4 Prominos

Fin mai 2024, visitant le salon des jeux mathématiques qui se tient tous les ans sur le parvis de l'église Saint-Sulpice à Paris, je m'arrête devant le stand intitulé « Promino » où les objets manipulés par les joueurs attablés m'intriguent. Ce sont des pièces carrées contenant sur leurs deux faces de petits carrés colorés en relief. Les joueurs semblent réaliser un pavage en obéissant à des règles qui m'échappent encore. J'en étais là de mes réflexions sur ce sujet quand un homme qui s'est avéré être l'inventeur[1] de ce jeu m'aborde pour répondre à mes questions éventuelles. Il m'explique qu'il s'agit d'un jeu inventé pendant le premier confinement alors qu'il travaillait à programmer le jeu du Morpion pour occuper son enfant. Il avait réalisé qu'en couvrant les neuf cases d'un carré de trois sur trois avec quatre carrés de couleur il n'existait que vingt-trois configurations non superposables par retournement ou rotation. Il avait alors conçu ce jeu où chaque configuration est réalisée des deux côtés d'une plaque centrale, cet agencement permettant d'obtenir toutes les variantes.

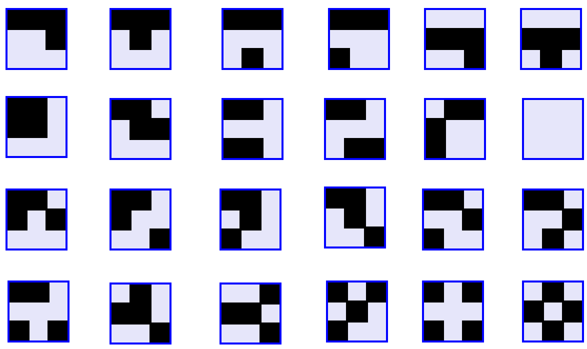

FIGURE 4.1 – *Les 23 prominos ainsi que la pièce blanche.*

Il m'explique ensuite la règle d'assemblage. Elle est très simple : il suffit de faire coïncider des bords qui ont une même composition des petits carrés colorés. Si le côté d'une pièce contient 3 carrés colorés, elle peut s'accoler avec une autre pièce comportant également 3 carrés colorés. Les bords colorés identiquement s'assemblent. Et si on veut poser une pièce en contact avec deux pièces déjà posées sur le plateau, il faut que les deux cotés qui réalisent cet assemblage soient colorés identiquement aux bords des pièces déjà posées. Comme une illustration parle mieux qu'une longue explication, la feuille accompagnant ce jeu proposait l'illustration suivante.

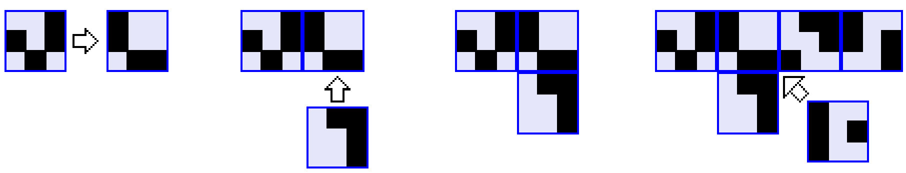

FIGURE 4.2 – *Assemblage des pièces entre elles : les bords qui fusionnent doivent être colorés de façon identique.*

1. Les auteurs du jeu sont Thomas Laurent et François Gueneux, tous deux habitant la région de Marseille. Ce jeu porte le caractère ® qui indique que la marque est déposée et sur leur site `www.promino.fr` on voit aussi le caractère © qui indique que le jeu est soumis au droit d'auteur. Le jeu est vendu au prix de 28€ ; fabriqué artisanalement,avec du bois français, il peut être commandé en écrivant aux auteurs.

La façon de jouer à deux joueurs ressemble un peu au jeu de dominos. D'ailleurs le nom du jeu – *promino* – est un anagramme de morpion qui rime avec domino, pour rappeler les deux origines du jeu. Mais cette façon de jouer n'est pas la seule : on peut essayer de réaliser un rectangle de 6 pièces sur 4 avec les 23 pièces et une pièce additionnelle blanche est ajoutée à la collection dans ce but. Cette façon de jouer en solitaire me séduit d'emblée, et je m'essaie aussitôt à ce casse-tête qui me parait rapidement assez difficile. Les premières pièces, choisies au hasard, s'assemblent sans problème et je peux en placer une bonne douzaine sans me poser trop de questions. Par contre, achever la constitution du rectangle est très ardu. Je m'aperçois que les pièces restantes ne pourront jamais compléter ma construction. Ce constat d'échec m'oblige à réviser mes choix antérieurs mais cette approche naïve du problème a très peu de chance d'aboutir. Je pense aussitôt réaliser un programme qui en cherchera des solutions.

1. Les villages 4x6

a. L'encodage

Pour encoder ce jeu, la première chose à faire est de déterminer comment traduire une pièce. La question de l'algorithme balayant toutes les possibilités d'agencement viendra ensuite mais il me semble qu'un code pratique à utiliser doit décrire les quatre côtés du carré. J'envisage les différents types de côté et réalise qu'il n'y en a que huit qui peuvent s'écrire comme les nombres de trois chiffres binaires : `000(0), 001(1), 010(2), 011(3), 100(4), 101(5), 110(6), 111(7)`

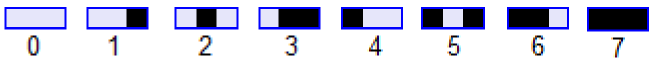

FIGURE 4.3 – *les 8 variantes d'une pièce non symétriques et leurs codes. Pour les pièces symétriques, il y a généralement 4 variantes seulement sauf lorsqu'il y a 2 axes de symétrie qui réduise à 1 le nombre des variantes.*

Sans doute, cette correspondance entre un côté et un nombre binaire pourrait être mieux exploitée pour optimiser les traitements. Cependant, je me contente de les utiliser pour nommer les bords à l'aide de chaines de caractères, bien plus lourdes en mémoire qu'un nombre binaire de trois chiffres, en décrivant celles-ci d'après la succession des quatre types de côté qui en constitue le bord, en tournant dans le sens horaire à partir du côté inférieur. La coloration du carré central pouvant facilement se déduire de la composition du bord, celui-ci n'est pas codé.

Le jeu avec les pièces suppose que l'on puisse les faire tourner d'un quart de tour, dans un sens ou dans l'autre, ou d'un demi-tour et aussi qu'on puisse les retourner. Pour les pièces dont le motif coloré n'est pas symétrique, il y a huit variantes différentes. Lorsqu'un axe de symétrie ou un centre de symétrie est présent dans le motif, quatre variantes suffisent. Pour les pièces ayant deux axes de symétrie, une seule configuration suffit. Comme, au total, le jeu contient dix pièces non symétriques, onze avec un seul élément de symétrie et trois (en comptant la pièce blanche) avec deux axes, le nombre de configurations possibles pour une pièce au hasard est donc de $10 \times 8 + 11 \times 4 + 3 \times 1 = 127$.

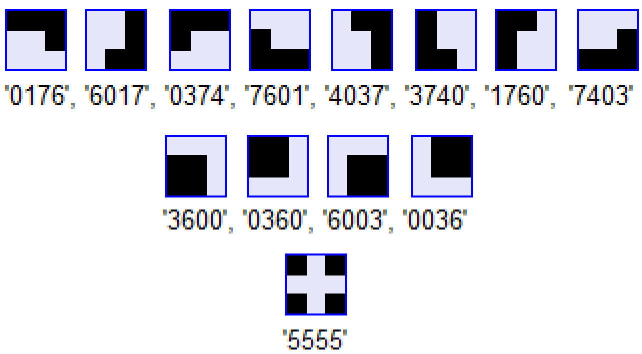

FIGURE 4.4 – *les 8 variantes d'une pièce non symétrique et leurs codes. Pour les pièces symétriques, il y a généralement 4 variantes seulement sauf lorsqu'il y a 2 axes de symétrie qui réduise à 1 le nombre des variantes.*

L'assemblage des pièces entre elles peut, avec ce système d'encodage, être réalisé lorsque deux codes sont complémentaires l'un de l'autre. Les codes palindromes `000(0)`, `010(2)`, `101(5)` et `111(7)` se lisent de la même façon dans les deux sens et sont, pour cette raison, leur propre complément : un côté codé `'5'(101)` peut s'assembler avec un autre côté marqué `'5'`.
Pour les quatre codes qui ne forment pas un palindrome `001(1)`, `011(3)`, `100(4)` et `110(6)`, comme le bord des pièces est transcrit en tournant toujours dans le même sens, les codes ne sont pas lus dans le même sens pour l'assemblage de deux pièces. Le code complémentaire de `'1'(001)` est `'4'(100)` et celui de `'3'(011)` est `'6'(110)`.

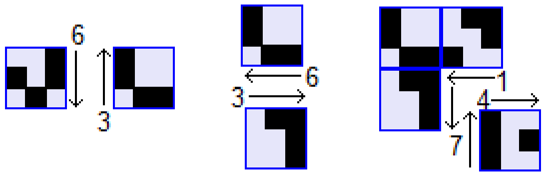

FIGURE 4.5 – *Les codes palindromes 0, 2, 5 et 7 s'assemblent directement, les complémentaires sont 3-6 et 1-4.*

b. L'algorithme

Il ne reste plus qu'à réaliser un programme qui examine successivement tous les placements possibles. On peut supposer qu'il y en a une quantité énorme : placer vingt-quatre pièces différentes dans un certain ordre revient à utiliser une des $24! = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000$ permutations de ces pièces. Et pour chacune de ces permutations il y a $8^{10} \times 4^{11} \times 1^3 = 4\,503\,599\,627\,370\,496$ configurations également possibles. Le produit de ces très grands nombres est véritablement gigantesque : il y a près de 3×10^{39} configurations !
Bien sûr, on ne cherche que les configurations où chaque pièce est correctement assemblée aux précédentes. Pour cette raison, de très nombreuses configurations seront écartées si on procède par assemblage progressif : on choisit initialement au hasard une pièce et sa configuration, puis on en prend une autre au hasard et on cherche la ou les configuration(s) qui permettent de l'assembler à la précédente, ainsi de suite jusqu'à compléter une première ligne. On procède de la même manière pour une seconde ligne placée en dessous de la première : au début de cette seconde ligne, la pièce choisie doit s'assembler à celle du haut, puis les suivantes doivent s'assembler à deux pièces simultanément (une en haut et une à gauche, sur la même ligne). Le même mécanisme est utilisé pour remplir les troisième et quatrième lignes. Cet algorithme suppose qu'en cas d'échec, on puisse revenir en arrière et utiliser une autre configuration acceptable d'une des pièces précédemment placées et, à l'épuisement des configurations acceptables, changer la pièce utilisée pour une de celles encore disponibles. Cet algorithme, dans un langage un peu technique, consiste finalement à parcourir l'arbre des configurations en éliminant très rapidement des pans entiers de cet arbre : à chaque fois qu'il y a une impossibilité d'assemblage, toute la partie qui reposerait sur ce début impossible est éliminé.

Un joueur humain ne procède jamais de cette façon car c'est beaucoup trop mécanique et rébarbatif. Avec sa réflexion et son regard qui englobe toutes les pièces, il peut organiser des stratégies plus subtiles. J'encourage tous ceux qui voudraient s'y essayer à persévérer car c'est extrêmement formateur de penser à imaginer comment aboutir au résultat final. Inévitablement, l'intelligence humaine finit par trouver des astuces pour réduire les échecs inévitables : quels types de bord faut-il mettre en bordure du rectangle ? y a-t-il des bords plus fréquents que d'autres ? La pièce blanche est-elle plus facile à placer au centre ou en bordure ?

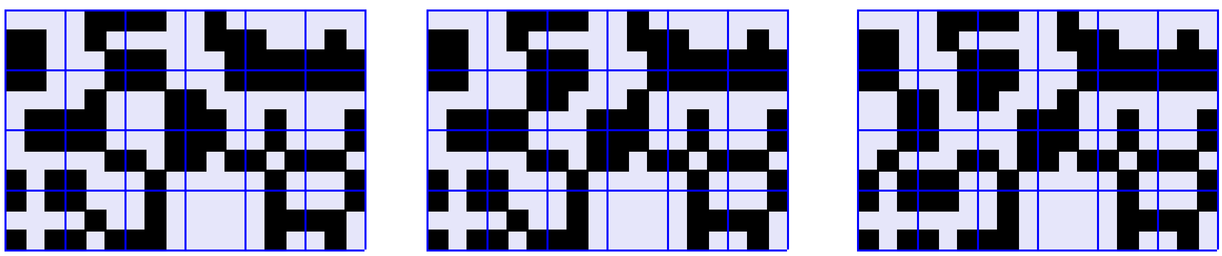

FIGURE 4.6 – *Trois villages* 4×6 *obtenus par un début d'exploration systématique.*

Un programme informatique agit mécaniquement et, dans ce cas précis, il est possible de stagner longtemps avant d'aboutir à une solution mais il est également possible d'en trouver une assez rapidement. J'ai d'abord tenté d'explorer tout l'arbre de façon systématique, cela produit des solutions qui se ressemblent car elles ont le même début Mais cela permet de réaliser que l'exploration complète prendra des mois, voire des années. En vingt-quatre heures d'exécution, je n'ai pas atteint le moment où les six premières pièces qui forment la ligne du haut changent de place ! Pour attendre que la première pièce change de configuration (quatre sont possibles pour elle), comme il y a encore deux pièces ayant un axe de symétrie et trois non symétriques à essayer de changer, il faudrait attendre $4^2 \times 8^3 = 8192$ jours !

Ce constat m'incite à modifier mon algorithme : dès qu'une solution est trouvée, je procède à un mélange aléatoire des pièces et de l'ordre des configurations pour chaque pièce. De cette façon je n'obtiendrai jamais toutes les solutions mais ce but n'est pas réalisable, du moins pas avec l'équipement limité et l'algorithme si peu optimisé que j'ai élaboré. Je pourrais éventuellement obtenir de solutions en doublon ce qui est difficile à discerner à l'œil, d'autant qu'un doublon peut se présenter renversé ou tourné de 180°. Je suppose que le risque est très faible tant que le nombre de solutions reste raisonnable. Si on veut s'affranchir des doublons il faut pouvoir générer les quatre écritures possibles d'une même solution et les ordonner, par exemple alphanumériquement, et toujours conserver celle qui viendrait en premier et que l'on considèrerait comme l'écriture canonique de cette solution.

FIGURE 4.7 – *Douze villages 4×6 obtenus par une exploration aléatoire.*

2. La pièce noire

a. Villages 4x6 avec la pièce noire

La pièce blanche du jeu initial est intrigante car elle n'obéit pas à la même règle de construction que les autres pièces. Pour les villages 6×4, sa seule utilité est de compléter la collection pour permettre la reconstitution d'un rectangle sans trou. Mais le choix de la blancheur immaculée est subjectif, on peut imaginer le choix inverse : une pièce complètement noire ! Pour satisfaire mon gout pour l'équilibre et introduire un peu de *yin* dans le *yang* ou réciproquement, je fais ce choix de mettre le carré central de la couleur opposée. Ainsi ma pièce noire sera blanche en son centre tandis que ma pièce blanche sera noire en son centre.

L'introduction de cette pièce noire dans la collection permet de réaliser des villages 6×4 pour lesquels il y a davantage de couleur noire. Cette couleur est moins fréquente que la blanche dans le jeu initial car, à l'intérieur de chaque pièce, il y a cinq cases blanches pour cinq noires et si on ajoute les neuf cases blanches de la pièce blanche, cela fait $5 \times 23 + 9 = 124$ cases blanches contre $4 \times 23 = 92$ cases noires, soit une différence de 32 cases. En remplaçant la pièce blanche par une toute noire, cela ferait $5 \times 23 = 115$ cases blanches contre $4 \times 23 + 9 = 101$ cases noires, soit une différence de 14 cases. En réalité, il n'y a que les cases des bords qui comptent pour les assemblages, et parmi les vingt-trois pièces du jeu, il y en a seulement dix qui ont un cœur noir. Les comptes sont alors de $4 \times 13 + 5 \times 10 + 8 = 110$ cases blanches contre $4 \times 13 + 3 \times 10 = 82$ cases noires, soit une différence de 28 cases pour le jeu avec la pièce blanche et $4 \times 13 + 5 \times 10 = 102$ cases blanches contre $4 \times 13 + 3 \times 10 + 8 = 90$ cases noires, soit une différence de 12 cases pour le jeu avec la pièce noire.

Les villages sont-ils plus faciles à reconstituer avec la pièce noire ? Rien n'est moins sûr, introduire une pièce avec quatre bords noirs oblige à mobiliser au moins deux pièces ayant un bord tout noir et il n'y en a que quatre sur les vingt-trois. Cela ne signifie pas non plus le contraire et mon programme m'a donné assez rapidement les neuf solutions ci-dessous. Celui-ci n'a pas eu besoin d'autre modification qu'enlever la pièce `'0000'` de la liste et la remplacer par la pièce `'7777'`. Si on souhaite avoir la pièce noire au milieu du village, cela nécessite d'utiliser les quatre pièces au bord tout noir, ce qui réduit considérablement les possibilités ; un de mes village-solutions est ainsi.

FIGURE 4.8 – *Neuf villages 4×6 contenant la pièce noire.*

b. Les villages 5×5

L'ajout de la pièce noire au jeu initial amène un nombre de pièces égal à vingt-cinq, un carré parfait. Cette remarque conduit à une nouvelle possibilité : réaliser un village carré de cinq pièces de côté. Quelques modifications du programme sont nécessaires mais elles sont relativement aisées (aller à la ligne toutes les cinq pièces et modifier en conséquence les tests d'assemblage, ajouter les deux boucles correspondant au choix de la 25[e] pièce et de l'une de ses variantes). Le programme ainsi modifié détermine alors assez rapidement (une demi-journée) vingt-quatre solutions à ce nouveau problème.

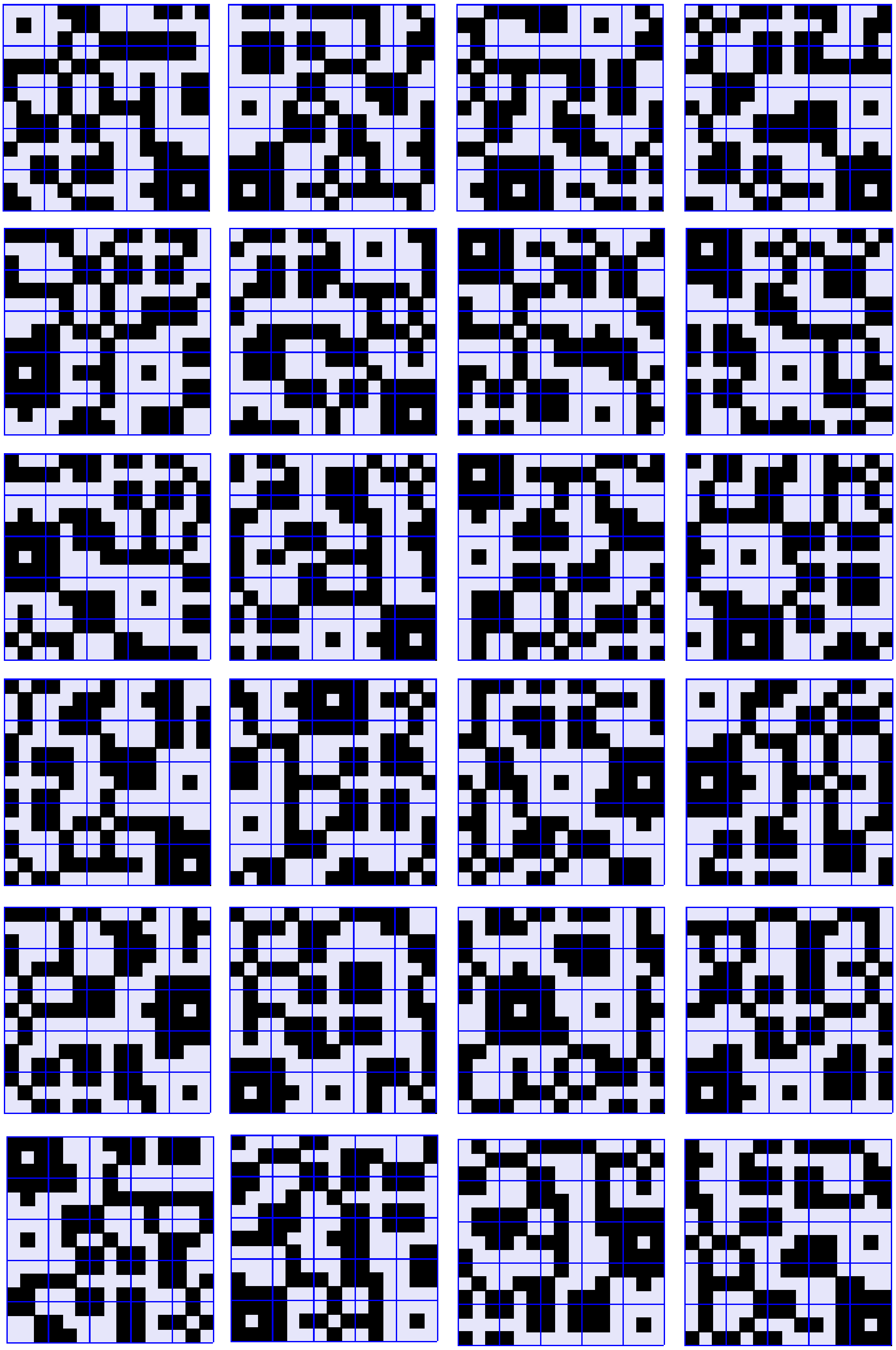

FIGURE 4.9 – *Vingt-quatre villages* 5×5.

c. Les villages 6×6

Dans le jeu initial, il y a onze pièces qui n'ont pas d'axe de symétrie. Ces pièces peuvent être retournées dans le jeu des auteurs, le retournement offrant quatre configurations impossibles à obtenir sans retournement. Si on joue avec une jeu où les pièces n'ont qu'une face, par exemple des pièces aimantées qui n'exhibe leurs motifs colorés qu'au verso, le recto étant occupé par la pellicule aimantée. Dans ce cas, pour obtenir toutes les configurations à quatre petits carrés colorés il est nécessaire de disposer des versions droite et gauche de ces onze pièces, l'une étant le retournement de l'autre. Ces pièces se ressemblent mais ne sont pas superposables sans retournement.

