir, parmi les cercles possibles, celui qui a le plus petit diamètre. Notre première figure montre en pointillés des cercles ne convenant pas, soit parce qu'ils ne contiennent pas tous les points (il en est ainsi pour les six premiers cercles en pointillés), soit parce qu'il en existe un plus petit qui convienne mieux (le seul exemple donné ici est le trapèze isocèle de diamètre 6 : le cercle tracé en pointillé passe par les quatre sommets, mais son diamètre est plus grand que celui du cercle circonscrit puisqu'il mesure $2\sqrt{10}\approx 6{,}3246$). Afin de mieux faire comprendre la difficulté pour travailler avec des entiers, donnons quelques formules utilisées ici : les coordonnées du point d'intersection des médiatrices de [*AB*] et [*AC*] se calculent dans le cas où le nombre $D=(x_A-x_B)(y_A-y_C)-(x_A-x_C)(y_A-y_B)$ n'est pas nul. En appelant Ω le point d'intersection cherché, on a alors :

$$x_\Omega=\frac{(y_A-y_C)(x_A^2+y_A^2-x_B^2-y_B^2)-(y_A-y_B)(x_A^2+y_A^2-x_C^2-y_C^2)}{2D} \text{ et } y_\Omega=\frac{(x_A-x_B)(x_A^2+y_A^2-x_C^2-y_C^2)-(x_A-x_C)(x_A^2+y_A^2-x_B^2-y_B^2)}{2D}$$

Diam 2pts	Diam 3pts	Non diam 3pts	Diam 4pts	Non diam 4pts	Diam 5pts	Diam 6pts	Diam 7pts	Diam 8pts
1 620 008	1 046 259	1 649 644	301 092	104 596	94 648	23 332	2 607	19
2Pts	3Pts		4Pts		5Pts	6Pts	7Pts	8Pts
1 620 008	2 695 903		405 688		94 648	23 332	2 607	19
diam				non diam				
3 087 965				1 754 240				
Total								
4 842 205								

Tableau 67: Répartition des tangrams homogènes pleins selon le nombre de points (pts) situés sur le cercle circonscrit (l'abréviation Diam signifie qu'il existe deux points diamétralement opposés)

Pour éviter d'avoir à utiliser des fractions, nous manipulons les nombres $Dx_\Omega = 2D\,x_\Omega$ et $Dy_\Omega = 2D\,y_\Omega$ qui sont des entiers, pour calculer les distances des autres points de l'enveloppe avec ce point Ω. Pour savoir si la distance entre un de ces sommets S et le point Ω est plus petite, égale ou plus grande que le rayon présumé (la distance $A\Omega$), nous déterminons le signe de l'expression E :

$$E = (2D\,x_S - Dx_\Omega)^2 + (2D\,y_S - Dy_\Omega)^2 - ((2D\,x_A - Dx_\Omega)^2 + (2D\,y_A - Dy_\Omega)^2)\,.$$

Notre formule finale pour le diamètre est $\sqrt{(2D\,x_A - Dx_\Omega)^2 + (2D\,y_A - Dy_\Omega)^2}$ divisé par $|D|$. Nous enregistrons cette caractéristique pour toutes les formes homogènes et, en même temps, nous enregistrons le nombre de points de l'enveloppe trouvés sur le cercle. Notre algorithme distinguant naturellement les tangrams ayant deux points diamétralement opposés et ceux qui n'en ont pas, nous enregistrons séparément ces deux catégories de formes (notées Diam et Non-diam). Les résultats sont synthétisés dans le tableau 67.

La première surprise que nous réserve cette étude est la répartition équilibrée en trois parties des tangrams homogènes pleins : les formes qui ont deux points diamétralement opposés sont 3 087 365, dont près de la moitié (1 620 008) ont juste ces deux points sur le cercle tandis que l'autre partie en a entre 3 et 8 (1 467 957). Un troisième groupe, représentant environ le tiers de l'ensemble (1 754 240), n'a pas de sommets diamétralement opposés (les deux formes convexes étudiées en font partie). Ce dernier groupe est le plus varié en terme de diamètres mais pour le nombre des points sur le cercle, il y a très peu de diversité : presque tous en ont trois

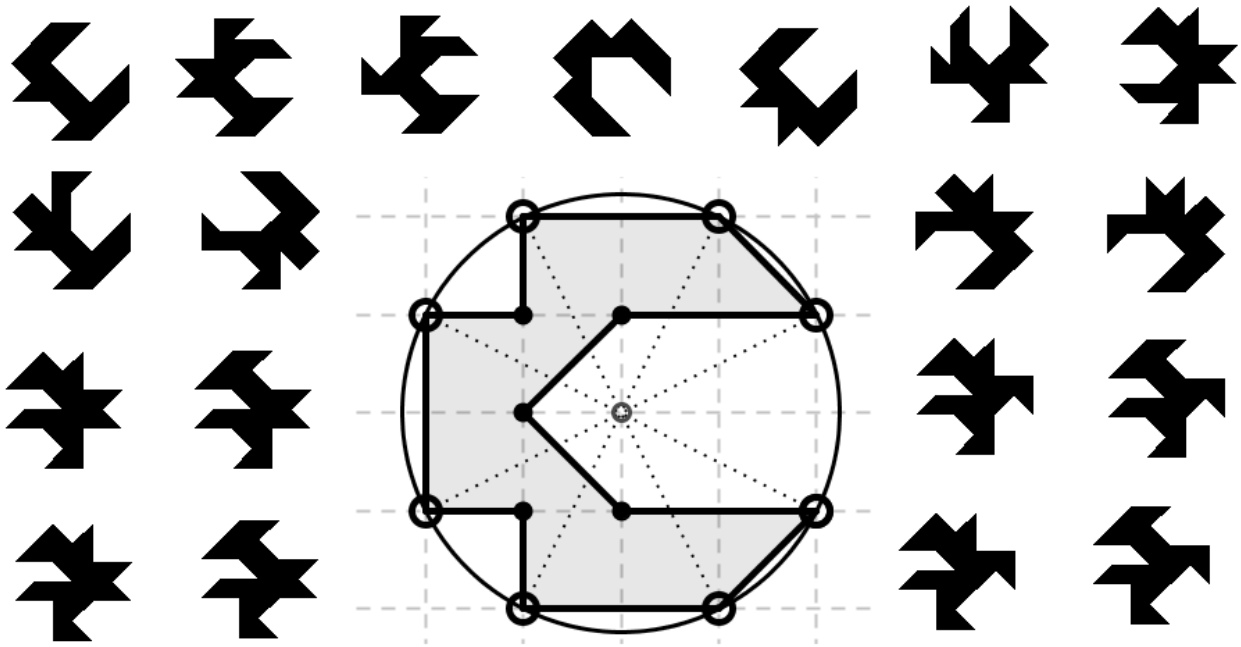


Illustration 166: Les 19 tangrams homogènes pleins qui ont un cercle circonscrit contenant 8 sommets ont tous la même enveloppe convexe octogonale symétrique de diamètre $\sqrt{20}$ unités

(1 649 644), les autres en ont quatre (104 596).

Les formes ayant huit sommets sur le cercle sont rares. Il n'y en a que 19, et toutes ont le même diamètre $\sqrt{20}=2\sqrt{5}\approx 4.4721$ qui est aussi le diamètre du tangram rectangulaire. Ces formes ont la même enveloppe convexe : un octogone ayant quatre axes de symétrie (comme le carré) et une aire de quatorze unités (28 triangles). Les convexités réelle et sur quadrillage de ces tangrams sont égales à douze triangles. L'agencement des pièces du Tangram dans cette enveloppe est limité par l'encombrement des pièces ce qui conduit au petit nombre des possibilités parmi lesquelles se distinguent tout de même deux formes symétriques. On peut observer que douze de ces formes ont dix segments rationnels et huit segments irrationnels (Rat=10, Irr=8, le périmètre réel vaut environ 21.31), les autres se répartissent en deux groupes : Rat=14, Irr=4 (trois formes dont les deux symétriques, le périmètre est 19.66) et Rat=12, Irr=6 (quatre formes de périmètre 20.49). Si l'on en juge la valeur du périmètre, les trois formes de périmètre 19.66 sont les plus compactes de toutes. Cette compacité périmétrique traduisant une meilleure dissimulation des bords des pièces à l'intérieur de la forme.

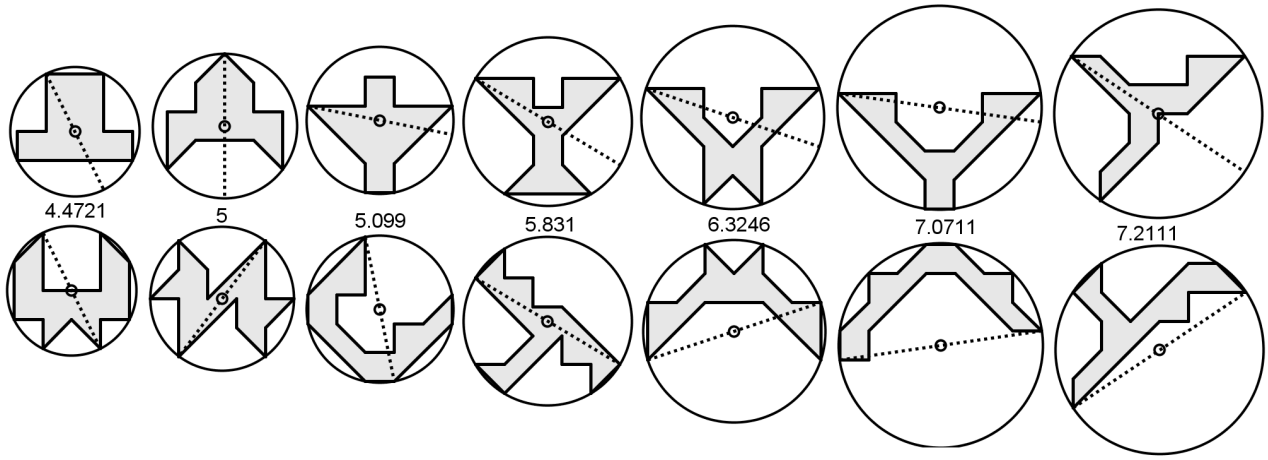


Tableau 68: Exemples de tangrams pour les 7 diamètres communs aux formes Diam (en bas) et Non-diam (en haut). Pour les formes Diam, les exemples montre le maximum de sommets sur le cercle

Les diamètres des formes ayant deux points diamétralement opposés (notées Diam) sont les plus simples et les moins diversifiés. Il n'y a que 29 valeurs différentes du diamètre pour cet ensemble très vaste qui regroupe 64% des tangrams homogènes pleins. Les autres formes – celles qui n'ont pas de points diamétralement opposés (notées Non-diam) – ont des diamètres comparativement plus diversifiés puisqu'il y a 108 valeurs distinctes. Très peu de valeurs sont communes à ces deux catégories (seulement 7), mais elles sont assez fréquentes puisqu'elles caractérisent 34% de l'ensemble (1 650 465 formes). Les formes Non-diam ne parviennent que peu à constituer ces valeurs communes du diamètre

(47 816 au total, soit 3% des formes Non-diam) qui sont beaucoup plus caractéristiques de la classe des formes Diam (1 602 649 au total, soit 52% des formes Diam, parmi lesquels les deux classes les plus abondantes des diamètres 5.83 et 6.32). Ces valeurs de diamètres communs sont, arrondies au centième et dans l'ordre : 4.47, 5, 5.10, 5.83, 6.32, 7.07 et 7.21. Nous avons rencontré les valeurs 4.47 et 6.32 avec les formes convexes mais les cinq autres sont originales. Le tableau ci-dessous donne les valeurs exactes et les effectifs des différentes catégories (Diam/Non-diam).

Approx.	4.47	5	5.10	5.83	6.32	7.07	7.21
Exact	$\sqrt{20}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{52}$
Non-diam	902	6 654	12 208	19 830	6 634	1 585	3
Diam	52 776	74 798	191 757	524 094	432 476	167 216	159 532

Sur les 29 diamètres des tangrams ayant deux points diamétralement opposés, lorsqu'on enlève les valeurs communes déjà citées, il en reste 22 qui n'appartiennent qu'à ces seules formes (21 si on enlève encore la valeur 4 qui est le diamètre du seul carré). Les 29 valeurs s'échelonnent régulièrement entre 4 et 9.43, en voici les écritures exactes :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4 $\sqrt{16}$	4.12 $\sqrt{17}$	4.24 $\sqrt{18}$	4.47 $\sqrt{20}$	5 $\sqrt{25}$	5.10 $\sqrt{26}$	5.39 $\sqrt{29}$	5.66 $\sqrt{32}$	5.83 $\sqrt{34}$
10	6 $\sqrt{36}$	6.08 $\sqrt{37}$	6.32 $\sqrt{40}$	6.40 $\sqrt{41}$	6.71 $\sqrt{45}$	7 $\sqrt{49}$	7.07 $\sqrt{50}$	7.21 $\sqrt{52}$	7.28 $\sqrt{53}$	7.62 $\sqrt{58}$
20	7.81 $\sqrt{61}$	8 $\sqrt{64}$	8.06 $\sqrt{65}$	8.25 $\sqrt{68}$	8.49 $\sqrt{72}$	8.54 $\sqrt{73}$	8.60 $\sqrt{74}$	8.94 $\sqrt{80}$	9.22 $\sqrt{85}$	9.43 $\sqrt{89}$

Tableau 69: Les 29 diamètres des tangrams homogènes pleines ayant deux points diamétralement opposés (en gris, les valeurs commune à l'autre catégorie)

Ces valeurs ont toutes en commun de s'écrire comme une racine carrée de nombre entier. Les nombres entiers qui apparaissent sont assez souvent des nombres premiers (17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89) ; parfois ce sont des carrés parfaits qui conduisent à un diamètre entier (16, 25, 36, 49, 64). En m'attardant un peu sur ses nombres, je remarque que les nombres premiers obtenus sont tous des valeurs

supérieures d'un triplet pythagoricien primitif. Un triplet d'entiers (a, b, c) est dit pythagoricien primitif si l'égalité $a^2+b^2=c^2$ est vérifiée, les entiers a, b et c étant premiers entre eux (sans diviseur commun). On a ainsi $8^2+15^2=17^2$, $20^2+21^2=29^2$, $12^2+35^2=37^2$, $9^2+40^2=41^2$, $28^2+45^2=53^2$, $11^2+60^2=61^2$, $48^2+55^2=73^2$ et $39^2+80^2=89^2$. Les autres triplets primitifs ayant une valeur supérieure plus petite que 89 sont donnés par les égalités $3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$, $7^2+24^2=25^2$, $16^2+63^2=33^2+56^2=65^2$, $13^2+84^2=36^2+77^2=85^2$. Les deux premiers triplets ne conviennent pas, car les valeurs correspondantes du diamètre seraient trop petites : il faudrait que 5 et 13 soient les carrés des diamètres, or ceux-ci ne peuvent mesurer ni $\sqrt{5}\approx 2.24$ ni $\sqrt{13}\approx 3.61$ qui sont inférieures à 3.80, la plus petite valeur du diamètre). Il se trouve, par contre, que toutes les autres valeurs figurent au palmarès du Tangram ! Quelle est cette étrange loi qui agit ainsi, à l'arrière-plan du jeu, composant les valeurs du catalogue pythagoricien ? Pour pousser un peu le trait, j'examine les autres valeurs et constate que nombre d'entre elles sont à la tête de triplets pythagoriciens non primitifs : 20, 26, 34, 40, 45, 52, 58, 68, 74 et 80 sont toutes de telles valeurs. Par exemple, $12^2+16^2=20^2$ mais le triplet (12, 16, 20) n'est pas primitif car 12, 16 et 20 sont divisibles par 4 et on est ramené alors au triplet primitif (3, 4, 5). Il existe 33 valeurs supérieures des triplets pythagoriciens, primitifs ou non, qui soient comprises dans le domaine des carrés des diamètres du Tangram (entre ≈15 et 89), et parmi ces 33 valeurs, il y en a 21 qui conviennent ! Les deux tiers des valeurs possibles. Cela ne peut être une coïncidence. L'explication se cache, sans doute, dans les replis de la robe de Pythagore. Les valeurs qui ne sont pas des valeurs supérieures d'un triplet pythagoricien ne sont que sept sur 28 (1 sur 4) : 16, 18, 32, 36, 49, 64 et 72. Quatre sont des carrés parfaits, les trois restantes (18, 32 et 72) ont finalement un statut à part, tout aussi inexplicable.

