8 Le solitaire français

Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc.
(Alexandre Grothendieck, 1986, *Récoltes et semailles*)

Dans le jeu du solitaire dit « français », le plateau est marqué de 37 creux disposés en forme d'octogone – la meilleure approximation d'un disque – et dans chaque creux, on peut placer une boule. Pour jouer, on commence par se fixer une figure de départ en disposant des boules dans un choix de creux dessinant une figure particulière. Généralement, on couvre complètement le jeu avec 37 boules et on en retire une, celle du centre ou une autre.

Le jeu consiste à éliminer les boules une à une en effectuant des prises comme dans le jeu de dames, c'est-à-dire en sautant avec une boule au-dessus d'une boule adjacente et en se plaçant derrière celle-ci, dans un creux libre. Habituellement, l'objectif est de n'obtenir qu'une seule fiche à la fin, si possible au centre du jeu mais, comme on le verra, cet objectif est impossible à atteindre avec le solitaire français si on a enlevé au départ la boule du centre. On peut aussi se fixer une autre figure comme objectif, pas forcément une seule boule finale.
J'ai choisi d'étudier le jeu sur un plateau dit « français » mais le solitaire existe dans de nombreuses autres variantes :

- Variante à 33 trous, dite « anglaise » : on enlève quatre trous pour former une croix
- Variante à 41 trous, dite en « diamant » : on adjoint les quatre sommets d'un carré
- Variante à 45 trous, dite « allemande » : on ajoute une rangée aux extrémités de l'anglaise

FIGURE 8.1 – *Un jeu de solitaire français de réalisation malgache (plateau de palissandre, boules en pierre)*

Ce jeu est bien connu et très ancien semble t-il. Il en existe de toutes sortes, certaines somptueuses comme ces bouliers malgaches en bois sculpté assorti de boules en pierres semi-précieuses. Aujourd'hui, bien sûr, on peut aussi y jouer sur ordinateur, tablette ou smartphone... Le support informatique permettant de développer de nombreuses variantes. On trouve aussi sur internet des solveurs, ces logiciels qui trouvent les solutions d'un problème. Mon premier objectif a été de fabriquer un tel solveur, le plus simplement possible, et de l'utiliser pour déterminer une solution à un problème constitué par une figure particulière.

1. Élaboration du solveur

La règle est tellement simple et le jeu tellement difficile que l'on s'en lasse assez vite la plupart du temps. Certains persévèrent, atteignent le but et même, parfois, réitèrent leur exploit.

a. Notations

Notation des cases

Édouard Lucas [1], dans le tome 1 de ses Récréations Mathématiques, nous donne quelques figures publiées par un certain chevalier Paul Busschopp dans ses Recherches sur le jeu de solitaire. Lucas donne une solution pour chacun de ces problèmes, utilisant une notation des coups qu'il dit devoir au mathématicien Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) qui étudia le déplacement du cavalier au jeu d'échec. Cette notation désigne par un nombre de deux chiffres chacune des cases du solitaire (voir l'illustration) : le 1er chiffre est l'abscisse de la case indiquant la colonne dans laquelle elle se trouve, le 2e est l'ordonnée indiquant la ligne.

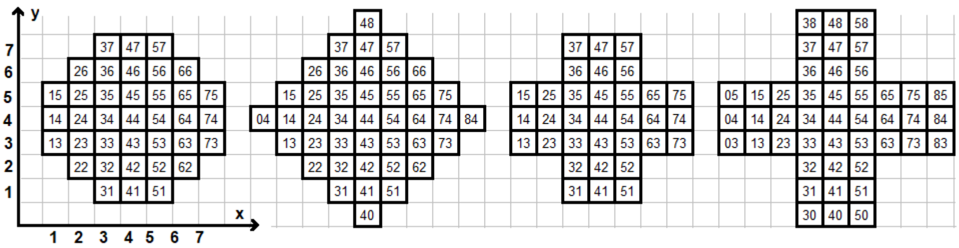


FIGURE 8.2 – *Notation Vandermonde/Lucas des cases du jeu à l'aide de deux chiffres. Le plateau de gauche est la variante française, en allant vers la droite : variantes diamant, anglaise et allemande*

Pour effectuer une prise, il faut commencer par vérifier qu'à côté d'un trou occupé se trouve un autre trou occupé et que, dans l'alignement, derrière, il existe un trou libre. Par exemple, sur le problème de la figure ci-dessous qui présente une croix avec neuf boules, si on veut faire un coup avec la boule placée dans la place 45, il faut remarquer que la 46 est occupée et que la 47 est libre : on retire alors la boule de la place 46 et on déplace celle de la 45 jusqu'en 47. Lucas note ce coup avec la fraction 45/47.

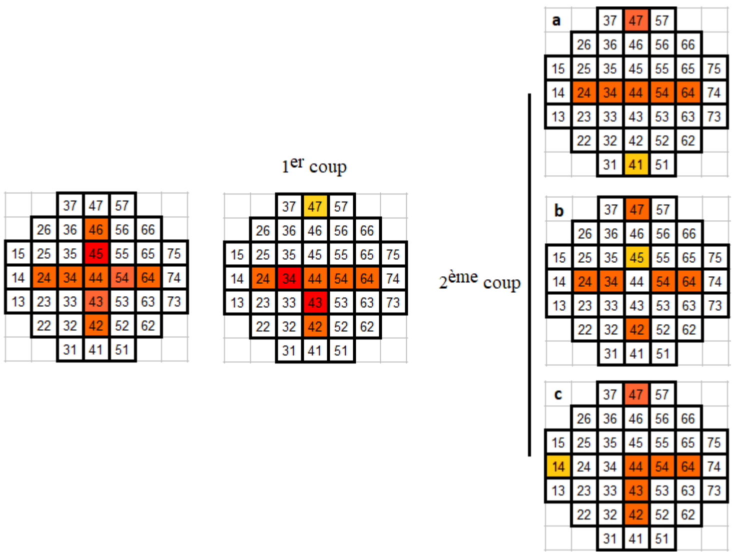


FIGURE 8.3 – *Le problème de la croix de neuf boules (à gauche) et les deux premiers coups*

1. François Édouard Anatole Lucas(1842-1891) est un mathématicien français connu pour l'invention du jeu des tours de Hanoï qu'il dit devoir à N. Claus de Siam (anagramme de Lucas d'Amiens), son étude des suites de Fibonacci généralisées et ses livres de Récréations mathématiques (Librairie Albert Banchard téléchargeable sur Gallica, 1992, 8e chapitre du Tome 1 : le solitaire) ou la Théorie des Nombres.

Notation des coups

Il existe ainsi quatre façons de débuter ce problème de la « croix de neuf boules », toutes équivalentes à un quart-de-tour près. Les seuls coups possibles au début sont 45/47, 34/14, 43/41 et 54/74.
En supposant que l'on a joué 45/47 au 1er coup, le 2e coup demande de faire un choix car il y a trois possibilités non équivalentes. Selon que l'on joue 43/41 (noté a), 43/45 (noté b) ou 34/14 (noté c), le plateau ne se trouve pas dans un état superposable par rotation ou symétrie.
Un seul de ces choix peut conduire à une réussite, les autres mènent à l'échec.
Sans entraînement et sans capacité particulière, voir plusieurs coups à l'avance est une tâche difficile. Pour ce premier problème, le nombre de boules étant réduit, on peut le résoudre mentalement. Y arrivez-vous ?

- Le coup a conduit à un échec car les boules qui peuvent se prendre sont alignées sur une ligne, dans l'impossibilité de s'approcher de celles qui en sont écartées, isolées en 41 et 47.
- Le coup c ne semble guère mieux disposé à la victoire, même s'il est possible de jouer jusqu'à réduire le plateau à trois fiches (en jouant 43/45, 64/44, 45/43 et 42/44).
- Le coup b est le seul qui permet une réussite. Lucas donne une solution : 43/41, 45/43, 24/44, 44/42, 64/44, 41/43, 43/45, 46/44. La symétrie d'axe horizontal passant par le centre transforme cette solution en 45/47, 43/45 (coup b), 24/44, 44/46, 64/44, 47/45, 45/43, 42/44 (voir l'illustration).

Je retiens deux choses de cette première résolution : certains choix mènent à une impossibilité qui ne se déclare véritablement qu'au bout de plusieurs coups ; la forme du plateau ayant les axes de symétrie du carré (quatre axes concourants), si la figure de départ est elle-même symétrique, plusieurs solutions seront équivalentes, à une transformation près. La solution trouvée pour le problème de la croix peut ainsi se décliner d'au moins quatre façons différentes.

En réalité, il y a 32 solutions différentes, chacun des quatre débuts conduisant à huit solutions différentes. On peut voir sur l'illustration que la figure b du 2e coup a un axe de symétrie vertical : pour cette raison, le coup choisi (24/44) peut être remplacé par le coup symétrique (64/44).
On peut aussi modifier l'ordre de certains coups. Au lieu de faire 64/44 puis 47/45, on peut faire 47/45 puis 64/44, cela ne modifie pas la solution. Il y a donc quatre façons différentes d'aboutir à la case 44, en partant du coup 45/47 et par conséquent seize solutions différentes s'achevant sur la case centrale (44).
Seize autres solutions s'achèvent au milieu d'un côté : le coup final, au lieu de 42/44, peut être 43/41. La solution trouvée ne diffère des premières que par son arrivée au bord au lieu d'une arrivée centrale. Remarquons que le milieu du côté que l'on atteint est la place diamétralement opposée au 1er coup joué.

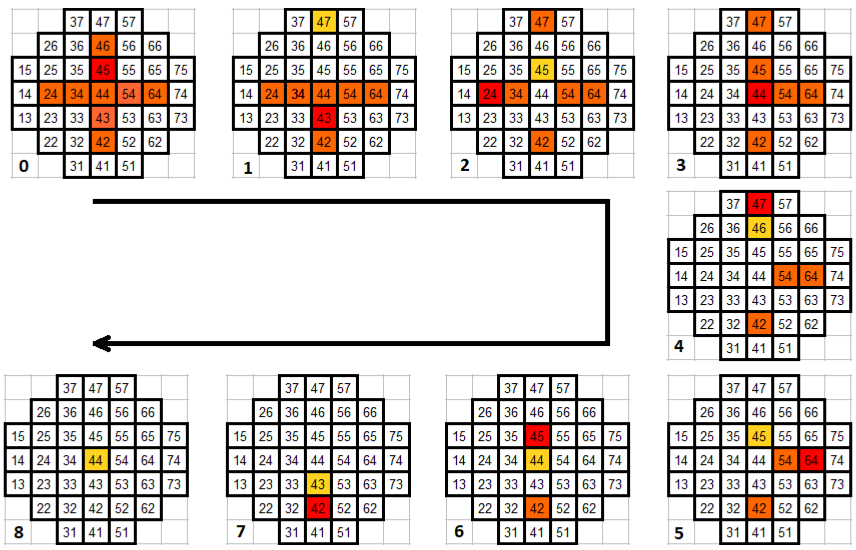


FIGURE 8.4 – *Solution de la croix des neuf boules. Les boules immobiles sont sur fond orange, la boule à jouer est sur fond rouge, celle ayant été jouée sur fond jaune*

Notation des états du jeu

Cette notation que Lucas emprunte à Vandermonde est assez commode pour noter les déplacements et se prête aussi assez bien aux traitements mathématiques et informatiques qu'il va falloir envisager pour résoudre ces problèmes au moyen d'un programme. Il nous faut, en effet, un moyen de détecter si un coup est possible. Imaginons que nous partions de la liste des cases occupées initialement : la liste [24,34,44,54,64,45,46,42,43] correspond à l'état initial de la croix des neuf boules.
Pour chacune d'elles, c'est-à-dire chacun des neuf numéros de la liste d'état, mon programme doit examiner s'il est possible de faire une prise vers la droite, vers la gauche, vers le haut ou vers le bas. Dans le cas d'un coup vers la droite, il doit examiner trois questions :

- Y a t-il une boule dans la case de droite ? Si l'emplacement de la boule est en x, sa voisine de droite est en $x + 10$. Ce numéro appartient-il à l'état du jeu ?
- La case située deux cases à droite, et qui porte donc le numéro $x + 20$, existe t-elle ? son numéro appartient-il à la liste exhaustive des cases du plateau ?
- Y a t-il un creux libre dans cette case $x+20$? Ce numéro ne doit pas appartenir à l'état du jeu.

Ainsi, pour examiner si une des boules du jeu peut être déplacée, je mets au point une fonction qui admet trois arguments : l'état du jeu donné par la liste des emplacements occupés, le rang dans cette liste de l'emplacement testé et la direction du coup. Si le coup est valide, la fonction renvoie le nouvel état du jeu. Une sous-fonction a pour rôle de mettre en forme la transition entre les deux états pour l'écrire à la manière de Lucas.

Voici la liste des états traversés pour la 1re solution trouvée à la croix des neuf :
`[[24,34,44,54,64,45,46,42,43], [14,44,54,64,45,46,42,43], [14,34,64,45,46,42,43], [14,34,64,44,42,43], [14,64,24,42,43], [34,64,42,43], [34,64,44], [54,64], [74]]`
La sous-fonction affiche alors 34/14, 54/34, 46/44, 44/24, 14/34, 42/44, 34/54, 54/74

Résolution d'un problème

Le cœur de mon premier programme de résolution réside en une fonction récursive qui, au moyen du test de la longueur de la liste codant l'état du jeu, permet d'arrêter l'exécution dès que cette liste ne contient plus qu'un seul élément. Tant que cette condition d'arrêt n'est pas réalisée, on examine les autres coups possibles de l'étape précédente, lançant à chaque fois la résolution sur ces nouveaux états. Quand toutes les possibilités ont été examinées, le programme s'achève.

La pile récursive peut devenir importante avec un tel algorithme. Il n'est donc pas certain que les problèmes les plus difficiles, ceux qui se résolvent en une trentaine de coups, puissent être résolus de cette façon. J'effectue le test en lançant mon programme sur le plus grand état initial du jeu, celui qui contient 36 boules, plaçant l'unique trou dans la case centrale :
`[37,47,57,26,36,46,56,66,15,25,35,45,55,65,75,14,24,34,54,64,74,13,...,62,31,41,51]`
Je laisse travailler mon programme pendant des heures sans que n'apparaisse la moindre solution. Il en existe pourtant. Ce problème du « corsaire » ou de la « réussite », en a même plusieurs.

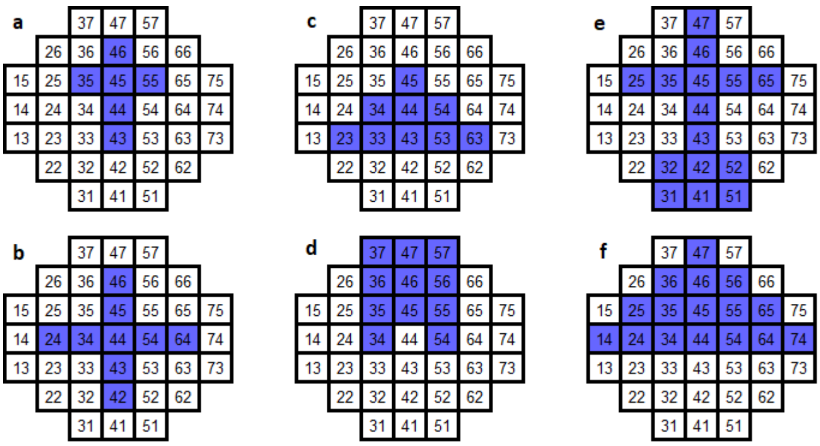


FIGURE 8.5 – *Les six premières figures du chevalier Busschopp et leur nombre de boules : croix de six, croix de neuf, triangle à neuf, cheminée à onze, calvaire à quinze, pyramide à seize.*

b. Optimisations

Pour tester les capacités de mon programme, je me donne des objectifs moins ambitieux et explore quelques figures simples du chevalier Paul Busschopp (une solution est donnée pour chacun de ces nouveaux problèmes en annexe). Après les croix à six boules (figure *a*, 4 solutions), à neuf boules (figure *b*, 32 solutions), le triangle à neuf boules (figure *c*, 72 solutions), la cheminée à onze boules (figure *d*, 744 solutions), le calvaire à quinze boules (figure *e*, 67 704 solutions), je le lance sur le problème suivant, la pyramide à seize boules (figure *f*).

Utilisation des symétries

Le programme commence alors à débiter les solutions à une vitesse prodigieuse : 100 000, 200 000... Je le laisse tourner jusqu'à en obtenir plus de 800 000 mais ce n'est pas encore la fin du processus. Des recherches sont inutiles : celles qui conduisent à des solutions symétriques de solutions déjà obtenues. Mon fichier de départ pour la pyramide étant `[14,24,34,54,64,74,25,35,45,55,65,36,46,56,47]` il y a huit emplacements qui peuvent être le début d'une solution (24, 64, 25, 35, 45, 55, 65 et 46) mais parmi ceux-ci, certains occupent des positions symétriques par rapport à l'axe de symétrie vertical de la figure comme les cases 24 et 64. En supprimant toutes les cases candidates symétriques pour ne garder qu'une seule de chaque espèce, il en reste cinq (24, 25, 35, 45 et 46). Mon programme ne doit explorer l'espace des solutions qu'en commençant par ces cinq emplacements. Le nombre des solutions trouvées sera obtenu en doublant celles qui commencent par une case hors de l'axe de symétrie (24, 25 et 35) .

Cette amélioration apportée, mon programme me semble avoir une capacité régénérée à résoudre les problèmes. Je le lance à l'assaut de la pyramide mais une trentaine d'heures sont nécessaires pour le résultat : 594 271 solutions avec ces cinq débuts. Le programme fonctionne mais il est trop limité et lent. L'économie de moyen trouvée doit être automatisé pour qu'à chaque coup, on évite de tester des coups symétriques. Comment reconnaître les symétries d'un état de jeu :

- Symétrie horizontale : les chiffres des unités sont complémentaires à 8, ceux des dizaines étant égaux, comme 37 et 31. Les cases de l'axe ont un chiffre des unités égal à 4. Dans ce cas, il suffit d'examiner les coups partant des lignes se terminant par 1, 2, 3 ou 4.
- Symétrie verticale : les chiffres des dizaines sont complémentaires à 8, ceux des unités étant égaux, comme 37 et 57. Les cases de l'axe ont un chiffre des dizaines égal à 4. Dans ce cas, il suffit d'examiner les coups partant des colonnes commençant par 1, 2, 3 ou 4.
- symétrie oblique 1 (axe Nord-Est Sud-Ouest) : le chiffre des unités de l'une est égal au chiffre des dizaines de l'autre, comme 37 et 73. Les cases de l'axe sont des multiples de 11. Dans ce cas, il suffit d'examiner les coups partant des diagonales dont l'écart entre unités et dizaines vaut 0, 1, 2, 3 ou 4.
- Symétrie oblique 2 (axe Nord-Ouest Sud-Est) : la différence est un multiple de 11, comme 37 et 15. Les cases de l'axe ont une somme des chiffres égale à 8. Dans ce cas, il suffit d'examiner les coups partant des premières diagonales dont la somme des chiffres vaut 4, 5, 6, 7 ou 8.

Une liste peut présenter les quatre types de symétrie, ou bien deux d'axes perpendiculaires (horizontal & vertical ou oblique 1 & 2), ou bien un seul axe. Bien sûr, si la liste présente deux ou quatre symétries, les avantages se cumulent. Je mets au point une procédure qui détermine un nombre caractéristique des symétries d'une liste. Ce nombre est la somme de nombres binaires 1 (pour une symétrie horizontale, 0 sinon), 10 (pour une symétrie verticale, 0 sinon), 100 (pour une symétrie oblique 1, 0 sinon) et 1000 (pour une symétrie oblique 2, 0 sinon) que je convertis en décimal. Le nombre binaire correspondant à la croix à neuf trous est 1111 puisque cette figure possède les quatre symétries ce qui est converti en 15. Les figures de la cheminée et de la pyramide renvoient 2 (10 en binaire) car il n'y a qu'une symétrie verticale dans ces figures.

On devrait ajouter à ses symétries axiales les symétrie par rotation d'un quart ou d'un demi tour, dans un sens ou dans l'autre car un coup sur une figure présentant un centre de symétrie est le symétrique d'un autre qui lui est équivalent. Si la figure est symétrique par une rotation d'un quart de tour, un coup est équivalent à trois autres. Mais, à tort ou à raison, je n'ai pas implémenté ce type de symétrie.

Limitation de la recherche

Cette amélioration étant apportée, je remarque que le programme n'est pas vraiment amélioré. J'obtiens une réponse au problème de la pyramide en un peu plus de 3 heures. C'est mieux que les trente heures de la version précédente mais, dès que je passe au problème suivant, la « double croix » (7ᵉ figure du chevalier, notée *a* sur l'illustration suivante), je me heurte de nouveau à un temps d'exécution prohibitif. Je réalise alors qu'il est inutile de rechercher (calculer et enregistrer) l'ensemble exhaustif des solutions. Cela ne sert à rien d'effectuer un si considérable travail si je ne souhaite qu'obtenir une solution. La première trouvée fera bien l'affaire. Je réalise alors une ultime amélioration qui vise à définir l'emplacement de la dernière boule, celui qui arrêtera le programme dès lors qu'il a été trouvé. Ce peut être une case seule, la case centrale 44 par exemple, ou alors ce peut être un des emplacements d'une liste comme `[14,47,74,41]` si on veut que la case finale soit au milieu d'un bord. On peut aussi vouloir laisser libre le choix de la case finale, pour trouver une solution quelconque, pourvue qu'elle existe.

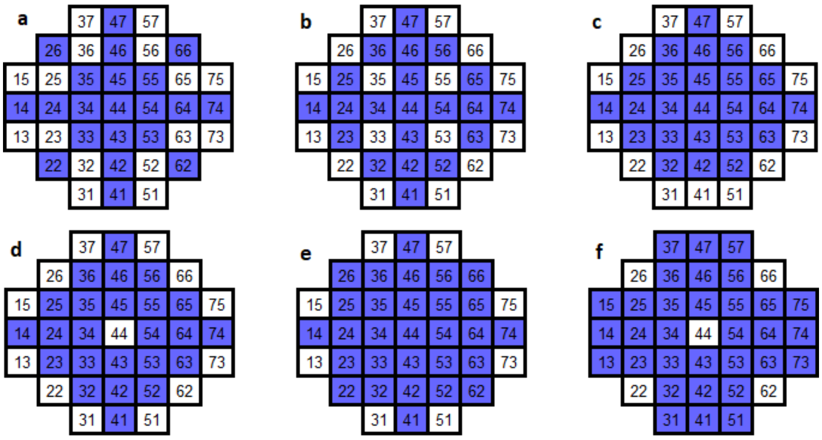


FIGURE 8.6 – *Six autres figures du chevalier Busschopp et leur nombre de boules : double croix (a), cinq croix entrelacées (b), pentagone (c), carré incliné (d), octogone (e), triple croix (f).*

Avec cette nouvelle réalisation, je trouve une solution à la double croix (21 boules, figure *a*) en $0,2$ seconde ! Ce gain de temps stupéfiant me montre à quel point le programme était ralenti par la recherche exhaustive des solutions. Je teste les cinq croix entrelacées (21 boules, figure *b*) : $16,8$ secondes. Tout de même ! Le pentagone (24 boules, figure *d*) ne résiste que $1,8$ seconde et le carré incliné (24 boules, figure *e*) $0,8$ seconde.