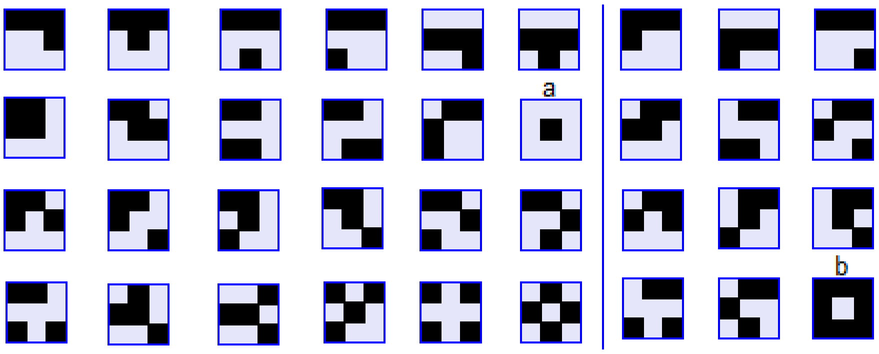

FIGURE 4.10 – *Les 23 prominos avec la pièce blanche (a) à gauche ; les 11 prominos non symétriques et donc non superposables sans retournement, avec la pièce additionnelle noire (b) à droite.*

La collection complète des pièces n'ayant qu'une face en contient donc $11 \times 2 + 10 + 4 = 36$, un autre carré parfait qui conduit à une autre nouvelle possibilité : réaliser un village carré de six pièces de côté. Le principe est le même, l'algorithme utilisé est élargi et modifié en conséquence, les temps de traitement sont plus longs semble t-il, ce qui parait assez logique au vu de l'explosion combinatoire engendrée par l'adjonction de ces onze nouvelles pièces.

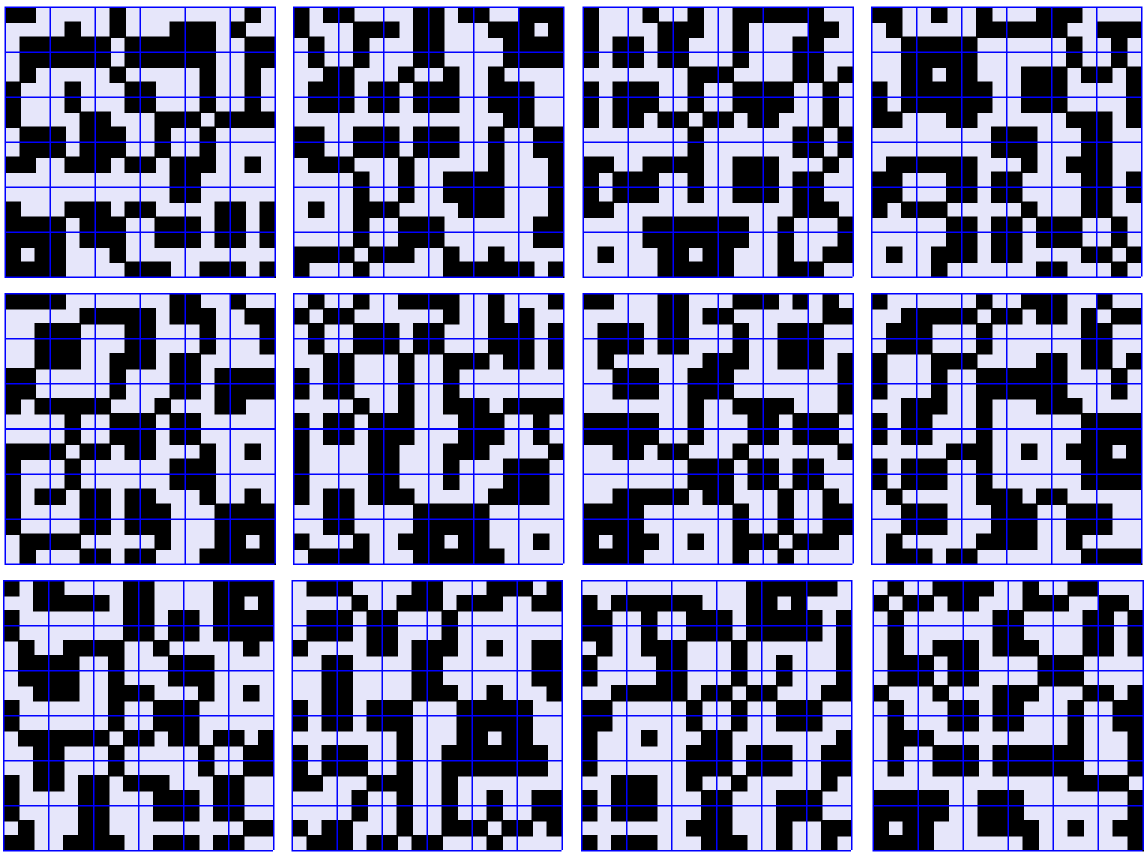

FIGURE 4.11 – *Douze villages 6×6 contenant chacun les 36 pièces unifaces.*

3. Autres jeux

D'autres modes de jeu sont suggérés par les auteurs dont l'emboitement vertical des pièces pour former une pile qu'ils appellent la « Tour du Chat ». Il faut poser une nouvelle pièce sur la pile en s'assurant que les quatre cases noires de dessous cette nouvelle pièce s'encastrent dans les cinq cases blanches du dessus de la pièce précédente. Cette idée est intéressante et sans doute programmable ; En représenter une solution revient à dessiner l'alignement des vingt-trois pièces du jeu dans l'ordre et selon la configuration qui en permet l'emboitement. La pièce blanche est exclue car elle ne s'encastre avec aucune autre.

Au fur et à mesure, cette exploration s'ouvre sur d'autres questions :

- Si on considère un des vingt-trois prominos et qu'on dispose d'une multitude d'exemplaires de cette pièce, en les assemblant entre eux, est-il possible de constituer une tuile pavante, c'est-à-dire un bloc, pas forcément rectangulaire, qui, dupliqué à l'infini, permet de remplir tout le plan, en s'assemblant aux autres blocs voisins selon la même règle d'assemblage, tous les blocs étant orientés de la même façon (on passe d'une tuile à l'autre par translation).
- Est-il possible de couvrir les vingt-quatre faces de quatre cubes avec les pièces du jeu ? Bien sûr, je suppose qu'à chaque arête les deux faces qui se joignent sont assemblées selon la règle du jeu. Cette question me parait assez délicate à programmer mais la résoudre manuellement est encore plus hasardeux. Cette dernière remarque ne m'empêchera cependant pas d'essayer.
- Un village 4×6 pourrait-il paver le plan ? Pour que ce soit possible, il faudrait que les deux paires de bords parallèles puissent s'assembler selon la règle du jeu. Si je n'en trouve pas, est-ce tout de même possible de trouver un village qui puisse assembler une seule paire de bords parallèles ?

a. Les pavages

Je vais commencer par préciser cette idée de tuile pavante en essayant d'en réaliser une manuellement. Je choisis pour cette marche d'approche, une tuile plus simple que les autres : le carré noir 2×2 (pièce appelée « maison » par les auteurs). Je trouve rapidement une solution qui consiste en une tuile formée par l'assemblage des quatre configurations de cette pièce. Le découpage de la tuile peut être différent – l'illustration montre plusieurs possibilités – sans que le pavage qui en résulte soit différent mais on peut également créer un autre pavage avec les quatre pièces (les tuiles du bas et du haut de l'illustration produisent des pavages différents avec les quatre mêmes pièces).

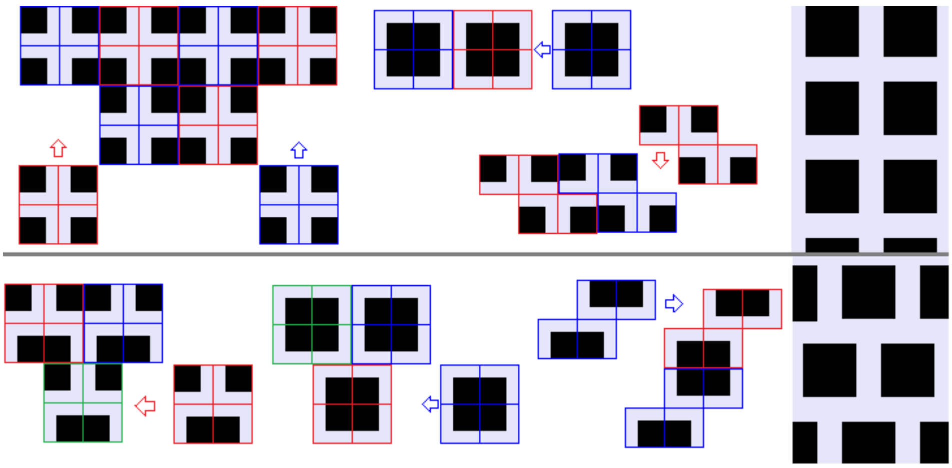

FIGURE 4.12 – *Pavages réalisés avec des tuiles constituées de 4 pièces identiques.*

En guise de petit jeu, sur l'illustration ci-dessous je propose vingt-cinq pavages différents. Ceux-ci sont tous réalisés avec une unique pièce du jeu. Il faut déterminer pour chacun de quelle pièce il provient toutes les pièces sont présentes au moins une fois) et quel est le nombre minimal de pièces à ajuster pour former la tuile élémentaire qui peut produire le pavage entier par simple translation (solutions à la fin du chapitre).

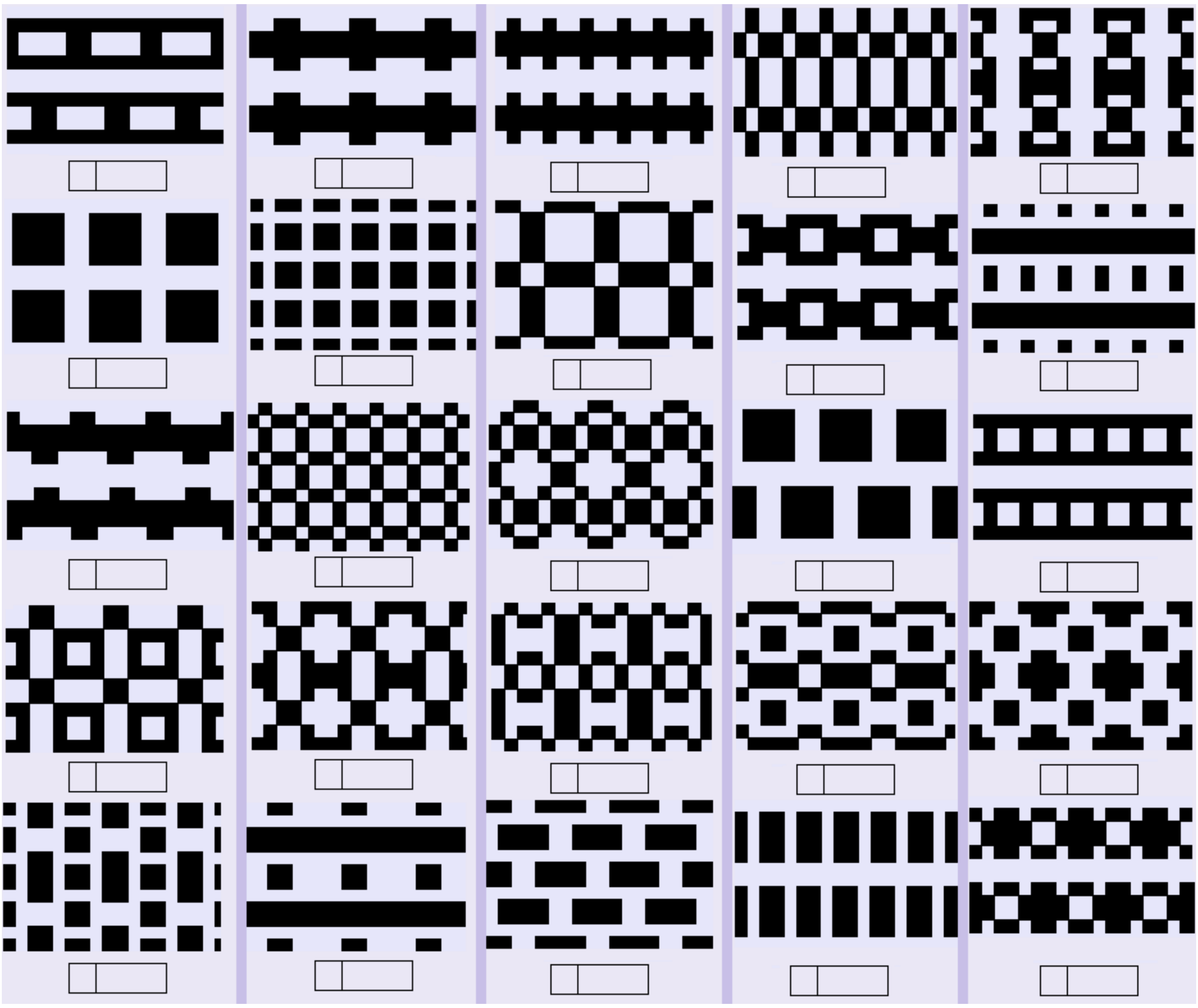

FIGURE 4.13 – *Pavages réalisés avec d'autres types de tuile pour lesquels il est proposé d'identifier la pièce du jeu et le nombre de pièces pour la tuile pavante.*

Pour faciliter ce jeu, je reproduis les pièces du jeu avec les noms « officiels » donnés par les auteurs ainsi qu'une lettre arbitraire d'identification. Je ne mets pas les codes de mon programme car ils sont spécifiques à chaque configuration et il peut y avoir jusqu'à huit codes différents pour une même pièce.

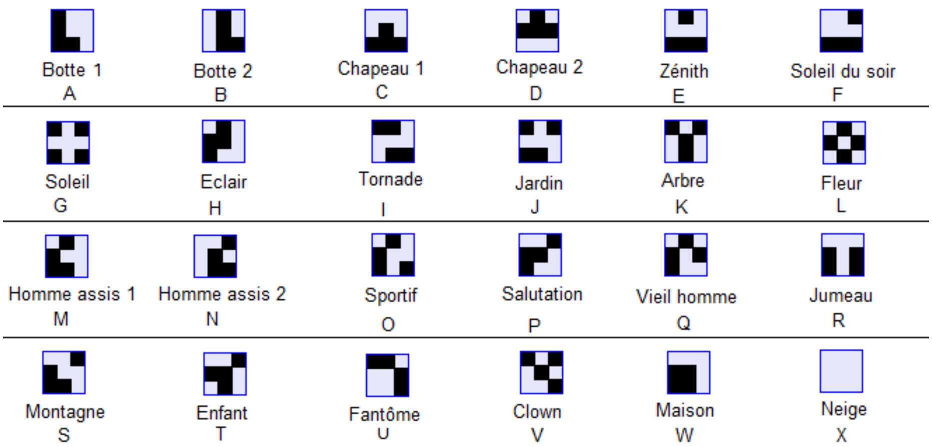

FIGURE 4.14 – *Les pièces, leur petit nom et la lettre d'identification.*

b. Les Tours du Chat

L'examen de chacun des couples de pièces doit permettre de déterminer lesquels peuvent s'assembler (quatre cases noires de l'une s'emboitant dans les cinq cases blanches de l'autre). Plus précisément, il convient d'associer à la liste des configurations d'une pièces toutes les suites possibles (les pièces possibles et leur configuration). Ayant procédé ainsi, on pourrait tracer un graphe où chaque configuration est associée à la configuration d'une des pièces possibles.
Manuellement, je devrais pouvoir déterminer quelles pièces et dans quelle configuration peuvent succéder à une pièce choisie au hasard dans une de ses configurations. Prenons la pièce W (Maison) : les cinq cases blanches couvrent deux bords successifs de la pièce. Ne peuvent s'y encastrer que les pièces A (Botte 1), F (Soleil du soir) et U (Fantôme). Dans chacune de ces pièces ne peut s'encastrer à nouveau que trois nouvelles pièces. Bien sûr, on pourrait aussi en encastrer une quatrième mais celle-ci a déjà été employée. Comme on ne peut réemployer une même pièce, le choix ne porte que sur les trois premières (C, N ou H sur A ; B, D ou M sur F et P, S ou T sur U).

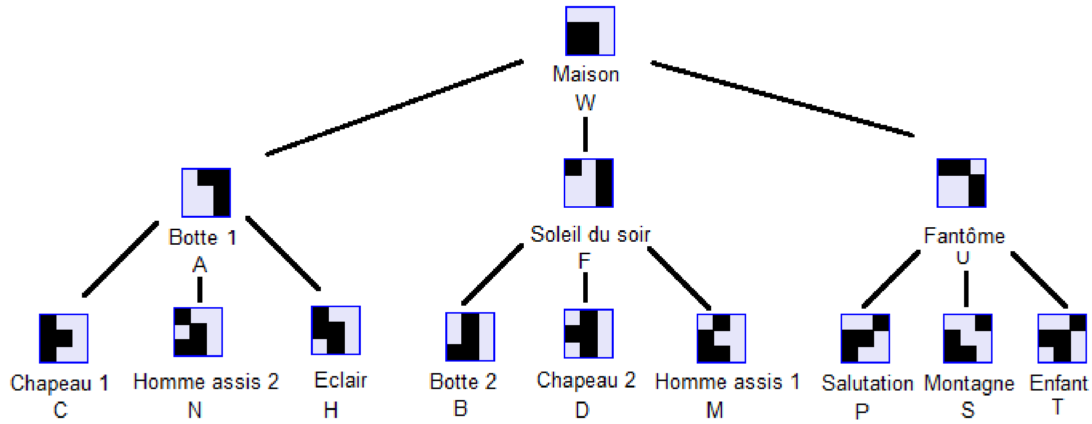

FIGURE 4.15 – *Début d'une tour du chat : sur la pièce W est posée l'une des pièces A, F ou U. Pour chacun de ces choix il est possible de poser trois nouvelles pièces, au choix.*

Mon arbre a belle allure pour ces trois premières étapes mais en dessiner davantage complique ce bel ordonnancement. D'autant plus qu'il est possible de choisir parfois des configurations différentes d'une même pièce : par exemple on peut placer la pièce A sur la pièce W de deux façons, je n'ai dessiné que la première. Il est plus réaliste d'obtenir par programme la liste de toutes les configurations qui peuvent succéder à une pièce. En terme de graphe, il s'agit d'établir la liste des voisins. Une fois obtenue cette liste, il conviendra de déterminer le ou les chemins qui peut aligner les vingt-trois pièces. Ce problème est algorithmiquement bien connu : il s'agit de passer par tous les sommets du graphe une fois et une seule, en somme il faut créer un *chemin hamiltonien* entre les sommets du graphe.