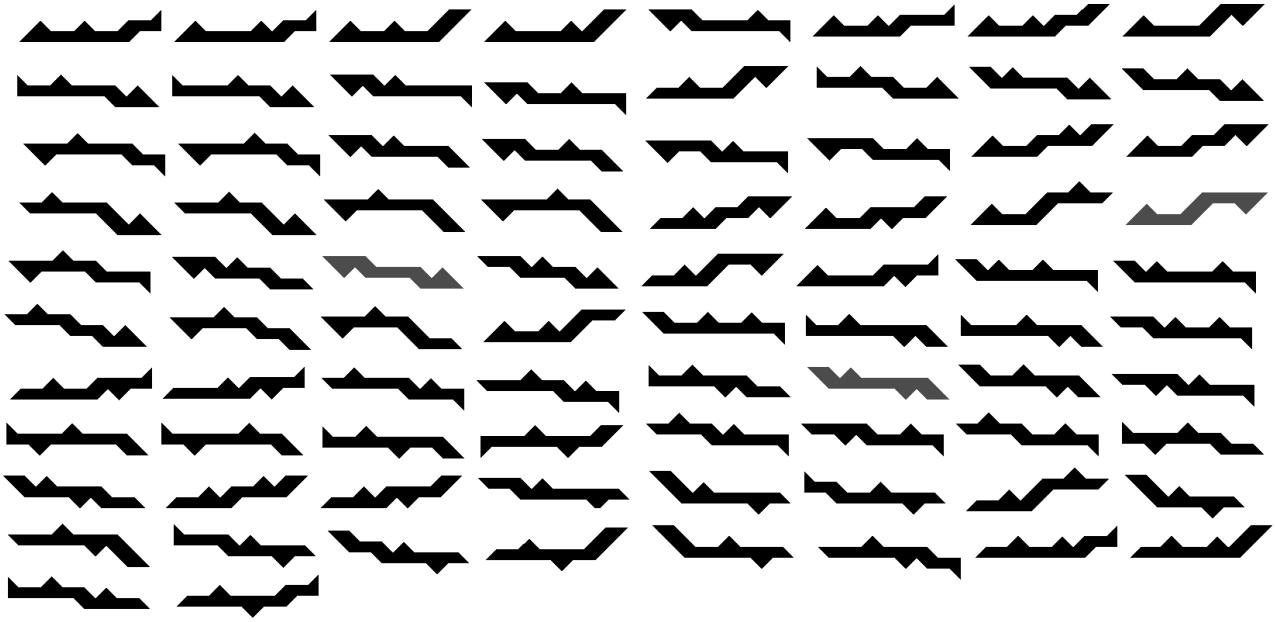


Illustration 167: Les 82 tangrams de diamètre $\sqrt{89} \approx 9.43$, la plus grande valeur possible pour les formes homogènes, ont tous 2 points seulement sur le cercle circonscrit

Par curiosité, à quoi ressemble un tangram dont le diamètre est la racine carrée du plus grand nombre premier possible (89) ? La réponse, exhaustive et en image, montre les 82 formes présentant cette caractéristique extrême du diamètre. Elles sont très étirées, ressemblent à des serpents ou des fusils, et sont bien difficiles à différencier avec leurs allures irrégulières voisines. On trouve, dans cette collection particulière, trois formes symétriques (en gris sur la figure). Y a t-il une certaine diversité des périmètres, comme pour le groupe des formes ayant huit sommets sur le cercle ? Oui, cet ensemble se divise en deux : quarante formes ont une part rationnelle Rat=10 et une part irrationnelle Irr=8 ce qui conduit à un périmètre valant approximativement 21.31 (les formes symétriques appartiennent toutes à ce sous-groupe) ; les 42 autres sont, à l'inverse, caractérisées par Rat=8 et Irr=10, soit un périmètre supérieur (une compacité moindre) de 22.14 environ. Les formes les moins compactes à l'égard du périmètre, pour ce groupe moins compact en terme de diamètre, sont donc ces 42 tangrams de périmètre 22.14. Il y a près de 300 000 tangrams homogènes ayant ce périmètre maximum de 22.14 mais ces 42 formes dépassent les autres par les dimensions de leur cercle circonscrit. Pour simplifier notre exposé, nous n'avons pas mêlé à ce débat la convexité, mais les indicateurs de compacité sont globalement corrélés. Il n'y a qu'aux franges, parfois, que les effets de bord se font sentir, individualisant quelques outsiders.

Examinons à présent, l'étonnante diversité des diamètres pour les tangrams n'ayant

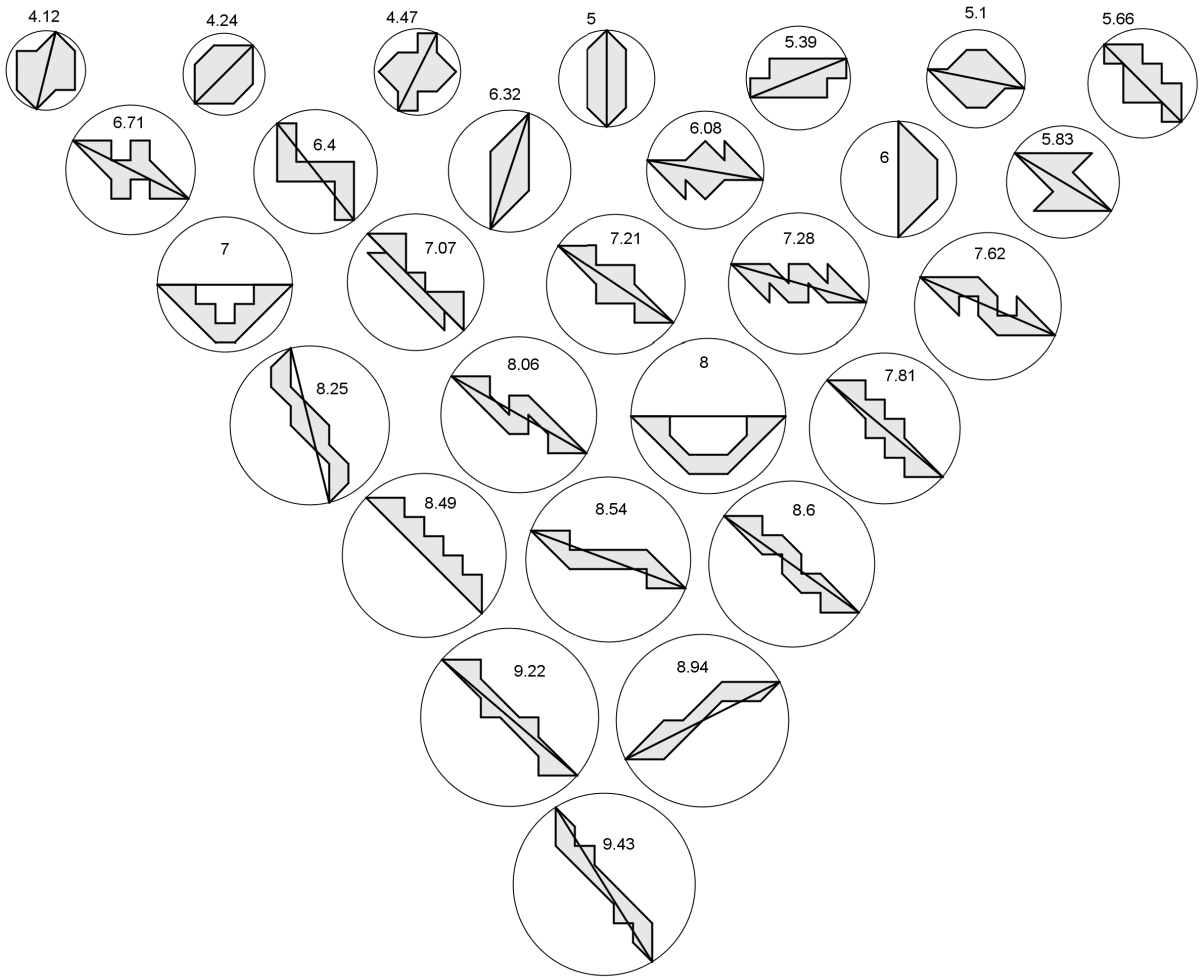


Illustration 168: Le triangle de Pythagore des 28 diamètres des tangrams ayant uniquement deux sommets diamétralement opposés (cette précision supprime la 29ème valeur représentée par le carré). Les valeurs sont des racines d'entiers entre 16 et 89, principalement issus de triplets pythagoriciens

pas deux points diamétralement opposés. On a dit qu'il y en avait cent huit différents dont seulement sept sont en commun avec la catégorie des formes ayant deux sommets matérialisant le diamètre. Contrairement à ces formes, on trouve ici presque toujours, une forme $\frac{\sqrt{A}}{B}$ où B est un nombre entier supérieur à 1. Nous obtenons cette forme car le carré du diamètre est une fraction (un quotient de deux entiers) non entière. Cela vient du fait que le centre du cercle est l'intersection de deux droites aux équations du type $ax+by+c=0$ avec des coefficients a, b et c entiers. Les coordonnées du centre sont alors fractionnaires et la formule de Pythagore conduit à des rayons et diamètres fractionnaires (les formules de calcul ont été données plus haut). Ces diamètres s'échelonnent entre $\frac{\sqrt{130}}{3} \approx 3.80$ et $\frac{\sqrt{14450}}{13} \approx 9.25$, de un peu moins du minimum des formes Diam (4) jusqu'à un peu moins de leur maximum (9.43). La seule forme qui a un diamètre inférieur à celui du carré est cet

hexagone convexe que l'on a déjà examiné. On trouve ensuite un seul tangram de diamètre $\frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4.03$, et puis les effectifs croissent irrégulièrement avec les diamètres puis décroissent jusqu'au diamètre maximum qui est réalisé par 110 tangrams. La série des diamètres obtenus, après simplification, montre quelques valeurs rationnelles (voir le tableau suivant) mais la plupart sont irrationnelles, les nombres sous les radicaux s'élevant parfois jusqu'à des valeurs très importantes (le maximum est 52 258).

Pour un diamètre donné, par exemple pour le plus petit $\frac{\sqrt{130}}{3}$, le diamètre au carré est une fraction. Pour notre exemple, c'est la fraction $\frac{130}{9}$. Le numérateur de cette fraction a été obtenu en additionnant deux carrés, ici on a $130=121+9=11^2+3^2$. Ainsi, notre valeur du diamètre apparaît comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont

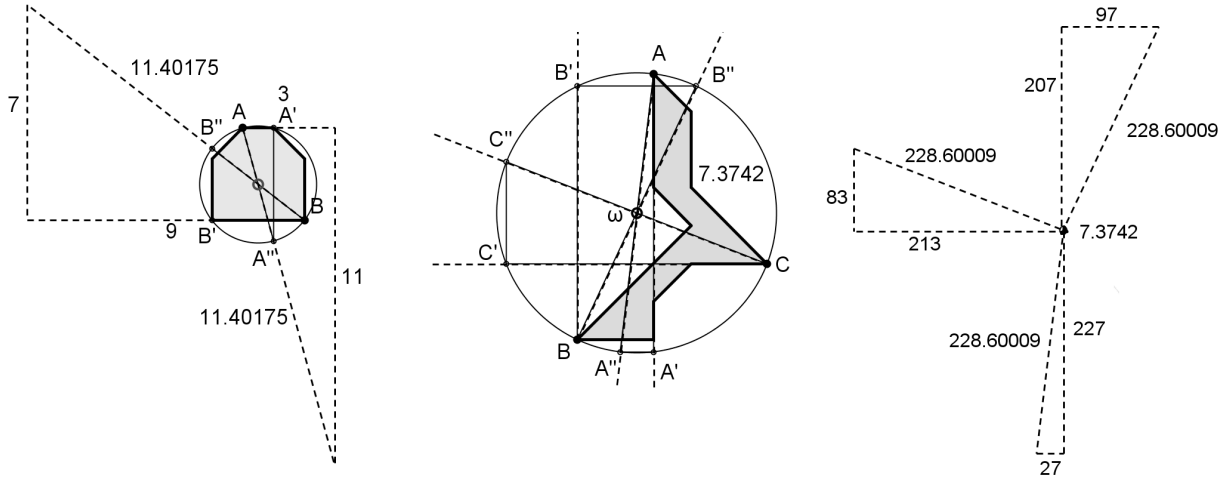


Illustration 169: Le tangram de diamètre 3.8 et un des 4 tangrams de diamètre 7.37, à l'intérieur de leur cercle circonscrit. Les triangles rectangles aux côtés entiers (en tirets) sont des agrandissements des triangles AA'A'', BB'B'' et CC'C'' (les diamètres sont AA'', BB'' et CC'') de coefficients 3 pour le premier et 31 pour le second. On voit apparaître alors différents triplets de Pythagore.

les cathètes mesurent $\frac{11}{3}$ et $\frac{3}{3}=1$ (le triangle *AA'A''* de la figure de gauche sur notre illustration), car $\left(\frac{11}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{3}\right)^2=\frac{121}{9}+\frac{9}{9}=\frac{130}{9}$. Ce triangle est une réduction à l'échelle 1/3 d'un triangle rectangle aux cathètes entières mesurant 11 et 3 (en tirets). Une autre façon de mesurer le diamètre de ce tangram est de considérer le triangle *BB'B''* et son agrandissement (en tirets) qui correspond à la décomposition $130=81+49=9^2+7^2$. Un même schéma se retrouve pour le tangram de diamètre $\frac{\sqrt{52258}}{31} \approx 7.37$ avec la décomposition $\frac{52256}{31^2}=\frac{51527}{961}+\frac{729}{961}=\left(\frac{227}{31}\right)^2+\left(\frac{27}{31}\right)^2$ qui fait apparaître ce diamètre comme l'hypoténuse d'un triangle *AA'A''*, modèle réduit à l'échelle 1/31 d'un triangle aux cathètes entières égales à 227 et 27 (en tirets). Sur notre illustration, à droite, le tangram est si petit par rapport à cet immense triangle qu'on ne distingue pas sa silhouette (agrandie au centre). La décomposition de 52 256 en une somme de deux

