Manuel du Soma

1. Les Problèmes

Le jeu « Soma » est constitué de sept pièces (voir illustration) qui sont des assemblages de trois ou quatre petits cubes identiques ; en fait, tous les assemblages que l'on peut imaginer qui ne soient pas convexes (on élimine trois ou quatre cubes alignés et aussi le carré de quatre cubes).

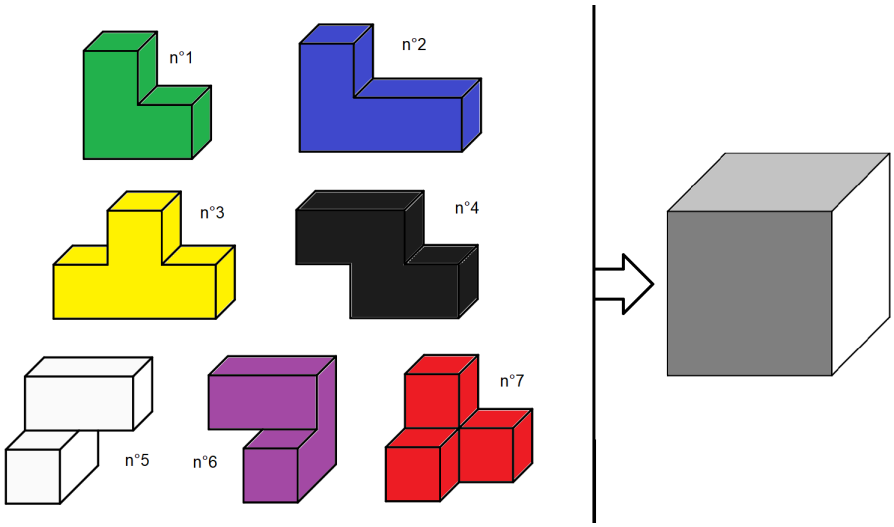

FIGURE 9.1 – Les sept pièces du Soma et le grand cube qu'elles reconstituent ; les chiffres et les couleurs codent chacune des pièces (une solution du cube est donnée à la fin de ce manuel)

a. Soma incomplet

Dans cette partie figurent des assemblages du Soma incomplet, c'est-à-dire réalisés avec moins de sept pièces. On peut penser que ces problèmes sont moins difficiles qu'avec les sept pièces et donc qu'ils conviennent à des débutants. Certains trouveront pourtant des difficultés à les résoudre car il n'est pas habituel de raisonner avec ce type de formes dans l'espace et, les problèmes étant donnés sous la forme de deux représentations en perspectives pour lesquelles l'objet à reconstituer est vu par devant et derrière, après une rotation d'un demi-tour autour d'un axe vertical, on se fait une idée parfois erronée de cet objet.

Les problèmes proposés ont été trouvés par programme (lire l'article dans « Les duos du Tangram et autres problèmes » - chapitre 9 : Soma) ; ils ont généralement un élément de symétrie qui les distingue dans la collection gigantesque collectée. Leur solution n'est sans doute pas unique, celle proposée dans la partie Solution a été trouvée manuellement. La notation chiffrée des pièces et leurs couleurs apparaissant dans les solutions sont données par la figure précédente.

Assemblages de trois pièces

Pour ces assemblages très symétriques de trois pièces, il convient de choisir les pièces à utiliser. Plusieurs combinaisons sont possibles, essayer de les trouver toutes. La sélection porte sur des formes n'ayant pas plus de huit alias, ce qui dénote leur symétrie. Une forme quelconque réalisée avec les pièces du jeu peut se présenter sous 24 alias qui sont les différentes vues que l'on pourrait donner d'elle en les tournant d'un, deux ou trois quart-de-tour autour d'une des trois directions des arêtes. Notez qu'en tenant compte des images dans un miroir un assemblage quelconque peut avoir jusqu'à 48 alias. Mais ici les images dans un miroir ne sont pas considérées.