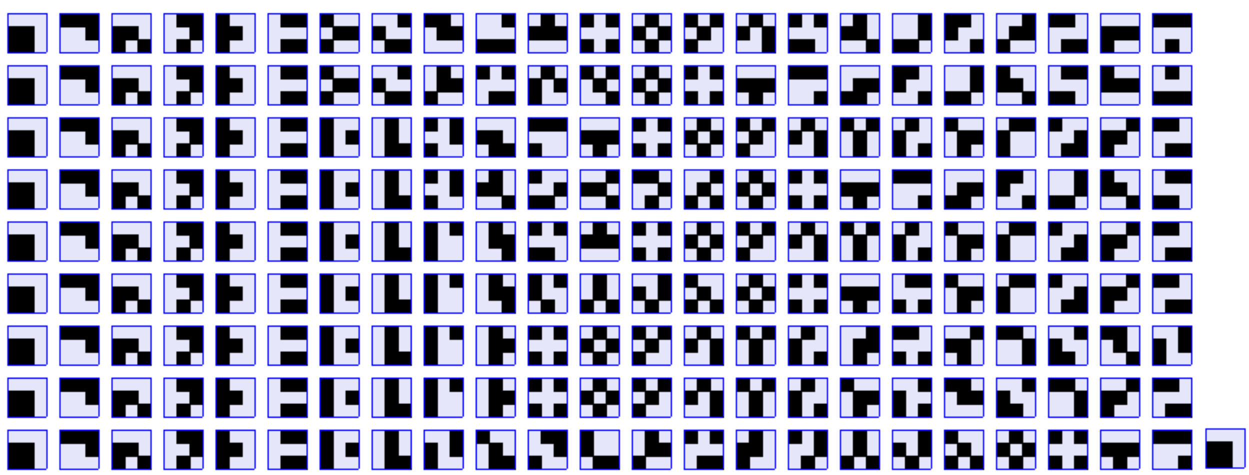

FIGURE 4.16 – *Neuf tours du chat qui commencent de la même façon par les pièces W, A, N, M, C et R.*

Sur mon illustration, la dernière tour a une particularité que les autres n'ont pas : sur la dernière pièce de la pile, on peut y encastrer la première. Cette caractéristique fait qu'on peut empiler une deuxième tour identique sur la première. Cet enchainement constitue un cycle dont on peut extraire une séquence à partir de n'importe quel constituant. On peut commencer sur une pièce quelconque du jeu et construire une pile sur la base de cette succession cyclique. Ce genre de tour cyclique est rare en comparaison des tours non cycliques, et comme toutes les tours cycliques commençant par une pièce donnée – par exemple la maison W – contiennent toutes les autres tours cycliques (celles qui commencent sur une autre pièce), on peut essayer de les déterminer toutes.

Dans ce but, je laisse tourner mon programme suffisamment car celui-ci est construit pour examiner tout l'arbre des possibilités en commençant par une pièce particulière et en essayant derrière toutes les permutations possibles des vingt-deux pièces restantes. Le nombre de ces permutations est $22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000$. La durée d'exécution est relativement réduite (une demi-journée) et le nombre de tours trouvées commençant par la maison W est 4644. Il s'agit du nombre de permutations des vingt-deux pièces restantes qui produisent une tour, on ne tient pas compte ici du fait que, parfois, deux configurations de la même pièce sont possibles. J'extraie de cette liste de solutions les tours qui se terminent par une des trois pièces pouvant s'encastrer dans la maison W (les pièces A, F ou U) et elles sont 616. Sauf erreur, il y a donc exactement 616 cycles possibles. L'illustration ci-dessous en montre seize.

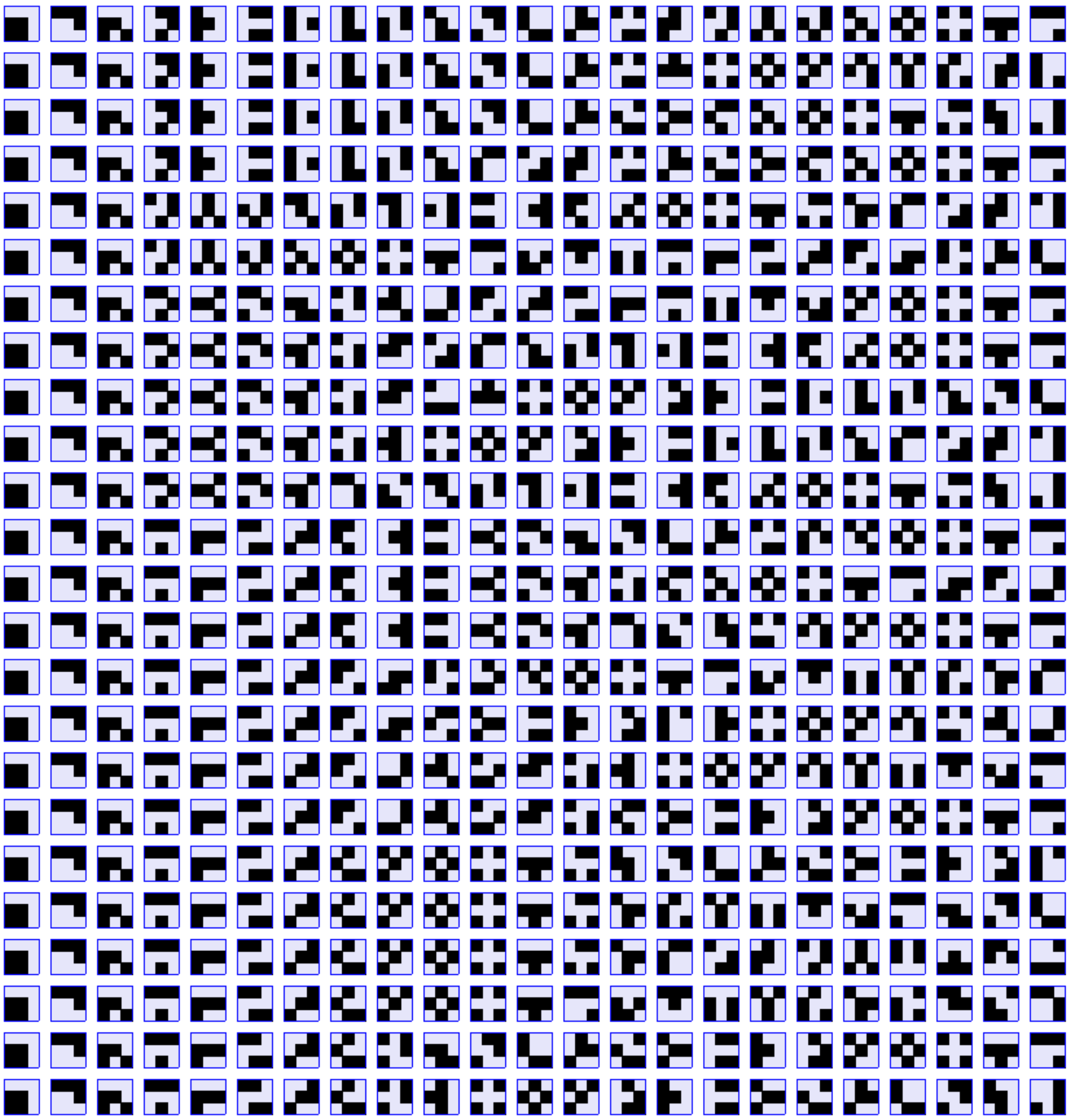

FIGURE 4.17 – *vingt-quatre tours du chat qui commencent par la pièce W et se terminent par une des trois pièces qui peuvent recevoir la pièce W (les pièces A, F ou U) ce qui en fait des tours cycliques.*

c. Les Quatre Dés

Dans quatre dés on distingue vingt-quatre faces, trente-deux sommets et quarante-huit arêtes. En comparaison, dans un village 4×6 il y a trente-huit arêtes seulement ce qui laisse penser que, les contraintes d'assemblage étant plus fortes, il y aura moins de solution pour ce problème des quatre dés. Je peux compléter manuellement le patron d'un cube mais je bloque déjà pour la reconstitution d'un deuxième.

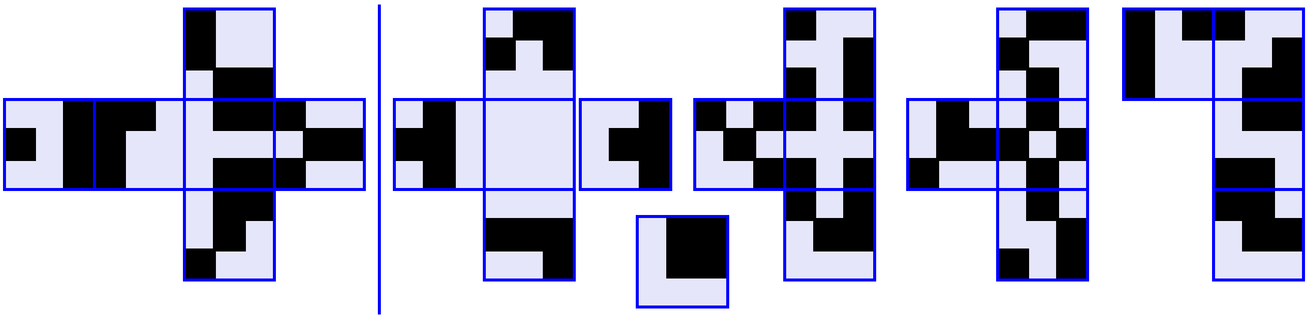

FIGURE 4.18 – *Patron d'un cube (à gauche) constitué de faces assemblées selon la règle du promino ; les autres pièces du jeu semblent bien difficiles à assembler pour former trois autres cubes.*

Si j'emploie la pièce blanche, elle doit s'entourer nécessairement de quatre pièces qui contiennent un bord tout blanc. Cela est réalisable mais consomme huit bords blancs et je réalise que la maison W ne peut pas être dans le même cube que cette pièce blanche car si un de ses bords blancs est accolé à la pièce blanche, l'autre ne peut s'associer à aucune pièce. De la même façon, le soleil G et la fleur L doivent consommer respectivement huit bords du même type et ne peuvent être sur le même dé. Plus grave encore, j'effectue le compte des bords de chaque type et constate qu'il y en a deux qui sont en nombre impair ce qui rend définitivement impossible le problème. Pour renforcer encore ce constat, je réalise que chaque sommet appartenant à trois faces, la couleur d'un sommet doit se retrouver sur trois pièces et donc, les nombres de sommets noirs et de sommets blancs doivent être divisibles par trois. Il y a quatre-vingt-seize sommets en jeu, mais ils se répartissent en quarante-et-un et cinquante-cinq, deux nombres non multiples de trois.

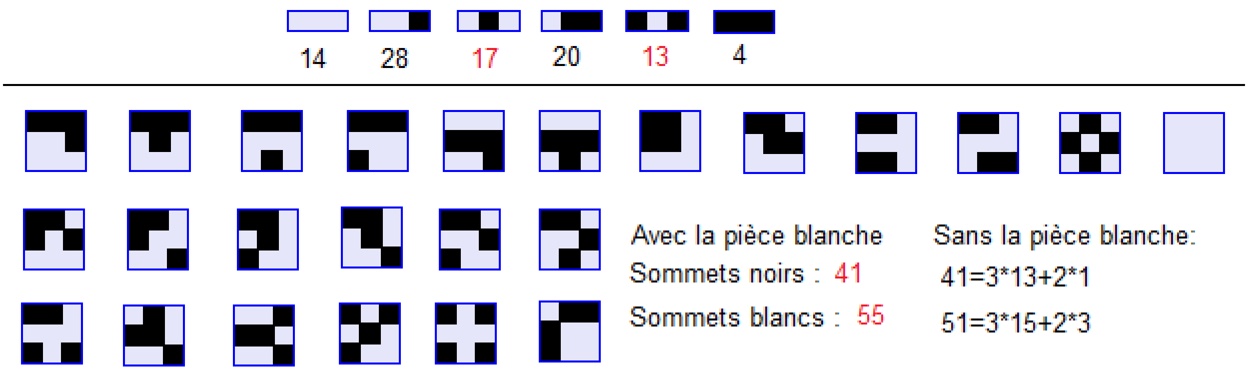

FIGURE 4.19 – *Le dénombrement des six types de bord des pièces fait apparaître deux types en nombre impair qui entravent la réalisation des quatre dés. De même, les nombres de sommets noirs et blancs ne sont pas divisibles par trois.*

Déconfit avant même d'avoir élaboré une stratégie d'attaque, j'essaie d'envisager d'autres façons d'associer ces pièces entre elles pour former des solides de l'espace : on pourrait se contenter de réaliser trois cubes fermés (à six faces) et un quatrième cube ouvert (à cinq faces), en laissant de côté la pièce additionnelle blanche. Cet objectif n'est pas directement impacté par le fait des bords en nombres impairs puisqu'il suffirait d'en mettre un de chaque sorte sur le bord ouvert du quatrième cube ; de même concernant les sommets car un sommet noir et trois sommets blancs sur le bord ouvert satisferait cette contrainte. J'avoue cependant que cet objectif, esthétiquement amoindri, présente moins d'attrait que celui des quatre cubes fermés et reste néanmoins aussi difficile à solutionner.

d. Des villages pavants

Je me propose d'examiner la collection obtenue précédemment des villages 4×6 correctement constitués. Cette collection n'est pas grande puisque je n'ai obtenu qu'environ deux cents villages. Les tests à effectuer ne sont pas très difficiles à mettre en place puisqu'il s'agit simplement d'examiner la complémentarité des quatre bords gauches des pièces de gauche avec les quatre bords droits des pièces de droite pour les assemblages verticaux, ou des six bords du haut des pièces du haut avec les six bords du bas des pièces du bas pour les assemblages horizontaux.

Malheureusement, sur les deux cents villages examinés, aucun ne présente la particularité de pouvoir assembler ne serait-ce qu'une paire de bords parallèles. En translatant un des villages à assembler d'un nombre entier de pièces, on peut obtenir un résultat partiel, peu intéressant tant que l'autre paire de bord ne s'assemble pas. Je garde cependant un espoir d'obtenir une solution plus satisfaisante avec davantage de villages à soumettre aux tests puisqu'il ne manque parfois qu'une seule case colorée pour réussir.

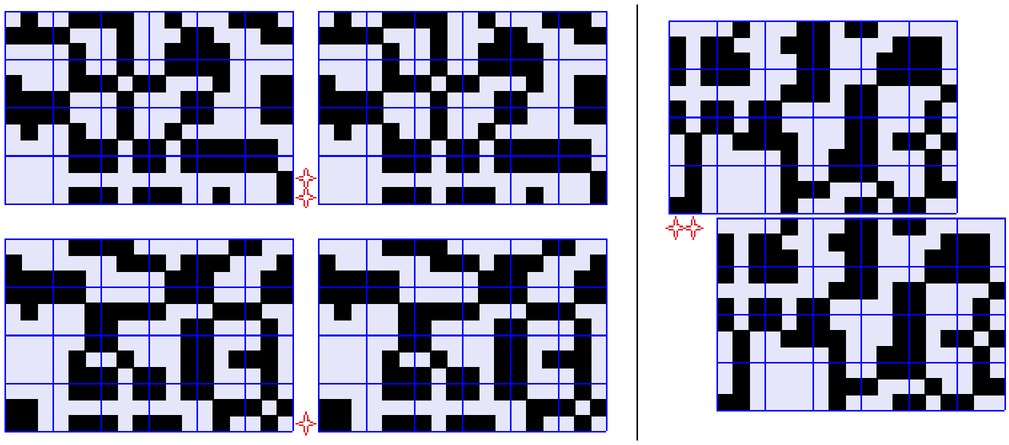

FIGURE 4.20 – *Tests des bords parallèles pour déterminer si un village peut s'assembler à lui-même : en bas à gauche une des meilleures propositions où il ne manque qu'une case pour réussir l'assemblage ; à droite un assemblage horizontal partiel car translaté d'une pièce.*

Je laisse tourner mon programme suffisamment longtemps pour obtenir mille solutions nouvelles et, en attendant, je mets au point un utilitaire qui permet d'identifier les doublons. Pour cela, j'ai besoin d'obtenir les trois formes symétriques d'un village (retournement selon un axes horizontal ou vertical et demi-tour). J'obtiens alors deux résultats nouveaux : le premier est l'extrême rareté des doublons qui confirme le fait qu'il y a un nombre très importants de villages possibles. Le millier que je finis par atteindre n'en est qu'un faible échantillon. Le second est plus évident, mais je ne l'avais pas encore réalisé : si on rapproche les quatre images d'un même village obtenues par les différentes symétries, on constitue une tuile pavante.

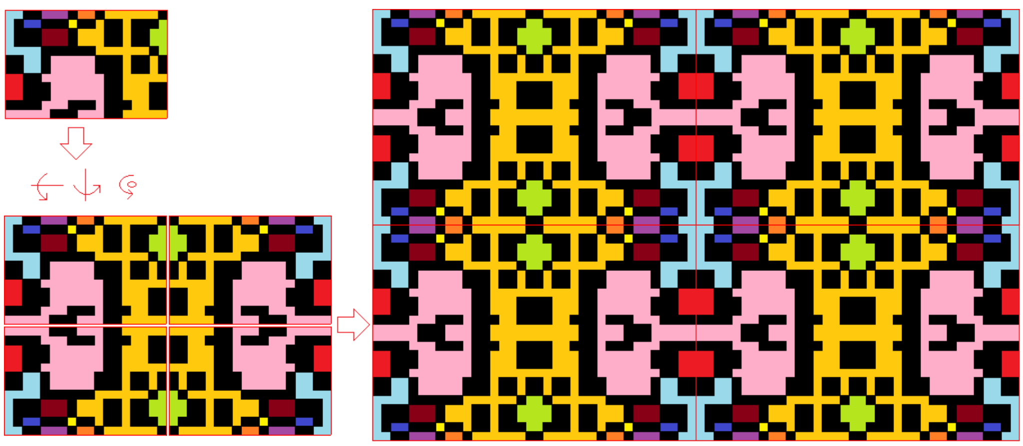

FIGURE 4.21 – *En associant un village quelconque avec les trois formes symétriques du même village, on obtient une tuile pavante constituée de quatre-vingt seize pièces.*

e. Caractéristiques des villages

Mon idée première de découvrir un village pavant ne m'a pas conduit au succès escompté mais je continue à penser que ce village pavant existe et mon ordinateur continue en arrière-plan sa recherche. Chemin faisant, je réalise également la grande stabilité des caractéristiques des villages : ce sont nécessairement des rectangles de douze cases sur dix-huit contenant deux-cent-seize cases dont cent-vingt blanches. Les ilots blancs sont fréquemment dix ou onze ; les plages blanches interconnectées sont parfois assez étendues et je commence à m'intéresser à cette question : quelle est la plus vaste étendue interconnectée parmi les villages correctement assemblés ?

Ma collection grossissant je peux programmer la mesure de cette caractéristique et en même temps énumérer le nombre des ilots blancs. Finalement, j'obtiens la fourchette contenant toutes les valeurs mesurées : la plus vaste zone interconnectée contient cent-une cases blanches, mais cette valeur peut descendre jusqu'à vingt-quatre. Le nombre d'ilots blancs s'étend de neuf à quatorze, les valeurs les plus courantes étant dix et onze comme je l'avais remarqué.

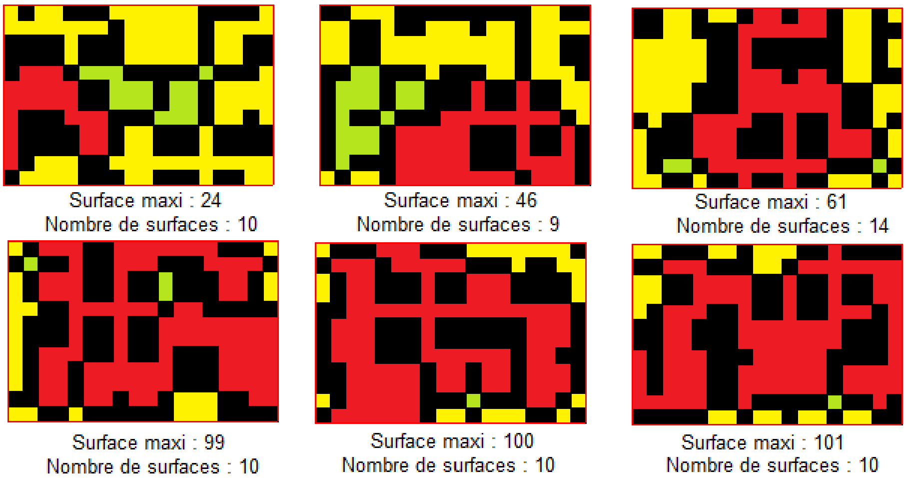

FIGURE 4.22 – *Quelques villages 4×6 ayant des caractéristiques extrêmes. L'aire de la plus vaste zone blanche interconnectée (colorée ici en rouge) varie entre 24 et 101 ; le nombre d'ilots blancs (colorés ici en rouge pour le plus grand, en jaune lorsqu'il y a un contact avec le bord ou en vert s'il n'y en a pas) entre 9 et 14.*

Une fois ces informations obtenues je me demande pourquoi ne pas effectuer les mêmes mesures avec les ilots noirs qui semblent plus petits et plus nombreux. Une simple modification de mon programme permet ces mesures. Rapidement, j'obtiens les valeurs recherchées : la plus vaste zone interconnectée contient trente-sept cases noires, et cette valeur peut descendre jusqu'à neuf. Le nombre d'ilots noirs s'étend de dix-sept à vingt-et-un. Ces mesures confirment l'impression d'éparpillement des cases noires en de nombreux et petits ilots. La pièce blanche est en grande partie responsable de cette différence entre les cases blanches et les cases noires mais leurs proportions dans les pièces (44% de noires contre 56% de blanches) restant constantes, les cases blanches, un peu plus nombreuses, fusionnent plus facilement entre elles pour créer de grandes et peu nombreuses zones.