carrés n'est pas unique, il en existe trois : $52\,256=227^2+27^2=213^2+83^2=207^2+97^2$. Chacune de ces décompositions peut s'observer sur la figure (considérer les agrandissements de *BB'B''* et *CC'C''*).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		$\frac{\sqrt{130}}{3}$	$\frac{\sqrt{65}}{2}$	$\frac{\sqrt{442}}{5}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{\sqrt{2210}}{11}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{\sqrt{170}}{3}$	$\sqrt{20}$	$\frac{\sqrt{85}}{2}$
10	$\frac{\sqrt{200}}{3}$	$\frac{\sqrt{1105}}{7}$	$\frac{\sqrt{578}}{5}$	5	$\frac{\sqrt{4250}}{13}$	$\frac{\sqrt{1250}}{7}$	$\sqrt{26}$	$\frac{\sqrt{1300}}{7}$	$\frac{\sqrt{425}}{4}$	$\frac{\sqrt{3250}}{11}$
20	$\frac{26}{5}$	$\frac{\sqrt{250}}{3}$	$\frac{\sqrt{260}}{3}$	$\frac{\sqrt{8450}}{17}$	$\frac{\sqrt{1885}}{8}$	$\frac{\sqrt{1450}}{7}$	$\frac{\sqrt{754}}{5}$	$\frac{\sqrt{2465}}{9}$	$\frac{\sqrt{11050}}{19}$	$\frac{\sqrt{125}}{2}$
30	$\frac{\sqrt{290}}{3}$	$\frac{\sqrt{130}}{2}$	$\frac{29}{5}$	$\sqrt{34}$	$\frac{\sqrt{1682}}{7}$	$\frac{\sqrt{884}}{5}$	$\frac{\sqrt{12818}}{19}$	$\frac{\sqrt{18850}}{23}$	$\frac{\sqrt{325}}{3}$	$\frac{\sqrt{578}}{4}$
40	$\frac{\sqrt{4420}}{11}$	$\frac{\sqrt{10713}}{17}$	$\frac{\sqrt{6290}}{13}$	$\frac{\sqrt{338}}{3}$	$\frac{\sqrt{1850}}{7}$	$\frac{\sqrt{340}}{3}$	$\frac{37}{6}$	$\frac{\sqrt{4625}}{11}$	$\frac{\sqrt{962}}{5}$	$\frac{25}{4}$
50	$\frac{\sqrt{986}}{5}$	$\sqrt{40}$	$\frac{\sqrt{21386}}{23}$	$\frac{\sqrt{4930}}{11}$	$\frac{\sqrt{18122}}{21}$	$\frac{\sqrt{370}}{3}$	$\frac{\sqrt{3362}}{9}$	$\frac{\sqrt{2050}}{7}$	$\frac{\sqrt{15170}}{19}$	$\frac{\sqrt{170}}{2}$
60	$\frac{\sqrt{1066}}{5}$	$\frac{\sqrt{7250}}{13}$	$\frac{\sqrt{31450}}{27}$	$\frac{\sqrt{697}}{4}$	$\frac{\sqrt{2146}}{7}$	$\frac{\sqrt{5330}}{11}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{\sqrt{7585}}{13}$	$\frac{\sqrt{2210}}{7}$	$\frac{\sqrt{725}}{4}$
70	$\frac{\sqrt{410}}{3}$	$\frac{34}{5}$	$\frac{\sqrt{185}}{2}$	$\frac{\sqrt{3770}}{9}$	$\frac{\sqrt{39442}}{29}$	$\frac{\sqrt{1189}}{5}$	$\sqrt{50}$	$\frac{\sqrt{8500}}{13}$	$\frac{\sqrt{1258}}{5}$	$\frac{\sqrt{26650}}{23}$
80	$\frac{\sqrt{2500}}{7}$	$\frac{\sqrt{205}}{2}$	$\sqrt{52}$	$\frac{\sqrt{4250}}{9}$	$\frac{\sqrt{845}}{4}$	$\frac{\sqrt{2600}}{7}$	$\frac{\sqrt{850}}{4}$	$\frac{\sqrt{9010}}{13}$	$\frac{\sqrt{51250}}{31}$	$\frac{\sqrt{481}}{3}$
90	$\frac{\sqrt{45050}}{29}$	$\frac{\sqrt{4346}}{9}$	$\frac{\sqrt{6500}}{11}$	$\frac{\sqrt{3445}}{8}$	$\frac{\sqrt{1352}}{5}$	$\frac{\sqrt{2650}}{7}$	$\frac{\sqrt{52258}}{31}$	$\frac{\sqrt{1378}}{5}$	$\frac{\sqrt{221}}{2}$	$\frac{\sqrt{500}}{3}$
100	$\frac{\sqrt{1508}}{5}$	$\frac{\sqrt{32330}}{23}$	$\frac{\sqrt{17690}}{17}$	$\frac{\sqrt{7442}}{11}$	$\frac{\sqrt{45994}}{27}$	$\frac{\sqrt{7930}}{11}$	$\frac{\sqrt{5525}}{9}$	$\frac{\sqrt{27010}}{19}$	$\frac{\sqrt{14450}}{13}$	

Tableau 70: Les 108 diamètres des tangrams homogènes pleins Non-diam

On peut déterminer algorithmiquement à quelle décomposition se rattache un diamètre (il suffit de le faire au moment du calcul), mais il paraît bien fastidieux et un peu inutile de relever la répartition des décompositions utilisées pour chaque tangram.

n°	d	Non diam	Diam	N29	559	56 364	0	N58	648	19 286	0	N88	730	17	0
N1	380	1	0	D8	566	0	52 917	N59	652	5 374	0	N89	731	3	0
D1	400	0	1	N30	568	50 229	0	N60	653	2 016	0	N90	732	115	0
N2	403	1	0	N31	570	51 774	0	N61	655	2 123	0	N91	732	359	0
D2	412	0	260	N32	580	10 112	0	N62	657	1 594	0	N92	733	494	0
N3	420	147	0	D9-N33	583	19 830	524 094	N63	660	2 756	0	N93	734	5 377	0
D3	424	0	25	N34	586	9 922	0	N64	662	748	0	N94	735	3 194	0
N4	425	28	0	N35	595	18 993	0	N65	664	6 089	0	N95	735	292	0
N5	427	870	0	N36	596	25 716	0	N66	667	593	0	N96	737	4	0
N6	433	2 944	0	N37	597	13 843	0	N67	670	1 490	0	N97	742	328	0
N7	435	1 101	0	D10	600	0	84 765	D14	671	0	276 214	N98	743	13	0
D4-N8	447	902	52 776	N38	601	24 918	0	N68	672	10 417	0	N99	745	10	0
N9	461	4 136	0	N39	601	45 124	0	N69	673	3 637	0	D19	762	0	49 951
N10	471	3 395	0	N40	604	18 730	0	N70	675	36 569	0	N100	777	4	0
N11	475	17 970	0	D11	608	0	300 988	N71	680	86	0	D20	781	0	32 803
N12	481	14 978	0	N41	609	28 548	0	N72	680	987	0	N101	782	95	0
D5-N13	500	6 654	74 798	N42	610	53 327	0	N73	682	477	0	N102	782	1 280	0
N14	501	32 883	0	N43	613	4 183	0	N74	685	117	0	N103	784	11 160	0
N15	505	56 832	0	N44	614	17 111	0	N75	690	96	0	N104	794	25	0
D6-N16	510	12 208	191 757	N45	615	31 527	0	D15	700		37 024	D21	800	0	1 651
N17	515	42 934	0	N46	617	42 900	0	D16-N76	707	1 585	167 216	D22	806	0	24 564
N18	515	42 046	0	N47	618	14 942	0	N77	709	443	0	N105	810	441	0
N19	518	54 923	0	N48	620	21 863	0	N78	709	535	0	D23	825	0	2 065
N20	520	66 058	0	N49	625	4 015	0	N79	710	1 570	0	N106	826	62	0
N21	527	59 932	0	N50	628	3 490	0	N80	714	4 215	0	D24	849	0	3 196
N22	537	37 139	0	D12-N51	632	6 634	432 476	N81	716	146	0	D25	854	0	1 160
D7	539	0	332 737	N52	636	5 134	0	D17-N82	721	3	159 532	D26	860	0	5 744
N23	541	38 353	0	N53	638	7 975	0	N83	724	42	0	N107	865	14	0
N24	543	62 050	0	D13	640	0	198 428	N84	727	1 230	0	D27	894	0	437
N25	544	153 340	0	N54	641	9 181	0	D18	728	0	79 932	D28	922	0	372
N26	549	58 115	0	N55	641	19 240	0	N85	728	179	0	N108	925	110	0
N27	552	49 942	0	N56	644	92 412	0	N86	729	7	0	D29	943	0	82
N28	553	58 313	0	N57	647	40 138	0	N87	730	63	0		Total	1 754 240	3 087 965

Tableau 71: Répartition des tangrams homogènes pleins selon le diamètre du cercle circonscrit et la catégorie Diam/Non diam

L'ensemble de ces valeurs exactes paraît incomplet sans le dessin d'une forme au moins par diamètre et les effectifs pour chaque catégorie. L'encombrement d'une feuille de dessin comportant 108 figures, avec les détails qui ne manquent pas de s'y attacher, ou celui d'un tableau d'effectifs présentant les 130 valeurs possibles de diamètre avec les sous-répartitions mentionnées (nombre de points sur le cercle, caractéristique Diam/Non-diam) nous force à quelques simplifications : les diamètres n'apparaissent que sous la forme approchée au centième le plus proche. Afin d'identifier les valeurs exactes, les numéros d'ordre de la série Diam sont précédés de la lettre D tandis que ceux de la série Non-diam sont précédés d'un N.

Fort de notre première exploration des diamètres de tangrams, nous pouvons nous intéresser à d'autres ensembles que celui des formes homogènes pleines. On vient d'étudier les sous-ensembles candidats à cette étude que sont les tangrams simples, les naturels et les tordus (chapitre 16). Et si on veut passer en revue un ensemble plus vaste, il faut commencer par celui des tangrams hétérogènes pleins :

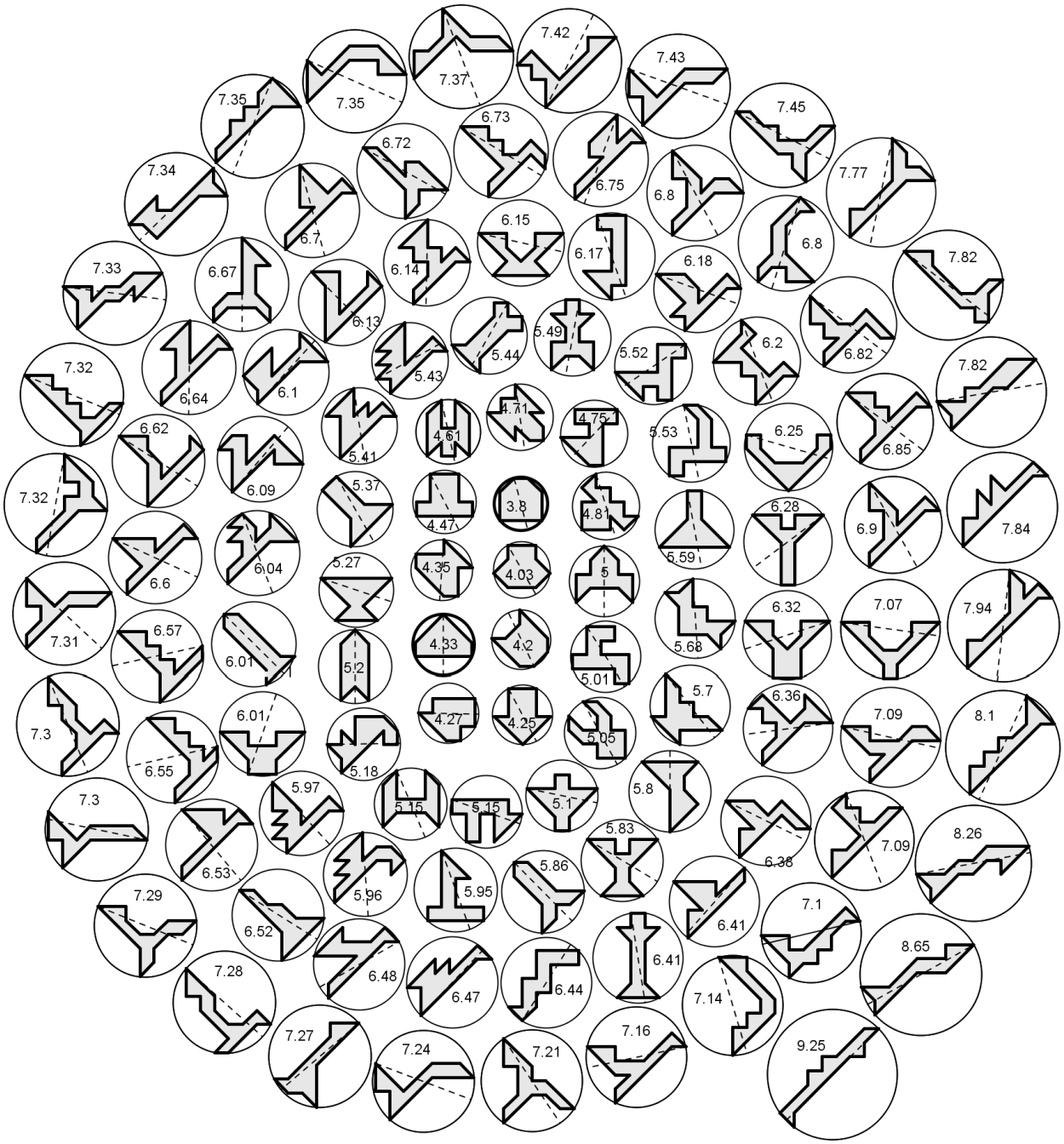


Illustration 170: Les 108 diamètres différents des tangrams homogènes pleins n'ayant pas 2 points diamétralement opposés. La forme proposée est symétrique quand c'est possible, sinon nous avons choisi une forme aux bords simples

avec un fichier de plus de six milliards de formes, ces formes qui n'ont généralement pas leurs sommets sur les nœuds du quadrillage promettent de la nouveauté.

Commençons par les formes naturelles. Comme on l'a vu, restreindre la contrainte d'assemblage homogène aux seuls sommets a pour effet de supprimer les formes « tordues » (celles qui nécessitent au moins une fois un assemblage par les milieux de grands segments). Comme on peut s'y attendre, les diamètres des formes tordues ont tendance à être légèrement plus élevés que ceux des formes naturelles (en moyenne 6.15 pour les naturelles et 6.27 pour les tordues). Cette différence s'exprime dans les répartitions par un avantage de moins en moins marqué pour les formes naturelles : alors que celles-ci représentent près de 100% des classes de diamètres inférieurs, elles finissent presque à égalité avec les tordues pour les plus grands. On ne peut, en effet, trouver dans les sept premières classes que trois formes tordues de diamètre $\sqrt{17} \approx 4.12$; ensuite viennent quinze formes de diamètre $\frac{\sqrt{2210}}{11} \approx 4.27$; pour les mêmes huit classes de diamètres, on compte 1 315 formes naturelles.

Les tangrams simples sont, à l'exception des formes à rivières, une toute petite partie des formes naturelles. Par le seul effet de la réduction du nombre des silhouettes, il y a un appauvrissement combinatoire de la diversité des diamètres. Et il s'ajoute le fait que la contrainte simple conduit à des formes plus compactes. Ainsi, 70 diamètres ont disparus, surtout des grandes valeurs. Il en reste vingt pour les formes ayant deux points diamétralement opposés, comprises entre $\sqrt{17} \approx 4.12$ et $\sqrt{65} \approx 8.06$ (les deux formes de gauche sur notre figure 172). Les formes n'ayant

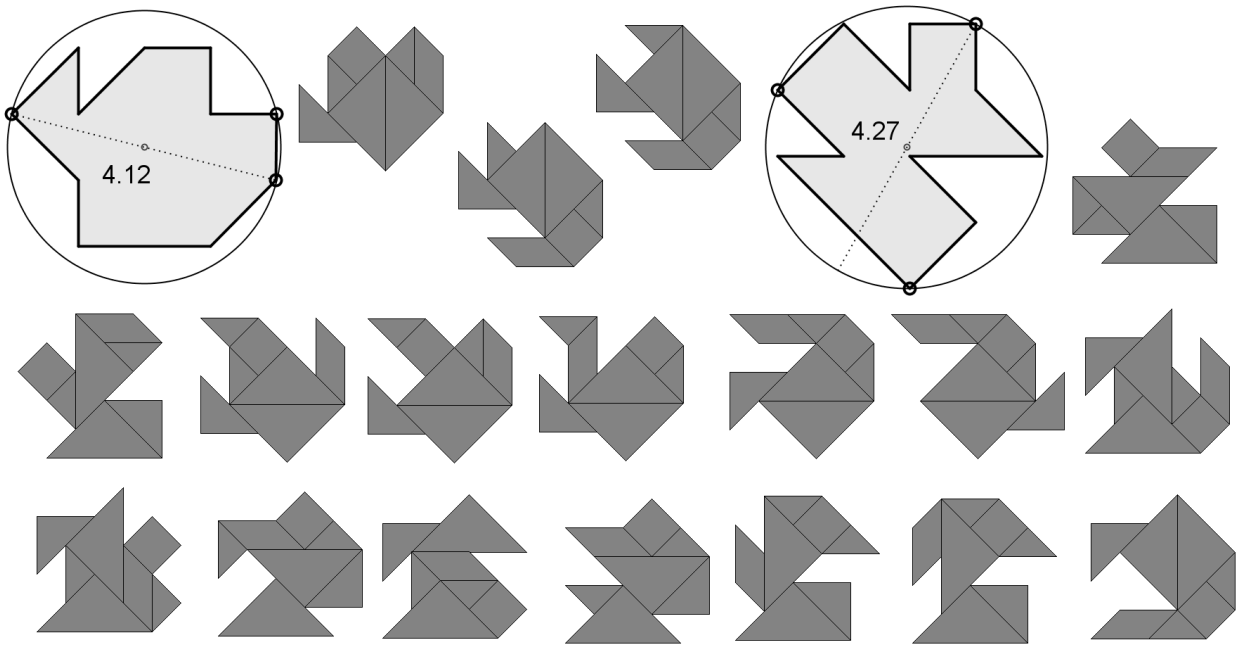


Illustration 171: Les 18 tangrams tordus ayant les plus petits diamètres

pas deux points diamétralement opposés sont réparties dans 47 classes dont les diamètres vont de $\frac{\sqrt{130}}{3} \approx 3.80$ à $\frac{\sqrt{410}}{3} \approx 6.75$ (les douze formes de droite). Il n'y a pas une seule forme simple de diamètre 3.80 (comme il y en a une naturelle) mais deux ! Rappelons-nous en effet des formes simples ayant une rivière : ce segment enfoui de diverses façons dans l'intérieur de la forme qui peut en dédoubler certaines.