Je me sens au bord d'une réussite totale quand j'essaie l'octogone (29 boules, figure *e*), mais le programme se remet à ramer pendant des heures sans rien trouver. Il se heurte, à nouveau, à cette stagnation indéterminée qui l'empêche d'aller jusqu'au bout. J'essaie à tout hasard la triple croix (32 boules, figure *f*) et la réussite à 36 trous (le plateau complet avec juste la case 51 vide), mais aucun de ces jeux n'aboutit en temps raisonnable. J'avais pris soin de partir d'une figure réalisable en vidant la case 51 car Lucas donne une solution à ce problème du « corsaire » qui aboutit à la case 37, diamétralement opposée à la case 51.

Le coup triple

La structure récursive de mon algorithme est efficace lorsque la taille de la liste initiale n'est pas trop grande. Dès lors qu'elle dépasse 24 boules, le programme n'aboutit pas, ou bien il aboutit, mais dans un temps déraisonnable. J'ai essayé une autre figure que Lucas donne comme exemple d'application d'un coup qu'il appelle le « coup triple du solitaire accéléré ». Cette figure est le carré de 25 boules. Elle a une solution magistrale en huit coups triples.

Chaque coup triple fait disparaître trois boules alignées adjacentes d'un coup, selon le scénario décrit sur l'illustration suivante. Il suffit, pour être exécuté, qu'il y aie une 4ᵉ boule d'un côté d'une des extrémités, et de l'autre qu'il y aie un trou. Lucas note un coup triple par une fraction en gras, en donnant la 1ʳᵉ et la 3ᵉ boule qui disparaissent, par exemple le coup **24/26** désigne la succession de trois coups (34/14, 26/24 et 14/34) qui ramène la boule numérotée 34 à sa place, après élimination des boules situées aux cases 24, 25 et 26.

Connaissant ce coup triple, la figure du carré à 25 boules est simple à résoudre puisqu'il suffit d'enlever les boules par blocs de trois. Réfléchissez à l'ordre de ces coups successifs puis comparez avec la solution proposée par Lucas (illustration en annexe) : **24/26**, **34/36**, **46/66**, **45/65**, **64/62**, **54/52**, **42/22** et **43/23**.

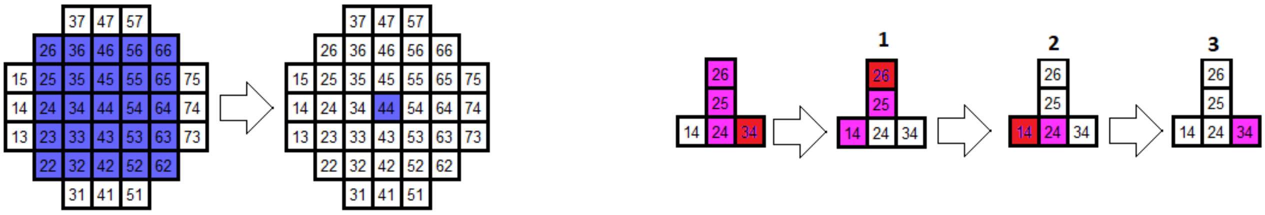


FIGURE 8.7 – *Le problème du carré à cinq boules (à gauche) et le coup triple noté **24/26** (à droite).*

J'essaie cette figure avec mon programme, optimisé pour l'étude des figures symétriques, mais qui ne connaît pas ce coup triple. Ce test vise uniquement à tenter de résoudre un jeu à 25 boules, puisqu'il arrive à résoudre assez facilement des jeux à 24 boules. Le problème est que cette figure est résolu par mon programme en un peu plus de 19 minutes. La solution qu'il propose, la 1re qu'il a trouvé, est : 33/13, 43/41, 22/42, 52/32, 53/73, 34/14, 13/15, 54/34, 35/33, 32/34, 15/35, 45/25, 65/63, 73/53, 26/24, 24/44, 56/54, 36/56, 54/52, 62/42, 41/43, 43/45, 66/46, 45/47. On est bien loin de l'élégante solution des huit coups triples, mais c'est une solution valide.

Je n'implémente pas le coup triple de Lucas dans mon programme car s'il apparait bien adapté à l'intelligence de l'humain, notamment sur cette figure du carré à 25 boules, ma conviction instinctive est qu'il ne devrait apporter à mon algorithme naïf qu'une complexification nouvelle et sans doute très peu productive.

Dans le très complet article de Lucas, d'autres applications de ce coup triple, qu'il dit être imaginé par M. Hermary, sont données. Le 1er exemple est la « marche accélérée du lecteur au milieu de son auditoire ». Partant d'un boulier plein dont on ôte la boule centrale, on commence par un coup simple comme 64/44. Cela permet six coups triples consécutifs qui laissent le jeu dans l'état décrit par le nom de ce problème : une boule centrale et le tour plein. Ce type de problème ne peut être résolu avec mon programme actuel qui ne reconnait une situation finale que si une unique boule reste sur le plateau.

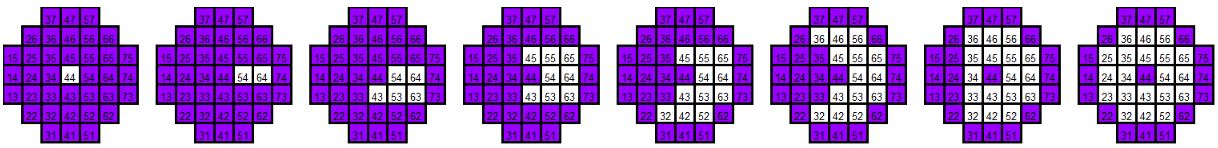


FIGURE 8.8 – *La marche accélérée du lecteur au milieu de son auditoire en six coups triples.*

Autre problème suggéré par Lucas qui le résout très simplement par ce coup triple : la « marche accélérée des douze apôtres » part du boulier privé de sa boule centrale, comme précédemment mais, après huit coups triples, se retrouve dans la position où les quatre bords sont pleins.
Dernier problème sur ce thème proposé par Lucas : le « tricolet » qui se résout en quatre étapes superposables par rotation d'un quart de tour. Chaque étape contient un coup triple suivi de deux simples. La situation finale peut être ramenée à celle du problème précédent en quatre coups simples.

FIGURE 8.9 – *La marche accélérée des douze apôtres en huit coups triples (à gauche) et le tricolet (à droite).*

Retour sur trace

J'essaie alors de résoudre une figure à 26 boules. À la façon de Lucas, je me prépare une batterie de jeux symétriques pour effectuer mes tests. Je lance alors mon programme sur ces nouvelles figures, avec l'idée d'évaluer l'accroissement du temps nécessaire pour les résoudre. Mais elles résistent plus longtemps que je ne l'imaginais ; le carré incliné plein qui n'a que 25 boules me paraît insoluble en temps raisonnable et je n'arrive également pas à résoudre la plupart de mes problèmes à 26 boules. Même les problèmes qui semblent faciles comme le petit pont (11 boules) ou le ixse (19 boules) me paraissent insolubles. Je comprends déjà mieux pourquoi mon programme n'arrive pas non plus à résoudre la réussite à 36 boules.

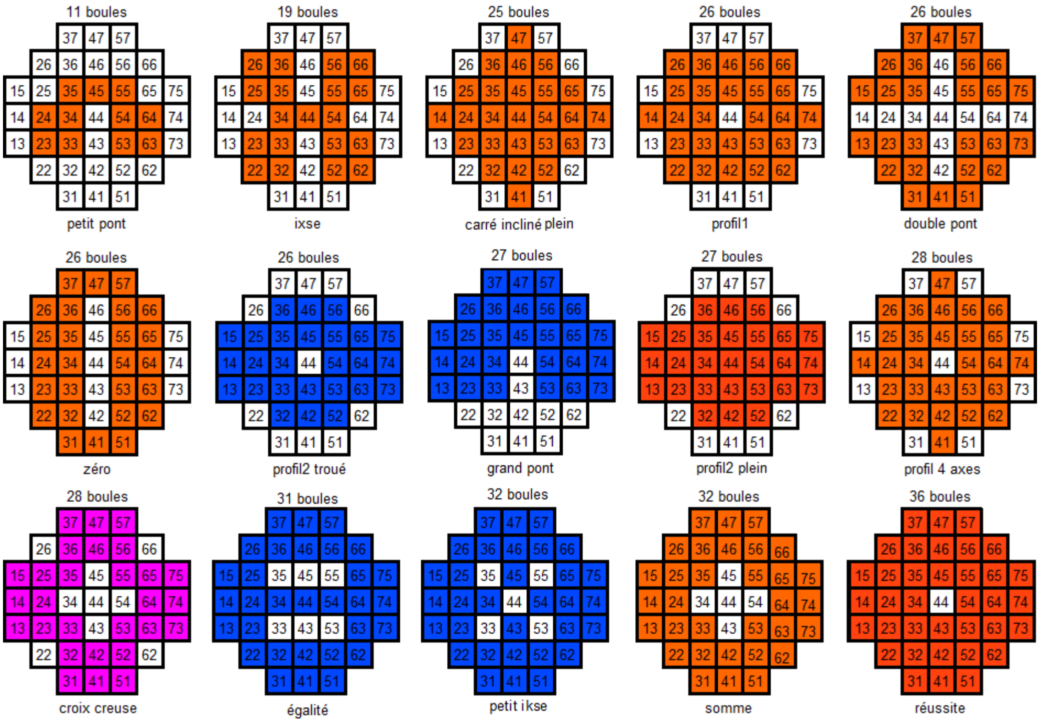


FIGURE 8.10 – *Quelques problèmes inventés pour tester mon programme. Certains se révèleront impossibles (en orange) et d'autres pourraient avoir des solutions mais mon programme n'en a pas trouvées (en magenta)*

Je m'engage alors dans la voie d'une grande réforme de ce programme. Pensant qu'il me faut abandonner la procédure récursive, je mets au point un algorithme qui détermine tous les jeux qui peuvent succéder à un jeu donné et qui les stocke dans une liste. Ensuite, il les essaie un par un, tentant d'aller le plus loin possible dans la résolution. À chaque étape, il stocke une telle liste de successeurs potentiels, et le déstockage conduit à la diminution progressive de la liste. Ce mode d'exploration est connu sous le nom de *backtracking* (retour sur trace en français), je l'ai employé dans d'autres situations déjà avec succès (Tangram, SuperGeotemplet, etc.).

Pour optimiser le temps de recherche, j'ai l'idée d'ordonner la liste des successeurs pour une étape donnée en fonction de l'étape précédente : je calcule les coordonnées du centre de gravité des boules, pour chaque jeu et je calcule la distance que parcourt ce centre de gravité entre les deux étapes. J'ordonne ainsi les différents successeurs selon l'ordre croissant de ces distances. Cette idée curieuse vise à favoriser l'examen des jeux qui sont les plus compacts. J'ai estimé, peut-être à tort, que les coups qui décentrent le jeu sont plus risqués car ils peuvent entraîner une boule trop loin des autres l'empêchant d'être prise à son tour et compromettant ainsi la résolution finale.

La mise au point et le réglage du mécanisme de retour sur trace est toujours délicat mais je finis par arriver à un fonctionnement convenable. Les performances de ce nouvel algorithme sont un peu meilleures que le précédent. Dans son ultime version, où je mets en place le tri de la liste des successeurs sur la base de la distance parcourue par le centre de gravité, il arrive à résoudre la figure de l'octogone à 29 boules en un peu moins d'une heure. Par contre, les figures plus importantes, comme la triple croix à 32 boules ou la réussite à 36, restent inaccessibles en temps raisonnable.

Ordre aléatoire

Un peu dépité par ces demi-échecs successifs, je me dis que tout cela est causé par l'ordre arbitraire dans lequel je dispose la liste initiale ainsi que les autres listes décrivant l'état du jeu. Il me vient alors l'idée d'essayer de résoudre une figure en partant d'un ordre aléatoire, de jouer en choisissant les coups de façon aléatoire parmi les coups possibles et de recommencer de la même façon tant qu'on aboutit à un échec. C'est une façon bien peu intelligente d'essayer de résoudre le problème mais extrêmement simple à mettre en œuvre et, comme on va le voir, efficace. Si un humain jouait de cette façon, il n'aurait pas beaucoup de chances de réussir, mais un ordinateur effectuant les opérations cent millions de fois plus rapidement qu'un humain peut agir ainsi et réaliser bêtement des tâches qui demande intelligence et opiniâtreté à l'humain.

La procédure choisit un coup au hasard parmi les différents coups possibles et progresse en échouant la plupart du temps. Elle recommence inlassablement jusqu'à la obtenir la victoire avec un nouvel ordre des boules à l'état initial. On aboutit à une solution par hasard avec cette méthode s'il en existe suffisamment. S'il n'en existe pas, le programme ne s'arrête jamais, mais alors on ne sait distinguer les problèmes insolubles de ceux qui ont peu de solution que cette procédure ne parvient pas à résoudre en temps raisonnable.

J'essaie le programme utilisant cet algorithme pour les différents jeux et trouve des solutions en des temps assez variables : jusqu'à la pyramide, il suffit de $0,1$ seconde. Pour la double croix 5 secondes, les cinq croix entrelacées 222 secondes, le pentagone et le carré incliné 2,5 secondes tous les deux, l'octogone $9,5$ secondes, la triple croix 1253 secondes et enfin la réussite 1365 secondes. Pour la première fois, un algorithme me résout l'ensemble des jeux et c'est cet algorithme, le moins intelligent de tous qui parvient au but !

Choix de la figure finale

J'estime à ce point avoir un solveur fonctionnel mais je dois encore le doter de la capacité à résoudre les problèmes dont la figure finale n'est pas forcément une unique boule. Lucas a donné plusieurs exemples de ce type de problème que mon programme ne sait pas encore résoudre : la marche accélérée des douze apôtres et le tricolet pour illustrer le coup triple et il donne ensuite deux séries contenant une trentaine de problèmes (voir l'illustration ci-dessous, solutions en annexe) partant, à chaque fois, du solitaire complet, c'est-à-dire toutes les boules sauf celle du centre.

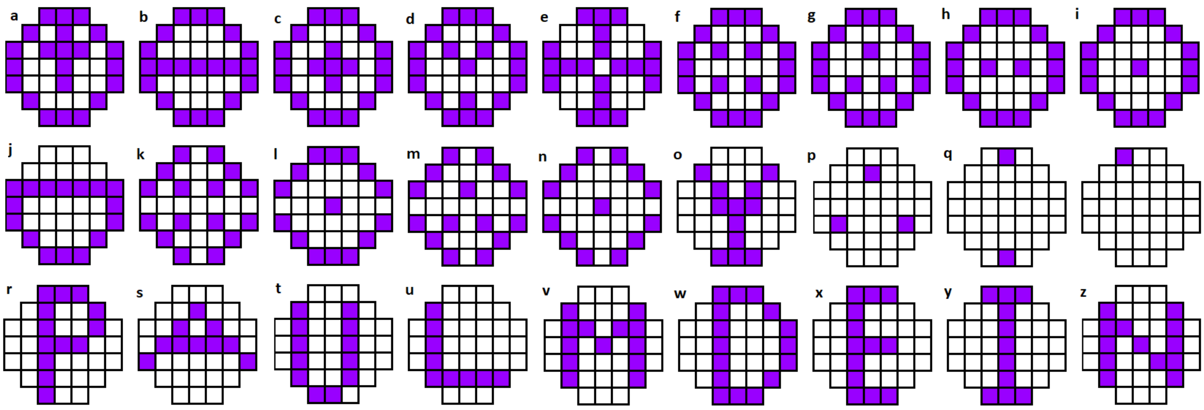


FIGURE 8.11 – *Les figures finales des problèmes de Lucas partent toutes du solitaire complet.*

La figure ci-dessus donne les vingt-sept figures de ces deux séries. Les dix-huit premières forment la 1re série. Je n'ai pas donné de lettre au problème du corsaire car la figure finale est une unique boule et la figure initiale est aussi particulière (pour commencer, on enlève la boule 51 au lieu de la boule 44). Lucas en donne une solution originale qui justifie son nom : d'abord il y a les 25 coups suivants 53/51, 73/53, 65/63, 62/64, 75/73, 54/52, 51/53, 43/63, 73/53, 23/43, 25/23, 45/25, 47/45, 31/33, 33/35, 13/33, 43/23, 22/24, 14/34, 35/33, 15/35, 45/25, 26/24, 37/35, 66/46 et ensuite, la boule 41 qui représente le corsaire prend successivement les boules 42, 33, 24, 35, 55, 64, 53, 44, 46 pour se placer en 47 où elle est prise par la boule 57.

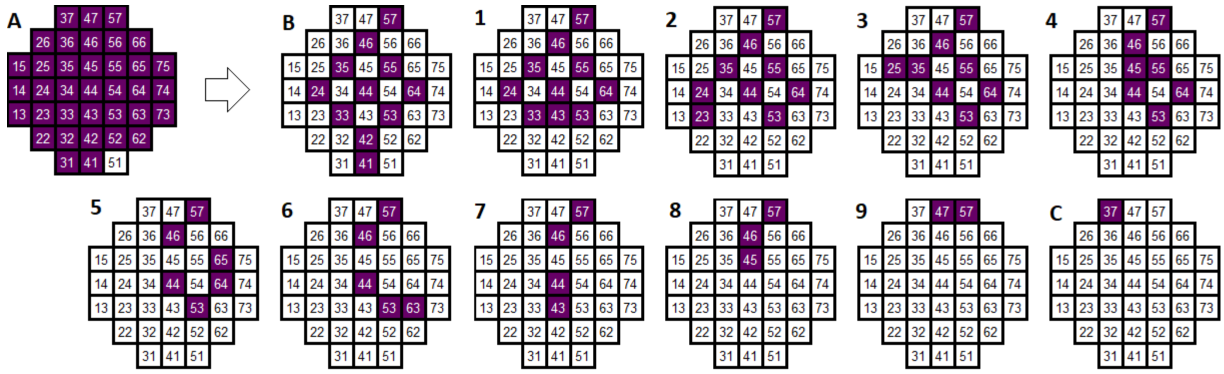


FIGURE 8.12 – *Le problème du corsaire : en partant de la figure A, on doit obtenir la figure B qui permet au corsaire (la boule initialement en 41) d'éliminer toutes les autres boules sauf la 57 qui le prend (figure C).*

J'ai marqué les autres problèmes de Lucas par une lettre. Pour les figures finales de la 2e série (de la lettre `r` à la lettre `z`), il s'agit des neuf lettres (P, A, U, L, M, D, E, I et N) nécessaires pour écrire les prénoms de ses deux enfants (Paul et Madeleine). Les figures de la 1re série, quant à elles, ont reçues des noms qui décrivent bien le but à atteindre. Voici ces noms qui dépeignent l'imagerie mentale de l'époque de Lucas, celle de la fin du XIXe siècle en France :

- Figure `a` : le chapelet, 14 boules à enlever
- Figure `b` : l'équateur (⋆), 15 boules à enlever
- Figure `c` : la croix et la couronne (⋆), 14 boules à enlever
- Figure `d` : La pleine lune, 15 boules à enlever
- Figure `e` : la croix de Malte (⋆), 16 boules à enlever
- Figure `f` : quatre cavaliers cernés par seize soldats, 16 boules à enlever
- Figure `g` : trois cavaliers cernés par seize soldats (⋆), 17 boules à enlever
- Figure `h` : Adam et Eve dans le paradis terrestre, 18 boules à enlever
- Figure `i` : le lecteur au milieu de son auditoire, 19 boules à enlever
- Figure `j` : le grand bol, 20 boules à enlever
- Figure `k` : les quatre évangélistes et les douze apôtres (⋆), 20 boules à enlever
- Figure `l` : le jugement dernier, 21 boules à enlever
- Figure `m` : La trinité et les douze apôtres, 21 boules à enlever
- Figure `n` : Jésus et les douze apôtres, 23 boules à enlever
- Figure `o` : le calice (⋆), 24 boules à enlever
- Figure `p` : la trinité (⋆), 33 boules à enlever
- Figure `q` : les deux pôles (⋆), 34 boules à enlever

Quelques ajustements sont nécessaires pour arrêter mon programme sur une figure particulière : lorsque le nombre de boules restantes correspond au nombre de boules de la figure finale, il faut également vérifier que les boules restantes sont aux mêmes emplacements que dans celle-ci. Il faut aussi que je désactive la procédure qui examine les symétries d'une figure et qui, en cas de symétrie, choisissait de ne tester toujours qu'une des boules parmi celles qui conduiraient à des figures superposables par symétrie. Cette procédure n'a plus lieu d'être ici car les figures finales examinées risqueraient de ne pas pouvoir être atteintes.

Je teste ce nouvel avatar de mon programme et réussit assez rapidement à trouver quelques unes des figures finales de la 1re série de Lucas. Curieusement, certaines résistent très fortement (marquées par le symbole ⋆ dans la liste ci-dessus) au point que je serais tenté de dire qu'elles sont insolubles sachant très bien que ce n'est pas le cas puisque Lucas en donne une solution pour chacune. Cependant, la moitié des problèmes sont résolus rapidement : quelques secondes suffisent parfois, cela peut aller jusqu'à 20 ou 30 minutes, guère plus (voir les solutions trouvées en annexe). Pourquoi mon programme ne parvient-il pas à résoudre le tricolet, l'équateur, la croix et la couronne, la croix de Malte, 3 cavaliers cernés par 16 soldats, les 4 évangélistes et les douze apôtres, le calice, la trinité et les 2 pôles qui résistent de nombreuses heures et me poussent à interrompre l'exécution du programme ?

2. Les problèmes insolubles

a. Mesures de performance

Comme les choix effectués par mon algorithmes sont aléatoires, les durées de traitement sont extensibles. Je relance quinze fois la résolution de la double croix et obtiens une moyenne de 3,84 secondes et un écart-type 3,3 secondes. La dissymétrie de cette distribution est nette, avec de grandes durées dispersées et des petites assez concentrées :
0,3-0,4-0,6-0,7-1,5-1,5-1,8-3,1-4,6-5-5,2-6,3-6,7-7,6-12,3

Par curiosité, je place un compteur d'utilisation de la fonction qui mélange les boules au départ. Je constate alors qu'il y a une moyenne de 1560 essais par seconde, et qu'il en faut près de 7000 pour obtenir une solution, ce qui indique une probabilité de réussite d'environ $0,01\%$. Ces chiffres dépendent de la taille du jeu : pour le problème testé j'avais 21 boules, mais avec la réussite à 36 boules la probabilité de réussir au hasard est bien plus faible. Du fait de l'étirement de la distribution, il va y avoir un tiers environ des exécutions qui dureront plus longtemps que la moyenne. Le premier essai de réussite à 36 boules que je mesure s'exécute en 16 minutes et 42 secondes, après 641 506 essais, ce qui indique une probabilité de réussite d'environ $0,0001\%$.