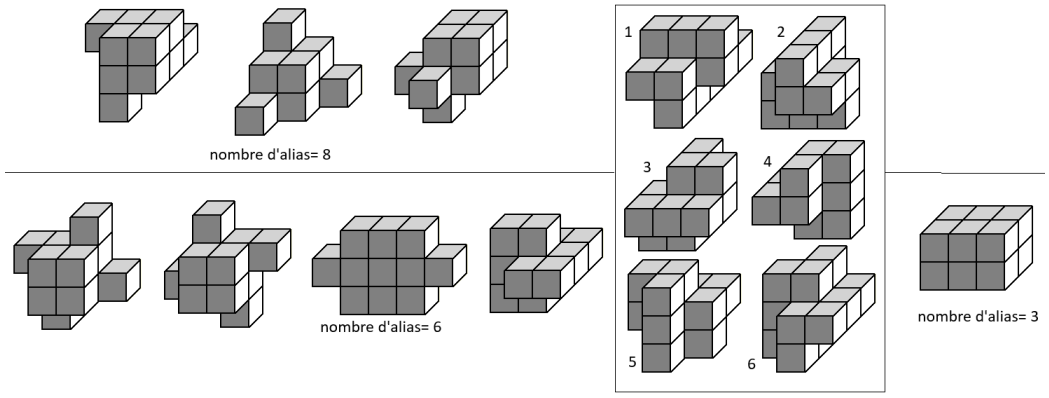

FIGURE 9.2 – Les neuf agrégats de trois pièces ayant uniquement 3, 6 ou 8 alias (solutions dans la partie 2). L'agrégat encadré, représenté sous ses six alias, recèle un trou en son centre.

Assemblages de quatre pièces

Afin de se faire une meilleure idée de la forme à réaliser, les problèmes suivants sont donnés à l'aide de deux représentations, deux vues obtenues par une rotation d'un quart ou d'un demi-tour autour de l'axe vertical. Parfois ces deux représentations semblent insuffisantes, notamment si un trou caché se dissimule à l'intérieur de la forme. La considération des indications données (pièces utilisées, élément de symétrie) devrait cependant toujours suffire à une bonne interprétation des formes.

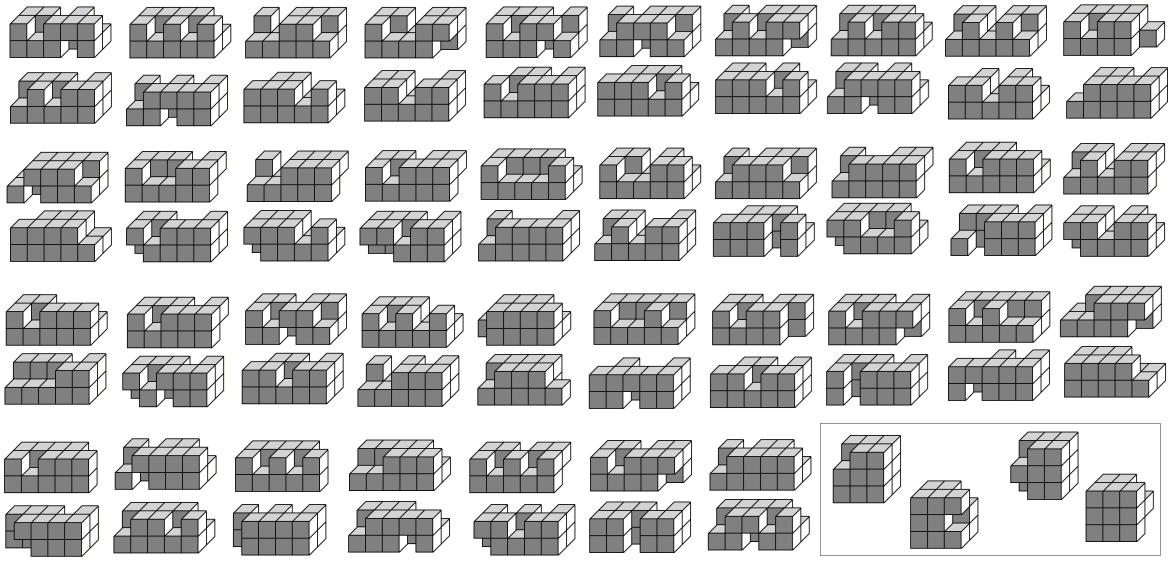

FIGURE 9.3 – Les trente-sept agrégats réalisables avec les pièces 4, 5, 6 et 7 qui tiennent dans une boîte de format $2 \times 2 \times 5$ et, encadrés, les deux seuls agrégats des mêmes pièces entrant dans une boîte de format $2 \times 3 \times 3$. Chaque forme a été représentée deux fois : la forme du bas est obtenue après rotation de celle du haut d'un demi-tour.