L'étude des diamètres de tangrams hétérogènes ne peut pas être aussi simple à mener. La forme générale attendue pour les diamètres est de la forme $\sqrt{\frac{a+b\sqrt{2}}{c}}$ car, d'après ce que nous avons exposé au 1er chapitre, les sommets de ce type de forme ont des coordonnées qui s'écrivent $a+b\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les formules sont assez complexes car elles manipulent séparément les parties rationnelles et irrationnelles afin de les conserver entières. Nous n'en donnerons pas les détails ici car il s'agit d'une partie très technique et nous voulons nous centrer sur les résultats. Quoiqu'il en soit, ce nouvel algorithme devant être testé sur un échantillon restreint, nous l'avons lancé sur les formes homogènes dont nous avions les résultats. Quand le programme fut au point pour ces formes au coefficient *b* nul, nous avons analysé le petit concentré des formes symétriques : nous n'avons pas moins de 285 diamètres différents pour les formes ayant deux points diamétralement opposés allant de $\sqrt{9+4\sqrt{2}} \approx 3.8284$ à $\sqrt{82+8\sqrt{2}} \approx 9.6599$ (une seule forme pour ces deux valeurs extrêmes). Les formes symétriques n'ayant pas deux points diamétralement opposés sont un peu moins diversifiées puisqu'il n'y a que 263 valeurs, allant de $\sqrt{\frac{130}{9}} \approx 3.8006$ à $\sqrt{50} \approx 7.0711$ (une et deux formes respectivement pour ces deux valeurs, ces formes

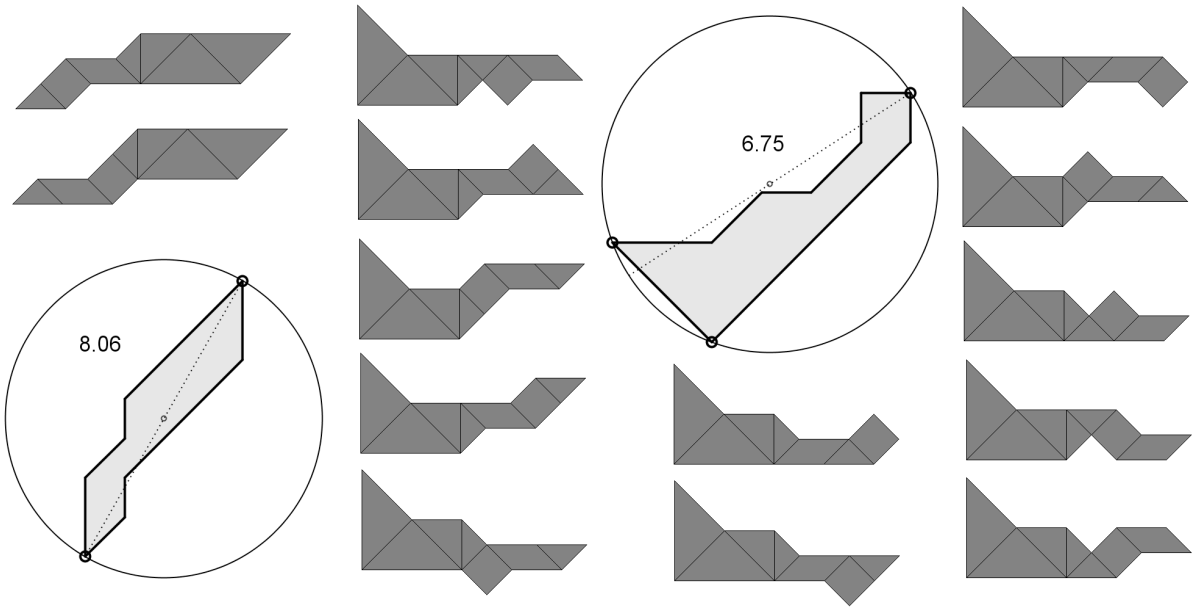


Illustration 172: Les 2 tangrams simples ayant 2 points diamétralement opposés de périmètre maximal (à droite) et les 12 tangrams simples n'ayant pas 2 points diamétralement opposés de périmètre maximal (à gauche)

extrêmes étant homogènes). On trouve des valeurs beaucoup moins habituelles dans le corps de la distribution, comme $\sqrt{\frac{548+192\sqrt{2}}{49}} \approx 4.0896$ (trois formes symétriques ayant cette 1ère valeur non-homogène) ou encore $\sqrt{\frac{33964+3982\sqrt{2}}{961}} \approx 6.4189$ (deux formes symétriques ayant ces valeurs maximum des paramètres *a* et *b*) et $\sqrt{\frac{19228-6650\sqrt{2}}{289}} \approx 5.8302$ (une forme symétrique ayant cette valeur minimum du paramètre *b*). La plus grande valeur non-homogène trouvée est $\sqrt{203-110\sqrt{2}} \approx 6.88742$ (une seule forme symétrique).

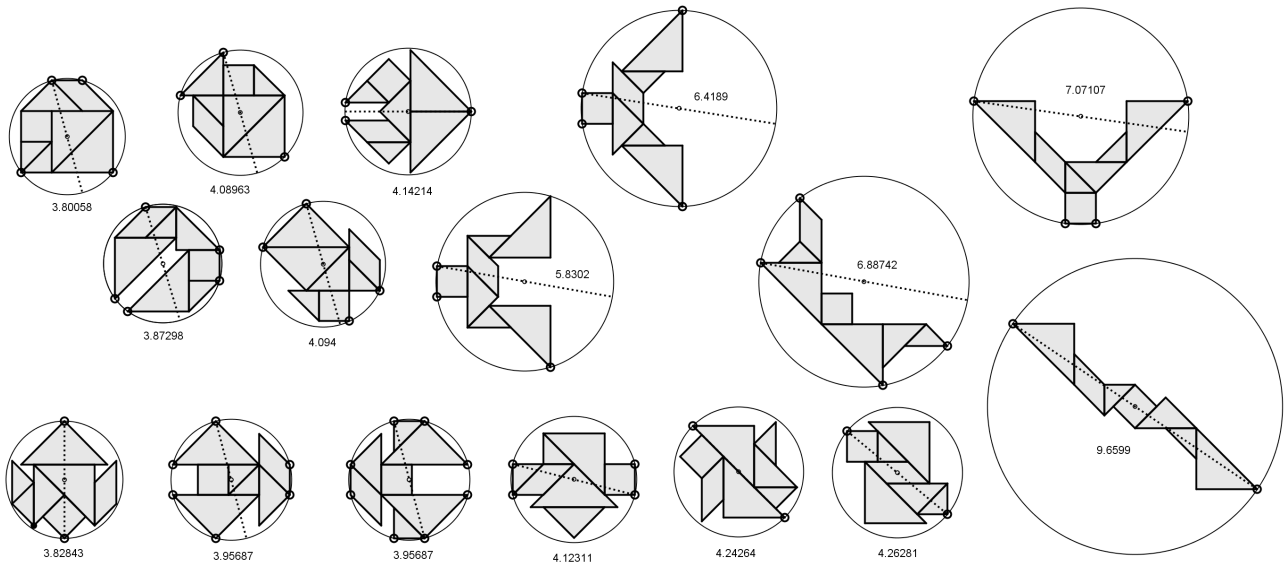


Illustration 173: Exemples de diamètres de tangrams hétérogènes symétriques. En haut, les formes n'ayant pas 2 points diamétralement opposés (à noter : les formes de diamètres extrêmes sont homogènes). En bas, les formes ayant 2 points diamétralement opposés

Le programme semblant correct, nous le lançons sur la multitude des formes hétérogènes après avoir optimisé la procédure et prévu la reprise en cas d'arrêt intempestif. Ces précautions sont importantes car nous prévoyons pour cette étape une grande durée de calcul, de l'ordre de quelques mois (environ 1 500 fichiers d'importance égale à examiner, le 1er fichier ayant été traité en 4h !). Nous avons en fait déterminé les diamètres exacts de 400 millions de formes hétérogènes seulement (63 fichiers passés en revue sur une durée de deux semaines). Les résultats sont donc incomplets mais nous avons tout de même découvert 817 diamètres différents pour les formes ayant deux points diamétralement opposés allant de $\sqrt{8+4\sqrt{2}} \approx 3.6955$ à $\sqrt{65+22\sqrt{2}} \approx 9.8037$ ce qui étend considérablement le domaine. Nous avons même trouvé une forme présentant neuf sommets sur le cercle circonscrit (avec les formes homogènes ont ne dépasse pas huit) : son diamètre est égal à $\sqrt{12+6\sqrt{2}} \approx 4.526$. Les formes n'ayant pas deux points diamétralement opposés sont encore plus diversifiées puisqu'on en a trouvé 57 281

valeurs, allant de $\frac{\sqrt{18756-3840\sqrt{2}}}{31} \approx 3.7237$ à $\frac{\sqrt{22740+11446\sqrt{2}}}{21} \approx 9.3952$. On trouve des valeurs encore plus extraordinaires des coefficients *a*, *b* et *c* comme $\sqrt{\frac{8213868+910926\sqrt{2}}{367}} \approx 8.3993$ (curiosité n°1 sur la figure 174) ou encore $\sqrt{\frac{10130940-7049610\sqrt{2}}{47}} \approx 8.5448$ (curiosité n°2). Et ceci n'est qu'un échantillon réduit de la diversité hétérogène car nous n'avons passé en revue que 6% environ des tangrams pleins…

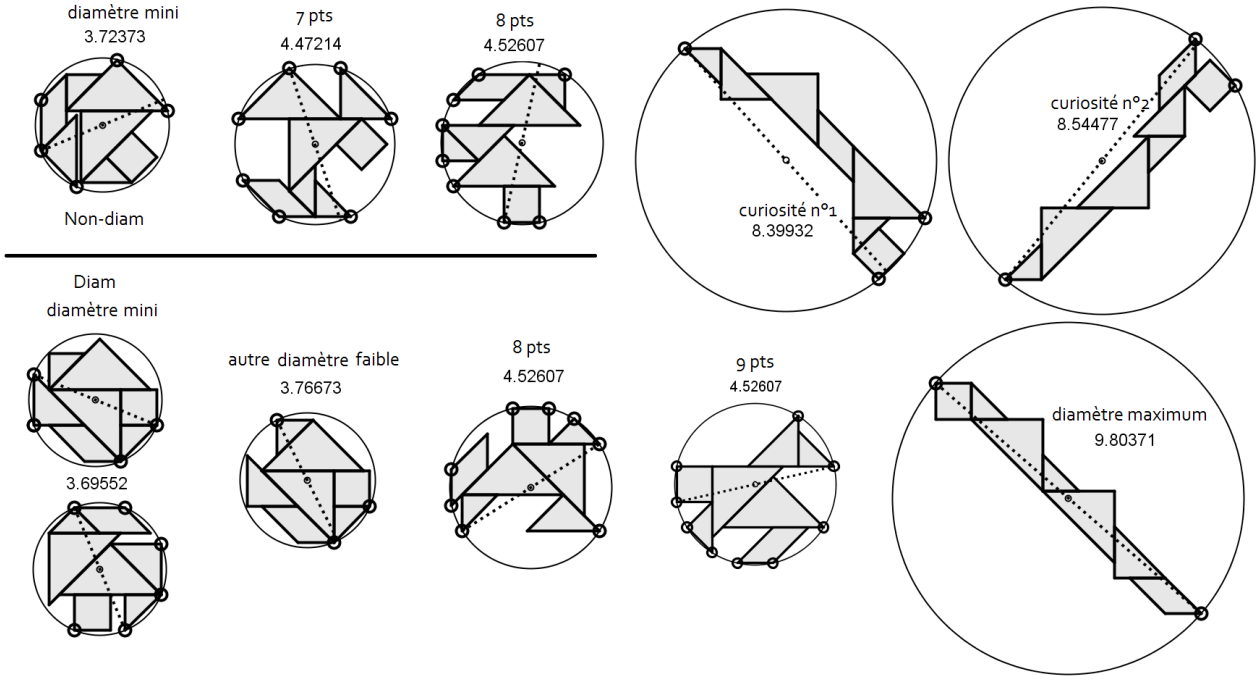


Illustration 174: Quelques tangrams hétérogènes particuliers pour la valeur du diamètre (minimum, maximum ou curiosité) ou le nombre de sommets sur le cercle, chaque catégorie sur une ligne

Pour les formes Non-diam, les valeurs des coefficients prennent parfois des valeurs énormes comme dans nos « curiosités », mais ce n'est même pas la peine d'imaginer la taille du triangle aux côtés entiers dont les triangles inscrits (notés *AA'A"* pour les formes homogènes) sont des réductions : ces triangles n'existent pas ! Car, à moins d'appliquer un coefficient d'agrandissement irrationnel, les cathètes des triangles agrandis seront toujours irrationnelles. Le carré de l'hypoténuse *AA"* de ces petits triangles étant de la forme $\frac{a+b\sqrt{2}}{c}$ avec $b \neq 0$, une des cathètes au moins est irrationnelle et un nombre irrationnel multiplié par un entier reste toujours irrationnel.

Une dernière remarque qui pourrait faire l'objet d'une belle question : regardez la curiosité n°1 ; ne pensez-vous pas que le sommet de la pièce carrée se trouvant entre les deux points cerclés (le cerclage signifiant ici que le sommet est sur le cercle) est un point du cercle ? Il faut bien agrandir cette figure pour s'apercevoir que non, le point est bien à l'intérieur du cercle. Mais sauriez-vous le prouver ?

Après avoir examiné le cas des tangrams hétérogènes, l'étude des cercles circonscrits serait incomplète si l'on n'envisageait pas l'ensemble plus vaste qui les contient tous : les 16compacts (voir chapitre 12). Bien sûr nous ne pourrons pas en dire grand-chose car nous ne les connaissons pas bien. Trop nombreux et difficiles à générer au complet, nous pouvons en exhiber certains qui ont été construits manuellement. Notre première question à leur propos se prête bien à une manipulation manuelle : quel peut être le plus petit diamètre ? Nous avons assez peu de liberté pour réaliser assez vite qu'on ne doit pas pouvoir faire moins que $\sqrt{8+4\sqrt{2}} \approx 3.6955$, une valeur rencontrée chez les tangrams hétérogènes. La figure 113 nous en donne un exemple sous la forme de ce bel octogone hypersymétrique (huit axes et un centre de rotation à 45°). Il y d'autres formes intéressantes ayant ce diamètres dont certaines sont montrées ci-dessous. Une autre forme de la figure 113 possède également un centre de rotation à 45° sans avoir les axes (2ème forme de la 3ème ligne), mais son diamètre $\sqrt{12+2\sqrt{2}} \approx 3.8508$ est légèrement supérieur au minimum des tangrams homogènes.