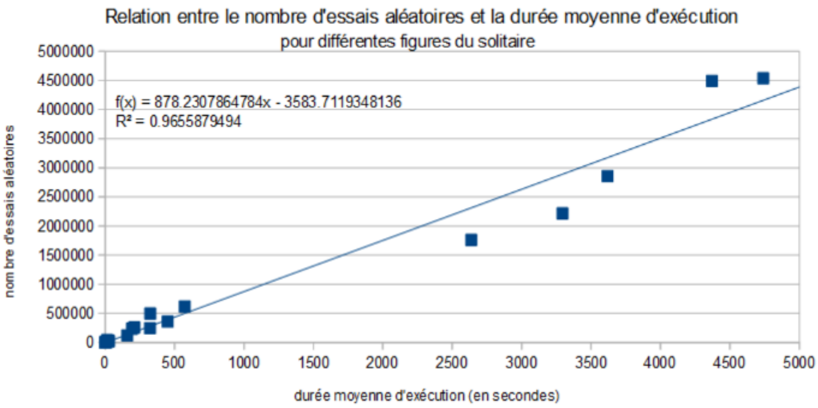


FIGURE 8.13 – *Nombre d'essais en fonction de la durée d'exécution pour 24 figures du solitaire.*

Je m'applique alors à réaliser des mesures sur des jeux contenant 11, 16, 21, 26 et 31 boules. Pour cela j'ajoute une boucle pour réinitialiser la recherche 100 fois pour chaque problème. Les résultats sont très rapidement obtenus pour les premières valeurs, mais je me heurte assez vite à des figures qui résistent plus que je ne le pensais : le problème que j'avais prévu pour 11 boules, le petit pont, semble impossible à résoudre car aucune solution n'est trouvée en un temps assez long pour la dimension très réduite de ce jeu. Même chose pour le carré incliné plein à 25 boules, alors que le carré à 25 boules est possible ainsi que le carré incliné de Lucas. D'autres figures se révèlent aussi impossibles à résoudre en temps raisonnable.

Je savais que la réussite à 36 boules que l'on commence en enlevant la boule centrale (44) est impossible, car Lucas le mentionne, mais je n'avais pas imaginé que beaucoup d'autres figures étaient impossibles. Lucas donne une magnifique démonstration de l'impossibilité de certaines figures dans la suite de son article. Il dit la devoir au capitaine M. H. Hermary, qui lui-même a repris la méthode du docteur Reiss. Avant de me pencher sur cette théorie, je veux explorer un peu l'ensemble des figures du solitaire avec mon programme, en déterminant expérimentalement celles qui sont possibles de résoudre et celles qui sont impossibles.

Ce faisant, après avoir épuisé le lot des figures de Lucas, j'invente mes propres figures que je soumets au programme désormais capable de résoudre n'importe quel problème du solitaire. Les choisissant avec des nombres de boules variables (15 à 35) et quelque élément de symétrie, j'évalue les temps d'exécution moyen et le nombre moyen d'essais aléatoires pour obtenir une solution en recommençant 100 fois, ou seulement 20 si c'est trop long, la résolution d'une même figure.

Naturellement je trouve que le nombre d'essais par seconde décroit avec la taille du jeu : environ 3000 essais par seconde pour un jeu à 15 boules, plus que 1250 avec 25 boules et seulement 700 avec 35 boules. Cette relation très stable montre une quasi proportionnalité entre ces deux grandeurs. Les durées moyennes de résolution sont, par contre, très variables d'une figure à l'autre, quel que soit le nombre de boules. Les deux jeux à 32 boules baptisés *monster2* et *monster2c* se solutionnent en des temps très différents : 7 minutes 30 pour le 1er et 25 secondes pour le 2^{e} soit 18 fois moins pour le 1er. Qu'est-ce qui différencie ces deux jeux ? Est-ce qu'une durée plus longue de résolution entraîne une plus grande difficulté pour un joueur réel, plus avisé que mon programme aléatoire ?

	égalité	triple croix	anglais	monster2	monster2c
nombre d'axes	2	4	1	1	1
nombre de boules	31	32	32	32	32
durée moyenne d'exécution	79min	60min18	28	7min30	25
nombre d'exécutions	17	10	100	20	20
nombre d'essais par sec.	958	790	873	796	908
nombre moyen d'essais	4 539 167	2 856 478	24 438	358 366	22 689

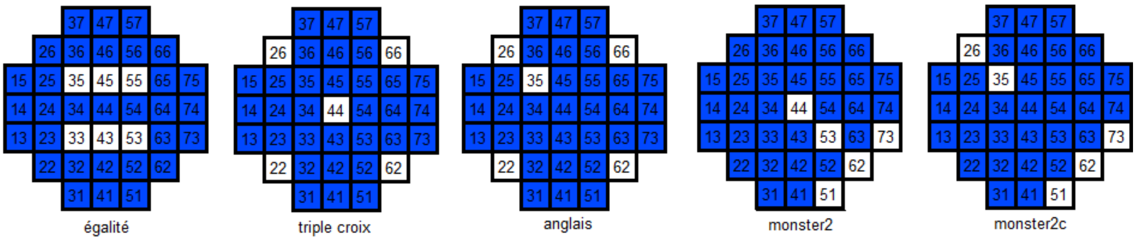


FIGURE 8.14 – *Les statistiques d'exécution pour des figures équivalentes sont parfois très différentes.*

Comparativement à ces jeux, la *triple croix* du chevalier et mon jeu *égalité* doivent apparaître encore plus difficiles puisqu'il faut plus d'une heure en moyenne pour résoudre aléatoirement le 1er, et près d'une heure vingt pour le 2^{e} qui a pourtant moins de boules que les autres. La triple croix ressemble beaucoup au jeu que j'ai appelé *anglais* et malgré cette ressemblance, ce dernier se résout en seulement 28 secondes, soit près de 130 fois plus vite que la triple croix. Celle-ci est, certes, plus symétrique que l'anglais (quatre axes contre un seul), mais cet argument est-il pertinent pour expliquer la difficulté ? La plus difficile de ces figures est l'égalité qui n'a pourtant que deux axes de symétrie...

J'en viens à suspecter mon programme optimisé sur la base d'éléments de symétrie car il privilégie certains choix arbitrairement afin de limiter les essais. Cela aurait-il un impact sur la performance contraire à celui que j'escomptais ? Pour me faire une idée objective sur la question, je recommence mes statistiques en supprimant la procédure qui détermine la symétrie des figures à chaque étape de la résolution.

	égalité	triple croix	anglais	monster2	monster2c
durée moy. D'exécution (s)	2794	5709	13	179	19
durée moy. d'exécution(min)	95min9	47min34	0min13	2min59	0min19
durées min-max(s)	287-6933	1000-7160	0,2-40	3-590 s	1-120
nombre d'exécutions	5	5	20	20	20
nombre d'essais par sec.	1918	1667	1775	1720	1738
nombre moyen d'essais	5 358 136	9 518 822	23 077	307 809	33 031

FIGURE 8.15 – *Nouvelles statistiques d'exécution sans la procédure d'optimisation basée sur la symétrie.*

Toutes les figures sont résolues avec des durées plus courtes avec une exception pour l'égalité qui peut être due au faible nombre d'essais (5 au lieu de 17) qui rend ce résultat moins représentatif. Le nombre d'essais par seconde est quasiment doublé sans la procédure d'optimisation. J'en conclus que ma procédure qui était prévue pour accélérer la résolution, en fait la ralentit. Du coup, je ne pense plus du tout que la symétrie d'une figure soit responsable de sa difficulté. Cela joue tout au plus pour le 1er coup puisqu'alors cette symétrie diminue le nombre de coups réellement différents.

Le même contraste entre figures faciles et figures difficiles s'observe pour des nombres de boules sensiblement égaux. L'illustration suivante en donne quelques spécimen : l'*octogone* à 28 boules du chevalier est ainsi bien plus facile que mon *cactus troué* qui en a pourtant 29 car il nécessite 40 fois moins de temps de calcul. De même pour la *double croix* comparée aux *cinq croix*. Toutes les deux sont des figures à 21 boules, la 1re nécessitant 65 fois moins de temps. La *pyramide* est aussi beaucoup plus rapidement résolue que mon *vase suisse*, qui a pourtant une boule de moins et qui nécessite 123 fois moins d'essais.

	vase suisse	pyramide	cinq croix	double croix	cactus troué	octogone
nombre de boules	15	16	21	21	28	29
durée moyenne d'exécution	14	0.122	324	4.54	9min33	13.78
nombre d'exécutions	100	100	13	100	20	100
nombre d'essais par sec.	3073	2869	1531	1617	1079	942
nombre moyen d'essais	43,016	350	496,093	7,339	618,333	12,982

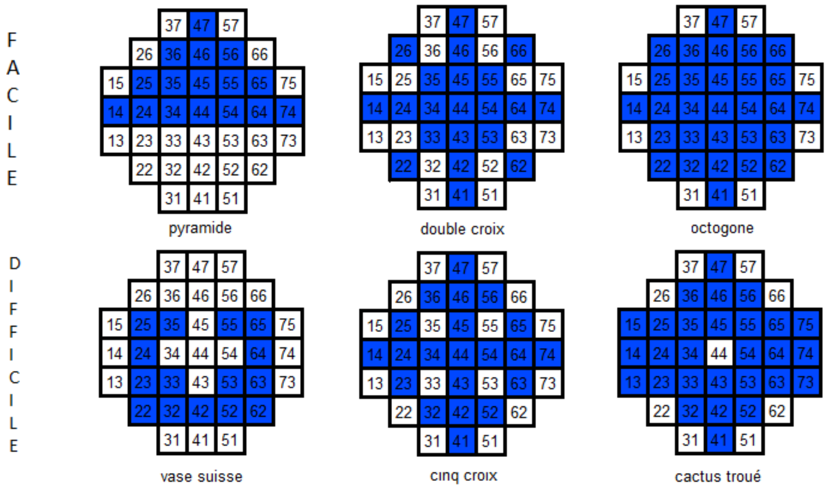


FIGURE 8.16 – *Autres statistiques pour des figures équivalentes qui montrent des contrastes importants.*

Est-ce que la durée moyenne d'exécution est un bon indicateur de la difficulté d'un problème ? Sans doute, en tout cas ce n'est pas le nombre de boules à enlever qui en est responsable. Le vase suisse et l'octogone se résolvent tous les deux en 14 secondes alors que le 1er n'a que 15 boules et le 2e presque le double.

b. Le boulier infini

J'ai déjà rencontré des figures qui n'ont pas de solution alors que je ne m'y attendais pas : le *petit pont* qui n'a que 11 boules et devrait être résolu en moins d'une seconde résiste pendant de longues minutes. Il résisterait pareillement aux assauts de mon programme pendant des heures ou des jours entiers car il est impossible. Comment en être certain avec mon programme ? Si ça se trouve, je n'ai tout simplement pas eu de chance en essayant de le résoudre. Le principe étant lié au hasard, cette éventualité n'est pas à écarter. Le sort des autres jeux que j'ai estampillé « impossibles » est tout aussi incertain même si j'ai de sérieux doutes sur l'existence d'une solution.

Il y a cependant un moyen de m'assurer de l'impossibilité de ces jeux : ce moyen a été décrit par E. Lucas qui affirme ne pas en être l'auteur mais qui nous l'expose et le prouve en dix théorèmes. Le raisonnement est conduit sur un boulier infini, sans les limites du jeu que l'on connaît, et prend en compte les coups *soustractifs* (ceux que l'on effectue avec une prise) aussi bien qu'*additifs* (une boule est déplacée vers une case distante de deux cases en ajoutant une boule au milieu de cette trajectoire). On accepte que plusieurs boules soient présentent en une même case.

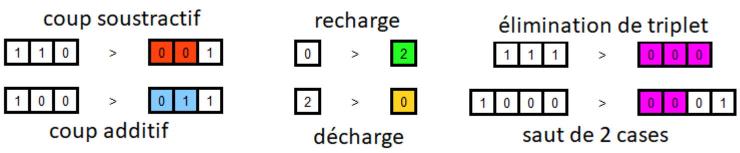


FIGURE 8.17 – *Les coups théoriques sur un boulier infini où on peut cumuler les boules sur une même case.*

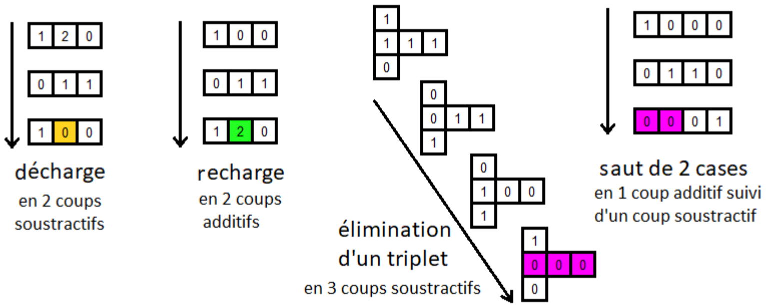


FIGURE 8.18 – *Justification des coups spéciaux avec les seuls coups additifs et soustractifs.*

Le jeu sur ce boulier infini et ses règles théoriques bénéficie de trois coups spéciaux :

- on peut toujours ajouter ou soustraire deux boules ou un nombre pair quelconque de boules d'une même case. Cela permet d'alléger un boulier trop chargé et de travailler toujours avec un nombre entier positif de boules. Exemples : passage de 0 à 2 boules à la case 54 (image 2 ligne du haut figure 8.18, j'ai colorié en vert cette case) et passage de 3 à 0 boule à la case 34 (image 5 ligne du haut figure 8.18, j'ai colorié en jaune cette case)
- on peut faire passer une boule d'une case à une autre en sautant par dessus deux cases, sans se préoccuper du fait qu'il y en a ou pas sur le passage et sans rien ajouter ou retrancher aux deux cases ainsi survolées. Exemple : passage de la boule 24 à la case 54 (image 1 ligne du bas de la figure 8.18, j'ai colorié en violet les cases 24 et 34 pour indiquer ce coup qui diminue de 1 la case 24 et augmente de 1 la case 54)
- on peut enlever du boulier n'importe quelle série de trois boules alignées. Ce coup est l'équivalent théorique du coup triple. Exemple : élimination des boules des cases 35, 45 et 55 qui sont alignées (image 2 ligne du bas de la figure 8.18, j'ai colorié en violet ces trois cases pour indiquer ce coup qui diminue de 1 ces cases)

c. Signature finale

Avec ces règles, il est toujours possible de regrouper toutes les boules d'une figure en un carré de 3 cases sur 3. Cette condensation peut être réalisée de façon multiple en combinant des coups additifs ou soustractifs ainsi que les trois coups spéciaux. J'ai illustré ci-dessous trois façons d'effectuer ce que j'appelle l'étape 1 de cette condensation sur la figure du petit pont.

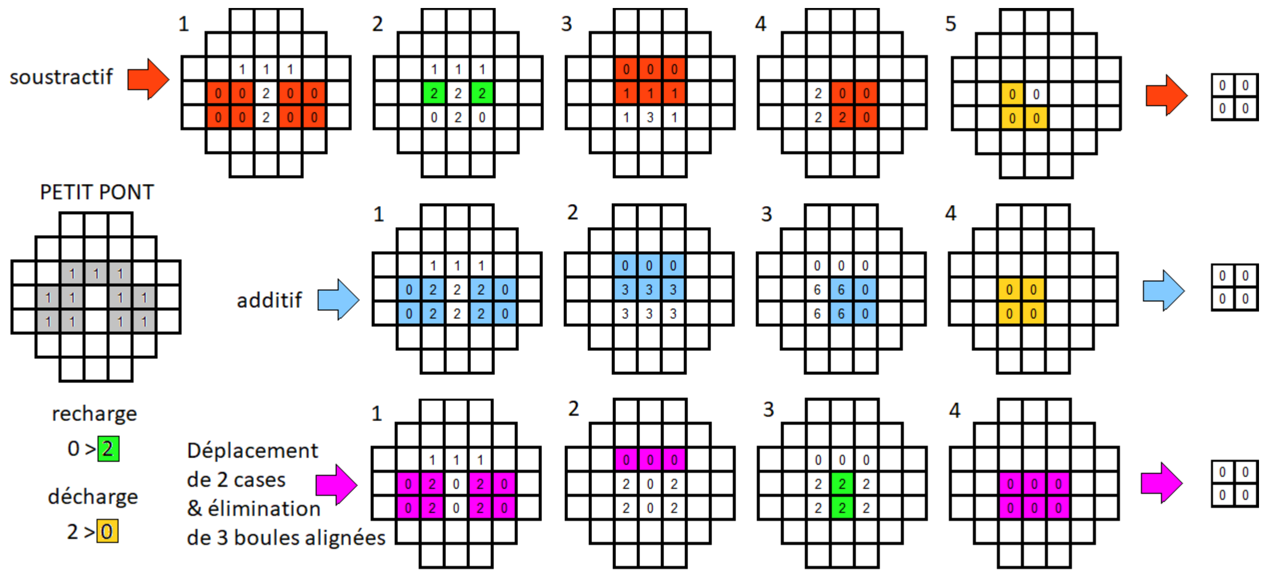


FIGURE 8.19 – *Réduction de la figure du petit pont à un carré* perdant *de deux cases de côté : en utilisant des coups soustractifs (en haut), en utilisant des coups additifs (au milieu) ou en utilisant le déplacement et l'élimination (en bas) avec, quand c'est nécessaire, des recharges ou décharges d'un nombre pair de boules.*

L'étape suivante consiste en une condensation encore plus forte, sur un carré de 2 cases sur 2, choisi arbitrairement en bas à gauche du carré central. Pour opérer cette seconde condensation, il suffit d'appliquer des coups additifs ou soustractifs en partant de chacune des cases de la ligne du haut. On condense ainsi le carré central en un rectangle de six cases. On traite ensuite les cases de la colonne de droite pour ne garder des boules que dans les quatre cases du carré de gauche. Un nombre pair de boules est éliminé de chacune de ces cases afin de n'en garder qu'une ou zéro. Dans le cas du petit pont, comme il n'y a que des nombres pairs de boules dans les cases du carré final, on se retrouve avec un carré final vide de boule.

Cette *signature finale* résume les possibilités de la figure initiale : si cette figure a une solution, on doit obtenir un carré final avec une seule boule ou bien deux en ligne ou en colonne, ou bien quatre. Cette signature *gagnante* indique que la figure est susceptible d'avoir une solution : elle en a une sur le boulier infini mais l'existence d'une solution réelle reste à trouver, et dans certains cas il n'y en a pas, cela dépend de la forme du boulier. Pour les autres carrés finaux, la signature est *perdante*, il n'y a aucun espoir de trouver une solution ni sur le boulier théorique ni, à fortiori, sur le boulier réel et ce, quel que soit la forme du boulier. Le petit pont a une signature perdante, il n'a donc pas de solution.

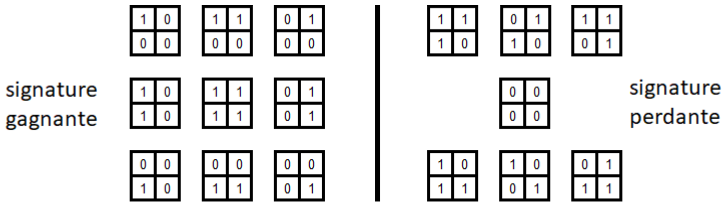


FIGURE 8.20 – *Les différents types de signature pour le problème de la réussite : 9 sont gagnantes et 7 perdantes.*

d. Trois types de problème

Ce raisonnement est facile à programmer. Je peux alors disposer d'un détecteur de fausses pistes : si la réduction donne un carré final perdant, le programme l'indique et évite une recherche en pure perte. Lorsque le carré final est gagnant, on peut démarrer la recherche d'une solution réelle. Je mets au point cette méthode en suivant scrupuleusement le principe décrit plus haut. Je prends toujours le même carré central de neuf cases et le même carré final (les cases 33, 43, 34 et 44) et ne considère que le résultat *gagnant* ou *perdant* sans tenir compte de la case finale que l'on souhaite atteindre. Dans cette approche, toutes les fins se valent pourvu qu'on puisse terminer avec une seule boule.

Je passe alors au peigne fin de la signature finale les figures que j'avais examinées, vérifiant celles qui sont possibles et distinguant, parmi celles que j'avais estampillées d'un hâtif et hasardeux « impossible », celles qui sont théoriquement-possibles-mais-pratiquement-impossibles-sur-le-solitaire-français de celles qui sont tout simplement impossibles-quel-que-soit-le-plateau-de-jeu. Il y a donc trois catégories de figures sur le solitaire :

- FIT : les figures impossibles théoriquement : le petit pont, la réussite en partant que la case 44 vide, les autres figures colorées en orange de la figure 8.10. Ces figures théoriquement impossibles sur le solitaire français le sont aussi sur le solitaire anglais (sauf celles que ce solitaire ne contient pas, comme la réussite, le double pont ou zéro), le solitaire à 41 cases et n'importe quel solitaire les contenant
- FTP : les figures qui ne sont que théoriquement possibles mais pratiquement impossibles, du moins aucune solution n'en a été trouvée. Ces figures théoriquement-possibles-mais-pratiquement-impossibles-sur-le-solitaire-français peuvent s'avérer possibles sur un autre solitaire, plus grand ou ayant une forme plus favorable
- FPP : les figures possibles tant sur le plan théorique que sur le plan pratique comme le grand pont, la réussite en partant que la case 37 vide, les figures colorées en bleu de la figure 8.10

Je me sens comme un devoir de vérifier mes figures FTP, mais il faut bien avouer que ce travail de vérification est fastidieux. J'en ai collecté quelques-unes, sur la base d'un échec durable de la tentative de résolution. Normalement, si la figure du *doublecarré2* était possible, il faudrait consacrer à sa résolution, avec mon programme d'essais aléatoires, une durée moyenne maximum de 1 heure à 1h30. Je laisse tourner mon programme 8 heures sans aucun résultat ce qui peut laisser penser, avec une certaine sécurité, sans atteindre les 100% de certitude, que la figure est vraiment impossible. Je n'ai pas la patience d'attendre si longtemps pour toutes les figures FTP détectées aussi ce groupe recèle vraisemblablement quelques figures réellement possibles, mais lesquelles ?