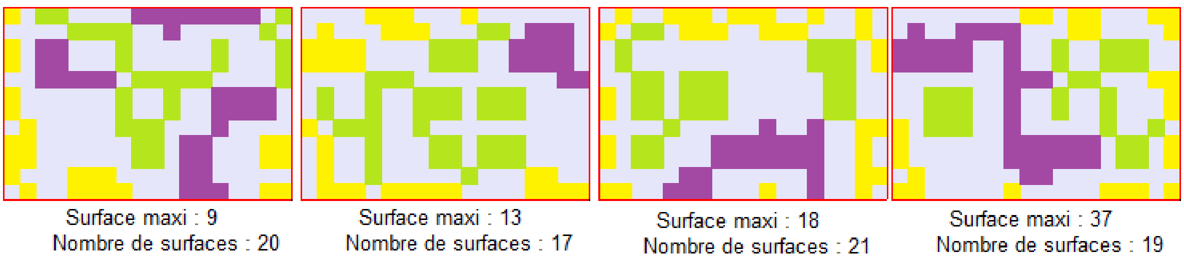

FIGURE 4.23 – *Quatre autres villages 4×6 ayant des caractéristiques extrêmes : l'aire de la plus vaste zone noire interconnectée (colorée ici en violet) varie entre 9 et 27 ; le nombre d'ilots noirs (colorés ici en violet pour le plus grand, en jaune lorsqu'il y a un contact avec le bord et en vert s'il n'y en a pas) entre 17 et 21.*

f. Encadrements des villages 5×5

Aligner les vinqt-quatre pièces du jeu en respectant la règle d'assemblage pour former une longue barre rectangulaire ne parait bien facile à réaliser. On peut d'ailleurs donner à ce type d'alignement une allure de serpent et s'amuser à écrire des lettres, des chiffres ou d'autres petits dessins. Ma proposition à ce sujet est de réaliser un cadre carré de sept pièces de côté car ce projet nécessite l'ensemble des vinqt-quatre pièces. Cet objectif est un peu plus contraignant qu'un simple alignement, ouvert aux deux extrémités car ici, il faut que les deux extrémités s'assemblent. J'ai réalisé, manuellement et sans aucune difficulté, un premier carré.

Avec un programme adapté je peux en créer des centaines en quelques minutes à peine (quelques-uns sont donnés en annexe). Par contre créer un tel cadre, et ensuite y loger un village 5×5 correctement assemblé est une gageure bien plus difficile à réaliser. En effet, le carré vide qui est encadré par le cadre carré a un côté large de cinq pièces ce qui fait qu'on peut y loger un village 5×5 dont j'ai montré quelques réalisations dans la figure 4.9. Ces villages contiennent la pièce additionnelle noire mais on peut aussi en réaliser avec les vinqt-quatre pièces du jeu en laissant la pièce centrale vide, ce qui est plus facile que d'y loger la vingt-cinquième pièce toute noire, même si celle-ci peut être placée n'importe où.

Un problème plus simple est l'encadrement d'un village 5×5 déjà constitué. Pour ce défi assez sérieux, je propose les quatre villages ci-dessous. Sauriez-vous les encadrer avec les vingt-quatre prominos ?

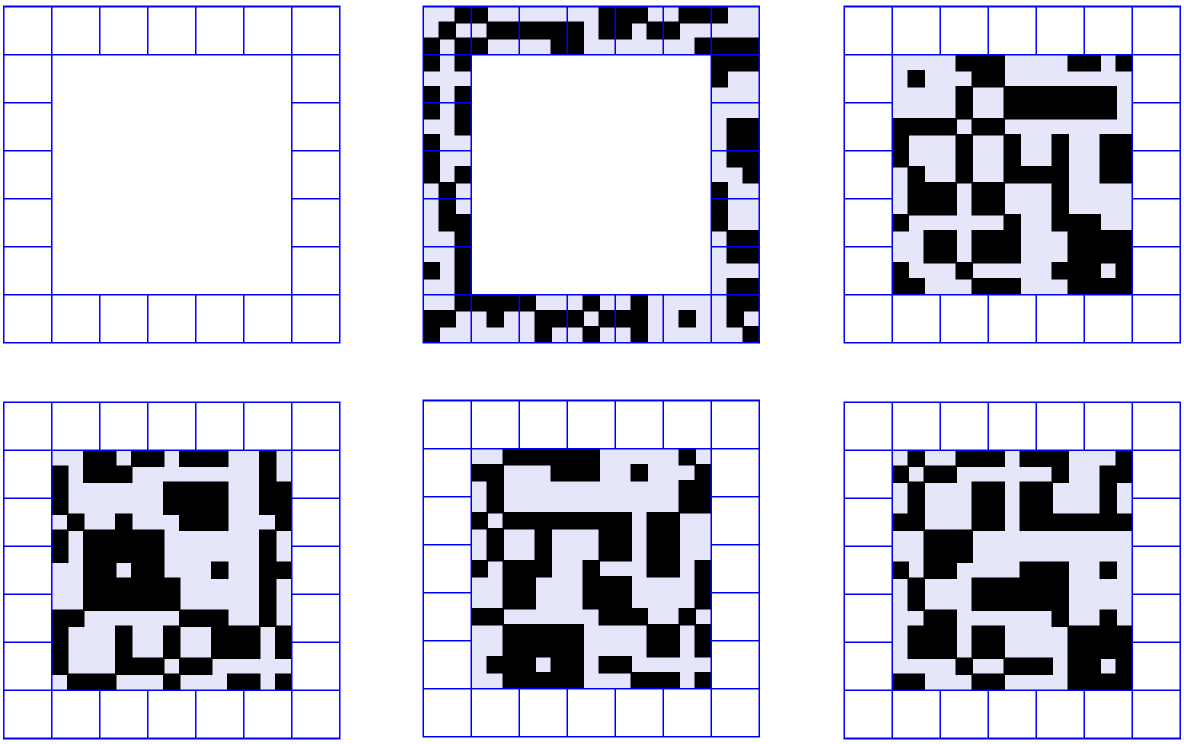

Figure 4.24 – *Réaliser un cadre carré de 7 pièces de côté est aisé, mais encadrer un village 5×5 avec ce type de cadre, tout en respectant la règle d'assemblage l'est beaucoup moins. Les quatre villages proposés sont à encadrer de cette façon (solution en annexe). Le cadre proposé, en haut à gauche, est susceptible d'accueillir un des villages 5×5 de la figure 4.9, sauriez-vous déterminer lequel ?*

Une autre proposition concernant les cadres 7×7 est de chercher à en produire qui soient susceptibles de paver le plan, en accolant des cadres identiques sans retournement ou demi-tour, juste par translation, comme j'ai cherché à le faire pour les villages 4×6. Le sujet est difficile, et cette fois les vinqt-quatre pièces du jeu sont concernées par cette nouvelle contrainte. Pour les villages 4×6, il n'y avait que les seize pièces du bord à être concernées et pourtant je n'ai pas obtenu une seule solution parmi les deux mille villages trouvés.

g. Figures restreintes

Cette suggestion me vient de François Guéneux, l'un des auteurs, qui s'interroge sur le nombre de solutions possibles pour un ensemble de prominos donné et un quadrilatère donné à remplir. Par exemple avec un choix de six prominos combien de rectangles 2×3 différents sont possibles ? Choisir six éléments parmi vingt-trois peut se faire de $\binom{23}{6} = \frac{23!}{6!(17)!} = 100\,947$ façons, je me demande comment faire ce choix. Examiner les possibilités combinatoires de ces différentes possibilités me parait déraisonnable.

Je déniche tout de même un ensemble de six prominos qui me parait intéressant : tous ceux dont les quatre cases noires sont connectées formant un seul bloc. Je peux tester ce groupe particulier sur sa capacité combinatoire à former un rectangle 2×3 – un petit hameau, pour reprendre la terminologie des auteurs – tout en respectant, bien entendu, la sacrosainte règle d'assemblage. On trouve trente-cinq assemblages différents de ces six pièces, dont sept présentent la caractéristique commune des pièces d'avoir l'ensemble des cases noires connectées (ligne du bas).

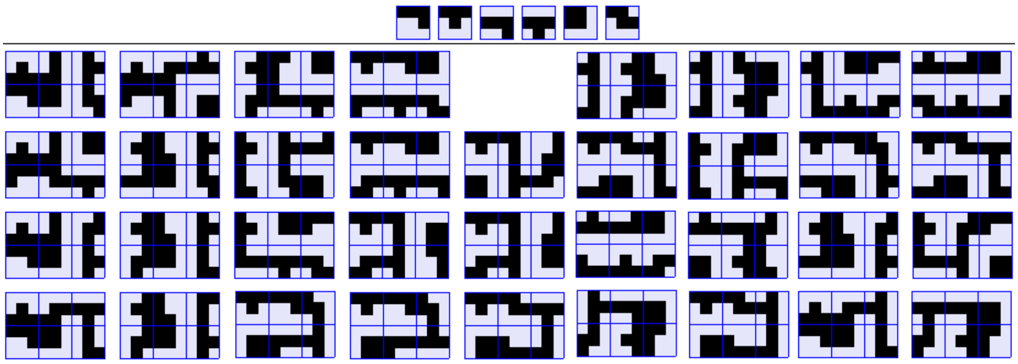

FIGURE 4.25 – *Les 35 rectangles 2×3 formés avec les six prominos ayant leurs cases noires connectées.*

On peut isoler le groupe des dix prominos n'ayant aucun élément de symétrie et déterminer de combien de façons différentes ils peuvent remplir un rectangle 2×5. Ensuite je prendrai l'ensemble des dix prominos qui possèdent un seul axe de symétrie et procèderai au même dénombrement. Bien sûr je dois supprimer les doublons du résultat, chaque remplissage pouvant se présenter de quatre façons différentes. Le premier de ces deux groupes ne contient que des pièces ayant huit configurations différentes alors que dans le second, les pièces ont toutes quatre configurations seulement, cela devrait se traduire par une plus faible capacité combinatoire du second groupe.

Le premier groupe peut remplir le rectangle 2×5 de 21 334 façons différentes alors que le second n'a que dix possibilités pour reconstituer ce même rectangle. Je ne m'attendais pas à une telle différence.

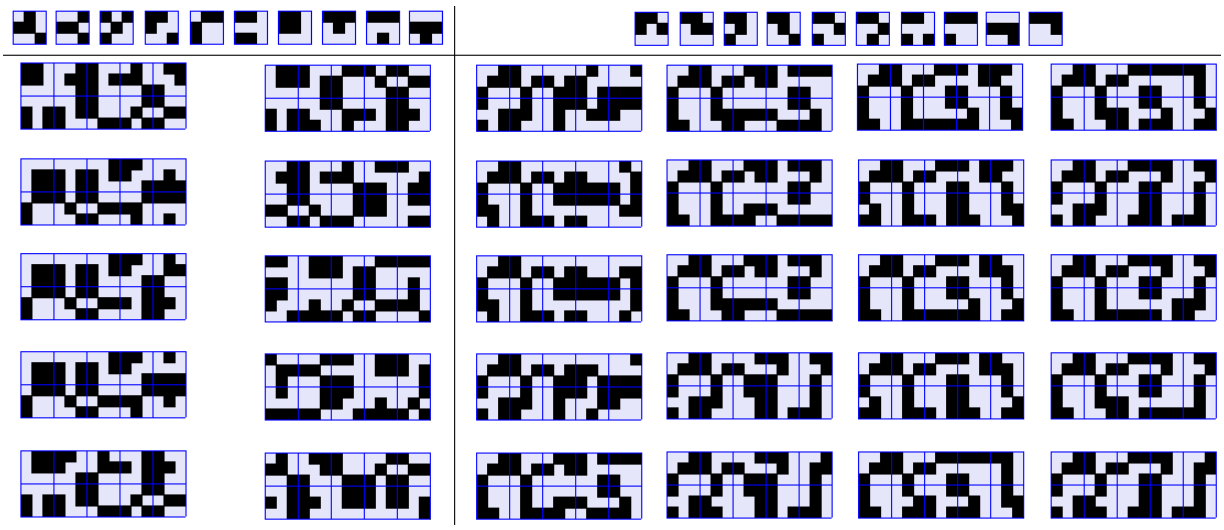

FIGURE 4.26 – *Réaliser un rectangle 2×5 avec un ensemble de dix prominos sélectionnés ne peut se faire que de dix façons si les pièces sélectionnées ont un axe de symétrie (à gauche) et de plus de vingt mille façons si elles n'ont aucun élément de symétrie (à droite, seulement 20 solutions représentées).*

J'ai testé un autre groupe de dix pièces sur leur capacité à reconstituer un rectangle 2×5, celui qui contient les pièces ayant une case noire au centre, pour la seule raison qu'elles sont au nombre de dix. En les examinant, je remarque qu'il y en a six qui ont un axe de symétrie, j'en déduis que le nombre des rectangles différents sea plus proche de 10 que de 21 334. Le résultat confirme cette prévision puisqu'il y en a 753.

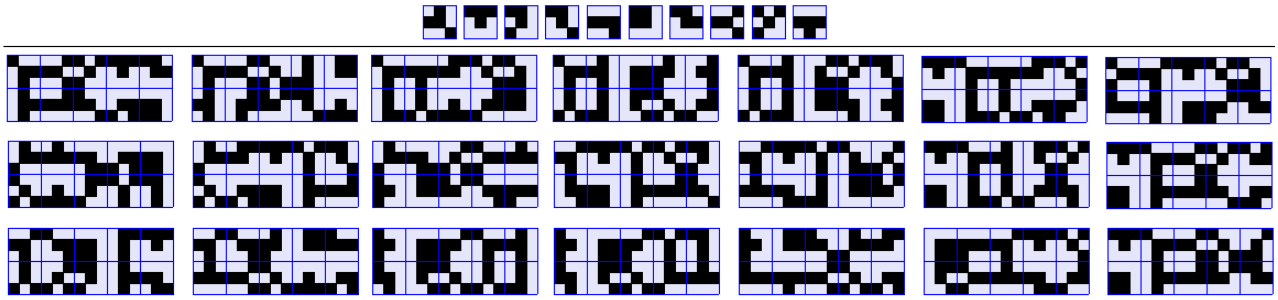

FIGURE 4.27 – *Le rectangle 2×5 avec l'ensemble des dix prominos contenant une case noire au centre peut se réaliser de 753 façons différentes dont 21 sont présentées ici.*

Un autre ensemble de pièces a été testé : celui des pièces ayant un bord tout blanc ou tout noir. Il y a quatre pièces ayant un bord tout noir alors qu'il y en a neuf qui ont un bord tout blanc (je n'inclus pas les pièces additionnelles, la blanche et la noire). Comme deux de ces pièces appartiennent aux deux groupes à la fois cela fait un total de onze pièces. En choisissant huit de ces pièces, je cherche à créer un carré 3×3 centré sur une des pièces additionnelles. Cela devrait être possible dans les deux cas car il faut seulement quatre pièces ayant un bord tout d'une couleur pour créer ces assemblages.

Je m'aperçois cependant que la configuration d'un carré 3×3 avec la pièce additionnelle toute noire n'est pas possible avec ce jeu de onze pièces. Par contre, il y a deux-cents-douze possibilités avec la pièce additionnelle toute blanche au centre.

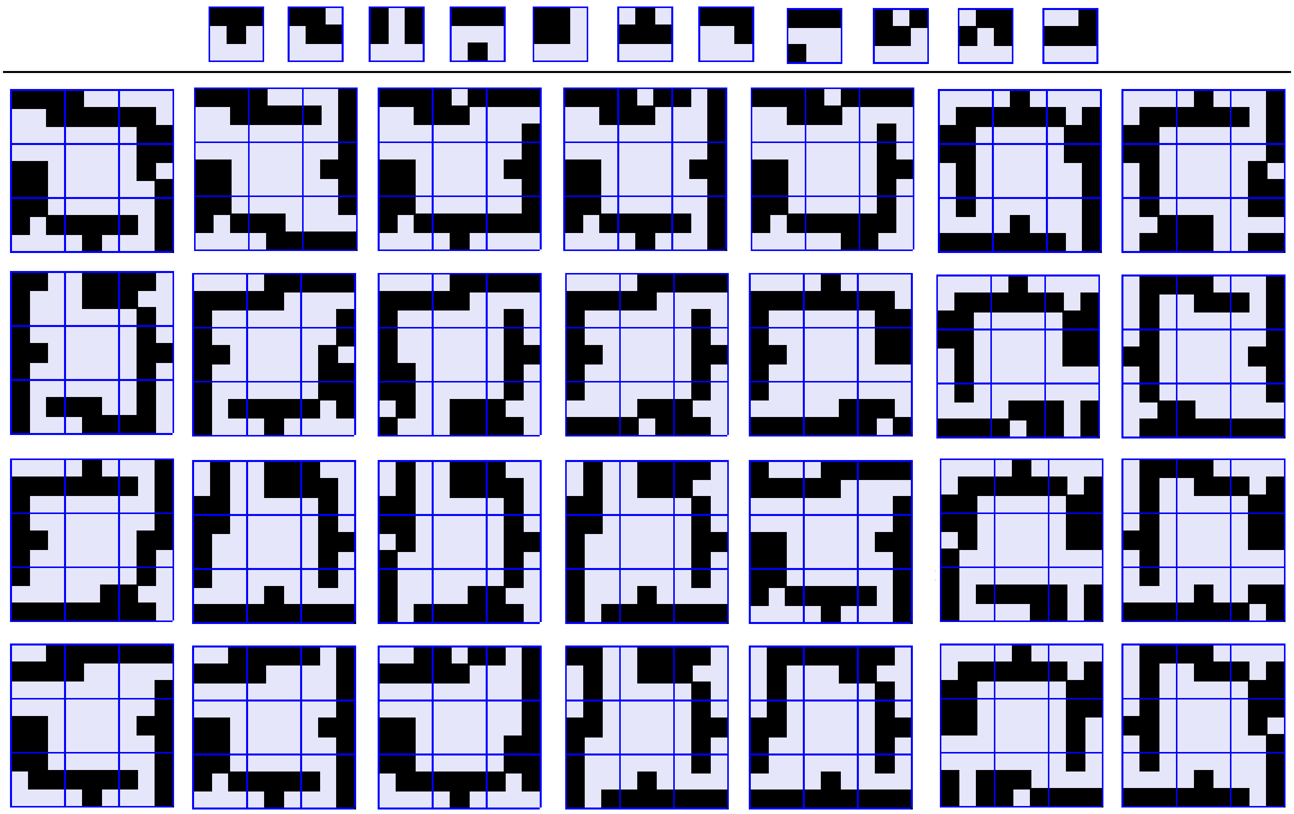

FIGURE 4.28 – *Un carré 3×3 centré sur la pièce toute blanche peut être réalisé avec le jeu des onze pièces ci-dessous de 212 façons différentes dont les 30 représentées ici, mais si la pièce centrale est la pièce noire, il n'y a pas de solution.*

Si on ne garde que les neuf pièces ayant un bord tout blanc pour compléter un carré 3×3 centré sur la pièce blanche, il n'y a aucune solution. J'ai cherché à connaître les solutions de ce problème lorsqu'on ajoute une dixième pièce, au choix parmi les quatorze restantes. Les résultats sont écrits sur l'image ci-dessous : avec une des deux pièces ayant quatre axes de symétrie (fleur et soleil, soit L et G), le problème reste infaisable ; avec le clown (V) il y a vingt-deux solutions. J'ai illustré les quarante-quatre solutions obtenues avec le soleil du soir (F).