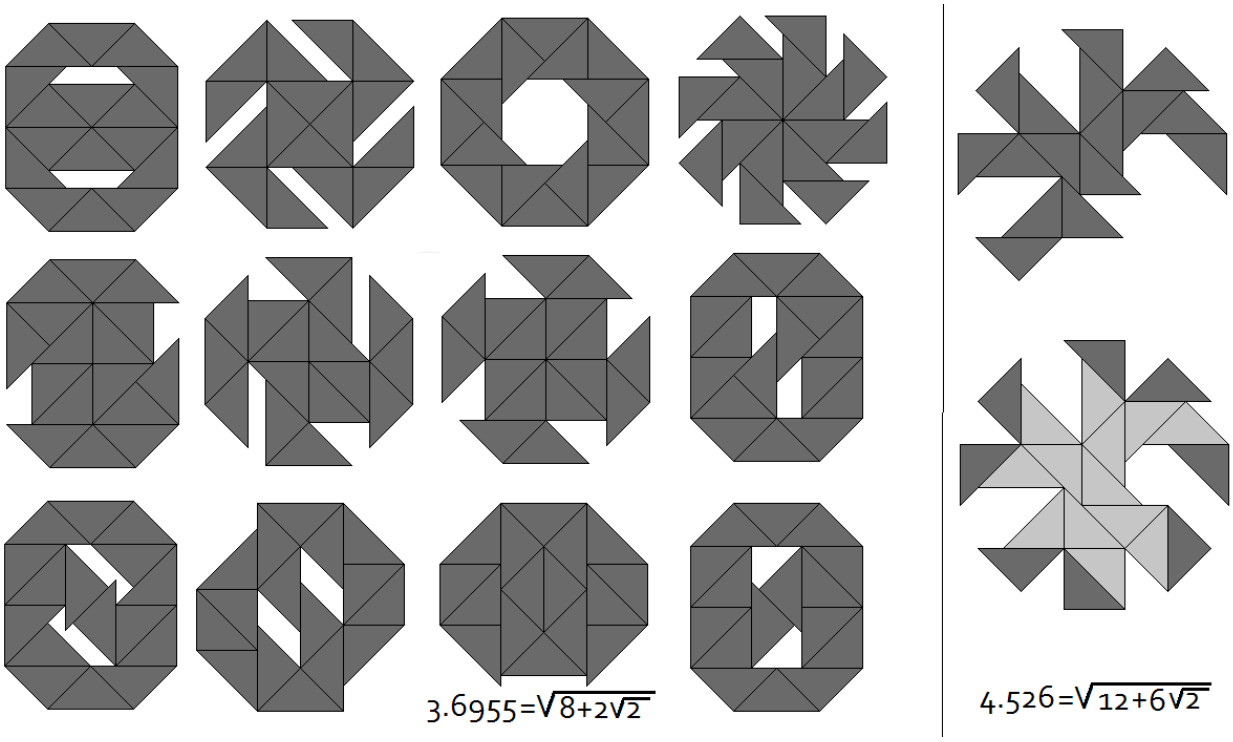


Illustration 175: 16compacts de diamètre minimum. En bas à droite, un 21compact possède 16 sommets sur le cercle, la figure du haut en est extraite : un 16compact à 12 points sur le cercle

Est-il possible de dépasser neuf sommets sur le cercle avec les 16compacts ? Si l'on veut bénéficier de la configuration très favorable qui a conduit les tangrams hétérogènes à disposer neuf sommets sur le cercle, on s'aperçoit que ce diamètre permet d'obtenir jusqu'à seize sommets sur le cercle ! Mais nous ne parvenons pas à connecter les huit triangles marquant ces points, avec les huit triangles restants en

respectant la règle hétérogène. Notre meilleur essai nécessite d'en prendre treize pour atteindre cet objectif, ce qui conduit à un 21compact. Cependant, chemin faisant, nous trouvons un 16compact qui a douze points sur le cercle. Est-ce le maximum ? Peut-être, mais faute de pouvoir les examiner tous, nous laisserons cette question ouverte.

Question 17 : La répartition des diamètres différents que nous avons trouvés pour les tangrams homogènes pleins est assez irrégulière. La figure suivante montre ces cercles sans tenir compte des effectifs : un cercle (quart de cercle sur la figure) par valeur de diamètre. Ces cercles sont-ils les seuls cercles possibles passant par deux points du quadrillage au moins (dans la limite naturelle des possibilités de diamètre du Tangram) ?

a) Reformulons cette question : combien de diamètres différents peut-il y avoir pour les cercles circonscrits aux 16abolos (chapitre 11) ? Évidemment, les 16abolos peuvent être plus étirés que les tangrams. À l'extrême, il y a le parallélogramme de dimension 72 de la figure 99 qui a un diamètre égal à $\sqrt{8^2+9^2}=\sqrt{145}\approx 12.04$, largement supérieur à la valeur maximum trouvée pour les tangrams (9.43 environ). Une question subsidiaire : sachant que les cercles enveloppant les tangrams homogènes contiennent entre deux et huit sommets, peut-on dépasser cette valeur avec les 16abolos ?

b) La question posée, ultimement, s'intéresse au nombre de points sur le quadrillage pouvant être contenus dans des cercles dont le diamètre est compris entre 3.80 et 12.04 environ (ou 9.43 si on se limite au Tangram). Les cercles ayant zéro ou un point du quadrillage sur le bord ne nous intéressent pas ici car ils ne peuvent circonscrire un tangram. Existe t-il d'autres cercles passant par deux points au moins du quadrillage (dans l'intervalle qui nous intéresse) et ne pouvant contenir de 16abolo (et encore moins de tangram) ?

Glossaire

Certains mots techniques de ce livre peuvent gêner la lecture si on n'en connait pas bien la signification. Nous avons tenté de les regrouper ici avec une courte définition et la page de la première occurrence. Comme celle-ci ne définit pas toujours le terme, nous donnons aussi, dans ce cas, la page où apparaît la définition quand il y en a une.

Alias : Les différentes apparences d'une même forme, lorsqu'elle est orientée ou retournée différemment. En disposant les pièces du jeu sur un quadrillage de référence sous-jacent, on limite le nombre d'alias à huit pour les formes homogènes et à seize pour les formes hétérogènes. L'existence d'élément(s) de symétrie dans la forme diminue le nombre d'alias.[⇨p.96-115]

Angles internes : Les angles internes d'un polygone sont mesurés à l'intérieur du polygone, par opposition aux angles externes qui sont mesurés à l'extérieur. Les angles internes d'un tangram peuvent prendre six valeurs : 45°, 90°, 135°, 225°, 270° et 315°.[⇨p.132]

Baie : les baies sont des trous qui ont un point de contact avec le bord extérieur. Le bord d'un tangram à baie est connexe (on peut le tracer sans lever le crayon) mais il se distingue des formes pleines qui sont topologiquement assimilable à un cercle. Lorsqu'une baie ouvre sur une autre baie, le point de contact entre les deux baies est appelé isthme.[⇨p.33]

Cathètes : les deux petits côtés d'un triangle rectangle qui se joignent au sommet de l'angle droit (le troisième côté, qui est toujours le plus long, s'appelle l'hypoténuse). Le mot vient du grec κάθετος qui signifie perpendiculaire.[⇨p.191]

Cercle circonscrit à un polygone : cercle qui contient au plus près le polygone. Le cercle circonscrit à un tangram est un cercle qui contient au moins deux des sommets du tangram.[⇨p.218]

Connexe : un ensemble est connexe s'il y a un chemin qui permet de joindre deux parties quelconques de l'ensemble sans jamais sortir de l'ensemble. Les tangrams à trou ont un intérieur connexe mais leur bord est déconnecté.[⇨p.218]

Convexe : forme sans creux. Si l'on joint deux points quelconques du bord d'une forme convexe par un segment rectiligne, on ne sort pas de l'intérieur de la forme. On peut aussi envisager de ceinturer une forme avec une ficelle : la forme est convexe si son bord adhère partout à la ficelle.[⇨p.5-24]

Convexité réelle : écart entre l'aire de l'enveloppe convexe d'une forme et l'aire de la forme. La convexité d'un tangram est souvent mesurée dans une unité qui est l'aire d'un des deux petits triangles du jeu. Une forme convexe a une convexité réelle

nulle.[⇨p.15]

Convexité sur quadrillage : écart entre l'aire de l'enveloppe convexe polyabolique d'un polyabolo et l'aire de ce polyabolo. Cette mesure de la convexité s'applique aux tangrams homogènes. Il s'agit du plus petit nombre de triangles qu'il faut ajouter à un polyabolo pour qu'il devienne convexe.[⇨p.33-43]

Corrélation : liaison entre deux variables qui traduit une certaine dépendance entre ces variables. En statistique, on mesure l'importance de la liaison en calculant un coefficient de corrélation qui sera proche de 1 si la dépendance est forte et proche de 0 si elle est inexistante.[⇨p.134]

Dimension : pour un tangram homogène ou un polyabolo, produit de la longueur par la largeur du rectangle circonscrit. La dimension constitue une première approche de la notion de convexité. Les tangrams homogènes ont des dimensions comprises entre 8 et 49.[⇨p.73]

Enveloppe convexe : forme géométrique convexe qui contient au plus près une forme. L'enveloppe convexe d'un tangram est un polygone qui contient au moins trois des sommets du tangram. L'enveloppe convexe d'une forme convexe coïncide avec cette forme.[⇨p.14-34]

Général : règle d'assemblage qui exige que chacune des pièces soient jointes aux autres par un sommet ou une portion de bord au moins. Le bord extérieur est ainsi connecté même s'il peut exister de vrais trous. Les tangrams généraux sont indénombrables ; ils contiennent tous les tangrams propres. [⇨p.193]

Hétérogène : règle d'assemblage qui exige que chacune des pièces soient jointes aux autres par un point de référence et une portion au moins de ses bords. Les tangrams hétérogènes sont dénombrables (voir les chapitres 9 et 10 pour les formes pleines et le chapitre 14 pour les formes à trou). [⇨p.5-29]

Homogène : règle d'assemblage qui exige que chacune des pièces soient jointes aux autres par un point de référence et un segment complet. Les tangrams homogènes sont dénombrables (voir les chapitres 6 et 7) et inclus dans les formes hétérogènes. Ils constituent aussi un sous-ensemble des 16abolos. [⇨p.5-29]

Irrationnel : un nombre irrationnel ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers et n'a pas d'écriture décimale finie. La longueur d'un segment, d'un côté ou du périmètre d'une forme hétérogène s'écrivant $a+b\sqrt{2}$, le nombre *b* est la part irrationnelle, car $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.[⇨p.12-64]

Naturelle : règle d'assemblage qui exige que chacune des pièces soient jointes aux autres par un sommet et un segment complet. Les tangrams naturels sont dénombrables (voir la question 16) et constituent un sous-ensemble des formes

homogènes qui les distingue des formes tordues. [⇨p.205-217]

Périmètre : le périmètre réel est la longueur totale du bord d'une figure. Parfois, ce terme est aussi employé pour désigner le nombre de segments entiers qui sont disposés le long du bord, qu'ils soient rationnels ou irrationnels. [⇨p.12-59]

Pick : Le théorème de Pick est une propriété des polygones sur quadrillage reliant leur aire *A*, le nombre *P* de points du quadrillage qui sont sur le bord et le nombre *I* de ceux qui sont à l'intérieur. Pour les formes pleines, on a A+1 = I+P/2 qui se simplifie pour un tangram homogène puisque *A* vaut toujours 8. [⇨p.10-59]

Polyabolo : polygones constitués de plusieurs triangles isocèles rectangles (demi-carrés) superposables, assemblés de toutes les façons possibles selon la règle homogène. Les polyabolos contenant *n* triangles sont appelés *n*-abolos sauf pour $1 \leq n \leq 12$, un préfixe d'usage étant substitué à *n*. Les pièces du Tangram sont le monoabolo, les trois diabolos et le tétrabolo triangulaire tandis que les tangrams homogènes sont des 16abolos.[⇨p.77-118]

Propre : règle d'assemblage qui exige que chacune des pièces soient jointes aux autres par une portion au moins de ses bords. L'intérieur d'un tangram propre est par conséquent connexe (on peut passer d'un point intérieur à un autre sans franchir le bord). Les tangrams propres sont indénombrables ; ils contiennent tous les tangrams hétérogènes. [⇨p.187]

Pythagore : le théorème de Pythagore est une propriété des côtés d'un triangle rectangle (le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes). Un triplet de nombres entiers (a,b,c) avec $a \leq b \leq c$ est pythagoricien si $a^2+b^2=c^2$.[⇨p.14-220]

Racine carrée : le nombre positif qui a pour carré *n* (un nombre positif) est noté $\sqrt{n}$. Par exemple, $\sqrt{2}$ est la solution positive de l'équation $x^2=2$. Ce nombre, qui est irrationnel et vaut approximativement 1.414, intervient dans un tangram à chaque fois que l'on calcule des longueurs des aires ou des coordonnées.[⇨p.8]

Rationnel : un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers. La longueur d'un segment, d'un côté ou du périmètre d'une forme hétérogène s'écrivant $a+b\sqrt{2}$, le nombre *a* est la part rationnelle.[⇨p.16-64]

Référence : les points de référence du Tangram sont les points d'attache des pièces dans les règles d'assemblage homogène et hétérogène. Il s'agit des sommets des pièces auxquels s'ajoutent les milieux des grands côtés. Lorsque les pièces sont inscrites dans un quadrillage, ces points sont les nœuds du quadrillage.[⇨p.8]

Segment : les bords des pièces sont constitués de segments unitaires ou entiers (entre les points de référence). Ces segments ont pour longueur 1 ou $\sqrt{2}$ – l'unité

étant le côté de la pièce carrée – selon que le segment va dans le sens des lignes du quadrillage ou de ses diagonales.[⇨p.8]

Simple : règle d'assemblage qui exige que chacune des pièces soient jointes aux autres par un sommet et un côté complet. Les tangrams simples sont dénombrables (voir le chapitre 16). La plupart sont homogènes mais ils peuvent aussi avoir un repli absent des formes homogènes. [⇨p.205]

Symétrie : lorsqu'un forme géométrique reste inchangée par un retournement autour d'une droite, on dit qu'elle possède un axe de symétrie. Si elle reste inchangée après une rotation, on dit qu'elle a un centre de symétrie d'ordre 2 (rotation d'un demi-tour) ou 4 (quart de tour). Les tangrams symétriques sont rares et beaux aussi les recherche t-on souvent.[⇨p.15-20]

tangram (sans majuscule) : polygone réalisé avec les sept pièces du jeu, sans chevauchement des pièces entre elles. Un tangram est homogène (resp. hétérogène, simple, naturel, etc.) s'il est réalisé en assemblant les pièces selon la règle homogène. Il y a treize tangrams convexes.[⇨p.5-59]

Tangram (avec la majuscule) : le jeu des sept pièces ingénieuses, ainsi appelé en Chine où il fut inventé vers l'an 1800 (七巧板, prononcer *Ch'i ch'iao t'u).* Avant de s'appeler Tangram en occident on l'appela le casse-tête ou jeu chinois. Il est constitué de cinq triangles isocèles rectangles, un parallélogramme et un carré (chapitre 1, figure 6 et photo 1).[⇨p.1-7]

Tordu : tangram homogène qui n'est pas naturel. Une des pièces au moins ne peut pas être assemblée aux autres sans utiliser un des milieux de grands côtés.[⇨p.231]

Trou : un polygone a un trou si son bord est constitué d'une partie externe et d'une partie interne (le bord du trou). On parle de « vrai » trou si les deux parties du bord sont déconnectées, sinon on parle de baie. Un trou peut avoir un isthme lorsque son bord passe deux fois par un même point.[⇨p.33]