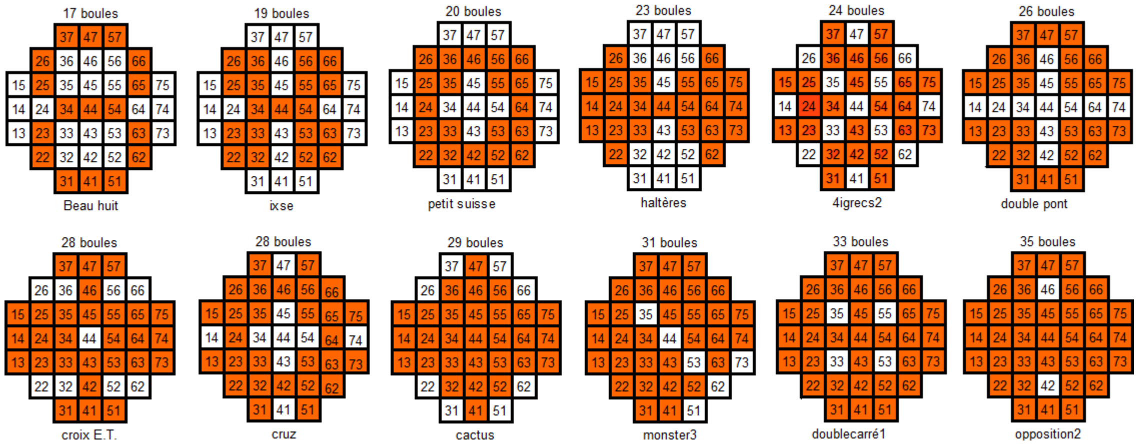


FIGURE 8.21 – *Douze problèmes FIT (impossibles car signature perdante) : inutile d'en chercher une solution*

Découverte inattendue : en effectuant cette vérification pour une figure classée FTP, j'ai la surprise de voir apparaître une solution au bout d'un assez longue durée (95 minutes). Cette championne provisoire de résistance à mon programme est, sans doute, plus difficile que les autres à résoudre. Je reclasse cette figure à 32 boules, baptisée *petit ikse*, parmi les figures FPP.

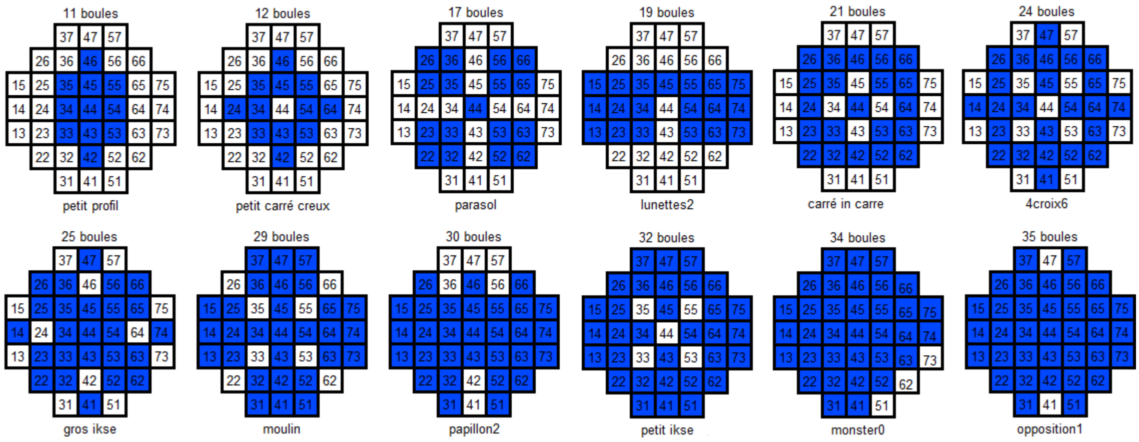


FIGURE 8.22 – *Douze problèmes FPP (ayant des solutions)*

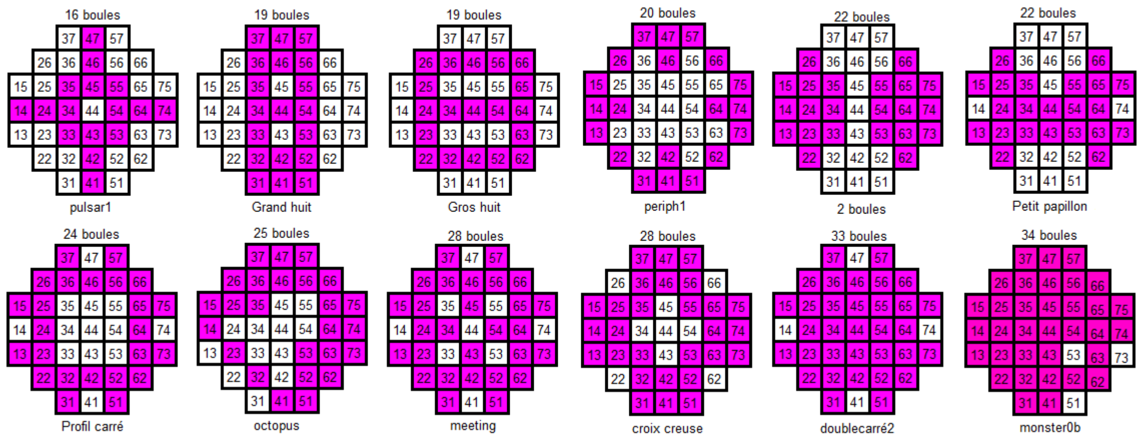


FIGURE 8.23 – *Douze problèmes FTP (issue incertaine mais signature gagnante)*

En effectuant ce travail, un peu mécaniquement je dois l'avouer, je ne m'interroge pas forcément toujours sur la solvabilité des figures. Je les dessine et les teste dans la foulée, notant juste le résultat. En procédant ainsi, j'ai créé une série de figures qui, après coup, sont évidemment non solvables : elles n'ont aucune paire de cases adjacentes ! On ne peut donc pas y effectuer une prise réelle... Ce qui est très curieux pour ces figures : elles ont une signature gagnante. Je leur ai appliqué mon programme de résolution qui a tourné pendant longtemps, environ 1 heure pour chacune, sans bien sûr trouver de solution. Je les avais classées dans la catégorie FTP mais je dois, pour eux, ouvrir une 4e catégorie : les figures impossibles pratiquement (FIP) mais dont la signature est gagnante.

Une autre figure peut être rangée dans cette catégorie : les boulier plein de 37 boules ne peut être joué, il n'a donc pas de solution. Pourtant la signature de cette figure est gagnante, comme Lucas le fait remarquer : on enlève les quatre bords par un coup triple et on se retrouve avec le carré à vingt-cinq boules qui a une solution au centre du boulier.

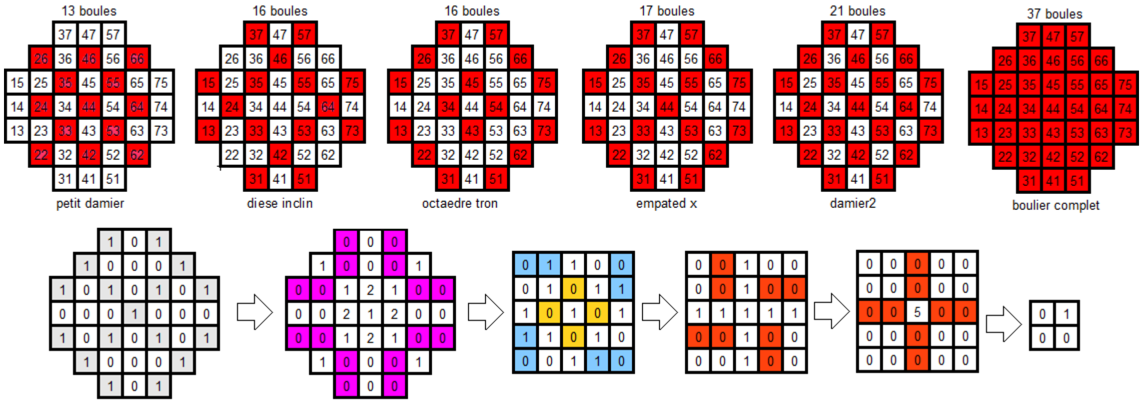


FIGURE 8.24 – *Six problèmes FIP (impossibles pratiquement mais avec une signature gagnante) : mon programme n'en a pas trouvé de solution et pour cause, évidemment, aucune n'existe. Ligne du bas : production de la signature gagnante finale pour un des problèmes*

e. Problèmes généraux

En ne considérant que la signature finale, on n'envisage que des problèmes dont la figure initiale est donnée et où l'on cherche à obtenir une réduction complète à une boule. C'est ainsi que les seules figures initiales qui ont des solutions théoriques sont celles dont la signature est gagnante. Si on cherche une boule finale sur la case centrale, cela réduit encore les figures initiales candidates à celles dont la signature est celle du haut à droite de la figure 8.20 (une seule boule en 44, mon choix du carré final étant ce qu'il est).

Les classes d'équivalences

En réalité, la signature finale donne une indication plus générale que celle que j'ai exploitée jusqu'ici. Lucas énonce son théorème 7 qui stipule que pour passer d'une position une autre sur le solitaire théorique, il faut et il suffit que ces deux positions aient la même position réduite sur le même carré de quatre cases. La justification est extrêmement simple : on passe de la figure initiale à la position réduite par des coups soustractifs puis, on remonte à la position finale par des coups additifs.

Ce théorème permet de vérifier avant toute tentative de résolution, que les deux figures (l'initiale et la finale) ont la même position réduite. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante, puisqu'on a raisonné sur le solitaire théorique, il faut encore s'assurer que le passage de l'une à l'autre est possible sur le solitaire réel où l'on ne dispose pas du coup additif. Entre deux figures qui appartiennent à la même classe d'équivalence que la signature, ce qui est certain c'est qu'on ne peut aller que dans un sens : de la figure ayant le plus de boules jusqu'à celle en ayant le moins. On doit pouvoir d'ailleurs aller plus loin et discerner que le passage d'une figure à une autre ne peut pas être possible car les différences de positions sont trop grandes entre celles-ci. Le problème relèverait alors de la catégorie FIP : impossible malgré la satisfaction des deux conditions nécessaires (même signature et différence du nombre de boule compatible avec le sens du problème).

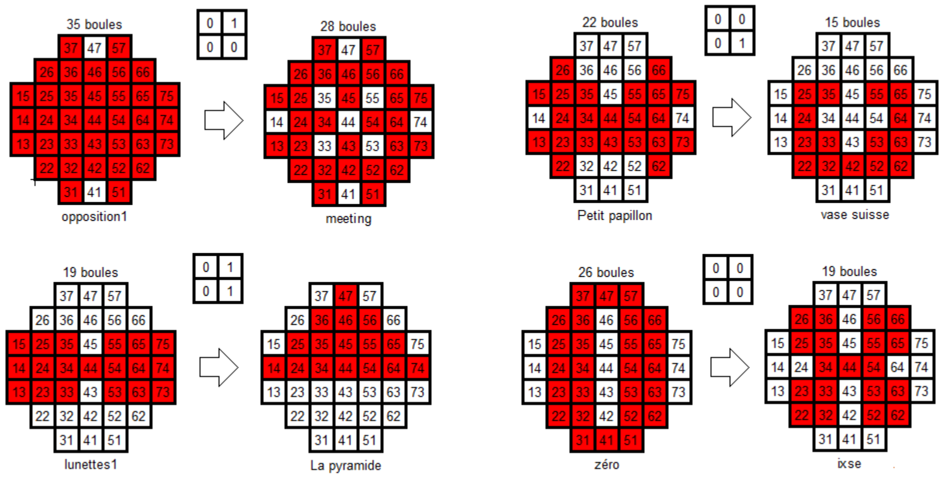


FIGURE 8.25 – *Quatre nouveaux problèmes FIP qui satisfont des deux conditions nécessaires.*

Une remarque en passant : en cherchant dans mes résultats des exemples de paires de figures appartenant à la même classe d'équivalence, c'est-à-dire ayant la même position réduite sur le même carré de quatre cases, je m'aperçois du très grand nombre de figures de deux classes, la « gagnante » ayant une seule boule en 44 et la « perdante » ayant aucune boule. Ces deux catégories sont quasiment à égalité et représentent à elles seules 76% des 71 figures dont j'ai dessinées à la main l'emplacement des boules. Bien sûr il y a quelques biais puisque j'ai dessiné les 12 figures du chevalier qui sont toutes possibles ce qui limite déjà le choix des positions réduites, mais 11 de celles-ci se terminent sur la position centrale. Sans doute le chevaler a t-il sélectionné ses figures selon ce critère... Pour des figures personnelles, n'ayant pas cette contrainte, j'ai dessiné mes figures au hasard, en les choisissant généralement symétriques. Ceci explique t-il cela ?

Reconstitutions des classes d'équivalence

Je me lance alors dans une entreprise vouée à un échec certain : reconstituer l'ensemble des figures d'une classe d'équivalence. Je procède à partir de la position réduite en n'utilisant que des coups additifs autorisés. En renversant les coups, je pourrais retrouver la position réduite finale. Je peux construire facilement à la main les figures des étapes 1 et 2 mais un programme adapté me fournira des résultats bien plus ambitieux et moins lacunaires. Le réglage de ce type de programme est relativement aisé car il me suffit d'ajouter la possibilité des coups additifs.

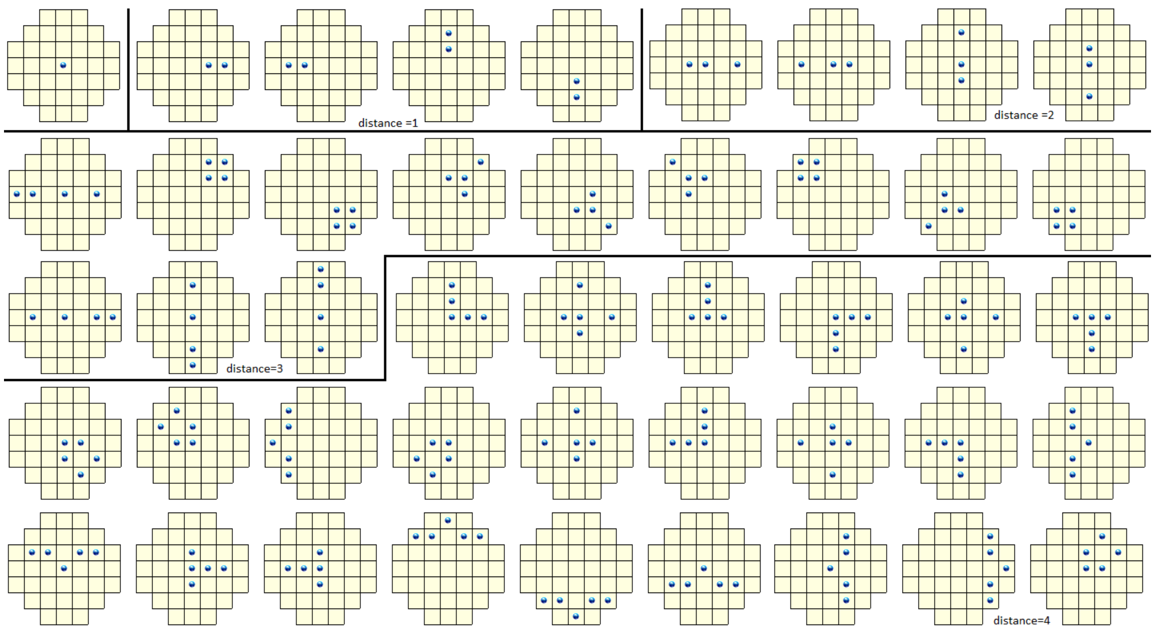


FIGURE 8.26 – *Premières figures symétriques de la classe d'équivalence de la position gagnante centrale.*

Une fois les inévitables erreurs des débuts corrigées, je commence à obtenir les premiers résultats : partant de la position gagnante n°1, celle qui ne contient qu'une boule en 44, j'obtiens 4 figures réalisables à 2 boules (étape 1), 20 à 3 boules (étape 2), 104 à 4 boules (étape 3), 497 à 5 boules (étape 4), 2 418 à 6 boules (étape 5), 11 189 à 7 boules (étape 6), 55 222 à 8 boules (étape 7) et 222 745 à 9 boules (étape 8). Pour obtenir le résultat de l'étape 9 le temps de traitement commence à être prohibitif (plusieurs heures) ce qui me décide à ne pas aller au-delà. On sera donc loin d'obtenir la totalité des figures réalisables d'une même classe d'équivalence.

Pour limiter le nombre de figures à représenter, je sélectionne celles qui ont au moins un élément de symétrie. Ma procédure de reconnaissance des figures symétriques étant déjà au point, cela ne me pose aucune difficulté. J'enrichis également les résultats en déterminant simultanément les figures qui peuvent être réalisées par des coups additifs ou soustractifs, dans n'importe quel ordre. En effet, c'est l'ensemble de toutes ces figures qui constitue la classe d'équivalence d'une position réduite.

	distance	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	Gagnante 1 (44)	1	4	24	118	680	3 672	18 429	86 076	369 153
0 1	dont réelles	1	4	20	108	536	2 678	12 664	55 222	222 745
0 0	coeff.accroissement	0	4,0	5,0	5,4	5,0	5,0	4,7	4,4	4,0
	réelles symétriques	1	4	4	12	24	44	144	354	769
	Gagnante 2 (43) = 4	1	4	20	106	610	3 387	17 302	81 802	355 425
0 0	dont réelles	1	4	17	92	495	2 475	11 771	52 226	212 527
0 1	réelles symétriques	1	2	3	2	7	21	59	130	307
	Gagnante 3 (33)	1	4	20	102	608	3 431	17 902	86 506	383 628
0 0	dont réelles	1	4	18	92	499	2 560	12 470	56 289	234 328
1 0	coeff.accroissement	0	4,0	4,5	5,1	5,4	5,1	4,9	4,5	4,2
	réelles symétriques	1	0	0	2	5	4	20	33	74
	Gagnante 4 (34)	1	4	20	106	610	3 387	17 302	81 802	355 425
1 0	dont réelles	1	4	17	92	495	2 475	11 771	52 226	212 527
0 0	coeff.accroissement	0	4,0	4,3	5,4	5,4	5,0	4,8	4,4	4,1
	réelles symétriques	1	2	3	2	7	21	59	130	307
	Gagnante 5 (34-44) = 6	1	8	47	286	1 666	8 848	43 099		
1 1	dont réelles	1	6	37	218	1 110	5 387	24 319	100 527	379 545
0 0	réelles symétriques	1	2	1	4	12	29	77	177	383
	Gagnante 6 (43-44)	1	8	47	286	1 666	8 848	43 099		
0 1	dont réelles	1	6	37	218	1 110	5 387	24 319	100 527	379 545
0 1	coeff.accroissement	0	6,0	6,2	5,9	5,1	4,9	4,5	4,1	3,8
	réelles symétriques	1	2	1	4	12	29	77	177	383
	Gagnante 7 (33-43) = 8	1	8	43	265	1 574	8 635	43 455		
1 0	dont réelles	1	6	36	204	1 086	5 474	25 409	108 288	421 798
1 0	réelles symétriques	0	0	2	3	4	14	30	58	161
	Gagnante 8 (33-34)	1	8	43	265	1 574	8 635	43 455		
0 0	dont réelles	1	6	36	204	1 086	5 474	25 409	108 288	421 798
1 1	réelles symétriques	0	0	2	3	4	14	30	58	161
	Gagnante 9 (33-34-43-44)	1	16	128	862	5 266	28 762	140 830		
1 1	dont réelles	1	8	54	354	1 944	9 541	42 437	169 532	607 490
1 1	réelles symétriques	1	0	2	2	6	7	47	28	150
	Total Gagnantes	9	64	392	2 396	14 254	77 605	384 873	336 186	1 463 631
	Total Gagnantes réelles	5	48	200	1 094	5 742	28 371	129 364	538 879	2 043 174
	Total Gagn. Réel. Symétriques	7	12	18	34	81	183	543	1 145	2 695
	Perd.1 (31-34,41-44,14-44,13-43)	4	22	121	694	3 906	20 714	101 243		
0 0	dont réelles	4	22	108	594	3 083	14 943	68 548		
0 0	réelles symétriques	2	6	12	18	69	153	404		
	Perdante 2 (34-43-44)	1	12	86	560	3 308	17 670	85 215		
1 1	dont réelles	1	8	52	325	1 740	8 359	36 707		
0 1	réelles symétriques	1	0	2	5	16	25	87		
	Perdante 3 (33-43-44)	1	12	86	567	3 364	18 166	89 085		
0 1	dont réelles	1	8	54	334	1 791	8 804	39 576		
1 1	réelles symétriques	0	0	0	3	4	14	25		
	Perdante 4 (33-34-43)	1	12	82	534	3 157	17 127	84 456		
1 0	dont réelles	1	8	52	311	1 673	8 289	37 501		
1 1	réelles symétriques	1	0	2	1	7	9	43		
	Perdante 5 (33-34-44)	1	12	86	567	3 364	18 166	89 085		
1 1	dont réelles	1	8	54	334	1 791	8 804	39 576		
1 0	réelles symétriques	0	0	0	3	4	14	25		
	Perdante 6 (33-44)	1	8	60	360	2 056	10 910	53 647		
0 1	dont réelles	1	8	48	272	1 449	7 086	32 211		
1 0	réelles symétriques	1	0	0	2	11	8	37		
	Perdante 7 (34-43)	1	8	56	336	1 883	9 955	48 554		
1 0	dont réelles	1	8	44	242	1 303	6 346	28 385		
0 1	réelles symétriques	1	2	2	4	17	32	81		
	Total Perdantes	10	86	577	3 618	21 038	112 708	551 285		
	Total Perdantes réelles	10	70	412	2 412	12 830	62 631	282 504		
	Total Perd. Réel. Symétriques	6	8	18	36	128	255	702		

FIGURE 8.27 – *Tableau de résultats du nombre de figures accessibles en n étapes avec $n \in [\![0, 6]\!]$ depuis une position réduite : par des coups additifs et soustractifs (ligne du haut, les cases portant les boules sont indiquées) ou seulement des coups additifs (ligne réelles avec $n \in [\![0, 8]\!]$ pour les figures gagnantes) avec le détail du nombre de figures symétriques (ligne du bas).*

De la même façon que j'ai obtenu ces résultats pour la classe de la position réduite en 44, je procède sur les autres classes des situations « gagnantes » et enchaîne ensuite sur les classes des situations

« perdantes ». Je rappelle que ces dénominations de gagnantes ou perdantes signifient seulement qu'une figure finale à une boule est théoriquement possible ou impossible. Par contre, lorsque je détermine l'ensemble des figures accessibles en n étapes avec $n \in [\![0,6]\!]$ depuis une position réduite comme celles de la figure 8.26, je n'obtiens que des figures réellement susceptibles d'aboutir à la position réduite et je les obtiens toutes.