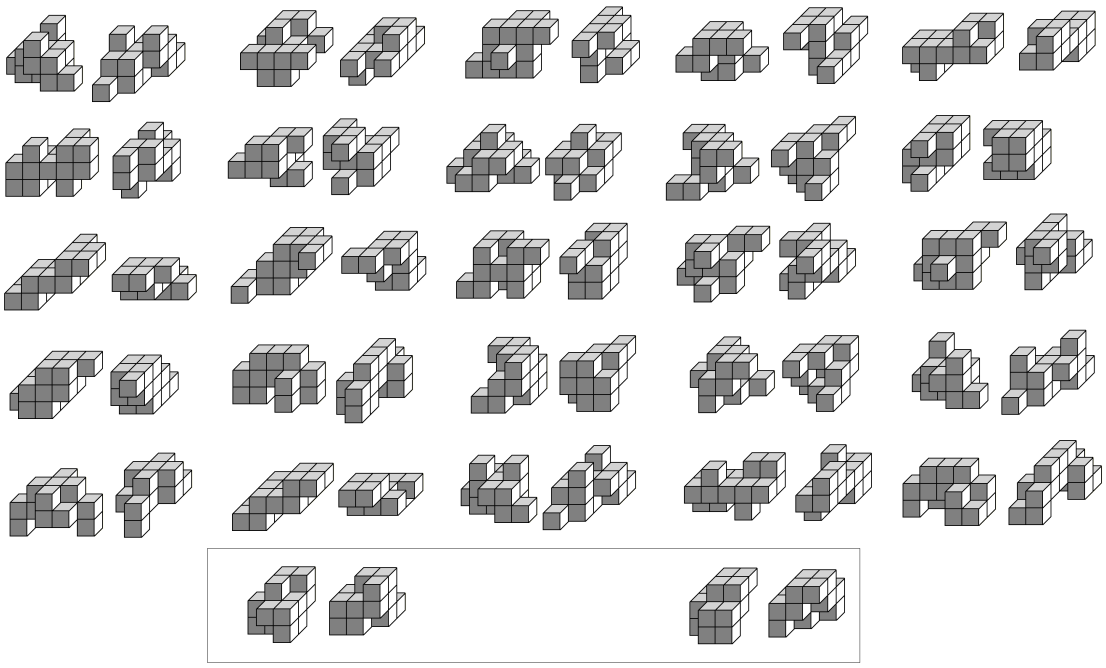

FIGURE 9.4 – Les vingt-cinq agrégats réalisables avec les pièces 4, 5, 6 et 7 qui présentent un élément de symétrie limitant leurs alias au nombre de 12 et, encadrés, les deux seuls agrégats des mêmes pièces présentant un élément de symétrie limitant leurs alias au nombre de 8. Chaque forme a été représentée deux fois : la forme de droite est obtenue après rotation de celle de gauche d'un quart-de-tour.

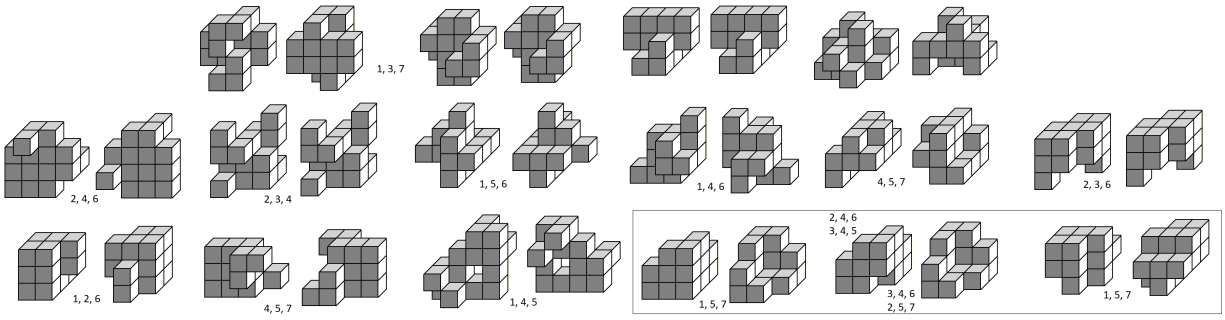

FIGURE 9.5 – Formes de quatre pièces entrant dans un bloc $3 \times 4 \times 4$ et présentant au moins un élément de symétrie (12 alias ou seulement 8 pour les trois encadrées). Pour celles de la ligne du haut, il manque les pièces 1, 3 et 7 ; pour les autres les chiffres des pièces manquantes sont également indiqués. Toutes sont représentées deux fois, tournées d'un demi-tour.