Table des illustrations

Illustration 1: Les sept pièces du jeu : 5 triangles, 1 carré et 1 parallélogramme non carré (appelé plus loin « le parallélogramme »). Ces pièces couvrent une aire totale égale à 16 petits triangles....7
Illustration 2: Un carré de côté racine carrée de deux couvre la surface de deux petits carrés....8
Illustration 3: Les trente points de référence du Tangram : 23 sommets et 7 milieux....8
Illustration 4: Un rectangle et un hexagone dont les périmètres égalent le périmètre total des 7 pièces du jeu....9
Illustration 5: Un hexagone sur quadrillage d'aire égale à 62 carrés, comptant dans son bord, autant de segments unitaires de chaque sorte que les 7 pièces du jeu réunies....10
Illustration 6: Les deux carrés d'aire 4 qui permettent, en les superposant, de ranger le Tangram et le grand carré d'aire 8 parfois utilisé à cette même fin, mais sans superposition....10
Illustration 7: Une forme hétérogène à 5 côtés réalisée avec le Tangram et un système de coordonnées permettant de repérer la position des sommets des pièces. 13
Illustration 8: L'enveloppe convexe est le polygone convexe (sans creux) qui ceinture la forme, ici le quadrilatère convexe de gauche enveloppe du pentagone. Le calcul d'aire se ramène à la somme d'aires algébriques de triangles adjacents ayant un sommet en commun (les parties notées + sont ajoutées, celles notées – sont soustraites), ici le point M1....15
Illustration 9: Une carte réalisée selon la règle de Hill, avec 3 triangles du jeu seulement....19
Illustration 10: Les 8 alias d'une des solutions au problème précédent ne sont qu'une seule et même figure dessinée de façon congruente dans des positions différentes....20
Illustration 11: Les 4 alias d'une solution ayant un axe de symétrie....21
Illustration 12: Les formes convexes et/ou symétriques que l'on peut former avec les 5 sous-ensembles de 3 triangles du jeu....21
Illustration 13: Le système d'encodage des carreaux utilise un chiffre entre 0 et 5 pour les 6 possibilités....22
Illustration 14: Les 64 figures que l'on peut obtenir avec le jeu nommé GGP (2 grands triangles et un petit), classées par nombre de côtés....23
Illustration 15: Les 9 figures à 9 côtés que l'on peut former avec 3 triangles du jeu sont toutes réalisées avec le sous-ensemble contenant les 2 grands triangles et le moyen....24
Illustration 16: Les 8 pentagones et les 78 hexagones hétérogènes-non-homogènes que l'on peut obtenir avec un des cinq jeux de trois triangles. Lequel est-ce?....25
Illustration 17: Les 6 pièces ayant un angle de 45° peuvent chacune se présenter de 2 façons différentes....27
Illustration 18: Combinaisons différentes conduisant à une même silhouette....28
Illustration 19: Tangrams en étoile pouvant être réalisés de 2 façons différentes grâce à l'échange du carré avec la combinaison des 2 petits triangles....28
Illustration 20: Les 81 formes en étoile qui s'inscrivent correctement dans le quadrillage....28
Illustration 21: Les 22 formes étoilées les plus compactes ont un un périmètre égal à unités, parmi lesquelles 5 sont inscriptibles dans le quadrillage (en gris)....30
Illustration 22: Tangrams étoilés les plus proches des formes convexes en haut (convexité réelle de 1 à 2) et les plus éloignées (convexité réelle de 11.08 environ)....31
Illustration 23: tangrams étoilés sur lesquels s'observent les nouvelles longueurs de segments , et 31
Illustration 24: Forme hétérogène ayant un segment unité au centre....32
Illustration 25: Les formes homogènes symétriques réalisables avec Mini-Tangram, les formes à baie, une forme convexe non symétrique, des pentagones et une forme de convexité égale à 12 triangles. 34
Illustration 26: Les formes symétriques non-homogènes réalisables avec le mini-tangram. En gris, les formes de périmètre minimum (l'hexagone homogène P=7.65 et les 6 de périmètre P=8.00)....35
Illustration 27: Solutions pour les formes non-homogènes de périmètre minimal....36
Illustration 28: Les 8 formes hétérogènes contenant un segment de longueur i. Dans les lignes paires, 4 combinaisons originales des pièces qui conduisent à des doublons....36
Illustration 29: Solutions pour les formes symétriques non-homogènes du mini-Tangram....37
Illustration 30: Encodage d'une forme hétérogène avec un système de 64 codes basé sur la norme ASCII....40
Illustration 31: Différents carrés de côté c= (a et b entiers), c variant entre et 41
Illustration 32: Les 9 formes convexes réalisables avec l'ensemble des 5 triangles : 7 quadrilatères, 1 pentagone et 1 hexagone....43
Illustration 33: Les 15 pentagones réalisables avec les 5 triangles ont des convexités allant de 0 à 8....44
Illustration 34: Les premières formes à baie sont des octogones ayant 3 ou 4 côtés tournés vers l'intérieur. Le seul vrai trou a neuf côtés. La convexité maximum est de 23 (en haut à droite, les 2 formes ayant 9 côtés), mais lorsqu'il y a un trou celle-ci chute à 13 (en bas à droite)....44
Illustration 35: Quelques formes (en haut), leur solution (en bas) et quelques paramètres qui pourraient être responsables de la difficulté de la reconstitution (la liste n'est pas exhaustive) : convexité (CVX), nombre de côtés (COT), nombre d'angles dissimulés (DIS), nombre d'angles exhibés (ANG) et nombre de bords exhibés (BOR)....46
Illustration 36: Quelques valeurs de la convexité réelle de formes hétérogènes de moins de 1 triangle de convexité....47
Illustration 37: Détermination, pour quelques formes homogènes, de la convexité réelle (nombre du haut) qui correspond à la différence entre l'aire de la forme convexe grise (l'enveloppe convexe) et l'aire des pièces (6 pour le jeu des 5 triangles). La convexité sur quadrillage (en bas) est toujours supérieure à la convexité réelle. 48
Illustration 38: Formes de convexité réelle maximum réalisables avec le jeu des 5 triangles : à gauche, classées selon leur convexité sur quadrillage (de 19 à 23 ici), les 12 formes homogènes de convexité réelle égale à 15, à droite la forme hétérogène de convexité réelle égale à 19.31....48
Illustration 39: Différentes longueurs de segment qui apparaissent avec le jeu des 5 triangles....49
Illustration 40: Formes homogènes réalisables avec les 5 triangles du Tangram dont les convexités réelles et sur quadrillage sont égales....50
Illustration 41: Les 13 formes convexes réalisables avec un Tangram (en noir) et les 7 autres formes homogènes de même aire mais impossibles avec ce jeu (en gris)....51
Illustration 42: Les 22 pentagones homogènes se répartissent en 2 formes convexes et 20 non-convexes parmi lesquelles 10 ont un angle de 225°, 7 un angle de 270° et 3 un angle de 315°....52
Illustration 43: Les 38 formes obtenues à la 2ème étape du processus d'agrégation des 7 pièces (voir leurs codes dans le tableau ci-dessous). Les formes a et b sont produites de plusieurs façons différentes (voir le tableau ci-dessous)....53

Illustration 44: Les 10 premières formes à baie (à gauche) et les 3 premières formes à trou ont 7 côtés. Parmi les 1 245 formes pleines à 7 côtés, 8 seulement sont symétriques (à droite)....56
Illustration 45: Les 13 formes de trous que l'on rencontre dans un tangram homogène....56
Illustration 46: Les formes à trou réalisables avec le Tangram ayant une enveloppe convexe sont au nombre de 13 comme les formes convexes....57
Illustration 47: Les différentes types d'agrégation des pièces selon leur impact sur le nombre de côtés se répartissent entre 7 valeurs allant de -3 à +3, les plus fréquentes étant +1 et surtout +2....58
Illustration 48: Les 16 formes homogènes à 16 côtés ayant une baie au moins (13 en ont deux) et un élément de symétrie réalisables avec le Tangram contiennent 3 formes avec un axe (celles qui n'ont qu'une baie) et 13 avec un centre demi-tour (celles qui en ont deux)....59
Illustration 49: Formes homogènes renfermant 5, 4, 3, 2, 1 ou 0 nœuds du quadrillage et nombres de nœuds du quadrillage qui en découle sur le bord de la forme (8, 10, 12, 14, 16 ou 18)....60
Illustration 50: Sur les 133 tangrams homogènes constitués de 10 segments sur le bord (P=10, I=4), il y en a 16 qui possèdent au moins un élément de symétrie. 61
Illustration 51: Les formes homogènes ayant 10 segments sur le bord ont perdu 20 segments lors de l'agrégation des pièces, soit 8 de plus que le minimum. Quelques exemples à gauche et leurs solutions au centre montrant les 8 segments et les points du quadrillage emprisonnés à l'intérieur. Le paramètre R désigne le nombre de segments de longueur Rationnelle 1 ; ce nombre ne prenant que 3 valeurs lorsque P=10. À droite, un scénario d'agrégation de la 1ère des formes présentées. 63
Illustration 52: Les 4 tétraminos disposés en bas, selon les lignes du quadrillages et en haut selon ses diagonales. Dans cette dernière disposition, les emplacements possibles de la pièce carrée sont indiqués en noir. Lorsque les grands triangles (en gris) sont entrés à leur tour, on ne peut plus caser le parallélogramme, ce qui montre que ces formes sont impossibles....65
Illustration 53: Répartition des formes homogènes selon le nombre de segments du bord et la part rationnelle de ces segments. L'aire des disques est proportionnelle aux effectifs....66
Illustration 54: Les 136 octomino-tangrams ont tous leurs bords rationnels. Ici, ils sont classés selon leur nombre de segments qui ne peut prendre que 4 valeurs : 12 (2 formes), 14 (19 formes), 16 (59 formes) et 18 (56 formes dont une à baie)....67
Illustration 55: Les 79 formes homogènes appartenant aux 6 catégories de périmètre réel les moins abondantes contiennent de nombreuses formes remarquables dont 7 formes convexes....69
Illustration 56: Quelques spécimen remarquables par leur symétrie ou leur bord externe convexe parmi les formes homogènes ayant un trou. 70
Illustration 57: Les formes homogènes ayant un trou et un bord externe convexe sont assez nombreuses relativement au faible nombre de formes à trou, surtout si l'on considère les différentes variantes liées à la disposition du trou. Ici nous avons ajouté les quelques formes à baies apparentées 70
Illustration 58: Les différentes sortes de rectangles contenant les formes homogènes peuvent avoir 21 aires différentes (caractéristique appelée dimension). Comme certaines aires sont réalisables de 2 façons, cela conduit à 24 rectangles différents....76
Illustration 59: Les situations où les valeurs des différentes sortes de convexités, ou des écarts entre celles-ci, sont poussées au maximum....78
Illustration 60: Les coordonnées des points du quadrillage contenus dans les formes homogènes sont obtenues à partir des matrices des codes 0 à 5. Les angles avec l'horizontal étant déterminés (les triplets donnent à droite le cosinus de cet angle), les points sont réordonnés et passés au crible de Graham qui élimine ceux qui sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe....81
Illustration 61: Les 11 formes homogènes ayant une enveloppe convexe décagonale. La forme convexe de droite possède 20 sommets sur le quadrillage mais son aire est beaucoup trop importante pour qu'elle soit l'enveloppe convexe d'un tangram....82
Illustration 62: Les 7 formes de convexité maximale égale à 23 dont le périmètre vaut 18 et contient 12 segments de longueur unité....83
Illustration 63: Les 95 formes homogènes qui ont une enveloppe convexe carrée sont de 6 types (leur convexité est égale à 0, 2, 10, 16, 18 ou 20). En bas à droite, les 4 formes de convexité 24 dont la convexité est égale à la convexité sur quadrillage sont inscrites dans 2 sortes d'hexagones....84
Illustration 64: Certains tangrams homogènes ont une enveloppe convexe triangulaire dont un des côtés est non-conforme comme le petit côté de la forme de droite....85
Illustration 65: Les 2 nouvelles longueurs de segment rencontrées avec les assemblages hétérogènes des 7 pièces du jeu....88
Illustration 66: Seules les formes hétérogènes pleines sont générées ici (a, b, c) ; les formes à baie (d, e, f) pourraient l'être avec notre encodage ; celles à trou (g, h, i) nécessitent un autre encodage ; les formes j, k et l ne sont pas hétérogènes (un chevauchement interdit pour j, des assemblages ne partant pas d'un point de référence pour k et l. 90
Illustration 67: Une forme peut être présente en plusieurs exemplaires qui diffèrent par leur entête (la liste des pièces restant à utiliser : 5 chiffres ici séparés du code de la forme par un point). À droite, une seule occurrence de cette forme subsiste dans le fichier expurgé....91
Illustration 68: Les 72 quadrilatères hétérogènes présents aux différentes étapes de l'agrégation sont principalement des formes homogènes. Les formes non-homogènes (1 sur 9 en moyenne) sont grisées....92
Illustration 69: Les 53 pentagones réalisables avec le Tangram sont tous hétérogènes. Parmi eux, 22 formes seulement sont homogènes (en noir) 95
Illustration 70: Quelques-unes des formes hétérogènes dont le bord contient 24 segments (le maximum pour les formes hétérogènes)....97
Illustration 71: Décomptes des parties rentrantes et des angles rentrants dans quelques tangrams....99
Illustration 72: Les 273 tangrams non-homogènes symétriques dont le périmètre est un nombre entier : 12 (4 formes), 14 (39 formes), 16 (48 formes) ou 18 (182 formes dont une solutionnée). La figure présente aussi quelques formes non symétriques (en gris) de périmètre 20 essentiellement (à droite), cette catégorie pourtant nombreuse (1 291 114 formes) n'ayant pas de forme symétrique 101
Illustration 73: Quelques-unes des 22 852 formes hétérogènes dont la part rationnelle du périmètre est nulle. En noir, les 9 formes qui ont un périmètre égal à (dont le carré, qui est la seule forme homogène du lot). En gris, le périmètre vaut . La solution de la seule forme symétrique montre qu'ici, la somme des longueurs des segments fractionnés (2a+2c) neutralise les 6 longueurs 1 103
Illustration 74: Les 11 formes hétérogènes de convexité supérieure à 30 petits triangles et les 2 formes symétriques de convexité maximale....103
Illustration 75: Les coordonnées rationnelles et irrationnelles de la convexité des tangrams hétérogènes permettent de dessiner ce nuage où les couleurs sont basées sur l'exposant de la puissance de 2 de l'effectif (noir de à , ... , blanc de à). Les lignes d'isoconvexités sont esquissées rappelant que la convexité varie entre 0 et 30 environ....105
Illustration 76: Quelques tangrams non-homogènes de faible convexité montrant de curieuses excavations ou petits décrochements....105
Illustration 77: Les 2 formes de convexité maximale (30.75), 2 des 8 formes de convexité non nulle minimale (0.12) et 4 autres formes de faible convexité (inférieure à 0.5)....107
Illustration 78: Tangrams à enveloppe triangulaire : 86 convexités différentes, 6 formes symétriques et une forme ayant 20 côtés. En gris : formes de même convexité et de dimensions différentes 108
Illustration 79: Les 7 différentes enveloppes qui soient des triangles isocèles rectangles....109
Illustration 80: Les 5 sortes d'enveloppes triangulaires isocèles qui ne sont pas rectangles....110