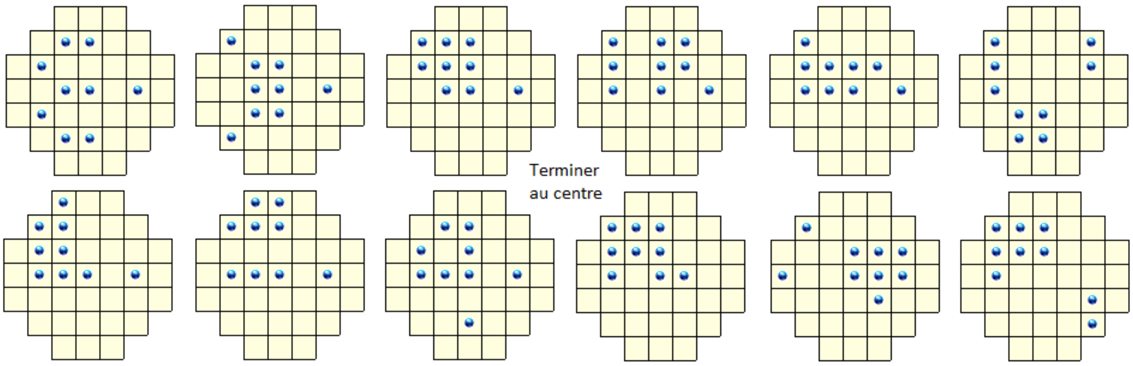


FIGURE 8.28 – *Douze problèmes à 9 boules choisis parmi les 222 745 possibles pour lesquels il s'agit de finir sur une seule boule au centre (en annexe on trouvera des problèmes similaires pour les autres situations gagnantes).*

En effectuant ce travail je me suis interrogé sur la première position « perdante », celle où il ne reste aucune boule sur le boulier. Cette position est réellement impossible à obtenir par des coups soustractifs, quelle que soit la figure initiale il doit toujours rester au moins une boule ! Les positions finales les plus acceptables qui relèvent de cette catégorie contiennent 2 boules sur une même rangée ou une même colonne, espacées par 2 cases vides. Par le déplacement théorique appelé « saut de 2 cases » (figure 8.18), on aboutit à 2 boules sur une même case, ce qui équivaut théoriquement à 0 boule sur le plateau. J'aurai pu ne choisir qu'une seule de ces positions, comme par exemple une boule en 14 et une en 44, sachant que les autres, logiquement, seront atteintes dans le mélange avec les coups soustractifs. Quoi qu'il en soit, j'ai donné le résultat obtenu en prenant comme positions finales 4 situations similaires à 2 boules : 31-44, 41-44, 14-44 et 13-43. Ce choix est totalement arbitraire, j'aurai tout aussi bien pu partir d'une situation éloignée du carré final choisi, comme 73-75 ou 37-57. N'importe quel choix de 2 boules séparées par 2 cases vides alignées conduit à la position réduite vide.

Par extension, j'en viens à m'interroger sur les positions finales gagnantes congruentes de la position visée sur le carré de quatre cases. Une position finale à une boule, comme la position centrale, est toujours congruente à 3 ou 4 autres positions finales à une boule : toutes les cases espacées d'un saut au-dessus de 2 cases. La position centrale 44 est ainsi congruente aux quatre cases 14, 41, 47 et 74. Finir un problème avec une boule en 44 est théoriquement équivalent à le finir par une boule sur une de ces quatre cases congruentes. La figure ci-dessous représente les cases congruentes des neuf positions gagnantes.

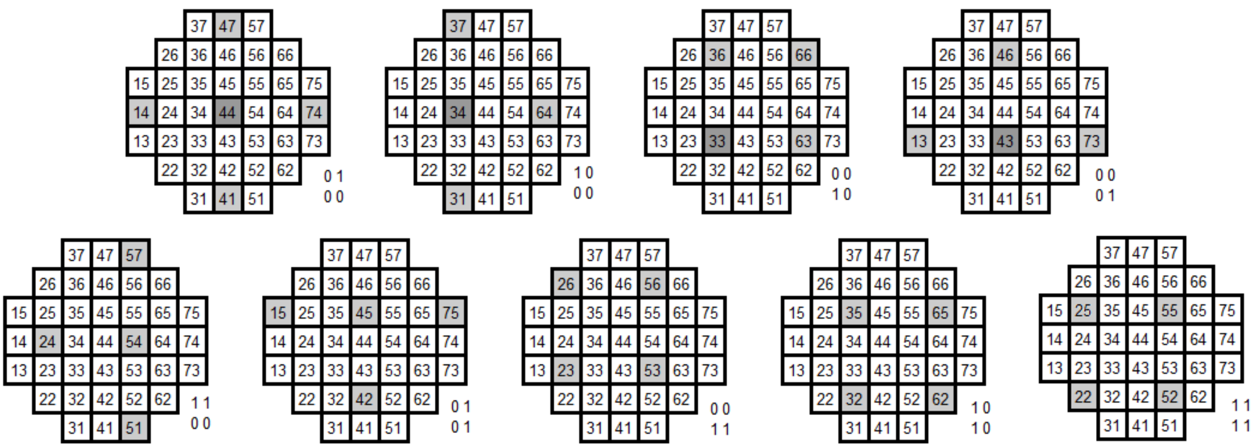


FIGURE 8.29 – *Les cases grisées d'une même figure sont congruentes, c'est-à-dire théoriquement équivalentes. Je n'ai représenté ici que les situations gagnantes (une seule boule présente sur le plateau en fin de jeu)*

Si on prend l'ensemble des positions finales congruentes, il est possible d'obtenir l'ensemble des figures réellement susceptibles de finir sur une de ces positions gagnantes. Pour la position finale réduite au centre (44), la différence n'est pas énorme car les quatre positions finales alternatives sont situées au milieu d'un bord, accessibles uniquement par des figures déjà répertoriées puisqu'elles conduisent à la case centrale : la case 14 est uniquement accessible par deux boules en 24 et 34 alors que ces deux boules permettent aussi d'atteindre la case 44.

distance	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Gagnante 1 (44)	1	4	20	108	536	2 678	12 664	55 222	222 745
Série complète (14,41,44,47,74)	5	4	20	108	536	2 678	12 664	55 222	222 745
coeff.accroissement	-	0,8	5,0	5,4	5,0	5,0	4,7	4,4	4,0
dont symétriques	5	4	4	12	24	46	160	354	769
Gagnante 2 (43) = 4	1	4	17	92	495	2 475	11 771	52 226	212 527
Série complète (13,43,46,73)	4	8	27	132	702	3 535	17 079	77 008	318 437
coeff.accroissement	-	2,0	3,4	4,9	5,3	5,0	4,8	4,5	4,1
dont symétriques	2	2	3	2	8	23	65	140	345
Gagnante 3 (33)	1	4	18	92	499	2 560	12 470	56 289	234 328
Série complète (33,63,36,66)	4	6	24	123	658	3 335	16 039	71 692	294 891
coeff.accroissement	-	1,5	4,0	5,1	5,3	5,1	4,8	4,5	4,1
dont symétriques	2	0	0	3	6	5	25	36	93

FIGURE 8.30 – *Tableau de résultats du nombre de figures accessibles en n étapes avec $n \in [\![0, 8]\!]$ depuis l'ensemble des positions finales congruentes d'une même position réduite. Seules les trois premières positions réduites gagnantes sont représentées ici, les six autres ayant des dispositions semblables aux deux de droite.*

3. Découverte de nouvelles figures

Pour finir et pour étendre mon répertoire de problèmes au-delà des figures à dix ou douze boules, plutôt que de dessiner moi-même de nouvelles figures pour les tester par programme afin de les classer selon les diverses catégories et tenter d'atteindre le Graal de la boule finale unique, je vais améliorer mon programme pour qu'il fasse tout cela automatiquement : je voudrais pouvoir décider au départ du nombre de boules et du type de symétrie recherché et laisser le programme générer aléatoirement une figure vérifiant ces contraintes, déterminer si le carré final est gagnant ou non et, en cas de résultat positif, essayer de trouver une solution.

Pour donner une conclusion crédible, le temps d'essai doit être suffisamment long car, ne sachant pas à priori si une figure trouvée est difficile, il faut s'aligner sur les jeux les plus difficiles et fixer une durée importante, par exemple 2 heures, ou même 3h pour plus de certitudes. Avec un temps aussi long, je ne dois pas m'attendre à trouver beaucoup de figures FTP (théoriquement possibles mais pratiquement impossibles sur le solitaire français). Mon objectif n'est pas de classifier toutes les figures, il y en a trop. Je vais me contenter de finaliser un petit catalogue de figures originales.

Le cahier des charges est relativement important mais l'essentiel des fonctions ayant déjà été développé, il s'agit surtout de mettre au point la méthode qui génère une figure aléatoirement en respectant le type de symétrie souhaité et le nombre de boules. Cette dernière contrainte n'est qu'approximative, la solution retenue laissant passer parfois des jeux légèrement plus importants que prévu du fait des ajouts de symétriques.

À l'usage, je m'aperçois qu'il me manque une procédure qui examine si la figure sélectionnée n'a pas déjà été enregistrée. Ma liste de figures enregistrées est en effet déjà assez longue et il est de plus en plus pénible de rechercher si une nouvelle figure y appartient ou non. Jusqu'à présent, je visualisais les figures en les dessinant manuellement sur mon tableur et je vérifiais qu'une nouvelle figure n'était pas déjà présente en comparant les figures de ce fichier visuel avec la nouvelle figure. Mon programme doit pouvoir parcourir un fichier texte qui donne les principales caractéristiques d'une figure : liste ordonnée des cases occupées, type de figure (FPP, FIT, FTP), nombre de boules, ... La figure candidate est recherchée parmi les figures déjà enregistrées en comparant les listes ordonnées des cases occupées ; une solution n'est cherchée que si la candidate n'est pas déjà présente dans le fichier.

Cette ultime amélioration étant apportée, mon programme peut explorer plus aisément cet ensemble des figures du solitaire. Je n'ai d'abord effectué qu'une approche de la question en m'intéressant aux figures ayant quatre axes de symétrie. J'ai essayé d'obtenir une liste quasi-exhaustive de celles-ci malgré la structure aléatoire de mon programme de recherche qui n'exclut pas les oublis.

Commençant par celles qui ont le plus de boules, jusqu'à un sensible épuisement de la ressource détecté, mon programme de recherche aléatoire ne trouvant plus de nouvelles figures candidate pendant un temps suffisamment long. Pour les figures possibles et les figures théoriquement impossibles, les temps d'attente sont faibles, voire quasi nuls mais pour les figures FTP c'est plus long et je me résous progressivement à baisser la durée d'attente.

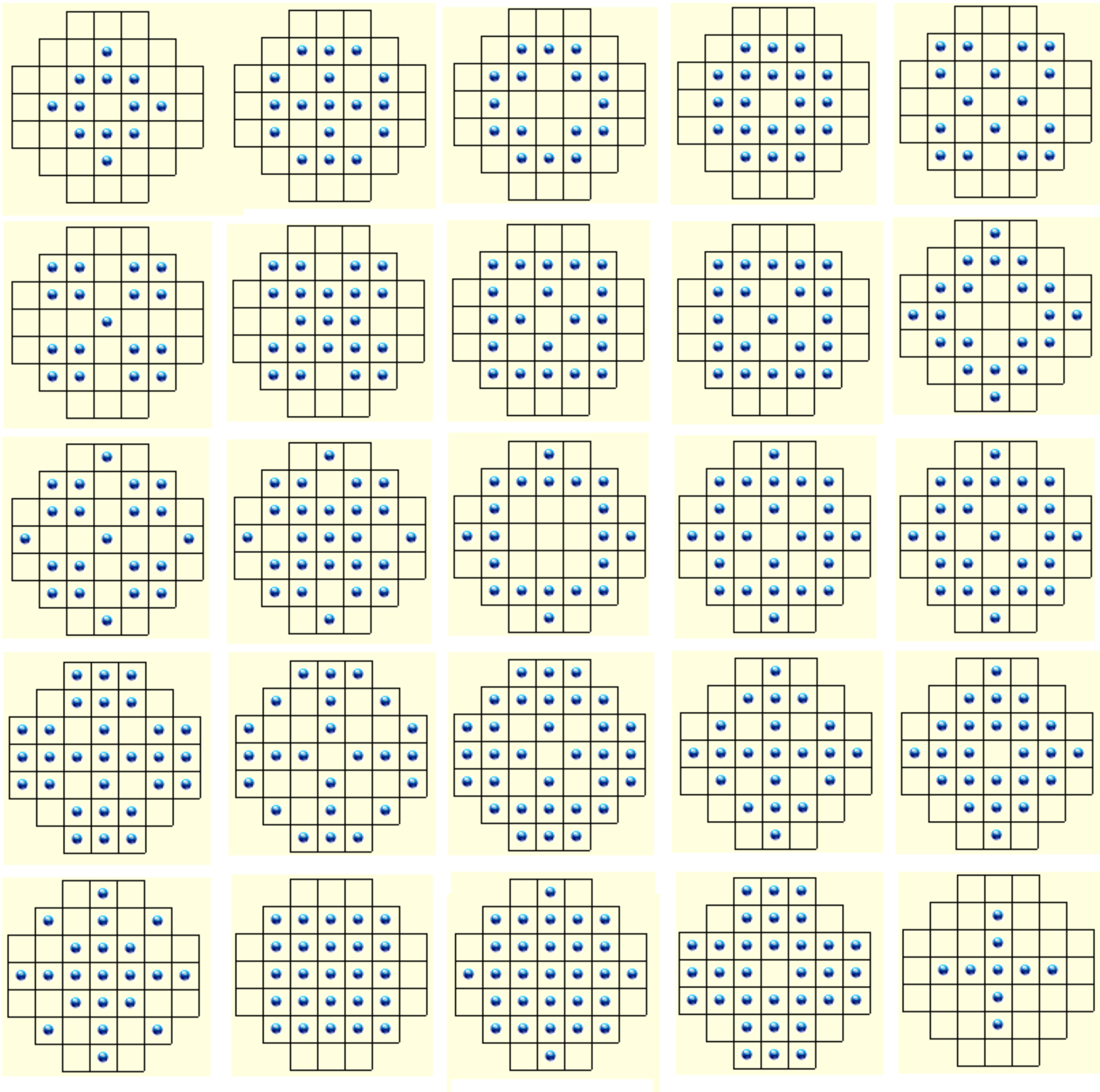


FIGURE 8.31 – *Vingt-cinq problèmes à quatre axes de symétrie se résolvant en une boule finale.*

Résultats pour les figures à quatre axes de symétrie : les figures possibles sont rares, j'en ai trouvé 25 dont 7 qui appartiennent aux figures données par Lucas ; les figures FTP sont les plus nombreuses, mais ce sont aussi les plus difficiles à caractériser avec certitude. Certaines d'entre elles se révèleront peut-être possibles, mais il y a de fortes chances qu'elles ne le soient pas. Les figures théoriquement impossibles sont faciles à obtenir mais n'offre pas d'intérêt pour le joueur. À la différence des figures FTP, elles ne sont réalisables sur aucune autre sorte de plateau. Certains innovateurs ont augmenté la règle en permettant de prendre les boules selon les lignes diagonales ce qui permet alors d'en résoudre certaines, mais je n'ai pas envisagé cette possibilité dans mon programme.

Afin d'enrichir la base de problèmes ayant une solution, j'ai utilisé mon programme désormais très efficace sur des figures ayant un centre de symétrie, deux axes obliques, un axe vertical ou un axe oblique. J'obtiens assez rapidement ces nouveaux problèmes, principalement en abaissant fortement la durée d'examen des figures candidates avant de les classer en FTP. Au départ j'avais mis 9000 s (2 h 1/2) mais pour ces nouvelles figures je suis descendu à 100 secondes. Les problèmes obtenus sont en annexe ; j'ai donné la solution trouvée par mon programme pour certains seulement, pensant que ce n'était pas le principal attrait de ce genre de catalogue.

a. Prolongements

b. Extensions du programme

Le jeu de solitaire a de nombreuses variantes. J'ai déjà mentionné les jeu anglais à 33 boules qui est parfois appelé « classique ». Lucas cite la variante à 41 boules, un carré en diagonal noté diamant 9×9 sur l'illustration. D'autres auteurs ont développé le sujet et créé ou collecté des variantes intéressantes. Je ne citerai que I. De Marchi[2] qui met à disposition des internautes son jeu *peg-solitaire* dans lequel sont enregistrées une multitude de figures et de plateaux ainsi que des solutions quand elles existent et l'indication d'une absence de solution éventuelle. Mon illustration montre vingt de ces jeux avec les placements initiaux des boules.

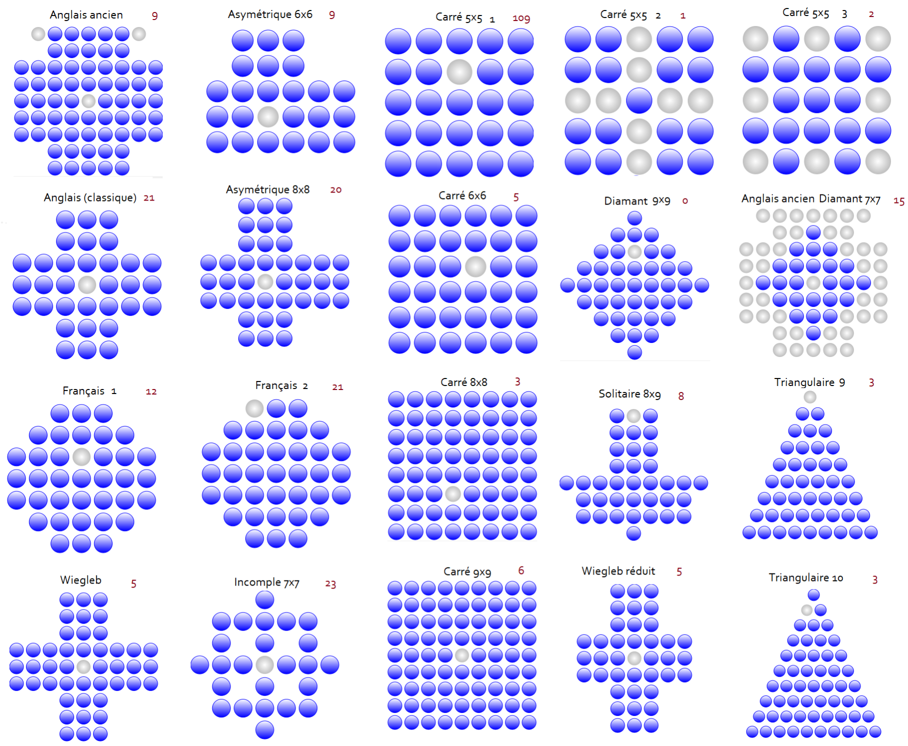


FIGURE 8.32 – *Vingt des 140 variantes du solitaire de I. De Marchi (nombre de solutions en rouge).*

Réaliser un logiciel complet avec une interface pour jouer, un catalogue de figures à résoudre sur différents plateaux, une proposition de solution, etc. constitue un développement important, intéressant et formateur que certains apprécieront. On peut aussi chercher à étendre le catalogue des figures possibles, en adoptant une démarche plus systématique. Bien sûr, comme il s'agit d'un travail titanesque, le nombre de figures étant très élevé, on optera sans doute pour des figures particulières comme je l'ai fait ici : figures ayant au moins un élément de symétrie et/ou ayant toutes les boules adjacentes. On peut approfondir ce que Lucas appelle les « problèmes sur le solitaire décentré » : en partant d'une certaine disposition des boules (Lucas part du boulier plein privé de sa boule centrale), on cherche à obtenir une disposition finale particulière. On peut aussi rechercher la « solution minimale » d'un problème : on utilise un maximum de fois un même pion à la suite (plusieurs prises consécutives avec ce pion ne compte que pour un coup). E. Harang[3] a rapporté ce résultat de John Beasley qu'au solitaire anglais, alors qu'il faut enlever 31 pions, la solution minimale ne comporte que 18 coups. Avec son Corsaire, Lucas a montré que pour enlever 35 pions, 26 seulement sont nécessaires. Peut-on faire mieux ?

2. Site de Innocent De Marchi : `http:peg-solitaire.sourceforge.net/index.html`

3. L'excellent site d'Emmanuel Harang : `http://eternitygames.free.fr/Solitaire.html` donne de nombreuses informations et méthodes pour approfondir et accélérer l'étude des solitaires.

c. Le solitaire anglais

Ce plateau est plus classique et international que le plateau français. Il est constitué de trente-trois trous dessinant une croix grecque, soit quatre de moins que le solitaire français. Les problèmes de ce boulier conservent néanmoins la complexité du jeu car celle-ci est principalement le fait de l'explosion combinatoire des chemins empruntés vers une éventuelle solution. Il ne faut pas s'étonner d'avoir des difficultés à résoudre un problème ne contenant que peu de boules. Par ailleurs, sur un boulier physique, comme on ne mémorise pas les étapes intermédiaires, il est presque impossible de revenir en arrière ce qui accroit la difficulté du jeu.

Pour les heureux possesseurs de ce type de boulier, désireux d'avoir quelques problèmes moins difficiles que la grande réussite (partir du boulier décentré et finir sur la case centrale) qui est, rappelons-le possible ici, je me suis employé à construire une petite bibliothèque de figures symétriques ayant entre 10 et 30 boules qui se finissent toutes par une boule unique. Voici donc ces figures, rangées par nombre de boules croissant, en annexe j'ai écrit pour chacune la solution trouvée par mon programme.