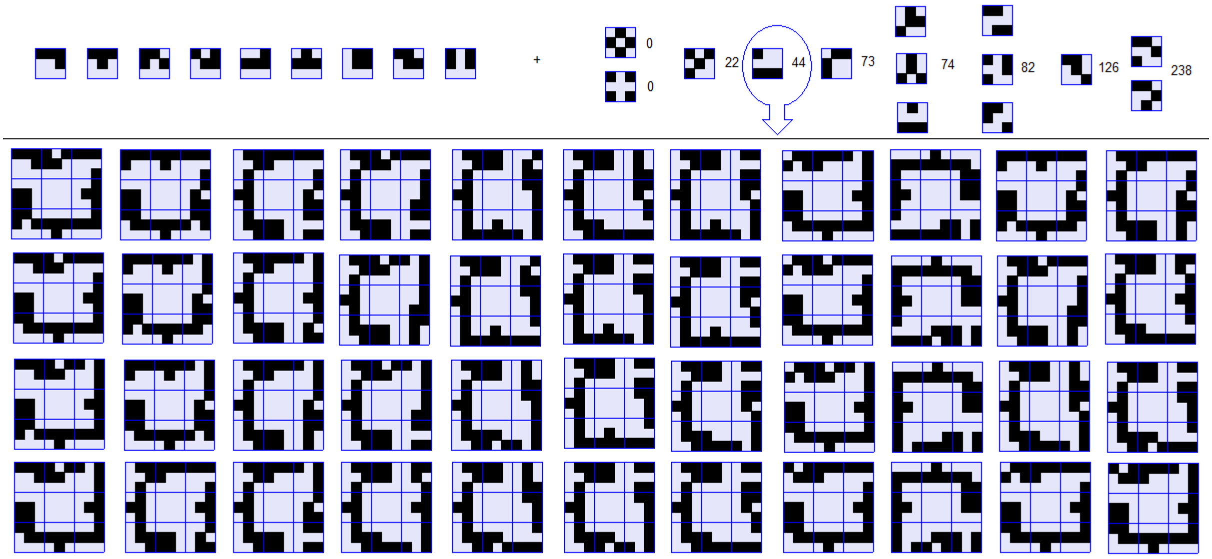

FIGURE 4.29 – *Le carré 3×3 centré sur la pièce blanche peut être réalisé avec un jeu de dix pièces dont les neuf ayant un bord blanc et une dixième choisie parmi les pièces restantes. J'ai indiqué le nombre de solutions pour chacune et illustré les 44 obtenues avec la pièce F.*

Je teste par curiosité le jeu complet des prominos sur cette figure et découvre que lorsque c'est la pièce blanche qui est au centre il y a 233 982 solutions possibles. Lorsque c'est la pièce noire qui est au centre il y a, cette fois, de nombreuses possibilités puisqu'il y a 2 696 solutions différentes dont quelques-unes sont présentées ci-dessous. Au passage je m'aperçois que ma procédure d'élimination des doublons était incomplète : j'avais omis de supprimer les formes tournées d'un quart de tour. Cette omission n'a d'impact que pour les figures carrées mais la rectification a permis de diviser par deux tous les résultats puisque aucune forme réalisable avec un jeu de prominos différents n'a d'élément de symétrie.

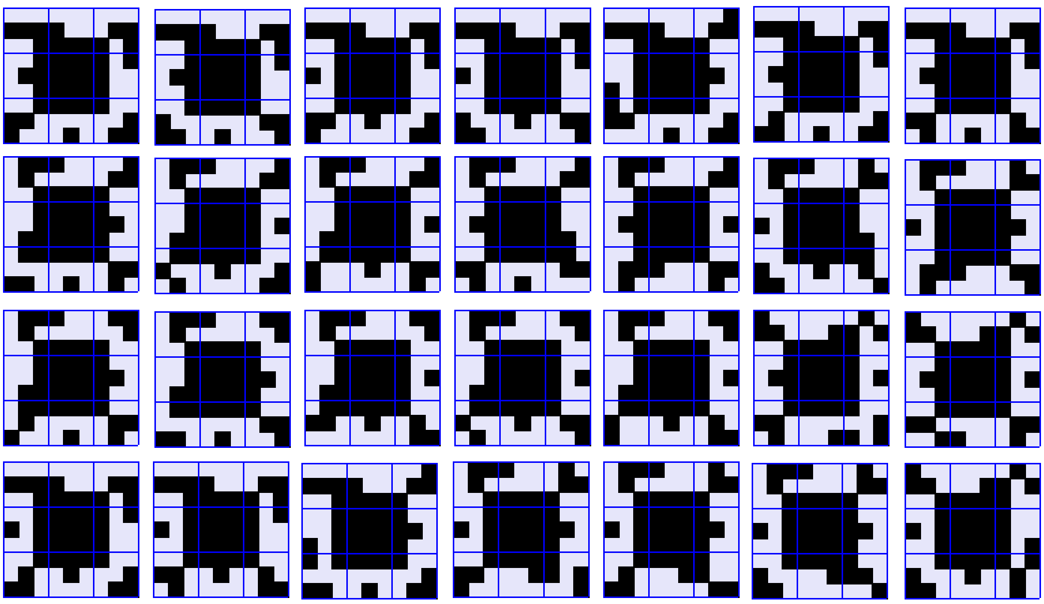

FIGURE 4.30 – *Un carré 3×3 centré sur la pièce toute noire peut être réalisé avec le jeu des vingt-trois pièces de 2696 façons différentes dont les 28 représentées ici.*

h. Les duos

Ces essais de villages restreints avec un jeu de pièces choisi m'amènent à imaginer qu'avec un jeu encore plus restreint mais qui autorise les duplicatas de pièces, on devrait pouvoir obtenir des figures intéressantes, des villages susceptibles d'avoir des éléments de symétrie ou de constituer des tuiles pavant le plan de façons variées. Les duos étudiés ici sont des jeux de deux pièces admettant autant de duplicatas qu'on le souhaite pour chacune. Comme on peut choisir de très nombreuses façons ces jeux et les utiliser pour constituer des villages de taille quelconque, je vais me limiter ici à quelques jeux et seulement une taille de village, les villages 3×4. Voici donc mes résultats pour les cinq duos étudiés.

Le premier duo est constitué de la Maison et de l'Éclair. En utilisant de zéro à douze maisons et le complément à douze d'éclairs, dans toutes les configurations possibles de ces assortiments de pièces, on peut réaliser cent-vingt-trois villages 3×4 différents, tous présentés sur l'image ci-dessous. Vous constaterez que certaines formes sont symétriques et d'autres pavent le plan, quelques-unes ont les deux propriétés. Je ne vais pas chercher à les identifier explicitement ni à les dénombrer mais elles sont assez nombreuses.

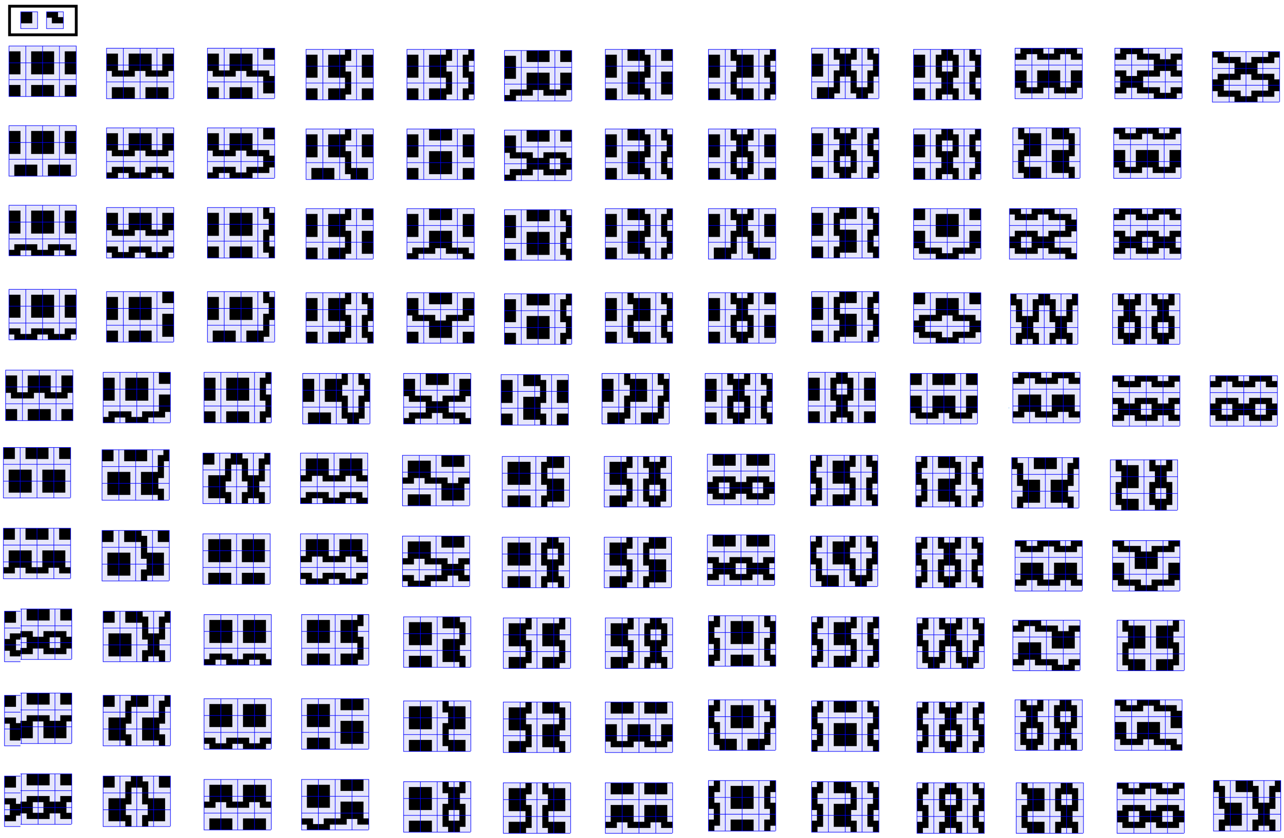

FIGURE 4.31 – *Les 123 villages 3×4 réalisables avec des répliques de la Maison et de l'Éclair.*

De la même façon j'ai cherché à connaître les capacités combinatoires de quatre autres duos :

- Le duo Soleil-Clown est capable de réaliser trois-cent-trente-sept villages 3×4 différents ; l'image n'en présente que cent-cinquante. Les particularités de ce couple est d'avoir les quatre cases noires non connectées.
- Le duo Botte1-Botte2 est capable de réaliser quatre-cent-dix-neuf villages 3×4 différents ; l'image n'en présente que cent-quarante.
- Le duo Chapeau1-Chapeau2 est capable de réaliser cinq-cent-soixante-et-un villages 3×4 différents ; l'image n'en présente que cent-dix.
- Le duo Arbre-Jardin est capable de réaliser deux-mille-trois-cent-vingt-huit villages 3×4 différents ; l'image n'en présente que cent-cinquante.

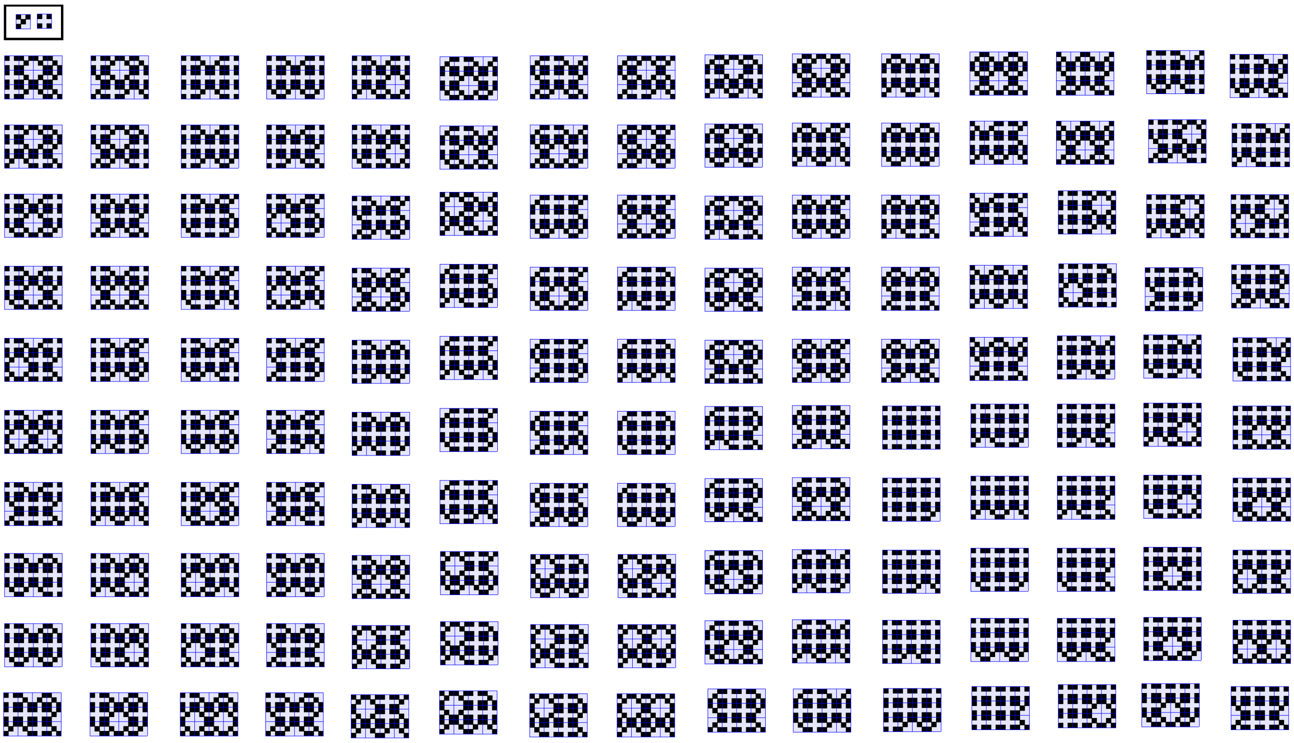

FIGURE 4.32 – 150 *villages* 3×4 *parmi les* 337 *réalisables avec des répliques du Soleil et du Clown.*

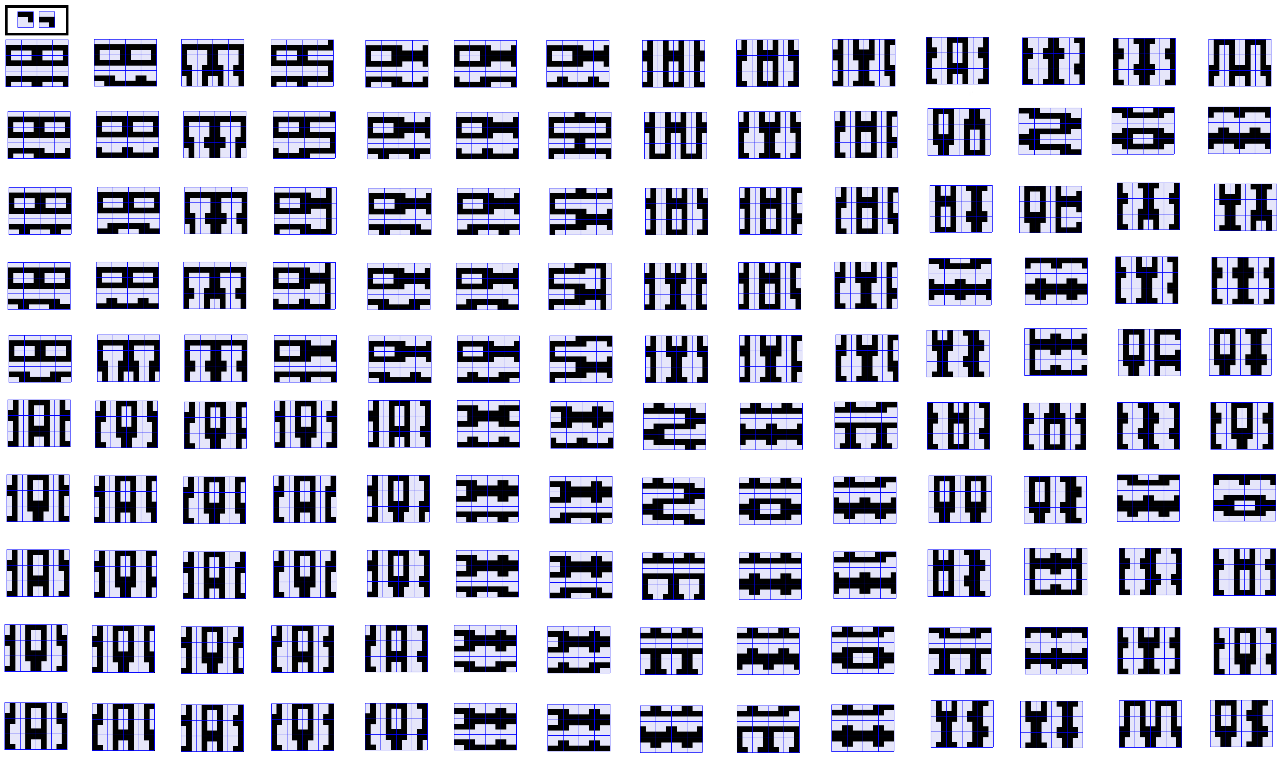

FIGURE 4.33 – 140 *villages* 3×4 *parmi les* 419 *réalisables avec des répliques des Bottes 1 et 2.*

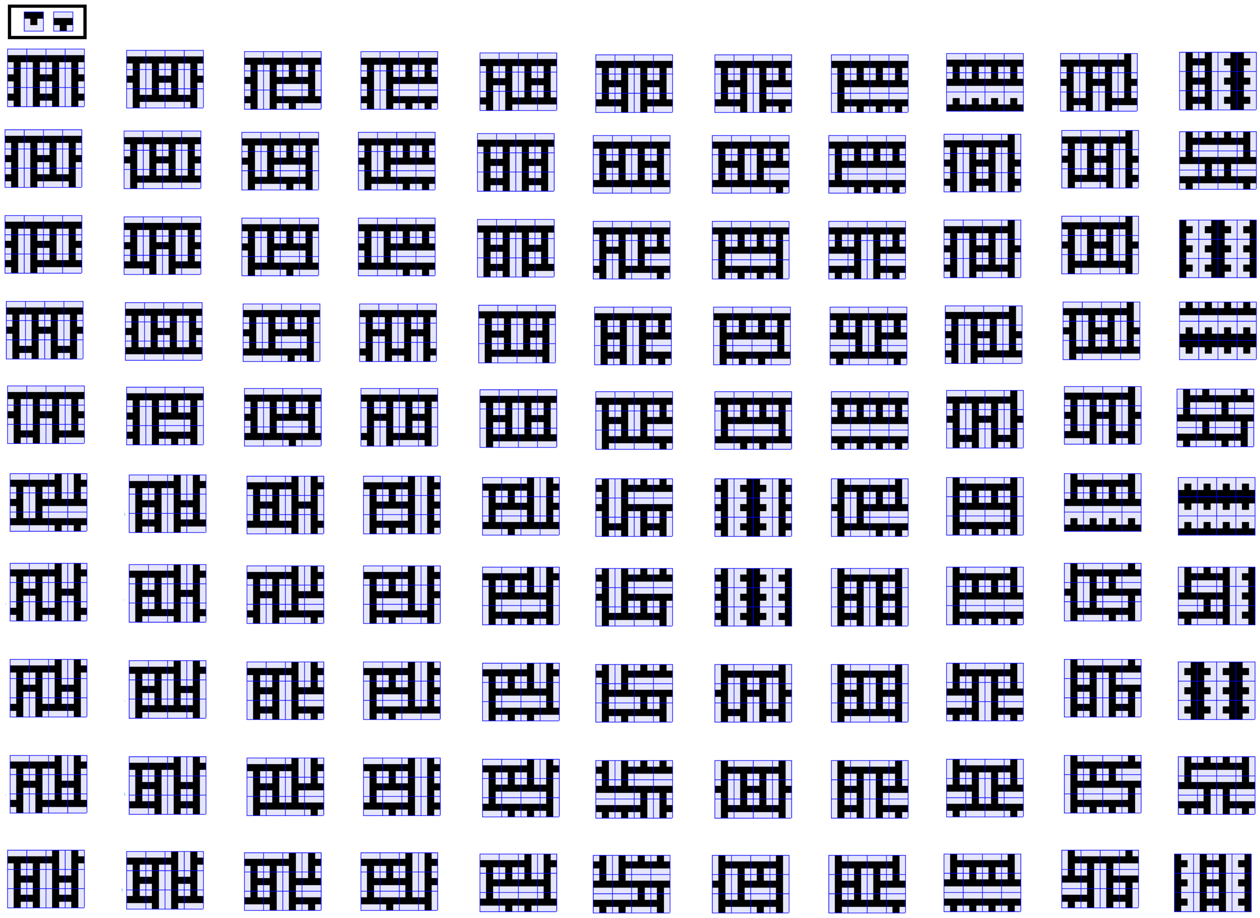

FIGURE 4.34 – 110 *villages* 3×4 *parmi les* 561 *réalisables avec des répliques des Chapeaux 1 et 2.*

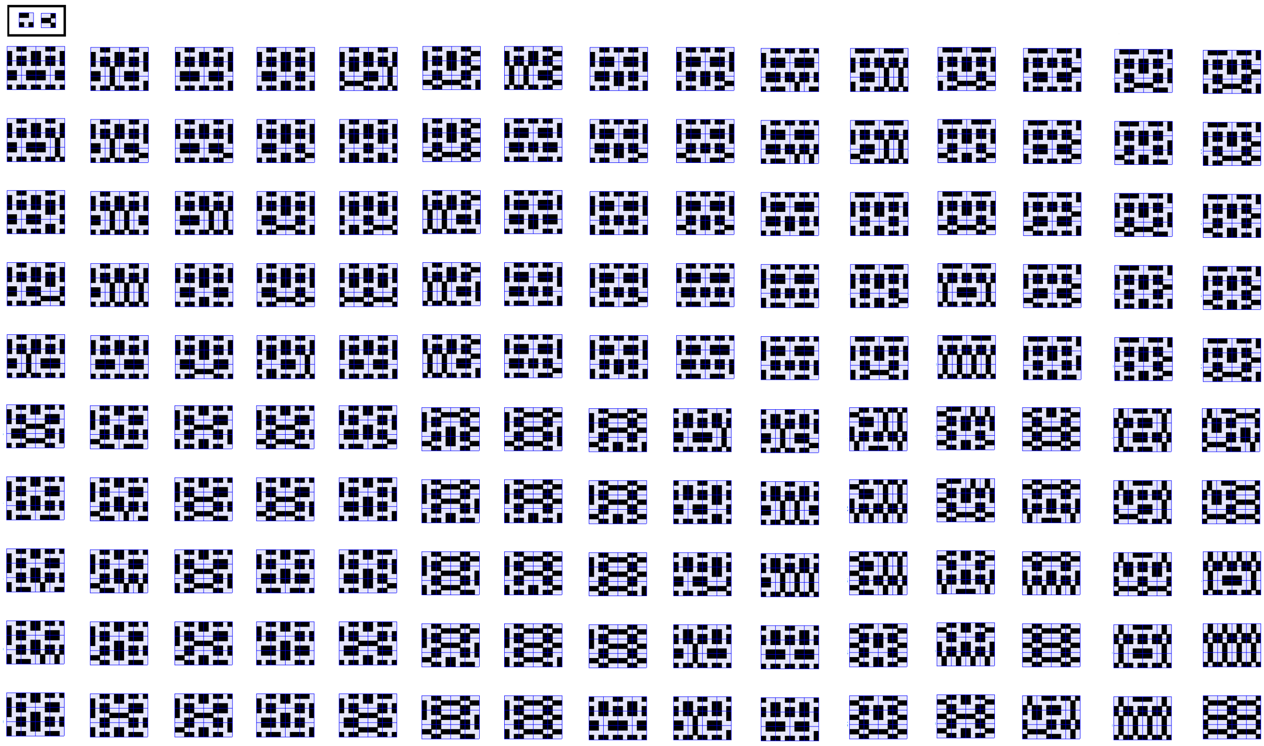

FIGURE 4.35 – 150 *villages* 3×4 *parmi les* 2328 *réalisables avec des répliques de l'Arbre et du Jardin.*

4. Annexes

a. Solutions

Pavages

Les tuiles qui composent les pavages comportent généralement quatre pièces identiques dans quatre configurations différentes. Deux tuiles ne comporte qu'une seule pièce (le Soleil et la Fleur). Cinq tuiles ne comportent que deux pièces (Chapeau 1, Chapeau 2, Zénith, Arbre et Jumeau), ce sont celles qui contiennent un axe de symétrie parallèle à un bord du carré.