Illustration 81: Les 10 formes hétérogènes d'enveloppes hendécagonales dont les convexités sont les plus grandes et les plus petites.....111
Illustration 82: Répartitions des parties rationnelles et irrationnelles des tangrams hétérogènes ayant une enveloppe convexe triangulaire (à gauche) et hendécagonale (à droite).....111
Illustration 83: Quelques-uns des 6 103 tangrams non-homogènes symétriques : ceux qui ont le moins de côtés en haut (6 à 8 côtés) et ceux qui en ont le plus en bas (20 et 18 côtés).....113
Illustration 84: Quelques-unes des formes symétriques non-homogènes à 14 côtés (la catégorie la mieux représentée).....114
Illustration 85: Formes ne présentant pas les mêmes éléments de symétrie (forme n°1: un axe, forme n°2: un centre, forme n°3: aucune symétrie), données sous la forme de leurs 16 alias. Les égalités entre alias permettent d'identifier le type de symétrie.....115
Illustration 86: 20 formes hétérogènes non convexes de convexités différentes, inférieures ou égales à un triangle : valeurs approchées au centième et forme canonique.....118
Illustration 87: Rectangles obtenus par assemblage des 12 pentaminos et plateau du jeu Tetris avec les 5 tétraminos (à droite) dont 2 sont doublés car sans axe de symétrie ils nécessitent un retournement pour paraître différents, or seules les rotations sont permises avec ce jeu 119
Illustration 88: Les polyabolos d'aire inférieure ou égale à 5 petits triangles : 1 monoabolo, 3 diabolos, 4 triabolos, 14 tétrabolos et 30 pentabolos. En gris, les formes convexes qui se raréfient 120
Illustration 89: Les 2 premiers polyabolos à trou sont des heptabolos (le trou est appelé baie car il communique avec l'extérieur). Le premier vrai trou apparaît chez les décabolos. Le premier polyabolo ayant deux trous séparés est un 17abolo.....123
Illustration 90: Quelques polygones sur quadrillage d'aire égale à 16 petits triangles qui réussissent à englober 6 et même 7 points du quadrillage ce que les polyabolos ne peuvent pas réaliser du fait de leur contrainte de forme.....123
Illustration 91: Un exemplaire de chaque sorte d'octobolo, le nombre de côtés allant de 3 à 10 (de gauche à droite) et le nombre de segments P prenant les valeurs 6, 8 ou 10 selon la valeur du nombre I de points du quadrillage à l'intérieur de la forme (I varie entre 0 et 2).....124
Illustration 92: Les répartitions selon le nombre de côtés des 16abolos et des tangrams montrent une défaillance du Tangram pour reconstituer les formes ayant le plus de côtés.....126
Illustration 93: Les 233 octominos irréalisables avec le Tangram (les réalisables sont figure 54) se composent principalement des formes élancées ayant 18 segments de longueur 1. En bas à droite, les 4 tétraminos irréalisables en noir et, pour mémoire en gris, le carré qui est le seul tétramino réalisable.....128
Illustration 94: Les 122 16abolos des 5 catégories inférieures du périmètre réel (de 10.828 à 12.485 environ). En gris, les formes réalisables avec le Tangram et en noir celles qui ne les ont pas.....129
Illustration 95: Les polyabolos convexes de taille inférieure ou égale à 16. En noir, les 16abolos reconstituables avec le Tangram.....131
Illustration 96: Quelques 16abolos des 8 catégories irréalisables par le Tangram du fait d'une part irrationnelle trop importante. 132
Illustration 97: À droite, les premiers heptagones et octogones ; à gauche, la diversité combinatoire produit 8 heptagones et 8 octogones lorsque n=50.....135
Illustration 98: Les différentes tailles des carrés pouvant être disséqués à l'aide de polyabolos font partie de 2 familles, selon l'orientation des côtés 136
Illustration 99: Polyabolos de dimensions, de convexités rectangulaires (en haut) et de convexités sur quadrillage (en bas) maximum pour n allant de 15 à 18.....137
Illustration 100: Quelques 16abolos remarquables par leur convexité réelle maximale, leur symétrie malgré une enveloppe triangulaire ou décagonale. Les formes ayant 18 côtés sont nombreuses (982 983 dont 734 ont un élément de symétrie) comparées à celles que reconstitue le Tangram (12 276 seulement).....141
Illustration 101: les 55 formes symétriques remarquables de la famille des 16abolos dont les 11 qui sont réalisables avec le Tangram (en gris).....142
Illustration 102: les 85 formes symétriques remarquables de la famille des 18abolos.....143
Illustration 103: Les premiers polycompacts : les 5 dicompacts contiennent les 3 diabolos et parmi les 32 tricompacts on retrouve sans peine les 4 triabolos (en gris).....145
Illustration 104: 2compacts, 4compacts, 6compacts, 8compacts et 10compacts à la symétrie remarquable (plus d'un élément de symétrie). Les formes homogènes (en gris) se noient peu à peu dans la diversité hétérogène.....147
Illustration 105: Polycompacts ayant un centre de rotation d'ordre 8. La plus petite de ces formes possède 8 triangles et sert à construire les 3 autres qui en possèdent 16.....149
Illustration 106: Tentative de génération des tétracompacts symétriques à partir des dicompacts, utilisant 2 exemplaires identiques d'un même dicompact.....150
Illustration 107: Le seul hexacompact symétrique qui ne peut être construit par l'une des 2 méthodes proposées.....151
Illustration 108: Tentative de génération des tétracompacts symétriques à partir des dicompacts, ajoutant 2 triangles à un dicompact symétrique 151
Illustration 109: Les 7 premières nouvelles longueurs de segments qui s'ajoutent aux douze déjà rencontrées avec les tangrams hétérogènes.....152
Illustration 110: Quelques variations pour les 11compacts réalisant la treizième longueur.....153
Illustration 111: L'enveloppe convexe de ce n-compact (n= 874 261) dont la convexité ne dépasse pas un centième est hexagonale. Le triangle qui manque a un côté d'environ 0.007 unités 153
Illustration 112: Nuages représentants les convexités réelles des n-compacts pour n allant de 6 à 9, les couleurs étant calculées pour représenter les effectifs.....156
Illustration 113: Quelques 16compacts, la plupart symétriques et avec des trous. Découvrez l'emplacement des pièces (16 triangles identiques). .156
Illustration 114: Les 32 formes remarquables (convexes et/ou à plus d'un élément de symétrique) réalisables avec Chie-no-ita, le précurseur japonais du Tangram.....159
Illustration 115: D'autres jeux historiques proches du Tangram. Le nombre indiqué correspond au nombre de formes convexes réalisables avec le jeu.....160
Illustration 116: Les dissections du carré en n pièces polyaboliques réussissant à reconstituer le maximum de formes convexes, pour n variant de 2 à 5.....162
Illustration 117: Hextan, la dissection du carré en 6 pièces polyaboliques qui réussit à reconstituer 24 formes convexes, est un jeu totalisant 32 triangles.....163
Illustration 118: Nconvex est un jeu d'aire 36 qui réussit à reconstituer 31 formes convexes, un record inégalé jusqu'à présent pour les dissections du carré en 7 pièces polyaboliques.....164
Illustration 119: Convexs est notre champion des dissections du carré en 7 pièces polyaboliques convexes qui réussit à reconstituer 30 formes

convexes . Il provient des jeux d'aire 32 164
Illustration 120: Les scores X de quelques jeux d'aire n variable, les nombres de formes convexes réalisables sont indiqués à droite des carrés 165
Illustration 121: Les scores de certains jeux de 7 pièces d'aire 16, mesurés par leur capacité de reproduction de l'ensemble des 16abolos. Dans chacune des 6 structures illustrées, les jeux sont classés par score croissant et représentés par une reconstitution du carré quand celui-ci est possible 167
Illustration 122: Le jeu Heptex reconstitue 19 formes convexes et ne possède que 2 doubles. Trois jeux contenant davantage de pièces en double font aussi bien que lui 169
Illustration 123: Quelques jeux d'aire 8 triangles à 3, 4 et 5 pièces, avec pour chacun le nombre de formes convexes reconstituables (à droite) et le score aux formes homogènes 171
Illustration 124: Des deux jeux Wintrap, le premier réussit le plus de formes homogènes mais le second réussit mieux aux formes homogènes symétriques, même si il ne réussit pas à reconstituer le carré. Ici, seules les formes homogènes symétriques remarquables sont montrées pour les deux jeux 172
Illustration 125: Les 43 formes remarquables reconstituées par le jeu Win34 qui décroche simultanément 2 records sans parvenir à reconstituer le carré 173
Illustration 126: Les meilleurs jeux de 6, 8, 9 et 10 pièces d'aire 16 pour la reconstitution des formes homogènes à la symétrie remarquable. Seules les formes exceptionnelles (les 10 formes ayant un centre d'ordre 4, il y en a 10 chez les 16abolos) reconstituées sont montrées ici, avec les formes symétriques remarquables non reconstituées en noir (sauf les 30 de Win25) 174
Illustration 127: Les quelques formes remarquables par leur convexité ou leur symétrie réalisées par le jeu à 7 pièces d'aire 18 appelé DiMixTri ne contiennent pas le carré. Voir les nombreuses formes symétriques remarquables des jeux d'aire 18 à la figure 103 175
Illustration 128: Les 42 formes remarquables reconstituées par Sept, le jeu à 7 pièces d'aire 18 qui réussit à reconstituer le maximum de formes à la symétrie exceptionnelle (2ème ligne plus le carré) 177
Illustration 129: Quelques tangrams hétérogènes à trou ou à baie (les 3 premiers de la ligne du bas), laissant entrevoir la grande variété des trous qu'il faut s'attendre à trouver 178
Illustration 130: La codification d'une forme à baie ne nécessite pas d'aménagement de notre méthode qui utilise 96 caractères. Pour une forme à trou, il faut préciser la position et l'orientation du trou par rapport au bord externe en donnant le code du trou et les coordonnées de son origine (deux nombres de la forme où a et b sont des entiers) 180
Illustration 131: Constitution d'un trou à la 7ème étape d'un agrégat hétérogène : par fermeture simple (a et d) ou par oblitération d'une baie (b et c). 182
Illustration 132: Quelques assemblages hétérogènes à trou (a à c) pour lesquels la création du trou ne génère pas de longueur de segment originale. Les assemblages marqués incorrects ne respectent pas la règle hétérogène. 183
Illustration 133: Quelques autres exemples de formes à trou pour lesquels il n'est pas évident que les longueurs générées par la création du trou soient déjà connues 184
Illustration 134: Quelques tangrams réglés par les milieux et symétriques, extraits du livre de J. Slocum (a, b, c, e : p.100; g : p.105; d : p.131; f : p.120) 189
Illustration 135: Quelques exemples de tangrams réglés par les milieux mais non symétriques dont certaines proviennent des livres historiques (a : p.109; b et c : p.111; d, e et f : p.112; g : p.131) 190
Illustration 136: Quelques formes assemblées par les milieux qui produisent des longueurs nouvelles (sauf la forme f), inconnues des tangrams hétérogènes 191
Illustration 137: Quelques exemples de tangrams réglés par butée qui apparaissent dans le livre de J. Slocum (respectivement aux pages 109, 110, 133, 143, 157 et 169) 192
Illustration 138: Détermination de quelques longueurs relatives à un assemblage réglé par butée 193
Illustration 139: Quelques formes générales qui présentent des assemblages pouvant rappeler les assemblages réglés des formes propres 194
Illustration 140: Deux exemples de suites infinies d'hexagones propres construites à partir de 2 pentagones hétérogènes (ligne du haut) ou d'un quadrilatère homogène (le carré, ligne du bas) 195
Illustration 141: Parmi les 10 tangrams hétérogènes de périmètre minimum (environ 10.828) les 8 qui ne sont pas homogènes forment 4 paires et autant de suites de formes propres ayant toutes la même valeur du périmètre, car le bloc mobile de 1 ou 2 pièces glisse sans changer le périmètre 196
Illustration 142: Une forme hétérogène (à gauche) étirée continument en une suite infinie de formes propres (un exemplaire est donné au centre) aboutissant à la forme impropre de périmètre maximal majoré par 34.143 (à droite) 197
Illustration 143: La forme impropre d'aire maximale provisoire (au centre) et 4 possibilités d'agencement parmi d'autres (celle donnée par Martin Gardner en 1974 est en bas à gauche) pour les assemblages propres qui y conduisent ainsi que pour les assemblages hétérogènes pleins d'où ces formes propres pourraient provenir 198
Illustration 144: Anneau ne conduisant pas une ferme propre (à gauche) et anneau n'ayant pas de forme complètement impropre mais qui pourtant constitue une ferme propre valide (à droite) 199
Illustration 145: Les 24 fermes dont l'aire vient en 2ème position, après la ferme de Gardner qui caracole seule en tête, s'apparient par couples, selon la disposition du parallélogramme 200
Illustration 146: Les autres formes impropres, d'aire supérieure à 9 unités qui peuvent se transformer en fermes impropres. Les appariements sont ici dus aux petits triangles 201
Illustration 147: Recherche manuelle de la ferme ayant le nombre maximum de côtés (ext et tot désignent les nombres de côtés à l'extérieur et au total). La valeur annoncée comme certaine par Gardner (trou à 13 côtés) n'a pas été trouvée 202
Illustration 148: Recherche manuelle de la ferme ayant n côtés d'aire maximum pour n≤10. Nous avons ajouté les fermes impropres d'aire maximum obtenues par programme pour n=7, 8, 9 et 10 ainsi qu'une forme ayant un trou triangulaire d'aire ½ et un trou parallélogramme d'aire 1 203
Illustration 149: Les solutions que Martin Gardner a lui-même proposé pour ces différents problèmes concernant les trous des formes propres 204
Illustration 150: Déterminations des périmètres réels et des convexités de type 1 et 2 pour quelques-unes des fermes propres déjà mentionnées 205
Illustration 151: Trois « bases » simples rassemblent les deux grands triangles et le moyen. En gris, les points d'attache de la « couronne » des autres pièces 206
Illustration 152: Les 76 assemblages homogènes possibles contenant les 4 petites pièces (sans le triangle moyen). En grisant les points d'attache des bases, on voit que seulement 2 assemblages n'ont pas d'attache possible avec les bases et ne constituent pas des "couronnes" acceptables. 207
Illustration 153: Une couronne accrochée à une base par un de ses points d'attache conduit généralement à 2 tangrams simples (assemblages notés

2/1) mais dans certains cas, la symétrie réduit ce nombre à 1 comme sur la ligne du bas (assemblages notés 1/1)....208
Illustration 154: À gauche, des formes simples impossibles du fait d'un chevauchement de la couronne (grisée) et de la base (noircie, la flèche indiquant le point d'attache). À droite, les formes possibles utilisant le même bord d'attache de la couronne (encadrées)....209
Illustration 155: Les différentes parties pouvant s'assembler indépendamment sur le triangle moyen pour constituer une couronne bi-partite....210
Illustration 156: Les formes simples réalisables avec le Tangram ayant un élément de symétrie, étant convexe, ou ayant un nombre de côtés inférieur ou égal à 6. Nous avons ajouté en gris, les formes qui, étant contractées (sans la rivière) ont une de ces 3 caractéristiques....212
Illustration 157: Découverte des rivières, ces segments inclus dans l'intérieur de certaines formes simples et qui, pour peu qu'on leur accorde de l'importance, troublent la perception....214
Illustration 158: Les quatre différentes sortes de rivières....214
Illustration 159: Aucune des 3 bases ne permet de réaliser deux rivières, il manque toujours un secteur angulaire....215
Illustration 160: Tangrams simples ayant une baie ou un lac (un vrai trou)....215
Illustration 161: Les 26 tangrams simples présents en double si on ne considère que les silhouettes externes. Un agencement différent des pièces conduit en effet, à 2 positions différentes de la rivière....216
Illustration 162: Les dix rivières heptagonales. Nous avons mis entre crochets les 2 silhouettes identiques aux rivières situées à leur gauche, car du fait de l'agencement des pièces, la rivière est disposée autrement et la forme a finalement 8 côtés (et non 7)....217
Illustration 163: Exemples de tangrams naturels (à gauche et à droite) et, encadrées, des formes qui ne sont pas naturelles à cause d'un assemblage qui se fait par les milieux de grands côtés....218
Illustration 164: Les 13 tangrams convexes et les plus petits cercles les contenant. Le disque en haut à gauche est la forme compacte extrême dont l'aire égale celle des tangrams....219
Illustration 165: En tiretets, les médiatrices de 2 segments joignant des sommets situés sur le cercle circonscrit qui permettent de déterminer les coordonnées du centre de celui-ci, et le rayon....221
Illustration 166: Les 19 tangrams homogènes pleins qui ont un cercle circonscrit contenant 8 sommets ont tous la même enveloppe convexe octogonale symétrique de diamètre unités....224
Illustration 167: Les 82 tangrams de diamètre , la plus grande valeur possible pour les formes homogènes, ont tous 2 points seulement sur le cercle circonscrit....228
Illustration 168: Le triangle de Pythagore des 28 diamètres des tangrams ayant uniquement deux sommets diamétralement opposés (cette précision supprime la 29ème valeur représentée par le carré). Les valeurs sont des racines d'entiers entre 16 et 89, principalement issus de triplets pythagoriciens....229
Illustration 169: Le tangram de diamètre 3.8 et un des 4 tangrams de diamètre 7.37, à l'intérieur de leur cercle circonscrit. Les triangles rectangles aux côtés entiers (en tirets) sont des agrandissements des triangles AA'A'', BB'B'' et CC'C'' (les diamètres sont AA'', BB'' et CC'') de coefficients 3 pour le premier et 31 pour le second. On voit apparaître alors différents triplets de Pythagore....230
Illustration 170: Les 108 diamètres différents des tangrams homogènes pleins n'ayant pas 2 points diamétralement opposés. La forme proposée est symétrique quand c'est possible, sinon nous avons choisi une forme aux bords simples....233
Illustration 171: Les 18 tangrams tordus ayant les plus petits diamètres....234
Illustration 172: Les 2 tangrams simples ayant 2 points diamétralement opposés de périmètre maximal (à droite) et les 12 tangrams simples n'ayant pas 2 points diamétralement opposés de périmètre maximal (à gauche)....235
Illustration 173: Exemples de diamètres de tangrams hétérogènes symétriques. En haut, les formes n'ayant pas 2 points diamétralement opposés (à noter : les formes de diamètres extrêmes sont homogènes). En bas, les formes ayant 2 points diamétralement opposés....236
Illustration 174: Quelques tangrams hétérogènes particuliers pour la valeur du diamètre (minimum, maximum ou curiosité) ou le nombre de sommets sur le cercle, chaque catégorie sur une ligne....237
Illustration 175: 16compacts de diamètre minimum. En bas à droite, un 21compact possède 16 sommets sur le cercle, la figure du haut en est extraite : un 16compact à 12 points sur le cercle....238