Figure 8.33 – *Soixante-quatre problèmes symétriques pour le boulier anglais (solutions en annexe)*

4. Annexes

a. Solution des premières figures du chevalier Busschopp

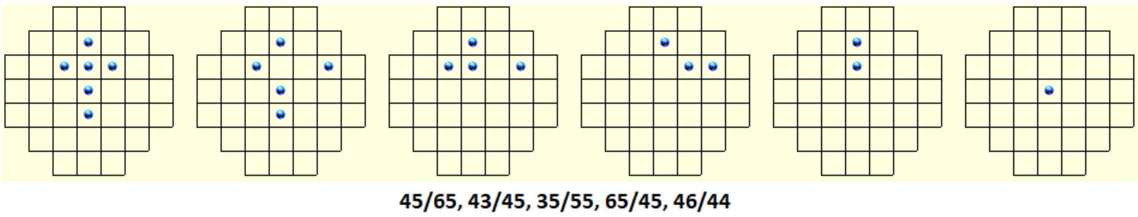


FIGURE 8.34 – *Solution de la 1re figure du chevalier Busschopp : la croix de six boules.*

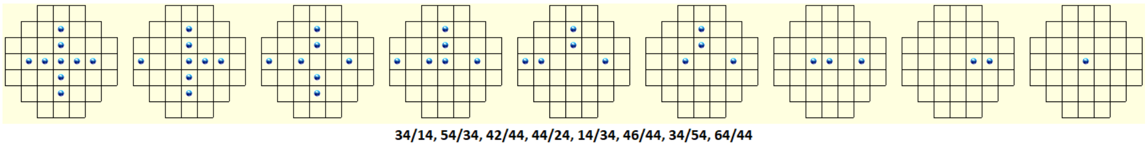


FIGURE 8.35 – *Solution de la 2e figure du chevalier Busschopp : la croix de neuf boules.*

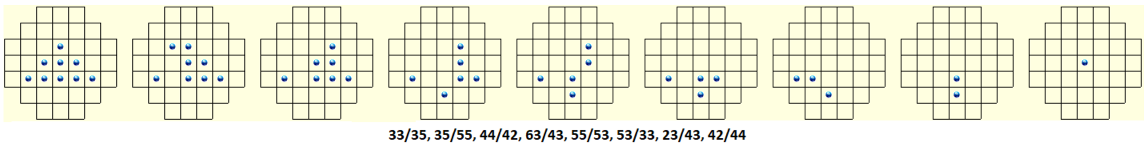


FIGURE 8.36 – *Solution de la 3e figure du chevalier Busschopp : le triangle à neuf boules.*

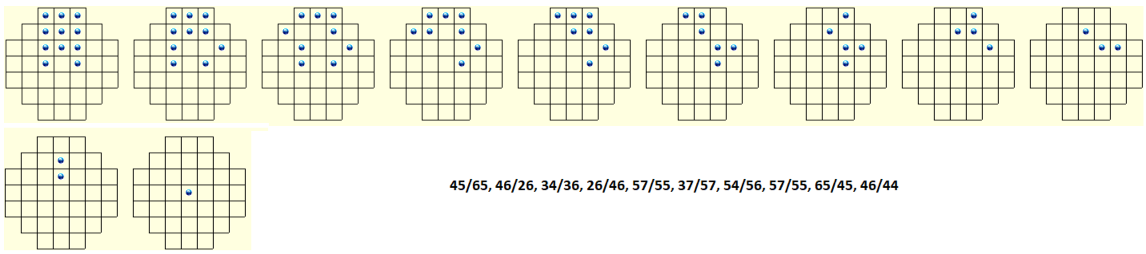


FIGURE 8.37 – *Solution de la 4e figure du chevalier Busschopp : la cheminée à onze boules.*

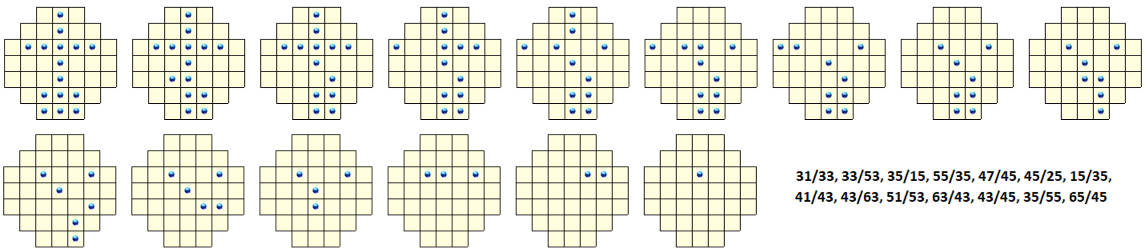


FIGURE 8.38 – *Solution de la 5e figure du chevalier Busschopp : le calvaire à quinze boules.*

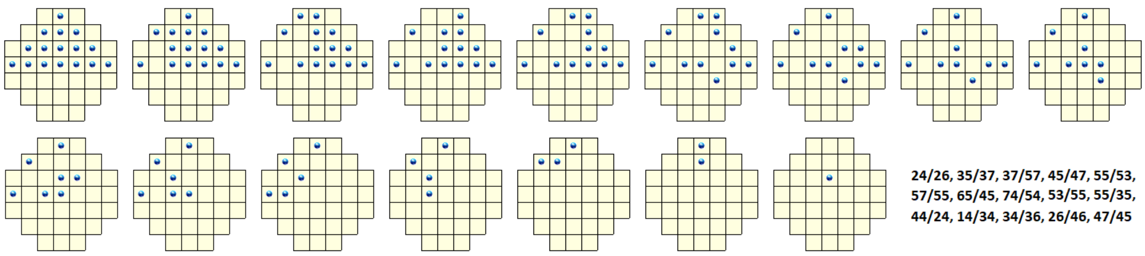


FIGURE 8.39 – *Solution de la 6e figure du chevalier Busschopp : la pyramide à seize boules.*

b. Solutions aux figures d'au plus 25 boules

Solutions trouvées par programme

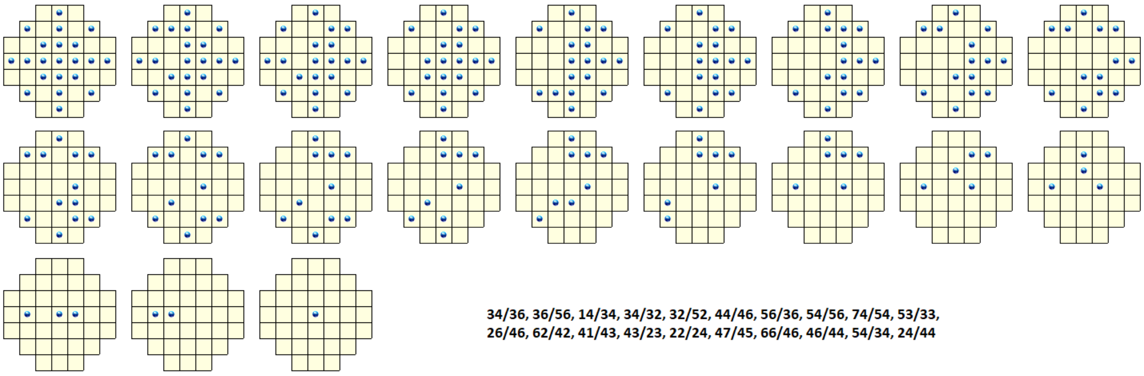


FIGURE 8.40 – *Solution de la 7e figure du chevalier Busschopp : la double croix (21 boules).*

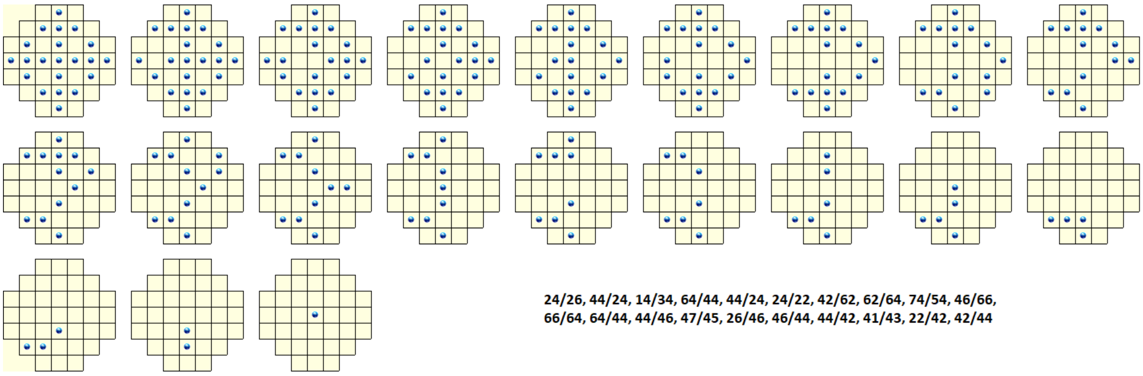


FIGURE 8.41 – *Solution de la 8e figure du chevalier Busschopp : les cinq croix entrelacées (21 boules).*

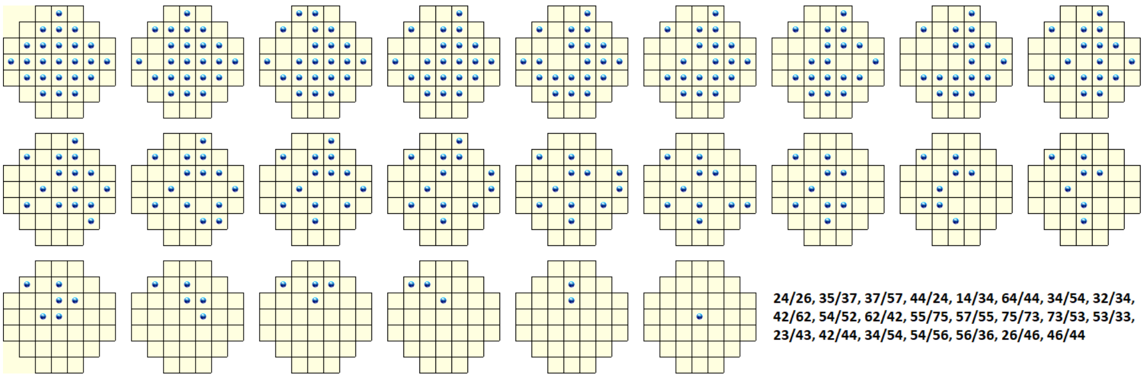


FIGURE 8.42 – *Solution de la 9e figure du chevalier Busschopp : le pentagone (24 boules).*

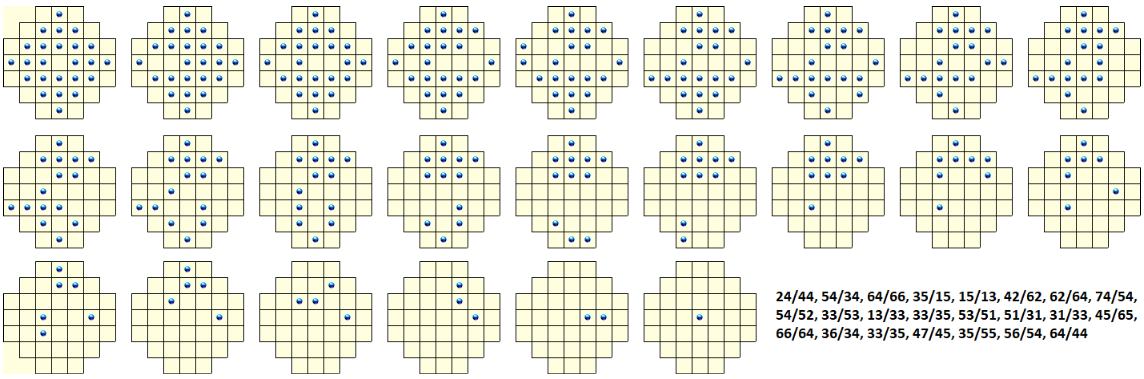


FIGURE 8.43 – *Solution de la 10e figure du chevalier Busschopp : le carré incliné (24 boules).*

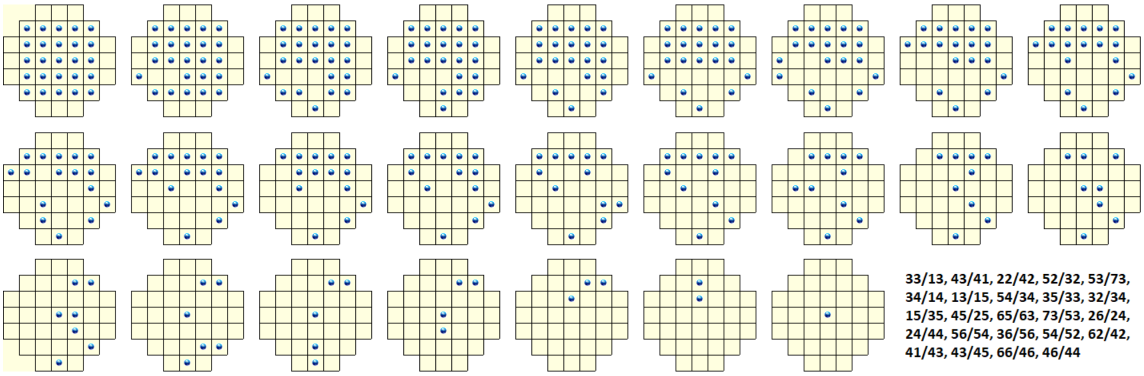


FIGURE 8.44 – *Solution du carré à 25 boules en 24 coups simples.*

Solutions proposées par Lucas

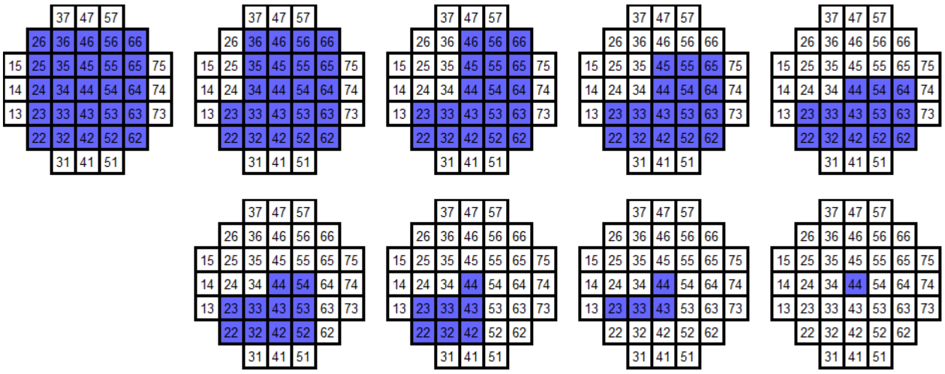


FIGURE 8.45 – *Solution du carré à 25 boules en 8 coups triples.*

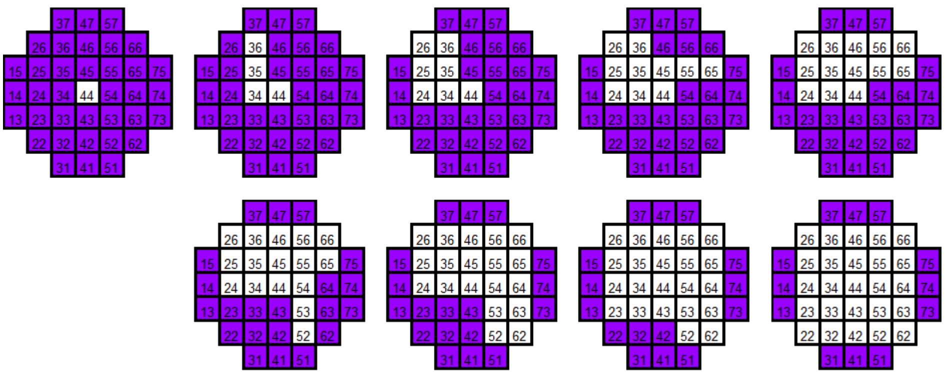


FIGURE 8.46 – *Solution de la marche accélérée des douze apôtres en 8 coups triples.*

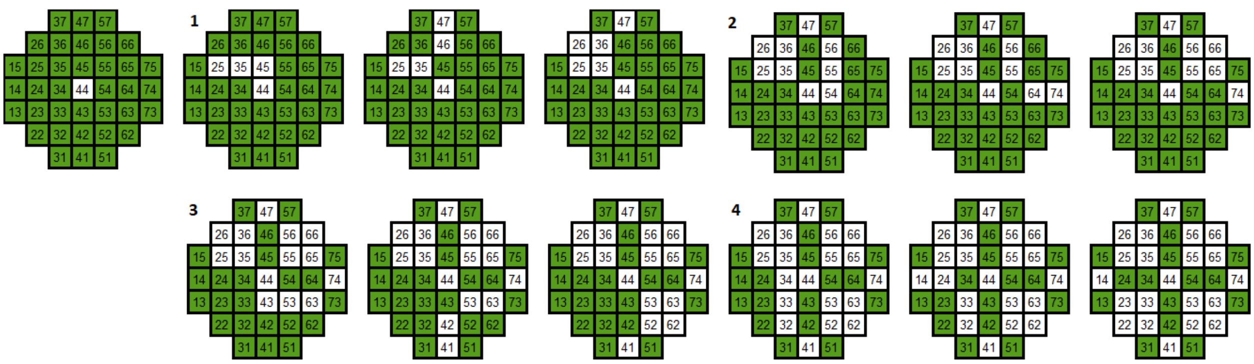


FIGURE 8.47 – *Solution du tricolet en 4 étapes, chacune constituée d'un coup triple suivi de 2 coups simples.*

c. Solutions aux figures ayant une finale de plus d'une boule

Rappel : pour tous ces problèmes, la figure initiale est le boulier plein privé de la boule centrale.