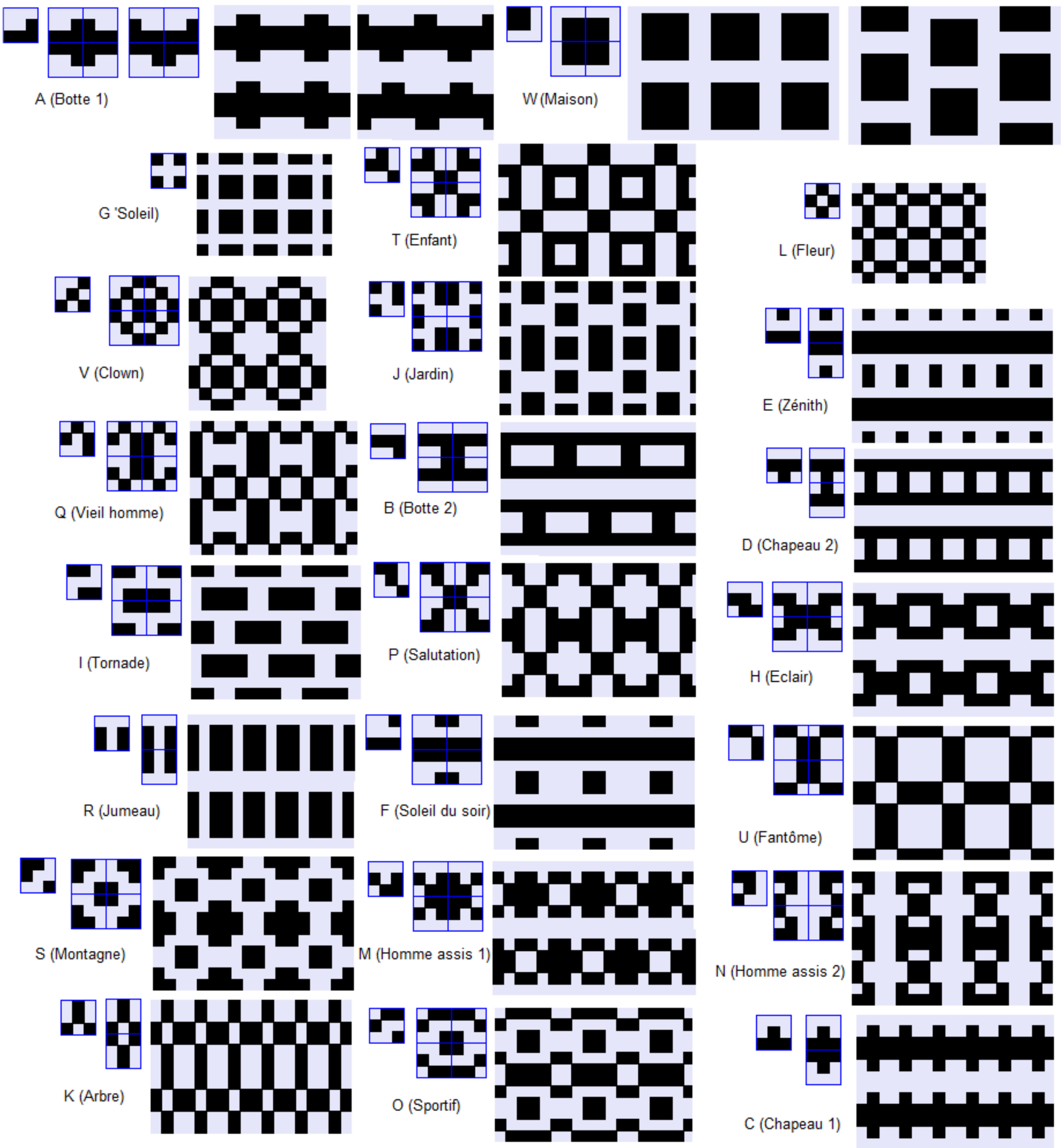

FIGURE 4.36 – *Les pavages avec leur tuile élémentaire, la pièce du jeu qui la constitue, son nom et sa lettre.*

Je n'ai pas multiplié les variantes d'un pavage qui peuvent être obtenues par translation d'une ligne de tuiles, cette translation étant souvent possible, notamment lorsqu'un bord de la tuile est entièrement monochrome (généralement blanc). Les tuiles avec lesquelles ce glissement est possible sont obtenues avec les pièces A (Botte 1), B (Botte 2), C (Chapeau 1), D (Chapeau 2), E (Zénith), F (Soleil du soir), H (Eclair), M (Homme assis 1), N (Homme assis 2), R (Jumeau) et W (Maison).

Encadrements

FIGURE 4.37 – *Encadrements des villages 5 × 5 : Voici deux solutions pour chacun des villages proposés et trois autres villages encadrés dont le dernier, en bas à droite, à qui le cadre de l'énoncé convient.*

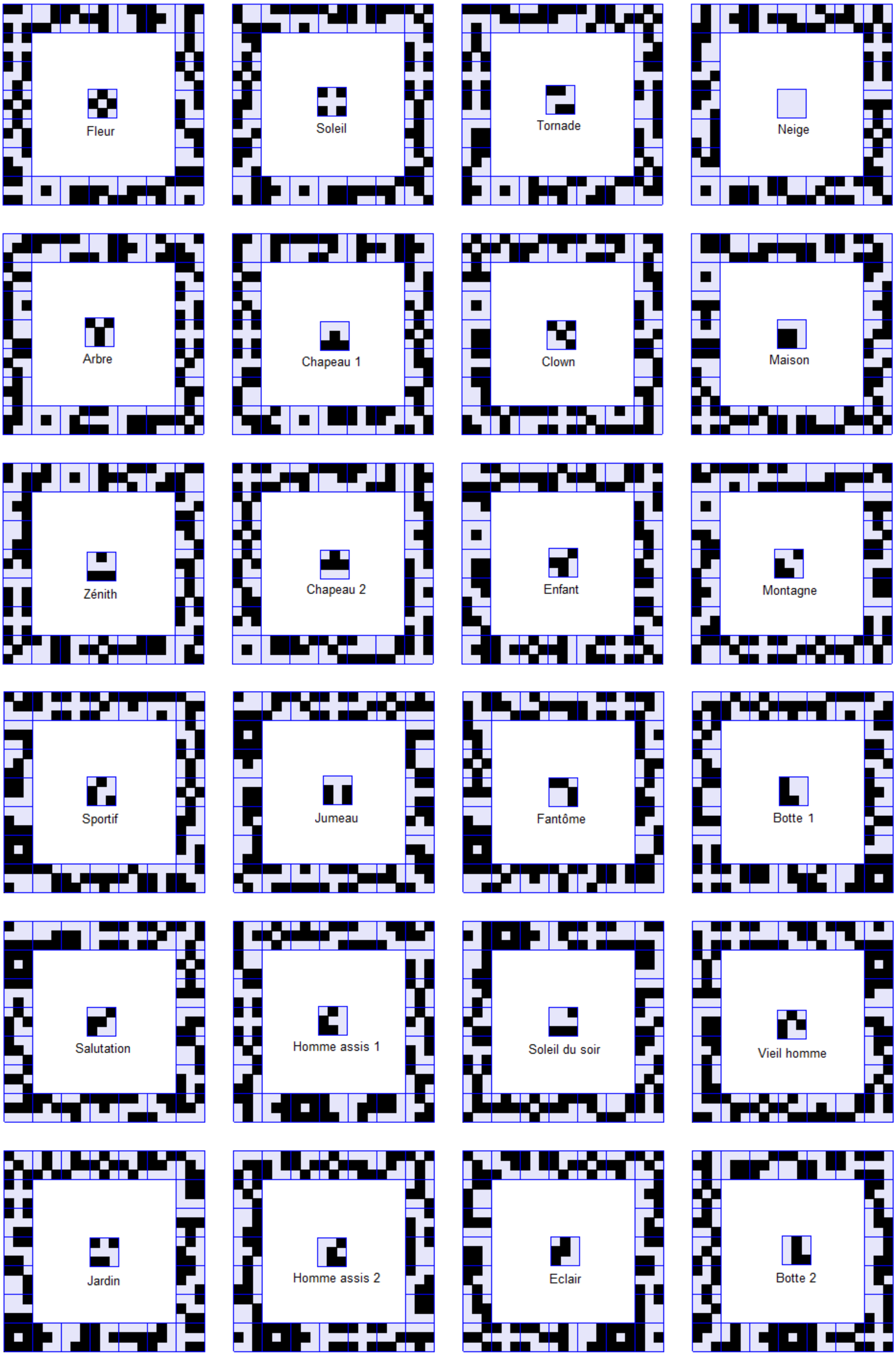

FIGURE 4.38 – *Vingt-quatre encadrements supplémentaires, un pour chaque pièce du jeu. Les douze premiers contiennent la pièce additionnelle blanche, les douze dernier la noire.*

b. Compléments

Villages 4×6

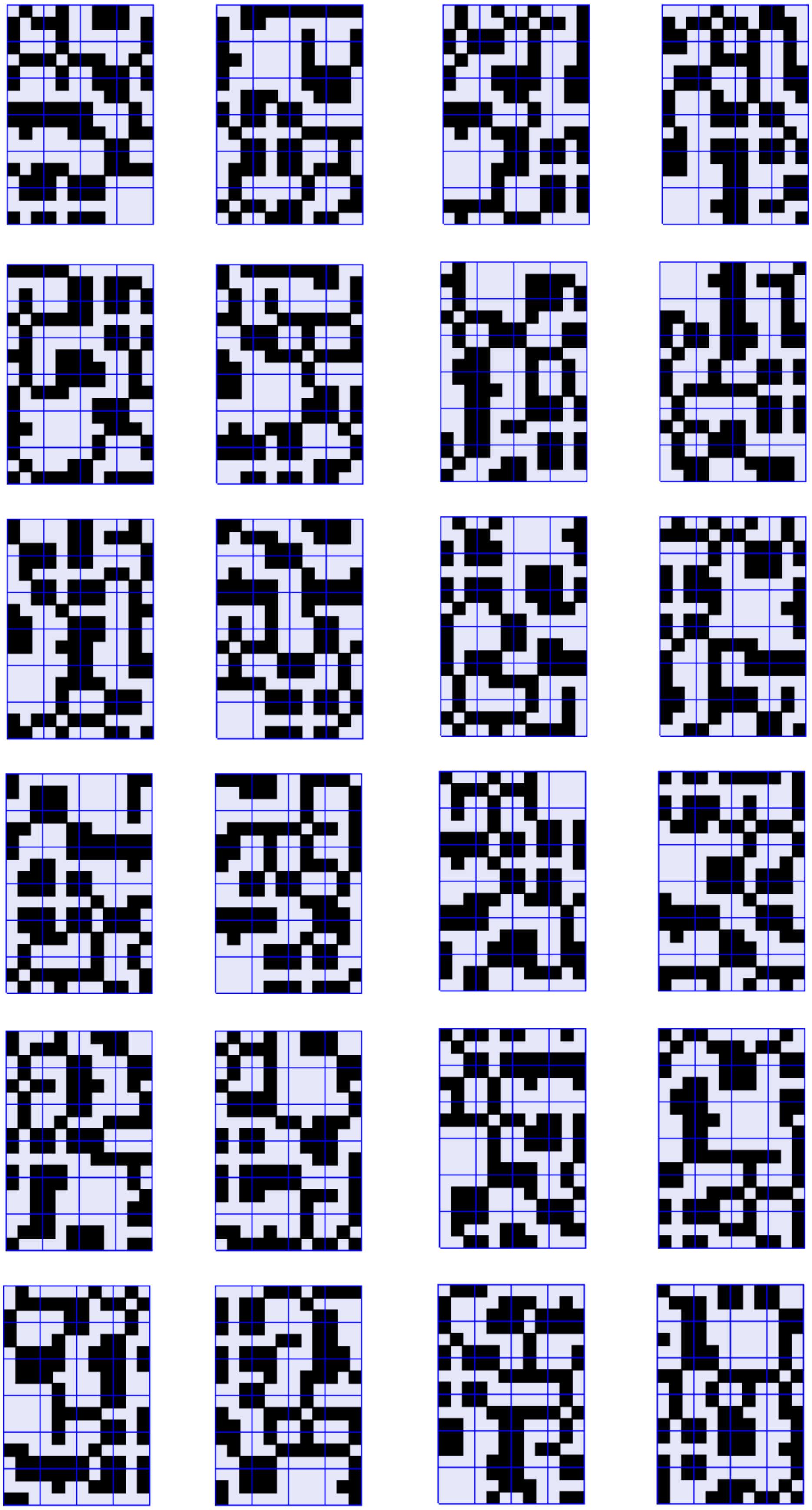

FIGURE 4.39 – *Vingt-quatre villages* 4×6 *supplémentaires avec la pièce additionnelle blanche.*

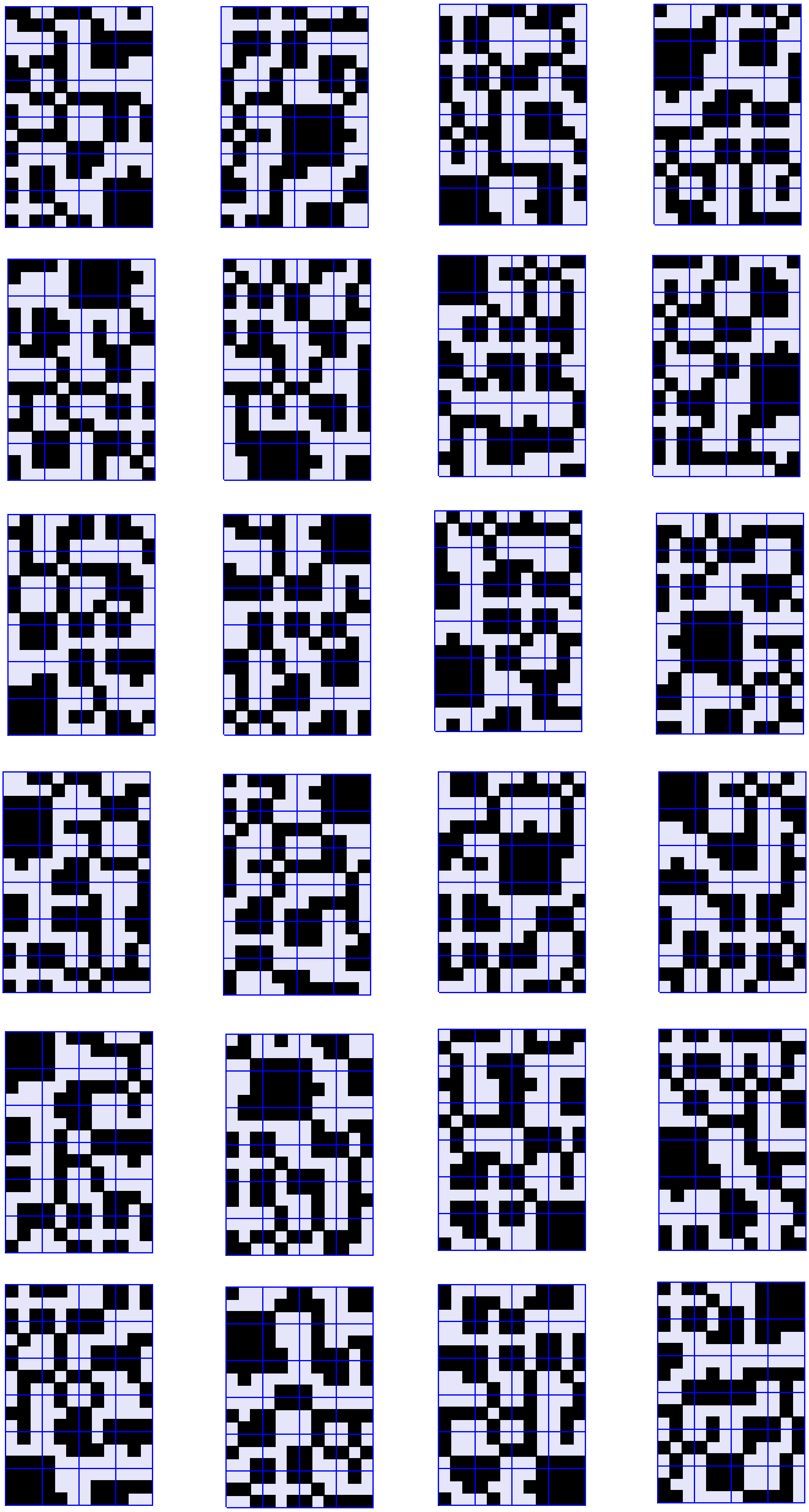

FIGURE 4.40 – *Vingt-quatre villages 4 × 6 supplémentaires (incomplet) avec la pièce additionnelle noire.*