Index des tables

Tableau 1: Répartition des 64 formes homogènes réalisables avec le jeu GGP....23
Tableau 2: Formes réalisables par les 5 jeux que l'on peut avoir avec 3 triangles du Tangram....24
Tableau 3: Formes homogènes réalisables avec le mini-Tangram et répartitions selon le nombre de côtés et les éléments de symétrie....33
Tableau 4: Coefficients obtenus dans le développement du polynôme caractéristique du mini-Tangram. En gris, les valeurs qui conduisent à des longueurs de segments comprises entre 0 (exclus) et 39
Tableau 5: Répartition des longueurs des segments constituant les bords des formes hétérogènes réalisables avec le mini-Tangram....40
Tableau 6: Le code ASCII fait correspondre un caractère à un nombre. Ici, certains caractères sont utilisés pour coder à la fois la direction et la longueur d'un segment....41
Tableau 7: Répartition des formes homogènes réalisables avec les 5 triangles du Tangram....43
Tableau 8: Répartition croisée entre convexité et nombre de côtés dans les assemblages de 5 triangles....45
Tableau 9: Répartition des différents types de segment constituant les bords des formes hétérogènes réalisables avec les 5 triangles du Tangram.49
Tableau 10: Les 41 formes obtenues par l'agrégation de 2 pièces du Tangram (en gris, les 3 formes en double qui sont obtenues par des assemblages de pièces différents). Les 2 premiers chiffres indiquent les pièces qui ont été agrégées (1:petit triangle, 2:moyen triangle, 3:parallélogramme, 4:carré, 9: grand triangle), ensuite, séparés par un point, les nombres de lignes, de colonnes et le code de la forme....54
Tableau 11: En haut, progression du nombre de côtés selon le nombre de pièces agrégées pour les formes homogènes pleines. En bas, la même progression dans un modèle théorique....57
Tableau 12: Répartition des formes homogènes selon le type plein/baie/trou et la valeur du périmètre (nombre P de segments du bord)....62
Tableau 13: Progression du nombre de formes dont le bord possède n segments lors du processus d'agrégation des pièces entre elles, n variant entre 3 et 18. Les bords des tangrams complets (comptant 7 pièces) ne peuvent prendre que des valeurs paires de n....62
Tableau 14: Répartition des nombres de segments sur le bord avec un modèle simplifié d'agrégation....64
Tableau 15: Répartition des tangrams homogènes selon le type (plein/baie/trou) et le nombre de segments rationnels ou irrationnels qu'ils contiennent. 65
Tableau 16: Répartition des tangrams homogènes selon le périmètre réel et la catégorie....68
Tableau 17: Répartition des formes à trou selon le « périmètre » P et le nombre de segments rationnels....69
Tableau 18: Répartition croisée des tangrams homogènes selon la valeur de leur périmètre réel et selon le nombre de côtés. Malgré ce découpage fin en 221 classes, certaines restent très abondantes : 15 classes contenant plus de 100 000 formes concentrent à elles seules près de 70% de l'effectif 71
Tableau 19: Répartition des tangrams homogènes ayant un bord formé de 18 segments selon la part rationnelle du périmètre....72
Tableau 20: Répartition des tangrams homogènes ayant un bord formé de 18 segments selon le nombre de côtés....72
Tableau 21: Répartition des tangrams homogènes selon la valeur de leur convexité sur quadrillage....74
Tableau 22: Répartition des formes homogènes selon la dimension du rectangle contenant la forme et selon la catégorie (plein/baie/trou)....75
Tableau 23: Début du tableau donnant la répartition croisée entre convexité et dimension des formes homogènes. Le graphique 2 permet de visualiser les courbes obtenues à partir de ces répartitions, pour les principales dimensions (entre 15 et 30)....76
Tableau 24: Répartition des tangrams homogènes selon les valeurs de la convexité réelle et la catégorie (plein/baie/trou). La convexité réelle est nulle pour les 13 formes convexes....79
Tableau 25: Répartition des tangrams homogènes selon le nombre de sommets de leur enveloppe convexe et leur catégorie (plein/baie/trou)....82
Tableau 26: Répartition des formes homogènes ayant une convexité réelle égale à la convexité sur quadrillage. La moyenne des convexités pour ce groupe de formes est de 8.49, soit 2.5 de moins que la moyenne des convexités réelles et 6.7 de moins que la moyenne des convexités sur quadrillage....83
Tableau 27: Répartition des formes de périmètre 18 dont la part rationnelle vaut 12 selon le nombre de sommets de l'enveloppe convexe et la convexité réelle....85
Tableau 28: Coefficients du développement de l'expression F qui donne les différentes contributions possibles des pièces pour une fraction résiduelle de la longueur d'un segment unitaire....86
Tableau 29: Les 12 différentes longueurs de segments unitaires pour les formes hétérogènes réalisées avec le Tangram et leur rang d'apparition lors du processus d'agrégation des pièces....87
Tableau 30: Liste des 96 symboles nécessaires à l'encodage des différents types de segment, selon la longueur (12 longueurs possibles) et selon la direction (8 directions possibles) du segment....88
Tableau 31: Progressions des nombres de formes hétérogènes (Ni : avant expurgation, N'i : après expurgation des doublons) pendant le processus d'agrégation (i : nombre de pièces agrégées)....89
Tableau 32: Répartition des formes homogènes au sein des formes hétérogènes pleines lors du processus d'agrégation....91
Tableau 33: Répartition des formes hétérogènes obtenues durant le processus d'agrégation des formes, selon leur nombre de côtés (pour les formes à 7 pièces, le décompte complet est tableau 35) 93
Tableau 34: Part des formes homogènes au sein des formes hétérogènes ayant le même nombre de côtés (18 côtés au maximum pour un tangram homogène), à chaque étape de l'agrégation....93
Tableau 35: Répartition des formes hétérogènes selon le nombre de côtés et la part des formes homogènes. Globalement, il y a 12 500 fois plus de formes hétérogènes que de formes homogènes....94
Tableau 36: Répartition des agrégats intermédiaires rencontrés lors de la génération des tangrams hétérogènes, selon leur aire (l'unité d'aire est le petit triangle) et le nombre de pièces utilisées....95
Tableau 37: Évolution des parts (en %) de chacune des 12 longueurs de segment, au cours du processus d'agrégation des pièces....96
Tableau 38: Répartition des formes hétérogènes selon le nombre de segments du bord....96
Tableau 39: Répartition des formes hétérogènes selon leurs périmètres réels. Les nombres indiqués sont les effectifs des formes ayant telle part rationnelle et telle part irrationnelle....100
Tableau 40: Les 51 différentes valeurs du périmètre réel d'un tangram hétérogène s'écrivent où b est la part rationnelle et a la part irrationnelle. 102
Tableau 41: Répartition par tranches des convexités réelles 104
Tableau 42: Répartition des formes hétérogènes selon le nombre de côtés de l'enveloppe convexe....109
Tableau 43: Répartition des tangrams hétérogènes symétriques selon leur nombre de côtés et leur caractéristique (homogènes ou non) et évolution de 2 ratios concernant ces formes symétriques....112
Tableau 44: Répartition des formes non-homogènes symétriques selon le nombre de côtés, la catégorie (homogènes ou non), et la nature des

éléments de symétrie.....112
Tableau 45: Effectifs et répartitions des polyabolos pleins selon leur aire (unité d'aire : petit triangle) et le nombre de côtés du bord pour une aire inférieure ou égale à 16 triangles (l'aire du Tangram). La dernière ligne donne les pourcentages de formes réalisées par le Tangram.....121
Tableau 46: Dénombrements des polyabolos ayant entre 1 et 16 triangles d'aire, pour les 3 catégories de forme topologique (pleines, avec baie et avec trou), répartis selon le nombre de segments du bord.....122
Tableau 47: Différentes valeurs du Périmètre P lorsque n et I varient, calculés à l'aide de la formule de Pick. Les cases grisées indiquent les valeurs possibles. Sur la dernière ligne nous avons calculé , un minorant acceptable pour P, au moins pour le domaine de variation considéré.....125
Tableau 48: Les rapports entre les nombres de polyabolos d'aires consécutives s'approchent d'une valeur moyenne approximativement égale à 3.6 126
Tableau 49: Nombres de n-abolos convexes selon le nombre n de triangles unitaires qui les composent, répartis selon le nombre de côtés. Les lignes grises correspondent aux valeurs de n pour lesquelles le carré est réalisable.....133
Tableau 50: Convexité et dimension maximum d'un polyabolo d'aire n comprise entre 1 et 16 triangles.....137
Tableau 51: Croisement de la dimension et de la convexité sur quadrillage chez les octobolos.....139
Tableau 52: Extrait de la répartition croisée entre dimension et convexité sur quadrillage chez les 16abolos.....140
Tableau 53: Répartition des n-abolos symétriques selon leur nombre de côtés et selon le type de forme (pleins, à baie et à trou) jusqu'à n=18 triangles.....140
Tableau 54: Les effectifs Ei des poly-compacts sont multipliés par plus de 12 à chaque triangle ajouté, à partir de 6 triangles. En gris, les effectifs et les coefficients estimés.....146
Tableau 55: Poly-compacts symétriques. Les formes homogènes étant connues, nous en déduisons une estimation complémentaire pour les valeurs manquantes.....148
Tableau 56: Les différences entre longueurs rationnelles et longueurs irrationnelles, si elles sont comprises entre 0 et , constituent les 12 longueurs de segments rencontrées avec les tangrams hétérogènes (en gris) et les 7 longueurs de segments additionnelles rencontrées avec les 16compacts (en blanc sur fond noir les 17ème, 18ème et 19ème longueurs). Barré : nécessite plus de 16 triangles.....154
Tableau 57: Répartitions des longueurs de segments dans les n-compacts, pour n allant de 1 à 9.....155
Tableau 58: Répartition du nombre de côtés des n-compacts pour les valeurs de n<10.....155
Tableau 59: Pourcentages des formes homogènes à l'intérieur des n-compacts.....156
Tableau 60: Les 25 premières valeurs de la convexité réelle (lorsqu'on observe le phénomène jusqu'à n=9), et les effectifs réalisant ces valeurs chez les n-compacts.....157
Tableau 61: Nombres de formes homogènes obtenus dans les agrégats de 2 à 7 pièces pour quelques jeux à 7 pièces d'aire 16. On constate, à part pour Heptex, que les meilleurs résultats pour 7 pièces sont déjà perceptibles dans les agrégats de 2 pièces.....167
Tableau 62: Table de soustraction des douze longueurs de segment des formes hétérogènes.....184
Tableau 63: Table d'encodage des formes simples. Pour le Tangram, les 4 premières colonnes suffisent, et si on oriente correctement les formes dans le quadrillage, les minuscules sont inutiles.....212
Tableau 64: Répartition des formes simples selon le nombre de côtés et le type (pleine/rivière/baie/trou).....216
Tableau 65: Répartition des formes simples selon le nombre de côtés et la part rationnelle du périmètre.....217
Tableau 66: Répartition des tangrams simples pleins selon le nombre de côtés.....217
Tableau 67: Répartition des tangrams homogènes pleins selon le nombre de points (pts) situés sur le cercle circonscrit (l'abréviation Diam signifie qu'il existe deux points diamétralement opposés).....223
Tableau 68: Exemples de tangrams pour les 7 diamètres communs aux formes Diam (en bas) et Non-diam (en haut). Pour les formes Diam, les exemples montre le maximum de sommets sur le cercle.....225
Tableau 69: Les 29 diamètres des tangrams homogènes pleines ayant deux points diamétralement opposés (en gris, les valeurs commune à l'autre catégorie).....226
Tableau 70: Les 108 diamètres des tangrams homogènes pleins Non-diam.....231
Tableau 71: Répartition des tangrams homogènes pleins selon le diamètre du cercle circonscrit et la catégorie Diam/Non diam.....232

Table des Matières

Chapitre 1 : Rencontre avec le Tangram 7

Avec ses pièces géométriques, le Tangram appartient à la catégorie des jeux de dissection géométrique : on découpe une silhouette en pièces et, avec ces pièces, sans chevauchement, on reconstitue une multitude de silhouettes.....7

Chapitre 2 :
Premiers assemblages 19

Lorsqu'on assemble deux ou trois pièces du jeu entre elles, le nombre de combinaisons est faible. Il est alors possible d'essayer de les trouver toutes et d'étudier la diversité des formes trouvées.....19

Chapitre 3 :
Assemblages en étoile 26

Avec les formes en étoile, nous faisons nos premiers pas dans un monde plus vaste que celui des formes sur quadrillage. Déterminer le périmètre de ces formes hétérogènes nous amène à rencontrer de nouveaux types de segments.....26

Chapitre 4 :
Le jeu de Mini-Tangram 33

Le Mini-Tangram est le jeu obtenu en supprimant les deux grands triangles du Tangram. L'étude des assemblages hétérogènes de ce jeu nous conduit à préciser la méthodologie employée pour coder ce type de formes 33

Chapitre 5 :
Assemblages des cinq triangles 43

Nous examinons ici les assemblages qui peuvent se réaliser avec les pièces triangulaires du Tangram. À cette occasion, la notion de convexité, ou plutôt d'écart à la convexité, est examinée.....43

Chapitre 6 :
Tangrams homogènes 51

Génération des assemblages homogènes réalisables avec les pièces du Tangram. On se penche, à ce propos, sur le processus de formation des côtés et on détermine la répartition des formes que ce nombre de côtés induit.....51

Chapitre 7 :
Périmètre 60

Le périmètre des assemblages homogènes du Tangram est étudié à la lumière de la relation de Pick. La répartition des segments rationnels et irrationnels sur le bord ou à l'intérieur de la forme conditionne les différentes valeurs du périmètre 60

Chapitre 8 :
Périmètres réels et convexité 73

Les assemblages homogènes sont plus ou moins proches des formes convexes. Cet aspect déterminant de l'allure d'une forme supporte trois définitions que l'on examine ici, ce qui nous amène à examiner l'enveloppe convexe de ces tangrams.....73

Chapitre 9 :
Génération des hétérogènes 86

Les assemblages hétérogènes des pièces du Tangram posant des problèmes de génération (pas seulement pour les

formes à trou), seules les formes pleines ont été générées et sont étudiées ici.....86

Chapitre 10 :
Étude des formes hétérogènes 100

Le fichier considérable des formes hétérogènes est étudié à travers trois caractéristiques principales : périmètre, convexité et symétrie. Des sous-ensembles remarquables peuvent être alors identifiés pour les valeurs extrêmes de ces paramètres.....100

Chapitre 11 :
La grande famille des polyabolos 119

Les assemblages homogènes sont le domaine des polyabolos. L'étude de ces formes est un objet d'étude passionnant en soi qui permet de mesurer la capacité combinatoire du Tangram.....119

Chapitre 12 :
Les assemblages polycompacts 145

Les assemblages hétérogènes sont le domaine des polycompacts. Ceux-ci sont extrêmement nombreux et posent de sérieux problèmes de génération dès que le nombre de triangles augmente, mais leur grande variété justifie cet effort 145

Chapitre 13 :
Recherche d'un meilleur jeu 159

Le Tangram et ses variantes historiques peuvent se mesurer sur le terrain de la capacité combinatoire. De meilleurs jeux existent-ils? Une fois définis les termes de cette question, on peut commencer à y répondre.....159

Chapitre 14 :
Autres assemblages finis 178

Les formes hétérogènes à trou, les assemblages réglés par les milieux ou par une butée, les assemblages infinis réductibles au fini. Les premiers jalons sont posés pour repousser les limites de l'univers fini du Tangram qui reste à explorer.....178

Chapitre 15 :
Problèmes avec des tangrams propres 195

Les formes propres sont en nombre infini, mais certaines questions – comme le problème de la ferme de Martin Gardner – cherchant à délimiter les formes extrêmes, nous conduisent à parcourir cet infini en nous basant sur la connaissance du fini.....195

Chapitre 16 : Les assemblages simples.....206

Après l'étude des tangrams homogènes et hétérogènes, de nouvelles règles d'assemblage ont été découvertes permettant d'identifier et de générer d'autres collections réduites de tangrams dont les simples et les naturels qui sont étudiés ici.....206

Chapitre 17 : Diamètres.....219

Une caractéristique intéressante d'un tangram est fournie par le plus petit cercle le contenant. Notre recherche de l'ensemble des diamètres possibles pour les formes homogènes et hétérogènes nous révèle des valeurs étonnamment variées.....219

Version numérique 3.1

28 octobre 2014

ISBN 978-2-9550889-1-3