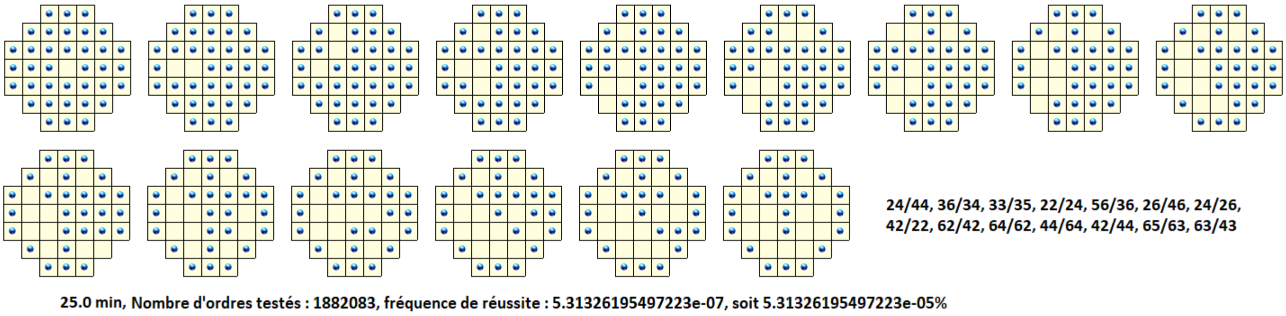


Figure 8.48 – *Solution du chapelet : 14 étapes.*

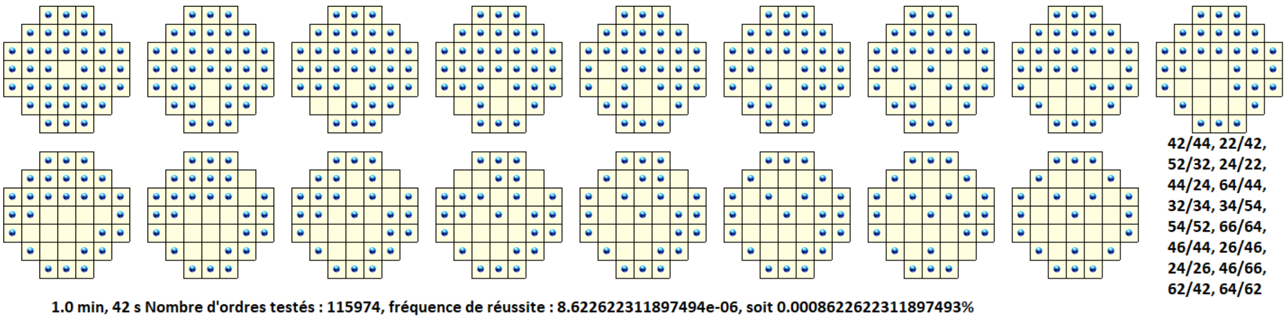


Figure 8.49 – *Solution de la pleine lune : 16 étapes.*

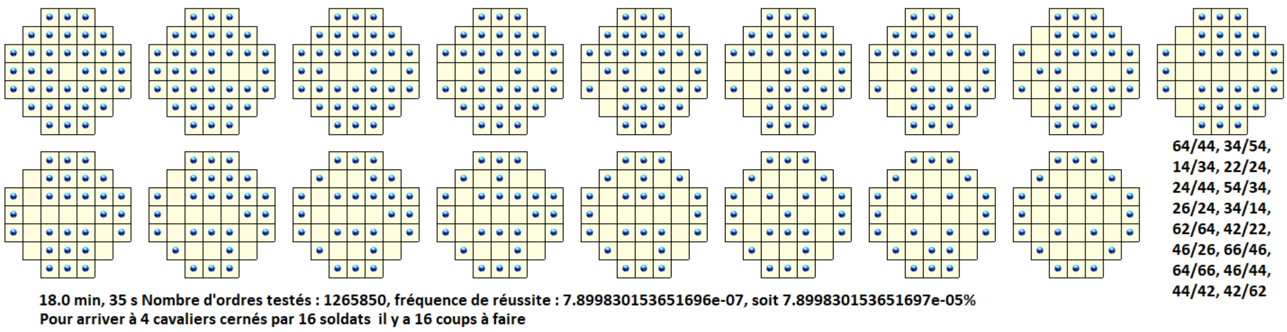


Figure 8.50 – *Solution de 4 cavaliers cernés par 16 soldats : 16 étapes.*

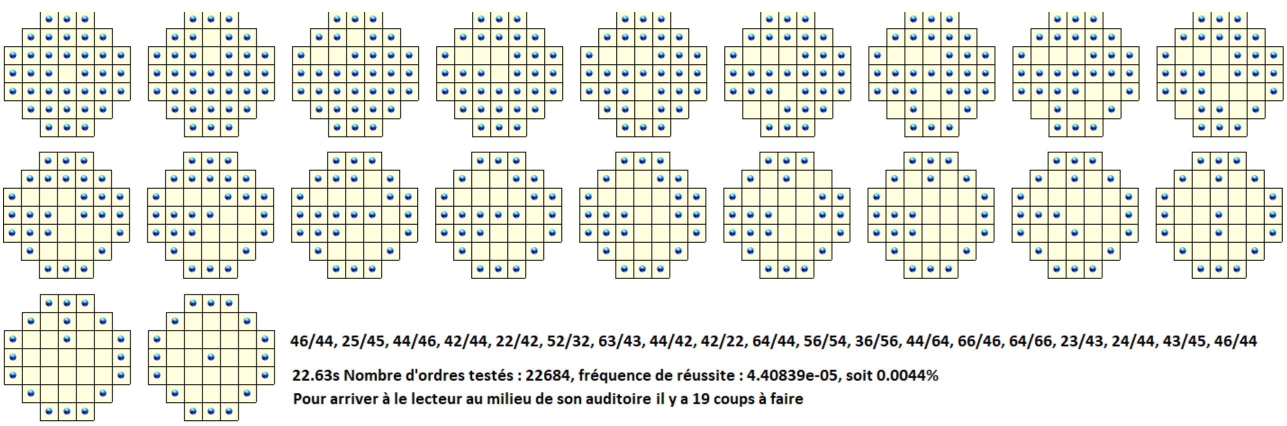


Figure 8.51 – *Solution du lecteur au milieu de son auditoire : 19 étapes.*

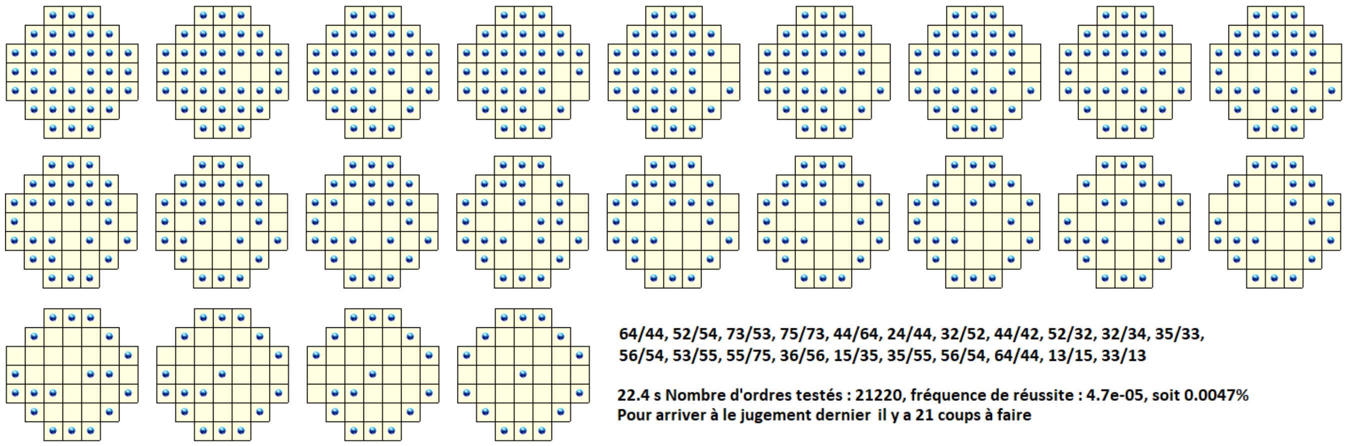


FIGURE 8.52 – *Solution du jugement dernier : 21 étapes.*

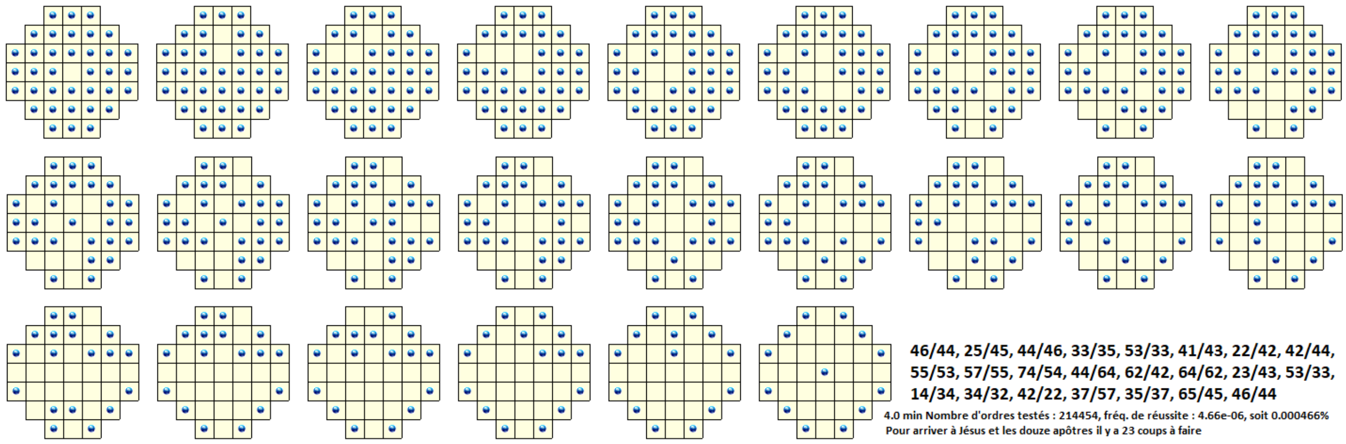


FIGURE 8.53 – *Solution de Jésus et les douze apôtres : 23 étapes.*

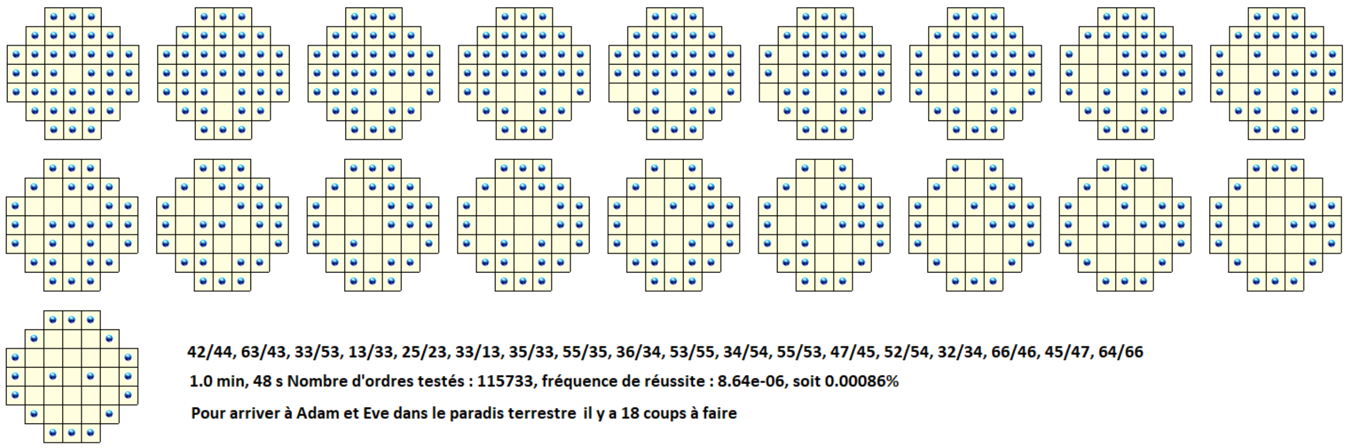


FIGURE 8.54 – *Solution de Adam et Eve dans le paradis terrestre : 18 étapes.*

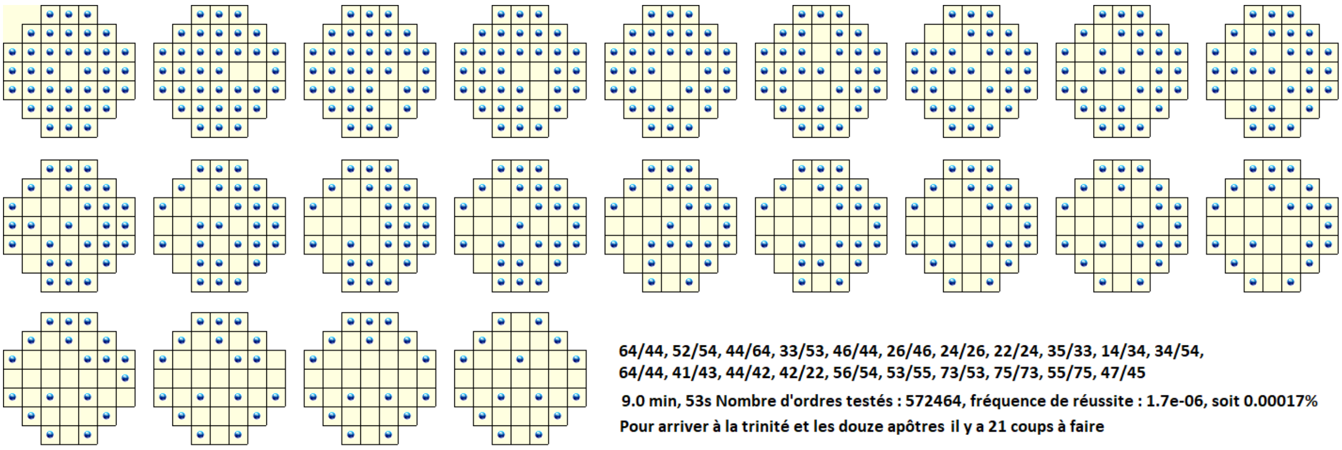


FIGURE 8.55 – *Solution de la trinité et les douze apôtres : 21 étapes.*

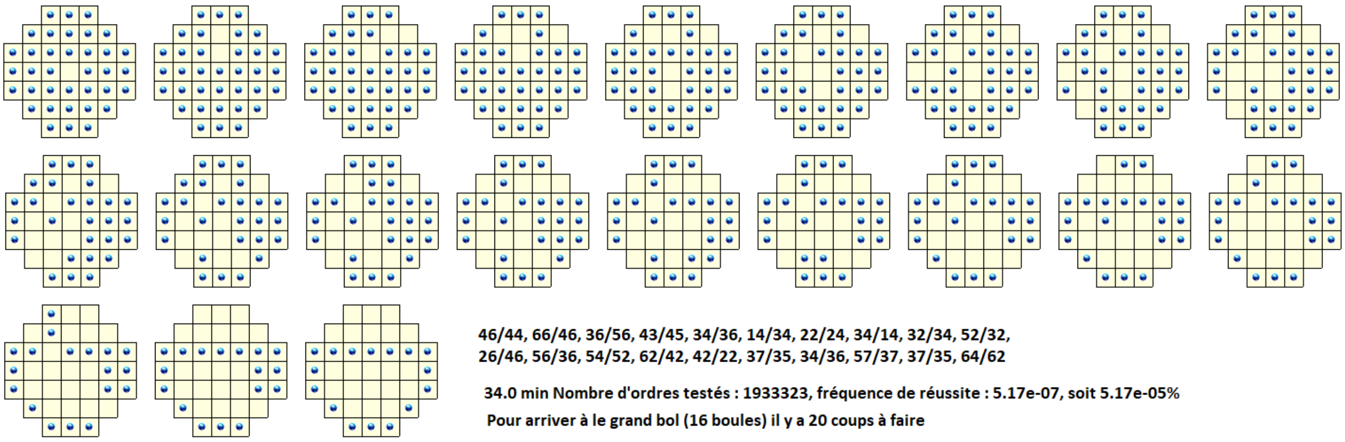


FIGURE 8.56 – *Solution du grand bol : 20 étapes.*

d. Solution du corsaire

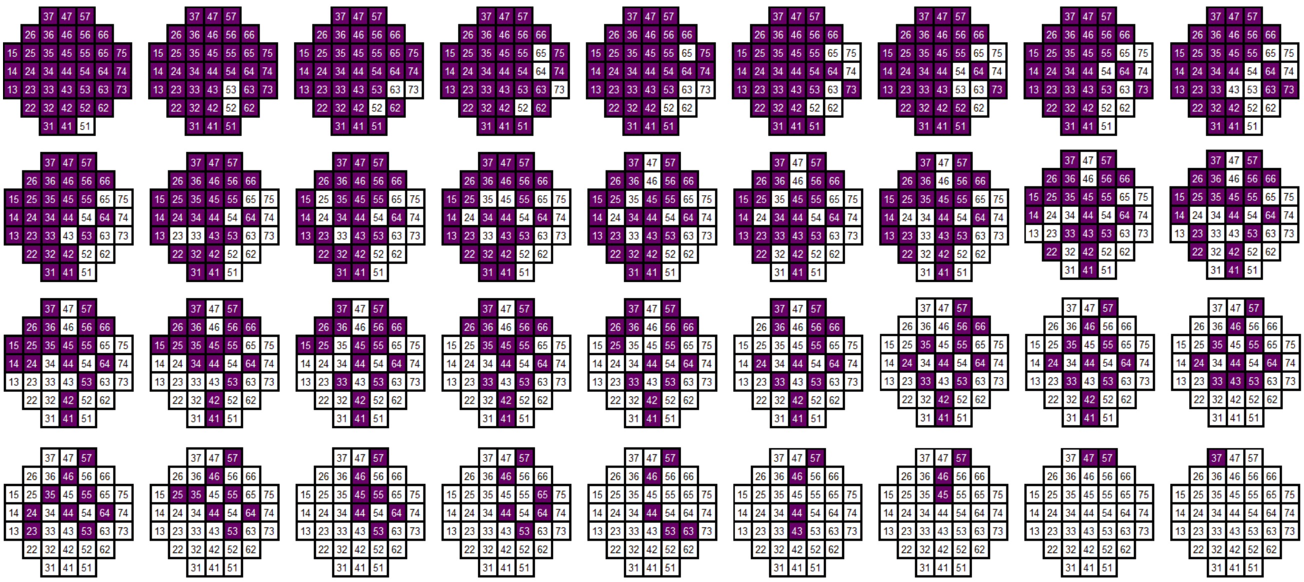


FIGURE 8.57 – *Les 25 étapes préliminaires préparent le terrain pour l'entrée en scène du corsaire (la boule 41) qui prend successivement toutes les boules sauf la 57 qui le prend.*

e. Problème conduisant à une position finale à une seule boule

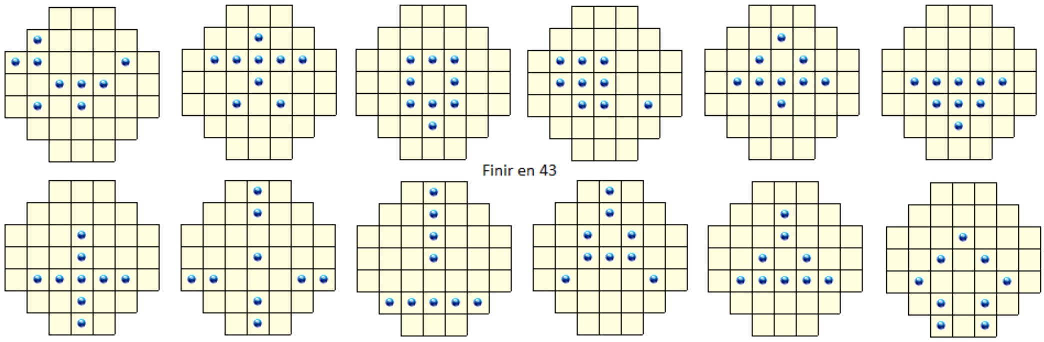


FIGURE 8.58 – *Douze problèmes à 9 boules pour lesquels il s'agit de finir sur une seule boule en 43*

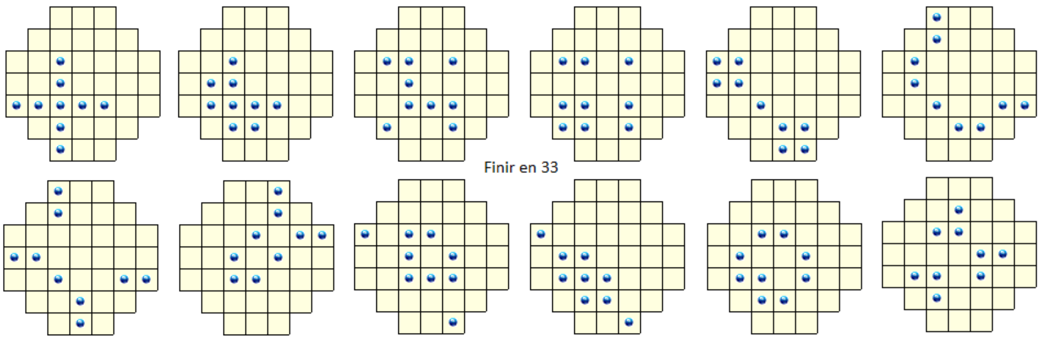


FIGURE 8.59 – *Douze problèmes à 9 boules pour lesquels il s'agit de finir sur une seule boule en 33*

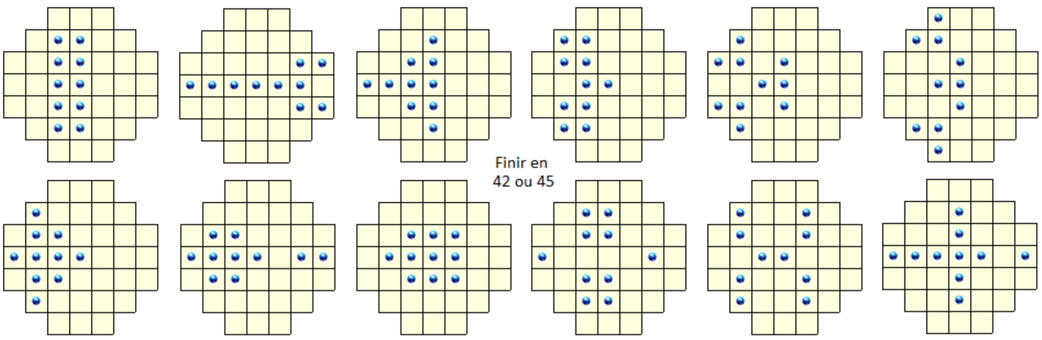


FIGURE 8.60 – *Douze problèmes à 10 boules pour lesquels il s'agit de finir sur une seule boule en 42 ou 45*

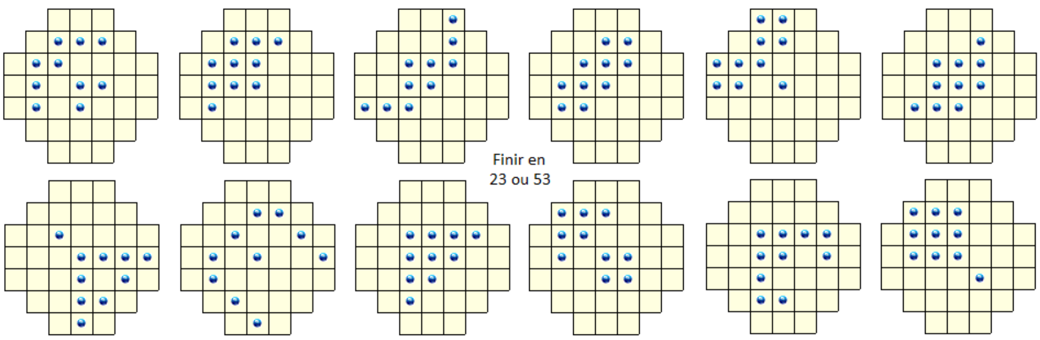


FIGURE 8.61 – *Douze problèmes à 10 boules pour lesquels il s'agit de finir sur une seule boule en 23 ou 53*

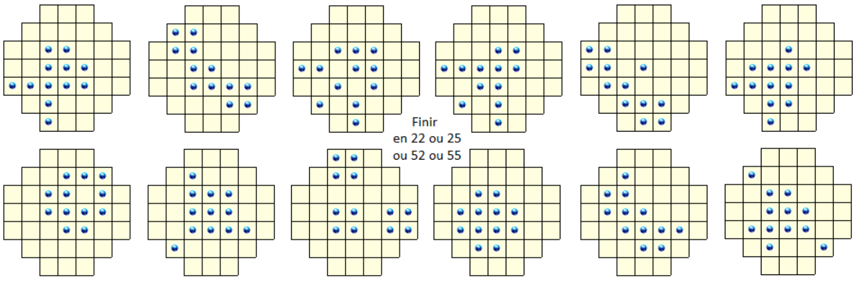


FIGURE 8.62 – *Douze problèmes à 12 boules où il faut finir sur une boule en 22, 25, 52 ou 55*

f. Problèmes symétriques conduisant à une position finale à une seule boule

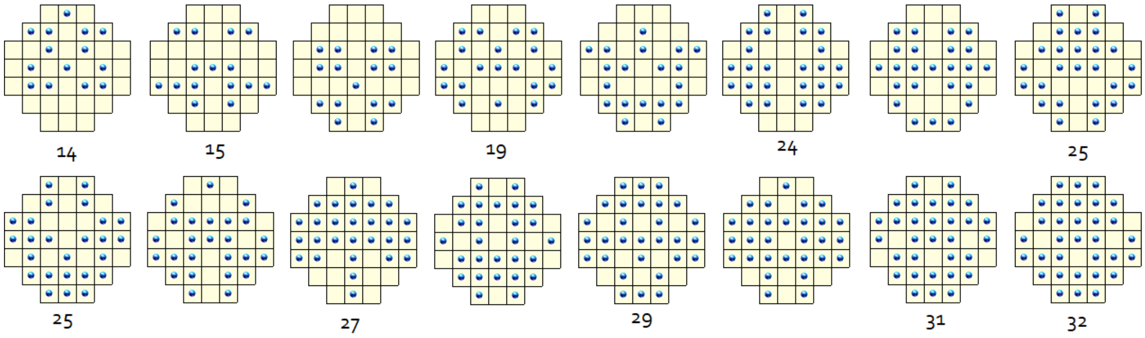


FIGURE 8.63 – *Seize problèmes finissant sur une boule ayant un axe de symétrie vertical*

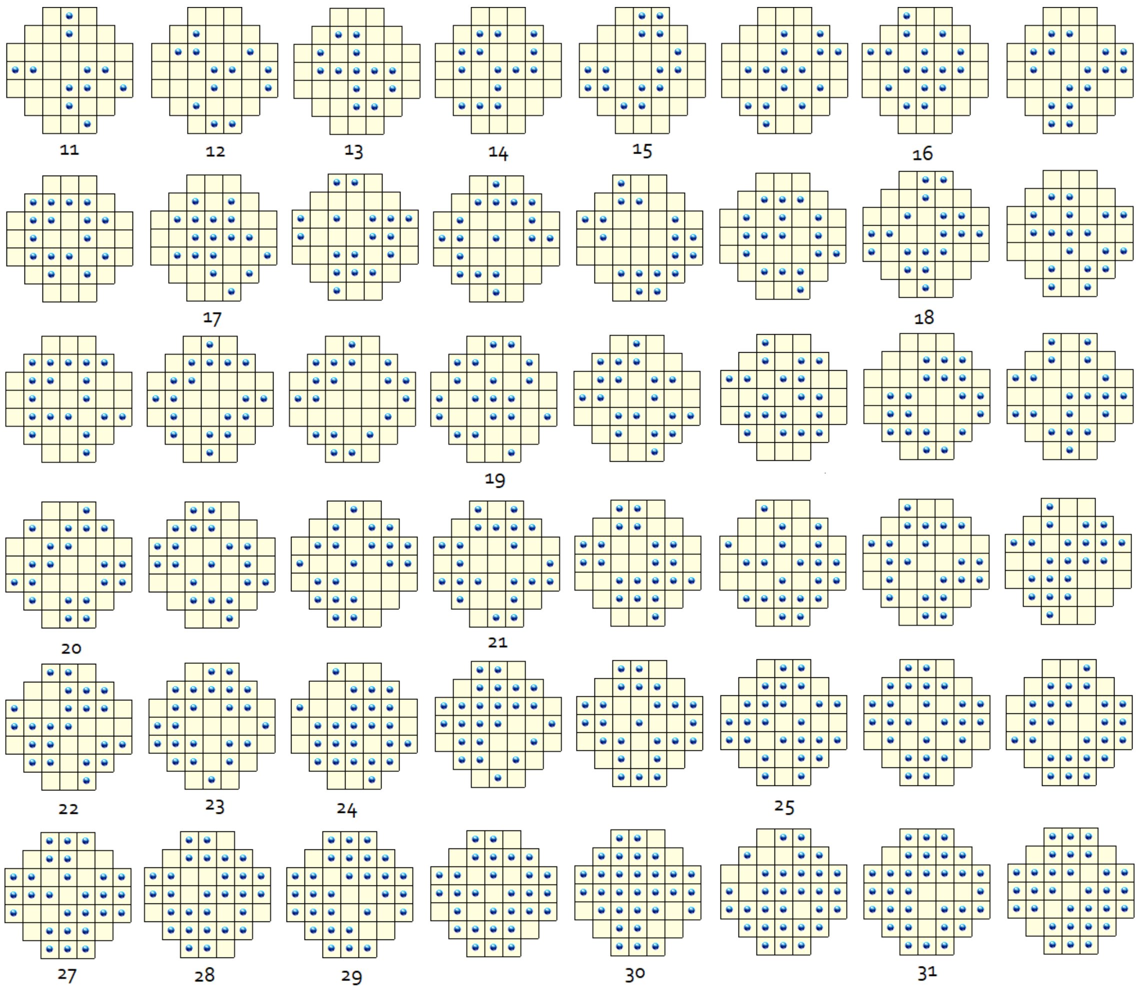
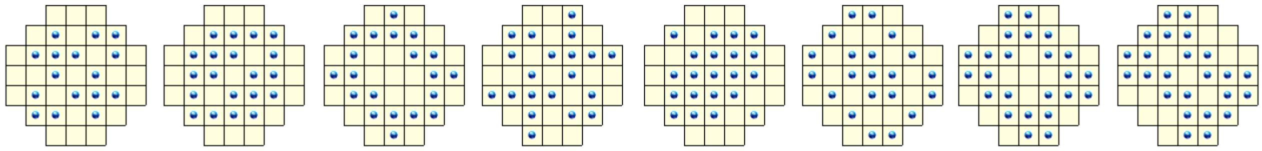
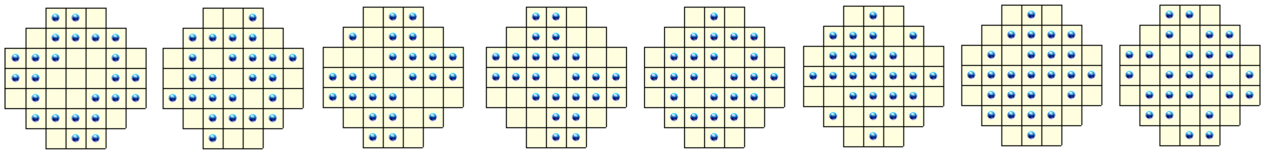