Villages 3×8

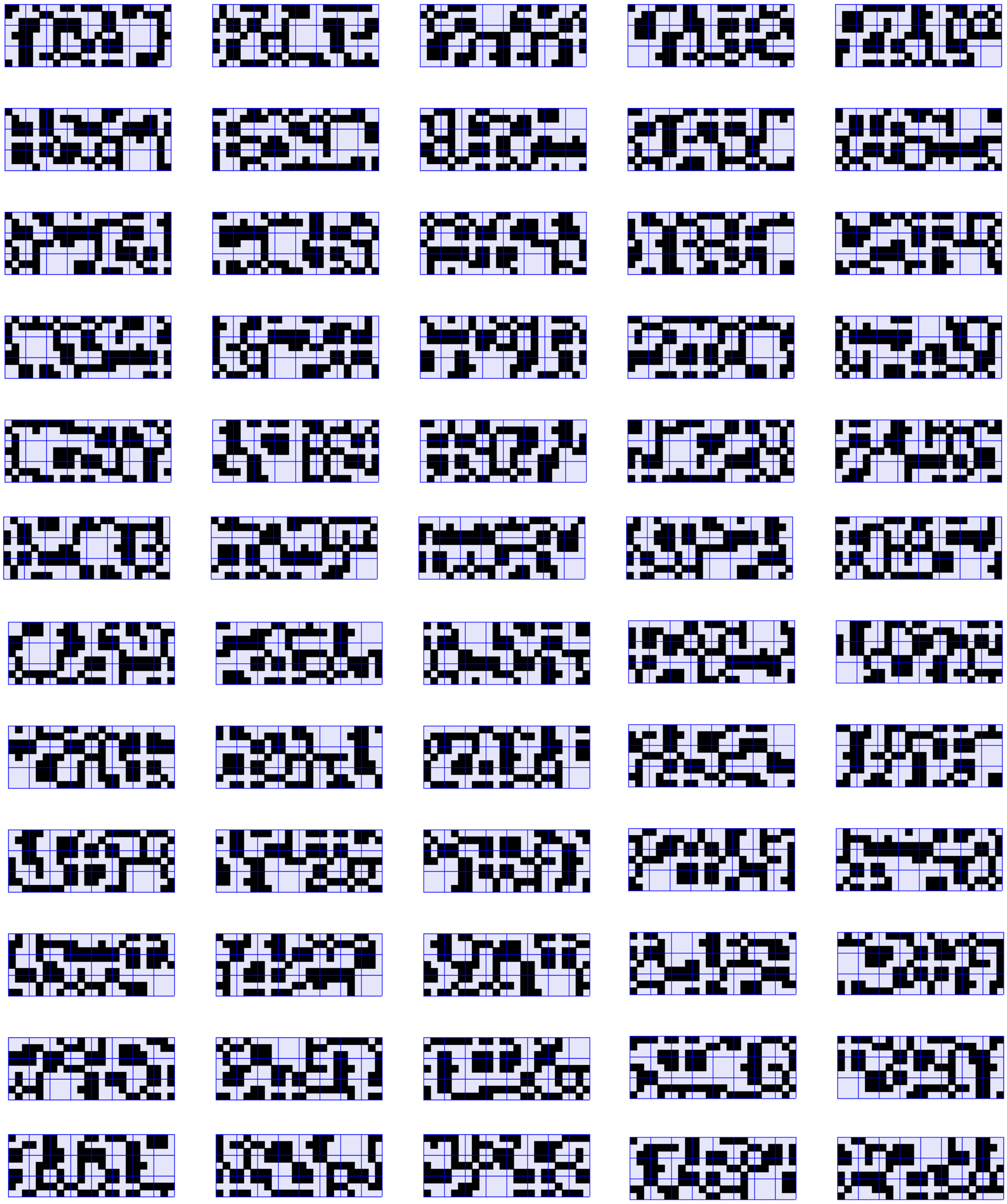

FIGURE 4.41 – *Soixante villages* 3×8 *avec la pièce additionnelle blanche.*

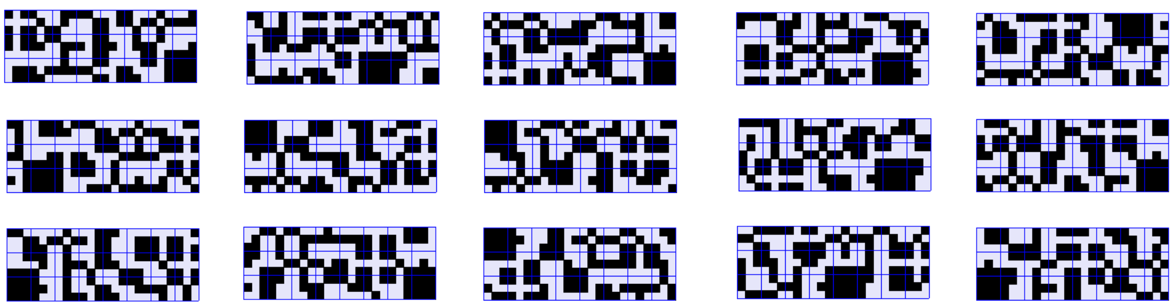

FIGURE 4.42 – *Quinze villages* 3×8 *avec la pièce additionnelle noire, plus difficiles à trouver.*

Villages 2×12

FIGURE 4.43 – *Trente villages* 2×12*, les cinq derniers contenant la pièce additionnelle noire.*

Villages 1×24

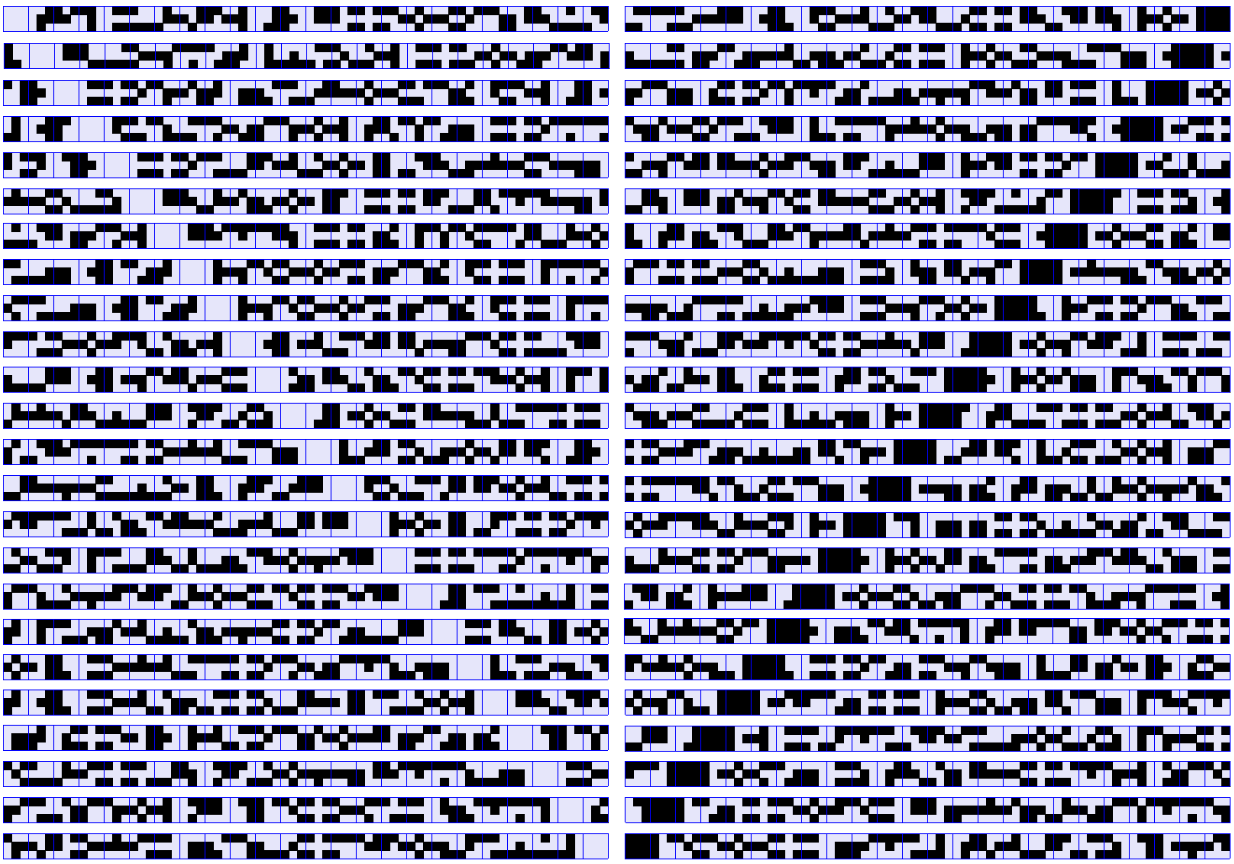

FIGURE 4.44 – *Vingt-quatre villages* 1×24 *avec la pièce blanche ; idem avec la pièce noire. Aucun n'est circulaire (première et dernière pièce s'assemblant) ; mon expérience me fait conjecturer qu'il n'en existe pas.*

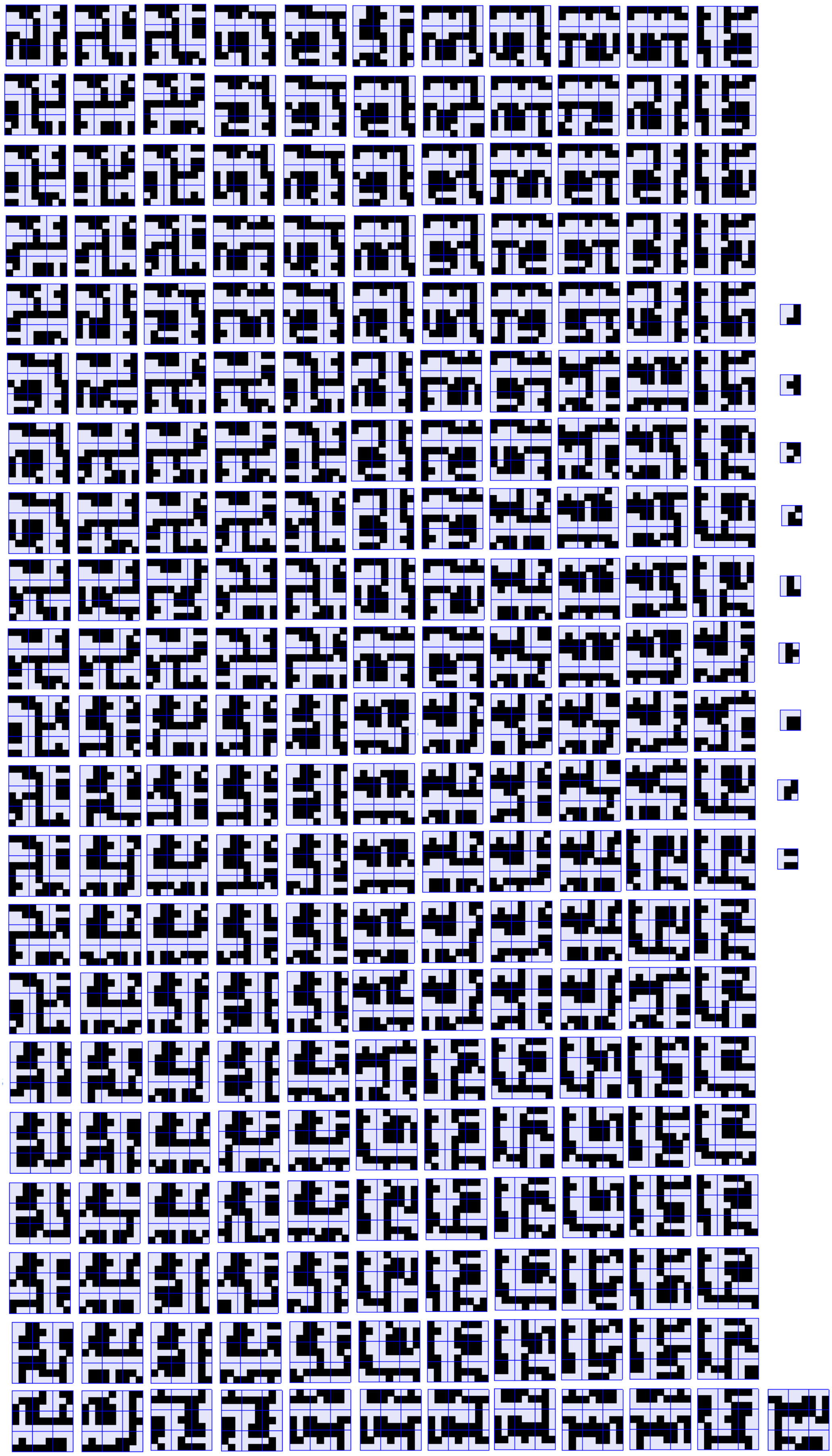

FIGURE 4.45 – *Les 232 carrés* 3×3 *possibles avec les 9 pièces contenant un bord tout blanc.*

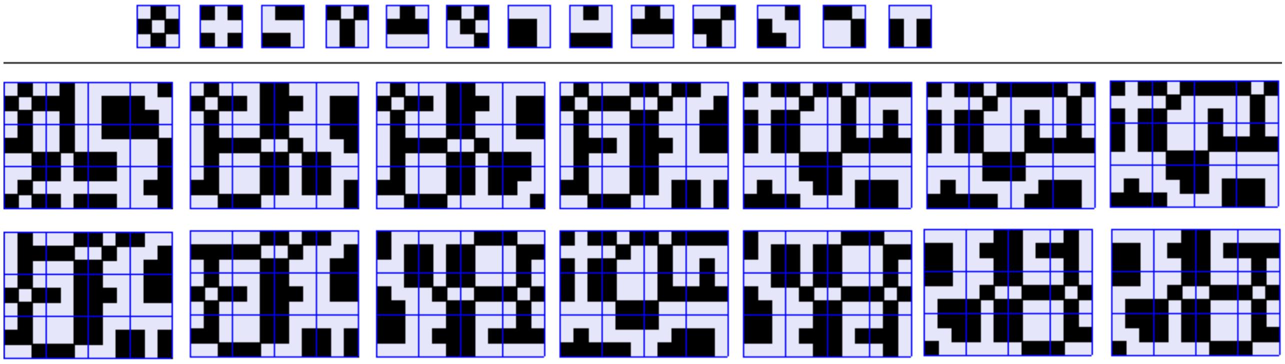

FIGURE 4.46 – *Les 14 villages 3×4 possibles avec 12 des 13 pièces ayant au moins un élément de symétrie.*

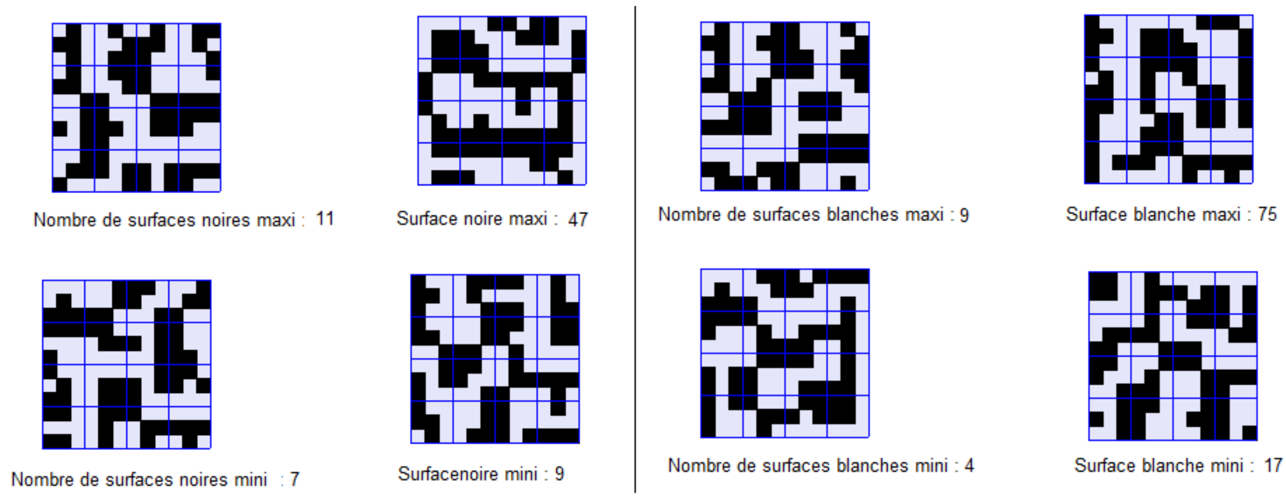

FIGURE 4.47 – *Les villages 4×4 réalisables avec les 23 pièces du jeu sont en nombre considérable. Parmi les* 250 000 *villages obtenus (commençant tous par le Chapeau 1, le Chapeau 2 et la Maison) les villages ayant des caractéristiques extrêmes concernant les zones connectées sont présentés ici.*

Duos

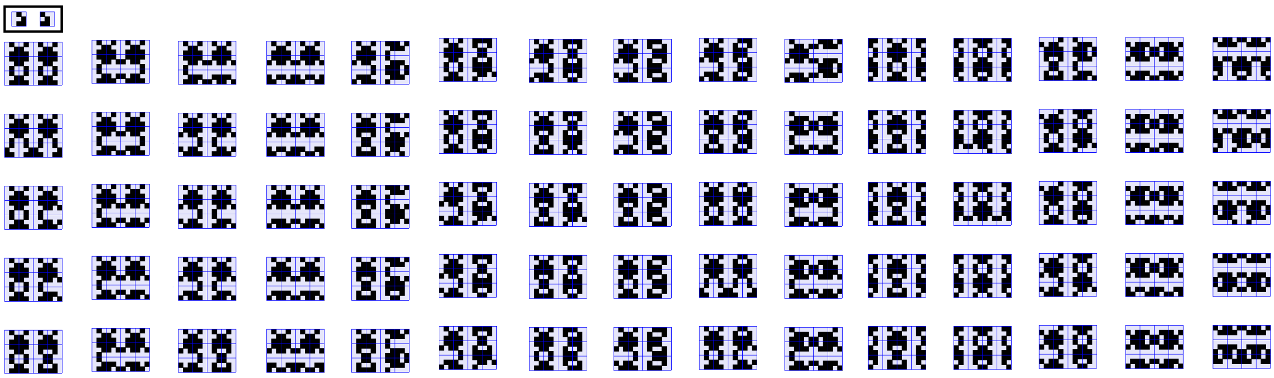

FIGURE 4.48 – *75 villages 3×4 réalisables avec le duo Homme Assis 1-Homme Assis 2 parmi les* 1208 *possibles.*

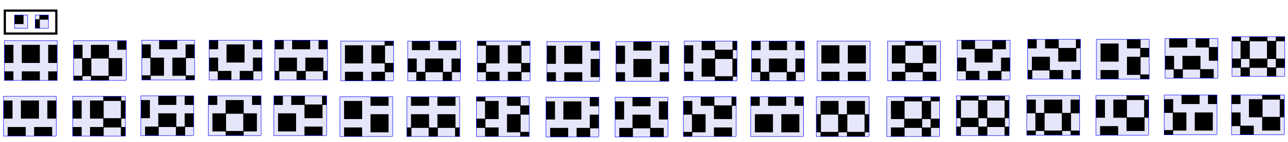

FIGURE 4.49 – *Les 38 villages 3×4 du duo Maison-Fantôme.*

Trios

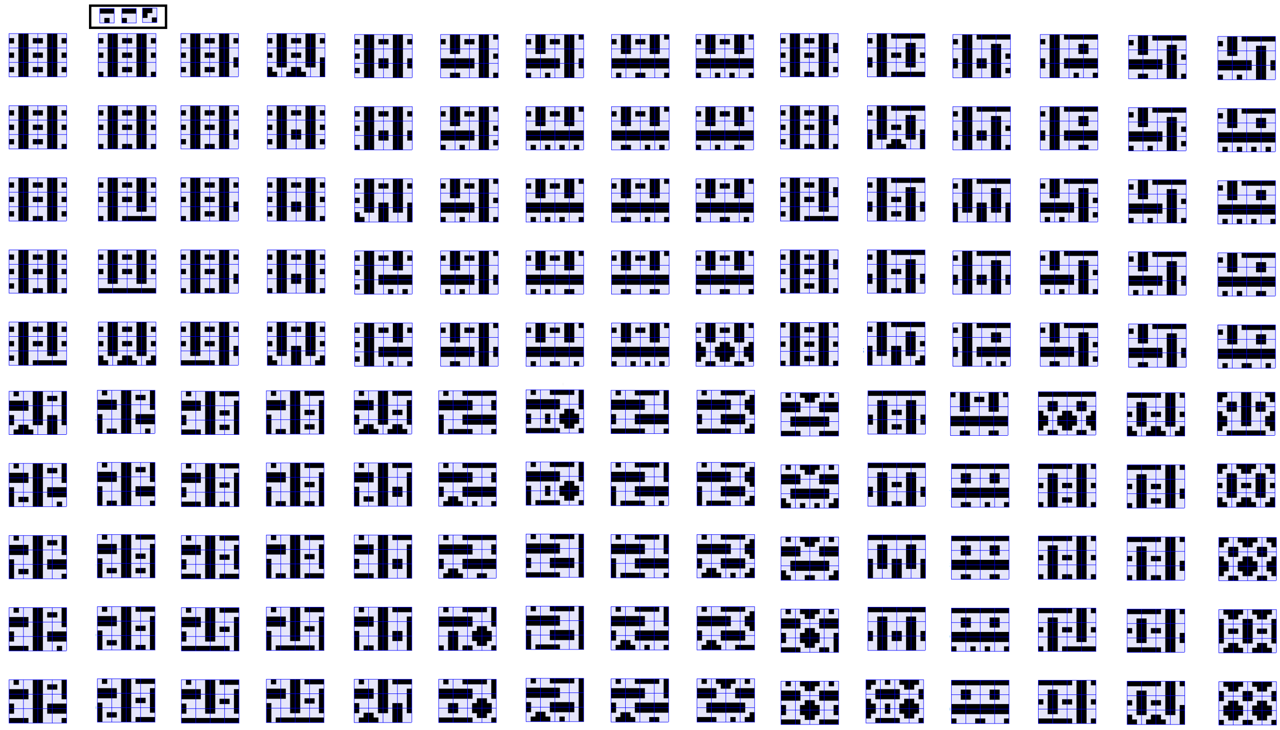

FIGURE 4.50 – *150 villages* 3×4 *réalisables avec le trio Zenith-Soleil Du Soir-Montagne parmi les* 2393 *possibles.*