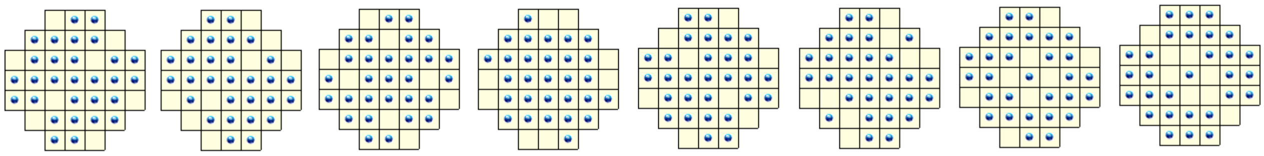
FIGURE 8.64 – *Quarante-huit problèmes finissant sur une boule ayant un axe de symétrie oblique*



16 20 21 24

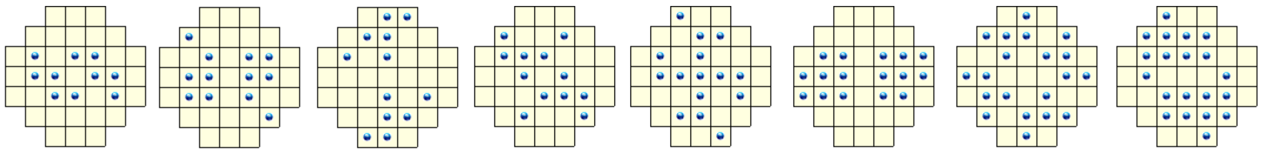


25



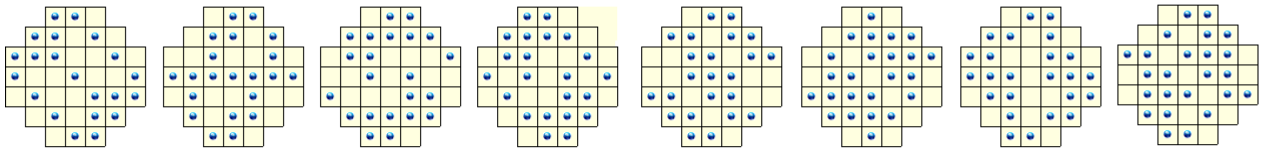
29

FIGURE 8.65 – *Vingt-quatre problèmes finissant sur une boule ayant deux axes de symétrie obliques*



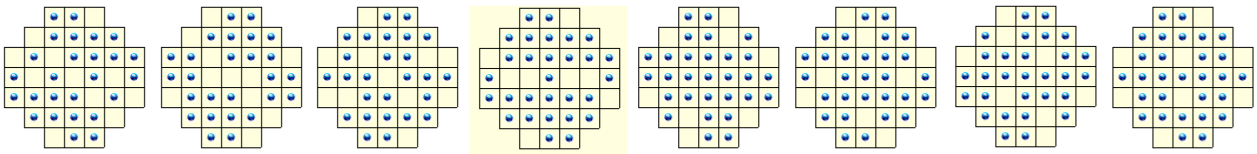
10 12 15 16 20

45/47, 43/45, 24/26, 63/65, 37/57, 57/55, 55/35, 34/36, 26/46, 32/52, 51/53, 53/55, 65/45, 46/44
34/36, 24/22, 54/52, 74/54, 54/56, 75/55, 56/54, 13/15, 15/35, 36/34, 34/32, 22/42, 42/62, 62/64, 54/74
23/25, 52/54, 54/56, 26/24, 65/63, 62/64, 74/54, 46/26, 66/46, 41/43, 47/45, 43/23, 45/25, 14/34, 22/24, 24/44, 54/34, 26/24, 34/14
43/41, 56/54, 54/74, 63/43, 43/23, 24/22, 22/42, 41/43, 35/55, 51/53, 43/63, 62/64, 74/54, 54/56, 37/35, 56/36, 25/45, 26/46, 45/47

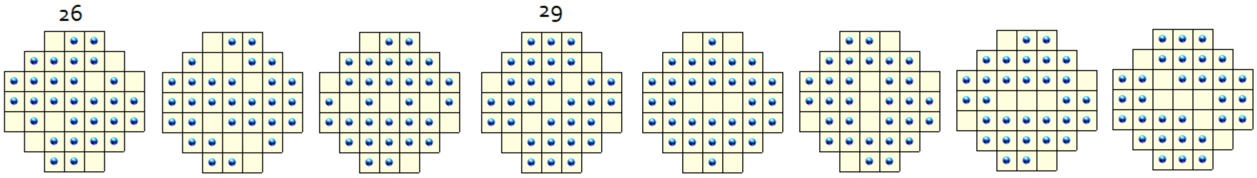


21 22 23 24

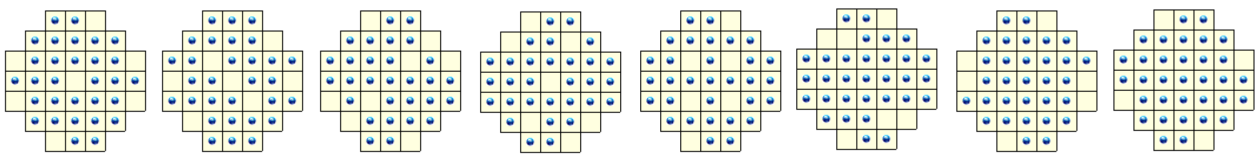
15/13, 52/54, 54/34, 51/31, 31/33, 34/32, 13/33, 32/34, 25/45, 26/46, 46/44, 34/54, 37/57, 57/55, 54/56, 73/75, 75/55, 56/54, 62/64, 54/74
35/33, 14/34, 34/32, 31/51, 57/37, 37/35, 53/55, 51/53, 32/52, 52/54, 54/34, 34/36, 36/56, 56/54, 64/44, 22/24, 66/64, 74/54, 54/34, 34/14
41/43, 47/45, 31/33, 43/23, 13/33, 34/32, 63/43, 57/55, 45/65, 25/45, 75/55, 45/65, 22/42, 43/41, 66/64, 64/44, 62/42, 41/43, 43/45, 26/46, 45/47
41/43, 47/45, 35/15, 15/13, 13/33, 43/23, 53/55, 55/35, 35/33, 23/43, 37/35, 51/53, 53/33, 32/34, 34/36, 26/46, 46/66, 62/64, 74/54, 66/64, 54/74



26 29



29 30



31 33

FIGURE 8.66 – *Quarante problèmes finissant sur une boule ayant un centre de symétrie. Une solution est donnée pour les figure contenant entre 15 et 22 boules.*

g. Solutions des problèmes du solitaire anglais

Quatre axes de symétrie

Fig.1 : 24/44, 43/23, 54/34, 46/44, 44/24, 23/25, 25/45, 45/65, 65/63, 63/43, 42/44
Fig.2 : 23/43, 52/54, 54/74, 42/44, 55/57, 25/45, 45/43, 36/56, 57/55, 55/75, 75/73, 73/53, 53/33, 32/34, 34/14
Fig.3 : 24/44, 53/73, 55/53, 53/51, 35/37, 65/63, 73/53, 56/36, 44/46, 37/35, 25/45, 46/44, 32/52, 44/42, 23/43, 43/63, 51/53, 63/43, 43/41
Fig.4 : 33/31, 63/43, 35/15, 15/13, 13/33, 43/23, 23/25, 31/51, 51/53, 65/45, 46/44, 74/54, 53/55, 55/57, 57/37, 37/35, 25/45, 45/43, 43/41
Fig.5 : 24/44, 54/34, 53/51, 32/52, 34/32, 51/31, 31/33, 33/13, 13/15, 46/44, 43/45, 56/54, 35/55, 15/35, 35/37, 37/57, 54/56, 57/55, 55/75, 75/73, 73/53, 52/54, 54/74

Centre de symétrie

Fig.6 : 46/44, 25/45, 44/46, 42/44, 31/51, 57/37, 37/35, 56/36, 36/34, 44/24, 63/43, 51/53, 53/33, 32/34, 24/44
Fig.7 : 37/57, 65/63, 44/64, 42/44, 56/54, 54/74, 36/56, 44/46, 57/55, 23/43, 51/31, 31/33, 43/23, 13/33, 33/35, 75/73, 73/53, 52/54, 54/56, 56/36, 36/34, 34/14
Fig.8 : 15/13, 64/44, 57/37, 37/35, 56/54, 44/64, 24/44, 32/34, 13/33, 34/32, 73/75, 75/55, 41/43, 44/42, 31/33, 52/32, 32/34, 34/36, 36/56, 56/54, 64/44
Fig.9 : 23/25, 13/15, 15/35, 35/37, 55/35, 44/24, 32/34, 52/32, 34/36, 37/35, 31/33, 33/53, 54/52, 74/54, 75/55, 55/53, 52/54, 57/55, 54/56, 56/36, 36/34, 34/14
Fig.10 : 43/41, 31/51, 51/53, 54/52, 23/25, 73/75, 15/35, 35/37, 55/35, 75/55, 44/24, 14/34, 34/36, 32/34, 37/35, 34/36, 56/54, 36/56, 57/55, 55/53, 52/54, 54/74
Fig.11 : 43/41, 63/43, 65/63, 73/53, 43/63, 31/51, 51/53, 54/52, 15/13, 13/33, 36/56, 57/55, 45/65, 25/45, 33/35, 35/55, 55/75, 75/73, 73/53, 52/54, 54/34, 34/14
Fig.12 : 36/34, 34/14, 56/36, 55/75, 63/65, 75/55, 55/35, 25/45, 37/35, 45/25, 15/13, 43/63, 73/53, 32/34, 13/33, 33/35, 25/45, 45/43, 43/63, 51/53, 63/43, 43/41
Fig.13 : 37/57, 73/75, 57/55, 36/56, 34/36, 55/35, 36/34, 51/31, 31/33, 34/32, 15/13, 25/23, 13/33, 32/34, 44/24, 42/44, 54/74, 75/73, 52/54, 73/53, 53/55, 56/54, 54/34, 34/14
Fig.14 : 46/44, 52/54, 54/34, 55/75, 75/73, 73/53, 24/44, 43/63, 63/65, 51/31, 33/13, 31/33, 13/15, 36/34, 44/24, 15/35, 37/57, 57/55, 65/45, 45/25, 25/23, 23/43, 43/41
Fig.15 : 43/63, 41/43, 75/73, 73/53, 43/63, 51/53, 63/43, 37/57, 34/32, 14/34, 45/47, 43/45, 64/44, 44/24, 45/25, 57/37, 37/35, 25/45, 13/33, 32/34, 24/44, 44/46, 65/45, 46/44
Fig.16 : 23/43, 47/45, 75/73, 36/34, 55/75, 63/65, 75/55, 45/65, 43/63, 73/53, 53/51, 31/33, 51/31, 34/32, 31/33, 13/15, 15/35, 57/55, 65/45, 45/25, 25/23, 23/43, 43/41
Fig.17 : 31/51, 33/13, 13/15, 34/14, 36/34, 44/24, 42/44, 14/34, 44/24, 15/35, 55/75, 35/55, 47/45, 45/65, 75/73, 53/55, 65/45, 51/53, 63/43, 57/55, 45/65, 65/63, 73/53, 53/33, 32/34, 24/44

Deux axes obliques

Fig.18 : 23/25, 25/45, 46/44, 56/54, 54/34, 65/63, 63/43, 42/44, 44/24, 32/34, 24/44
Fig.19 : 15/35, 45/25, 25/23, 51/53, 53/55, 44/24, 23/25, 42/44, 73/53, 37/35, 25/45, 45/65, 65/63, 63/43, 43/45, 45/47
Fig.20 : 15/35, 23/25, 25/45, 45/43, 42/44, 51/53, 37/35, 56/36, 36/34, 44/24, 63/43, 65/63, 73/53, 53/33, 32/34, 24/44
Fig.21 : 23/43, 42/44, 56/54, 54/74, 73/75, 75/55, 36/34, 34/54, 54/56, 56/36, 37/35, 63/43, 51/53, 53/33, 32/34, 34/36, 15/35, 36/34, 34/14
Fig.22 : 13/33, 57/37, 37/35, 35/15, 15/13, 56/36, 41/43, 44/42, 75/73, 73/53, 65/63, 63/43, 43/23, 13/33, 32/34, 52/32, 31/33, 33/35, 36/34, 34/14
Fig.23 : 13/15, 57/37, 15/35, 23/25, 35/33, 32/34, 37/35, 34/36, 75/73, 73/53, 65/63, 53/55, 55/57, 36/56, 57/55, 55/35, 25/45, 44/46, 42/44, 31/51, 51/53, 63/43, 43/45, 45/47
Fig.24 : 15/13, 73/75, 13/33, 43/23, 75/55, 55/53, 53/73, 41/43, 51/53, 43/63, 73/53, 34/14, 37/57, 57/55, 36/56, 56/54, 53/55, 55/35, 35/15, 15/13, 13/33, 32/34, 34/54, 54/74
Fig.25 : 24/44, 45/47, 65/45, 37/57, 57/55, 45/65, 36/34, 44/24, 64/44, 32/34, 34/54, 53/33, 73/53, 53/55, 65/45, 51/53, 23/43, 53/33, 15/35, 45/25, 25/23, 23/43, 43/41

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	74
13	23	33	43	53	63	73
		32	42	52		
		31	41	51		

FIGURE 8.67 – *Numérotation des cases du solitaire anglais employée dans ces solutions. Un coup noté* aa/bb *signifie : la boule située en* aa *est déplacée en* bb *; celle qui est survolée dans ce déplacement est enlevée.*

Un axe horizontal et un vertical

Fig.26 : 34/14, 31/33, 33/13, 13/15, 15/35, 57/55, 65/45, 45/25, 63/65, 51/53, 53/55, 65/45, 46/44, 37/35, 25/45, 45/43, 43/41
Fig.27 : 34/14, 54/34, 42/44, 44/24, 46/44, 14/34, 44/24, 13/33, 15/35, 73/53, 36/34, 24/44, 52/54, 54/34, 75/55, 56/54, 64/44, 44/24, 32/34, 24/44
Fig.28 : 41/43, 47/45, 44/42, 37/35, 35/15, 15/13, 13/33, 74/54, 51/53, 63/43, 33/53, 53/55, 55/35, 57/55, 65/45, 45/25, 25/23, 31/33, 23/43, 43/41
Fig.29 : 33/13, 25/23, 45/25, 47/45, 13/15, 15/35, 45/25, 53/33, 23/43, 43/45, 64/44, 44/46, 55/75, 75/73, 73/53, 41/43, 53/33, 33/35, 25/45, 46/44
Fig.30 : 25/45, 55/57, 75/55, 54/56, 57/55, 55/35, 36/34, 33/13, 31/33, 43/23, 13/33, 34/32

Un axe oblique

Fig.31 : 23/43, 56/54, 43/41, 54/74, 31/51, 45/43, 75/73, 73/53, 43/63, 24/44, 51/53, 63/43, 43/45, 45/47
Fig.32 : 34/36, 31/33, 63/43, 51/53, 43/63, 73/53, 75/55, 55/35, 36/34, 34/32, 32/52, 52/54, 54/74
Fig.33 : 52/54, 54/34, 32/52, 51/53, 63/43, 37/35, 34/36, 15/35, 36/34, 65/63, 73/53, 53/33, 34/32
Fig.34 : 44/42, 55/53, 63/43, 43/41, 35/55, 47/45, 55/35, 34/32, 14/34, 35/33, 33/31, 31/51, 51/53
Fig.35 : 23/25, 25/45, 45/47, 37/57, 57/55, 55/53, 53/33, 32/34, 52/32, 31/33, 33/35, 75/55, 63/65, 65/45, 45/25, 15/35
Fig.36 : 34/14, 13/15, 44/64, 46/44, 44/42, 65/45, 57/55, 45/65, 65/63, 63/43, 42/44, 32/34, 44/24, 23/25, 15/35
Fig.37 : 52/54, 75/55, 55/35, 35/33, 32/34, 57/55, 55/53, 63/43, 37/35, 34/36, 15/35, 36/34, 13/33, 34/32, 31/33, 43/23
Fig.38 : 52/54, 46/44, 44/64, 31/33, 34/32, 35/37, 37/57, 57/55, 65/45, 63/65, 75/55, 55/35, 35/15, 15/13, 13/33, 32/34, 34/14
Fig.39 : 44/42, 55/75, 75/73, 46/44, 44/64, 41/43, 24/44, 43/45, 45/25, 57/55, 32/34, 13/33, 33/35, 25/45, 45/65, 65/63, 73/53
Fig.40 : 34/54, 54/56, 41/43, 43/23, 35/37, 56/36, 37/35, 35/15, 23/25, 15/35, 35/55, 74/54, 55/53, 52/54, 73/53, 54/52, 51/53
Fig.41 : 25/23, 47/45, 45/25, 13/15, 15/35, 36/34, 34/32, 32/52, 54/56, 51/53, 53/33, 23/43, 43/45, 57/55, 45/65, 65/63, 73/53
Fig.42 : 35/55, 15/35, 23/25, 25/45, 45/65, 65/63, 57/55, 54/56, 75/73, 73/53, 53/33, 41/43, 43/23, 13/33, 34/32, 31/33, 37/35, 56/36, 36/34, 34/32
Fig.43 : 31/33, 34/32, 75/55, 63/65, 43/63, 55/53, 63/43, 73/75, 75/55, 55/35, 43/45, 45/25, 51/31, 31/33, 52/32, 32/34, 15/35, 34/36, 37/35
Fig.44 : 13/15, 15/35, 35/37, 74/54, 63/43, 42/44, 44/64, 65/63, 73/53, 52/54, 51/31, 31/33, 23/43, 57/55, 37/57, 54/56, 57/55, 55/35, 35/33, 33/53
Fig.57 : 35/15, 23/25, 15/13, 43/23, 41/43, 13/33, 43/23, 55/35, 25/45, 75/55, 45/65, 73/75, 54/74, 52/54, 75/73, 73/53, 54/52, 51/53, 31/33, 23/43, 53/33, 33/35, 35/37, 37/57, 57/55, 65/45, 45/47
Fig.58 : 13/15, 15/35, 45/25, 65/45, 53/55, 56/54, 73/53, 53/55, 45/65, 65/63, 51/53, 32/52, 52/54, 31/51, 43/45, 75/73, 73/53, 54/52, 51/53, 23/43, 53/33, 33/35, 35/15, 57/37, 37/35, 45/25, 15/35
Fig.59 : 15/35, 56/54, 35/55, 54/56, 52/54, 73/53, 53/55, 56/54, 37/35, 57/37, 75/73, 54/74, 73/75, 75/55, 34/36, 14/34, 37/35, 34/36, 36/56, 56/54, 23/43, 31/33, 43/23, 13/33, 41/43, 33/53, 54/52, 51/53
Fig.60 : 33/53, 34/14, 36/34, 44/24, 56/36, 14/34, 63/43, 65/63, 73/53, 75/73, 43/63, 73/53, 54/56, 52/54, 57/55, 54/56, 15/35, 35/33, 23/43, 37/35, 35/55, 56/54, 31/33, 43/23, 13/33, 41/43, 33/53, 54/52, 51/53

Un axe vertical

Fig.45 : 34/36, 36/56, 65/45, 57/55, 37/57, 54/56, 57/55, 55/35, 35/15
Fig.46 : 25/23, 65/45, 45/47, 23/43, 43/63, 63/65, 35/37, 37/57, 57/55, 65/45
Fig.47 : 15/35, 75/73, 53/55, 73/53, 65/45, 45/25, 23/43, 53/33, 33/35, 35/15, 15/13
Fig.48 : 33/31, 56/54, 54/34, 24/44, 65/63, 63/43, 44/42, 52/32, 31/33, 36/34, 33/35, 35/15
Fig.49 : 25/45, 33/31, 31/51, 55/35, 35/37, 37/57, 57/55, 65/45, 42/44, 45/43, 43/63, 51/53, 63/43
Fig.50 : 33/35, 63/43, 35/55, 65/45, 13/33, 43/23, 31/33, 23/43, 51/53, 43/63, 73/53, 53/55, 55/35, 25/45
Fig.51 : 43/23, 57/55, 37/35, 35/33, 23/43, 43/63, 55/53, 63/43, 31/33, 43/23, 51/53, 41/43, 53/33, 23/43
Fig.52 : 36/34, 34/14, 56/54, 54/74, 32/34, 63/43, 51/53, 53/33, 34/32, 31/33, 33/13, 13/15, 15/35, 35/55, 55/75, 75/73
Fig.53 : 25/23, 44/24, 14/34, 34/36, 23/43, 53/33, 54/56, 74/54, 32/34, 51/53, 54/52, 52/32, 31/33, 33/35, 35/37, 37/57, 57/55, 55/75
Fig.54 : 46/44, 44/64, 23/43, 63/65, 43/63, 65/45, 57/55, 45/25, 37/35, 25/45, 55/35, 35/33, 33/31, 31/51, 51/53, 63/43, 43/41
Fig.55 : 23/43, 31/33, 43/23, 63/43, 13/33, 43/23, 55/57, 57/37, 35/15, 37/35, 45/25, 15/35, 35/33, 23/43, 51/53, 43/63, 73/53, 53/55, 55/75
Fig.56 : 45/43, 47/45, 33/31, 52/32, 54/52, 13/33, 43/23, 15/13, 13/33, 31/51, 33/31, 51/53, 63/43, 56/54, 75/55, 45/65, 73/75, 75/55, 55/53, 53/33, 34/32, 31/33, 36/34, 33/35, 35/15
Fig.61 : 33/13, 75/73, 54/74, 73/75, 56/54, 75/55, 54/56, 31/33, 43/23, 63/43, 13/33, 43/23, 51/53, 34/54, 46/44, 44/64, 14/34, 57/55, 35/33, 23/43, 43/63, 63/65, 65/45, 15/35, 45/25, 37/35, 25/45
Fig.62 : 24/44, 54/34, 55/57, 75/55, 45/65, 25/45, 57/37, 37/35, 34/36, 32/34, 53/33, 33/35, 36/34, 41/43, 13/33, 34/32, 15/13, 31/33, 43/23, 13/33, 73/75, 75/55, 45/65, 51/53, 63/43, 65/63, 33/53, 63/43
Fig.63 : 41/43, 35/37, 56/36, 37/35, 44/46, 25/45, 23/25, 43/23, 31/33, 23/43, 53/33, 73/53, 65/63, 63/43, 43/23, 75/73, 45/65, 47/45, 15/35, 45/25, 13/15, 15/35, 35/33, 23/43, 51/53, 43/63, 73/53, 53/55, 55/75
Fig.64 : 15/13, 53/73, 51/53, 32/52, 43/63, 55/53, 52/54, 31/51, 73/53, 54/52, 74/54, 51/53, 54/52, 57/55, 34/54, 46/44, 44/64, 25/45, 37/35, 45/25, 23/43, 25/23, 13/33, 33/53, 52/54, 54/56, 75/55, 56/54, 54/74