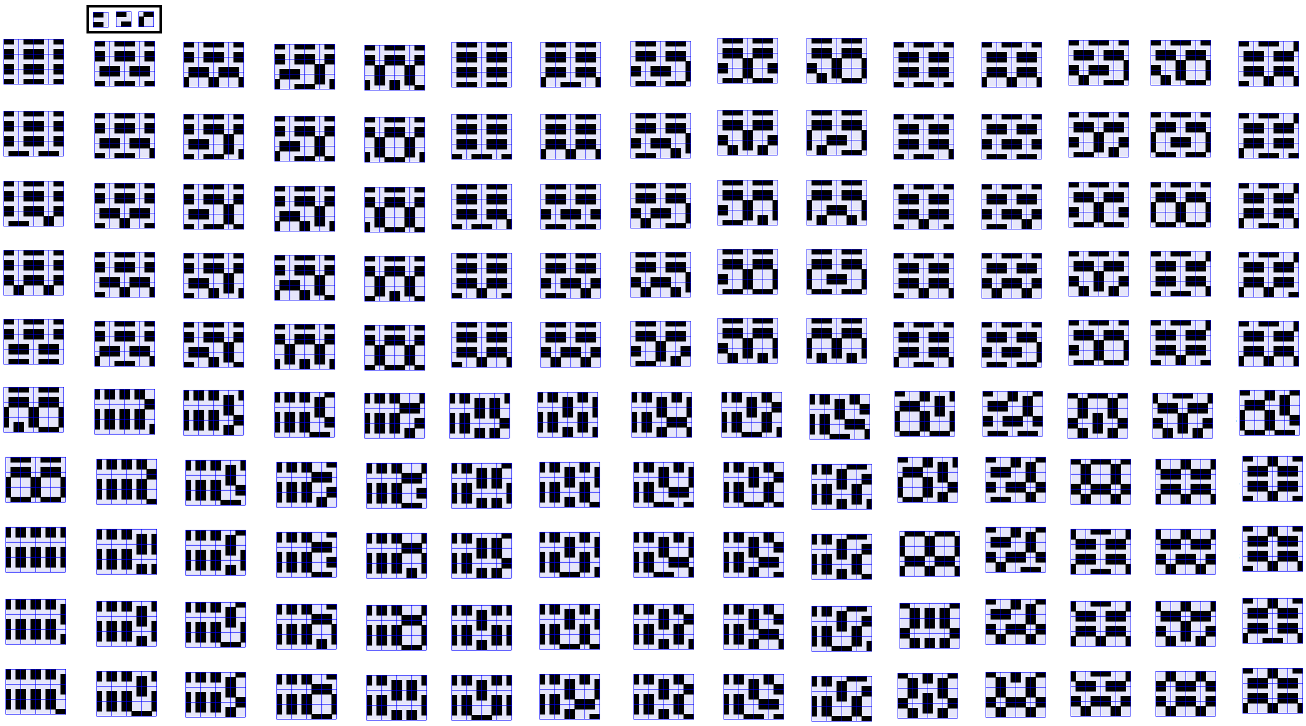

FIGURE 4.51 – *150 villages* 3×4 *réalisables avec le trio Jumeau-Tornade-Fantôme parmi les* 795 *possibles.*

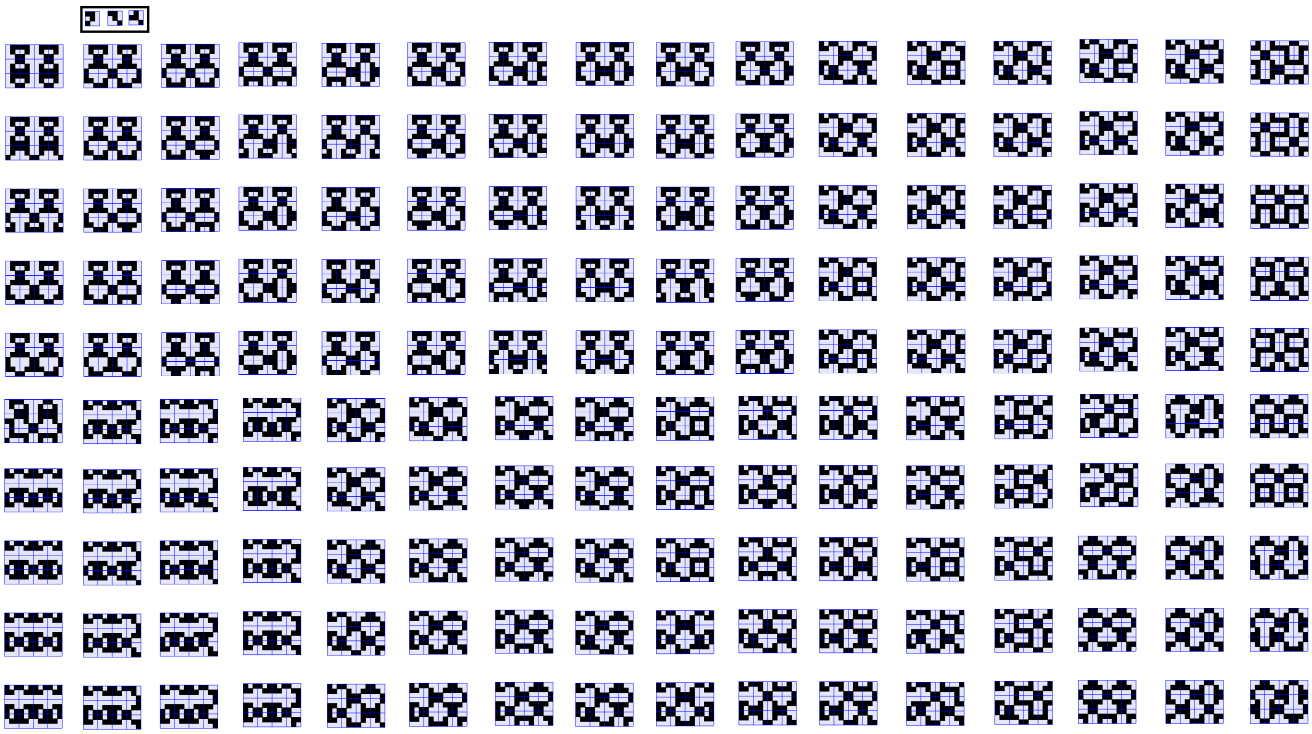

Figure 4.52 – *160 villages 3 × 4 réalisables avec le trio Enfant-Salutation-Homme Assis 2 parmi les 9330 possibles.*

Symétries et Pavages

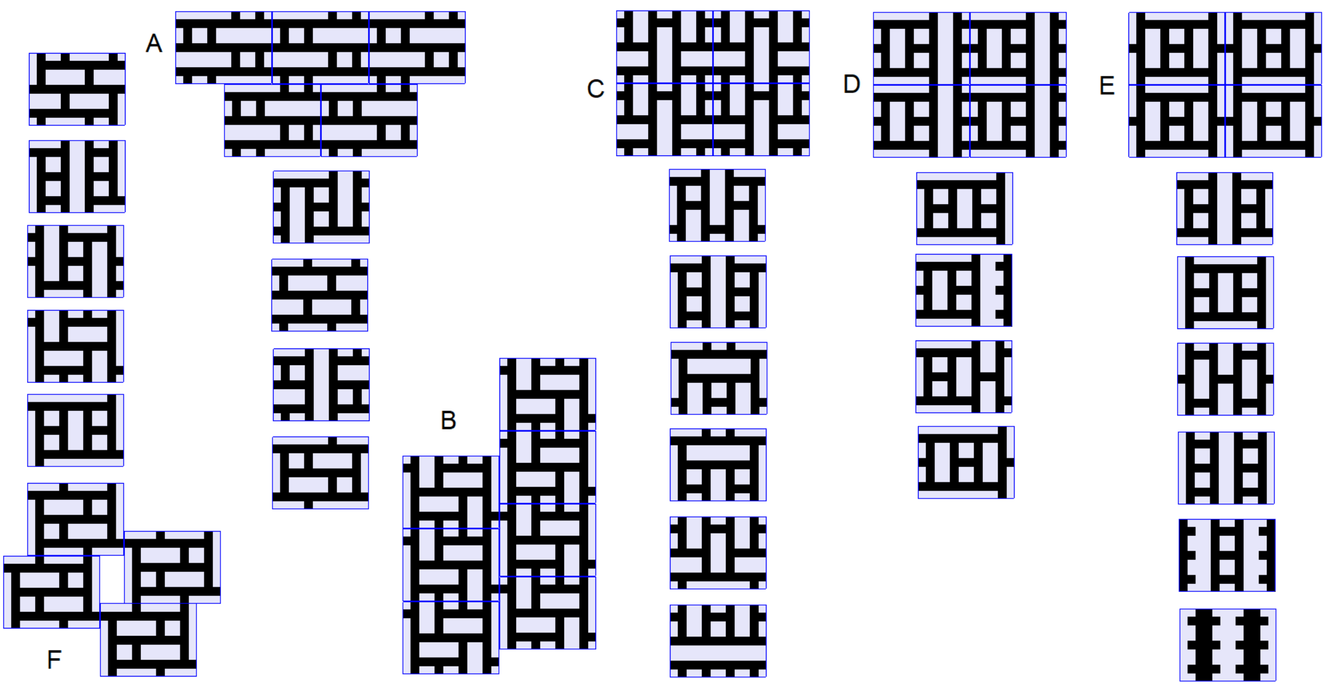

Figure 4.53 – *Les villages 3 × 4 du duo Chapeaux 1 et 2 ont souvent un axe de symétrie vertical ou deux axes perpendiculaires, plus rarement un axe horizontal ou un centre de symétrie. Parmi ces villages symétriques, certains ont la propriété de paver le plan. Les pavages obtenus ont parfois des centres de symétrie (B) mais plus souvent des axes de symétrie perpendiculaires (A, C, D et E). Si le pseudo-pavage F était associé à des villages 1 × 2 constitués de 2 pièces blanches, il paverait le plan.*

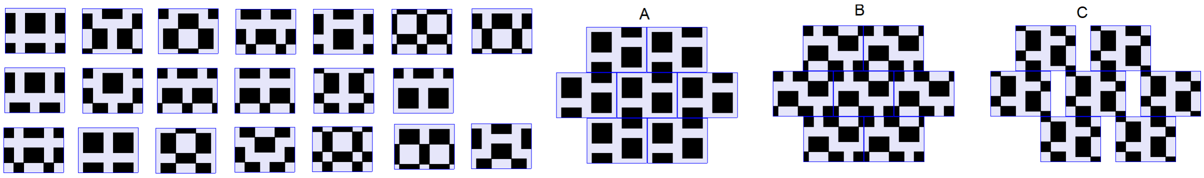

FIGURE 4.54 – *Plus de la moitié des villages* 3×4 *du duo Maison-Fantôme ont un axe de symétrie vertical et 3 ont un centre de symétrie. Parmi ces villages symétriques, aucun de ceux qui ont un axe ne pave le plan ; 2 qui ont un centre le pavent en donnant un pavage ayant des axes perpendiculaires (A et B) ; le pseudo-pavage C ne peut être associé à un autre village restreint pour paver le plan.*

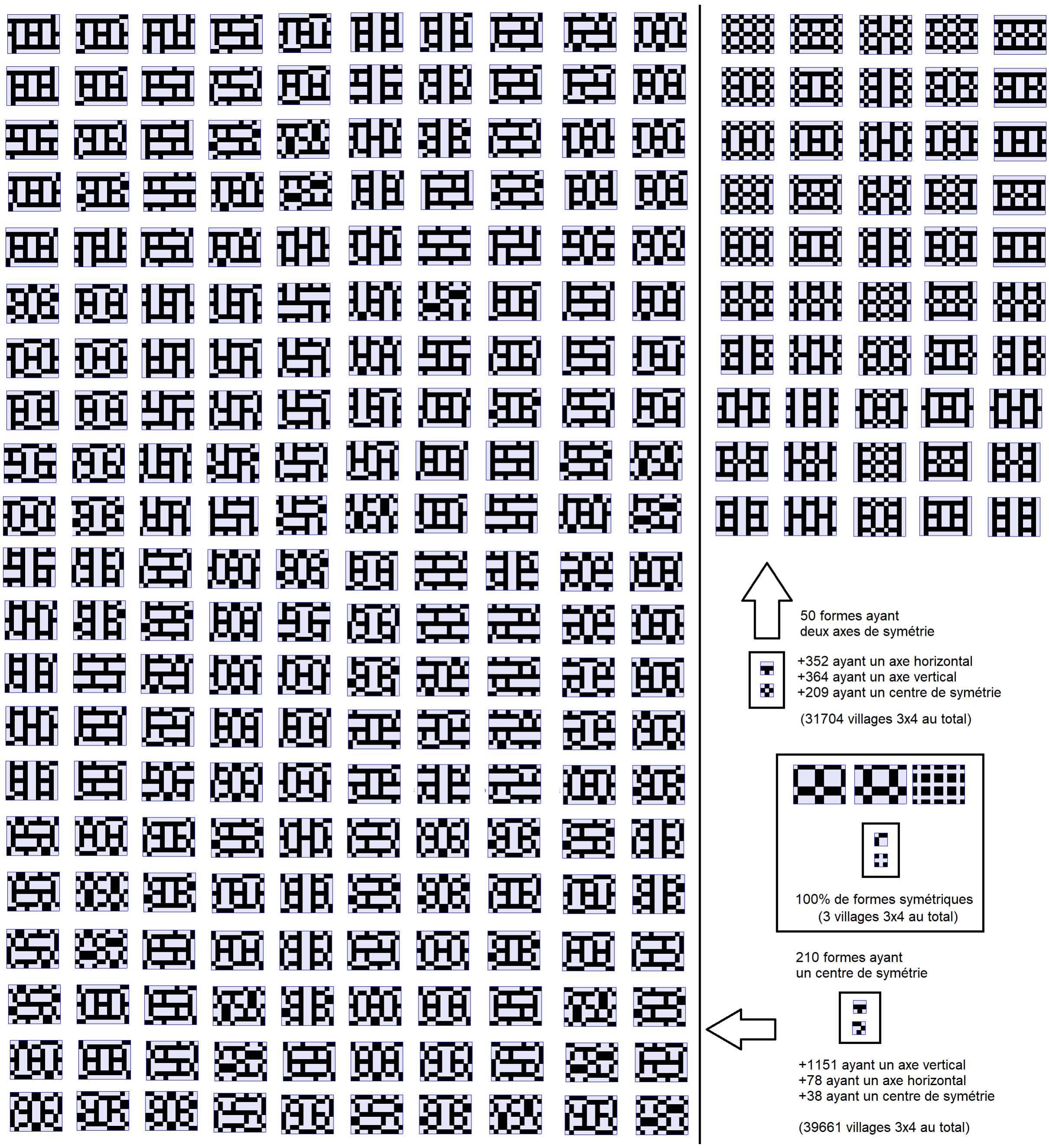

FIGURE 4.55 – *Les 300 duos possibles ayant été testés sur leurs capacité combinatoire à constituer des villages* 3×4 *symétriques : le duo Vieil Homme-Chapeau 1 est celui qui totalise le nombre maximum de formes* (39 661)*, de formes ayant un axe vertical* (1 151)*, de formes ayant un centre* (210*, représentées à gauche) ; le duo Fleur-Chapeau 1 est celui qui totalise le nombre maximum de formes ayant un axe horizontal* (352) *et de formes ayant deux axes* (50*, représentées à droite) ; le duo Soleil-Fantôme est un de ceux qui totalise* 100% *de formes symétriques mais il n'en réalise que 3.*

Pourquoi pas de villages circulaires ?

Je me suis longtemps demandé pourquoi je ne trouvais pas de villages circulaires, notamment des villages 1×24. Je souhaitais pouvoir réaliser un pavage avec des villages rectangulaires dont les côtés opposés puissent s'assembler. Je n'étais jamais loin mais aucun n'a été trouvé malgré les heures passées par mes programmes pour égrainer les combinaisons possibles. Je finis par me persuader plus ou moins de cette conjecture : aucun village circulaire n'est possible avec les vingt-quatre pièces. Mais je restais sur ma faim. Il me fallait un argument imparable et je ne le saisissais pas. À force de manipuler les pièces manuellement, je finis par isoler le groupe des neuf pièces responsables de cette impossibilité.

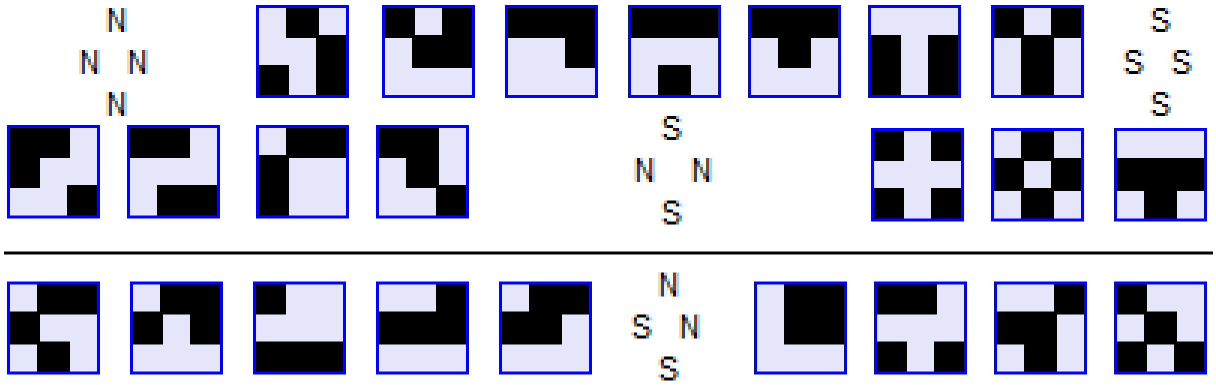

FIGURE 4.56 – *Les pièces du haut conservent la symétrie des bords : en face d'un bord symétrique se trouve un bord symétrique, en face d'un non-symétrique se trouve un non-symétrique. Les 9 pièces du bas inversent la symétrie : en face d'un bord symétrique se trouve un bord non-symétrique.*

Les vingt-quatre pièces ne sont pas toutes égales en terme de symétrie de leurs bords opposés. Rappelons que parmi les six types de bord, quatre sont symétriques (notés 0, 2, 5 et 7 pour traduire les écritures binaires 000, 010, 101 et 111) et deux ne le sont pas (1/4 et 3/6 soit 001/100 et 011/110). J'avais déjà identifié ces différents types en examinant les complémentaires afin de réaliser des assemblages : les bords symétriques sont ceux qui ont un code binaire palindrome alors que les non-symétriques n'ont pas de code binaire palindrome. Ainsi, certaines pièces conservent la symétrie dans un assemblage rectiligne car ses bords opposés sont du même type (trois types de pièces conservent la symétrie, ils sont représentés dans la partie haute de l'image). Au contraire, certaines autres pièces ne la conserve pas et leur présence dans l'alignement transforme un bord symétrique en un bord non-symétrique et inversement. Il n'existe pas de pièce conservant la symétrie dans le sens horizontal et l'inversant dans le sens vertical, ce qui simplifie grandement l'analyse du problème.
On peut donc prédire, par ce simple argument de symétrie, la possibilité ou l'impossibilité, pour les villages 1×24 d'être circulaires ou pas. Un village circulaire devant avoir ses extrémités identiques, celles-ci seront nécessairement du même type (symétrique-symétrie ou bien non-symétrique-non-symétrique), or cela n'est possible que si on aligne un nombre pair de pièces transformant la symétrie : la symétrie est inversée puis restituée si on dispose deux pièces de cette nature dans un alignement. Le jeu Promino contenant neuf pièces inversant la symétrie et neuf étant un nombre impair, il n'est pas possible d'en aligner les pièces pour former un village circulaire. S'il commence sur un bord symétrique, il se finira nécessairement par un bord non-symétrique, ruinant la possibilité d'en accoler deux identiques pour réaliser un pavage du plan.
Le même raisonnement s'applique aux villages 4×6 ou 3×8 ou 2×12 : si on veut pouvoir accoler le bord gauche d'un de ces villages avec son bord droit, il faut, sur chaque ligne, avoir un nombre pair de pièces inversant la symétrie et cela est impossible car elles sont en nombre impair. Cet argument est imparable et totalement satisfaisant. J'aurai pu faire tourner pendant des mois mes programmes, je n'aurai pas davantage trouvé de villages circulaires, capables de paver le plan (c'était mon but initial). La multiplicité immense des combinaisons me laissait croire que ce serait éventuellement possible, le raisonnement mathématique a emporté l'adhésion bien plus efficacement que l'épuisement combinatoire ne l'aurait fait.