Assemblages de cinq et six pièces

La spécialisation des formes présentées – quasiment toutes les formes qui suivent entrent dans un bloc parallélépipédique de dimension $3 \times 4 \times 4$ – permet d'en limiter le nombre lors de leur génération par programme. Ce choix offre une grande variété de formes qui, par leur compacité, dissimulent mieux la disposition des pièces.

Ne présenter que les formes possédant un élément de symétrie accentue leur intérêt et en simplifie la mémorisation perceptive et spatiale nécessaire à la résolution des problèmes.

b. Soma complet

Les formes rassemblées dans les figures 8 à 11 utilisent les sept pièces du jeu. Mis à part les exceptions de la figure 8, toutes entrent dans un bloc $3 \times 4 \times 4$ sur lequel s'est concentré le processus de génération. Les formes, affichées seulement sous deux angles de vue, sont alors plus facilement perceptibles.

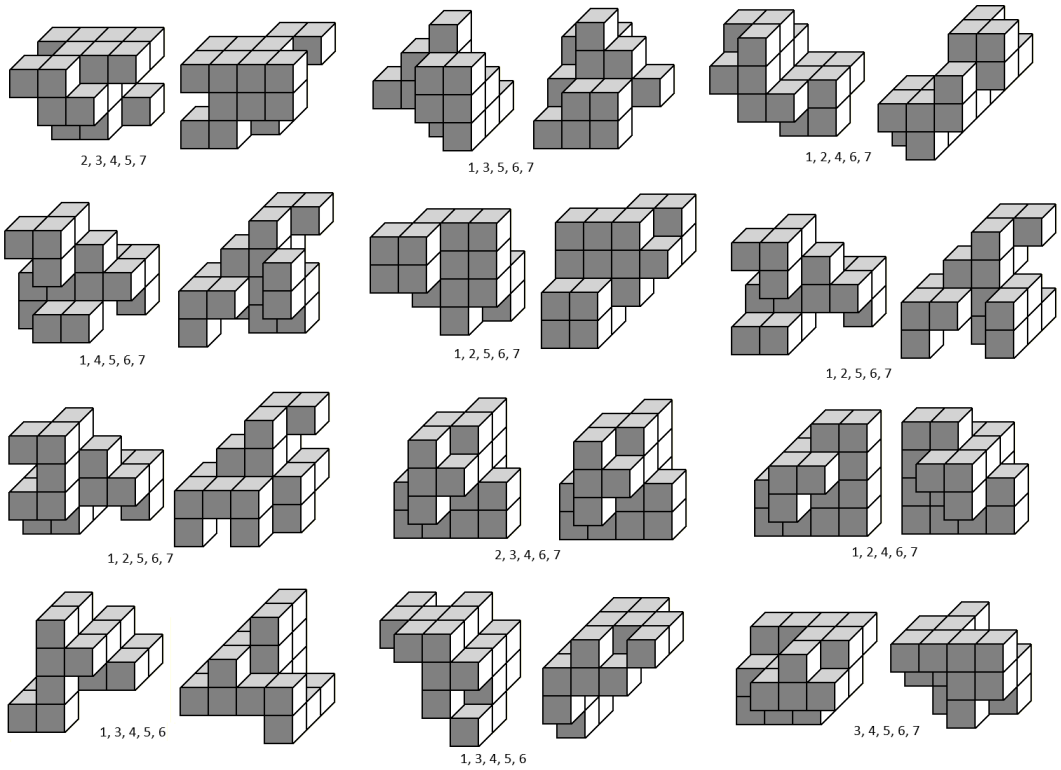

FIGURE 9.6 – Formes de cinq pièces entrant dans un bloc $3 \times 4 \times 4$ et présentant un élément de symétrie (12 alias). Les pièces utilisées sont indiquées ; formes représentées deux fois tournées d'un demi-tour.

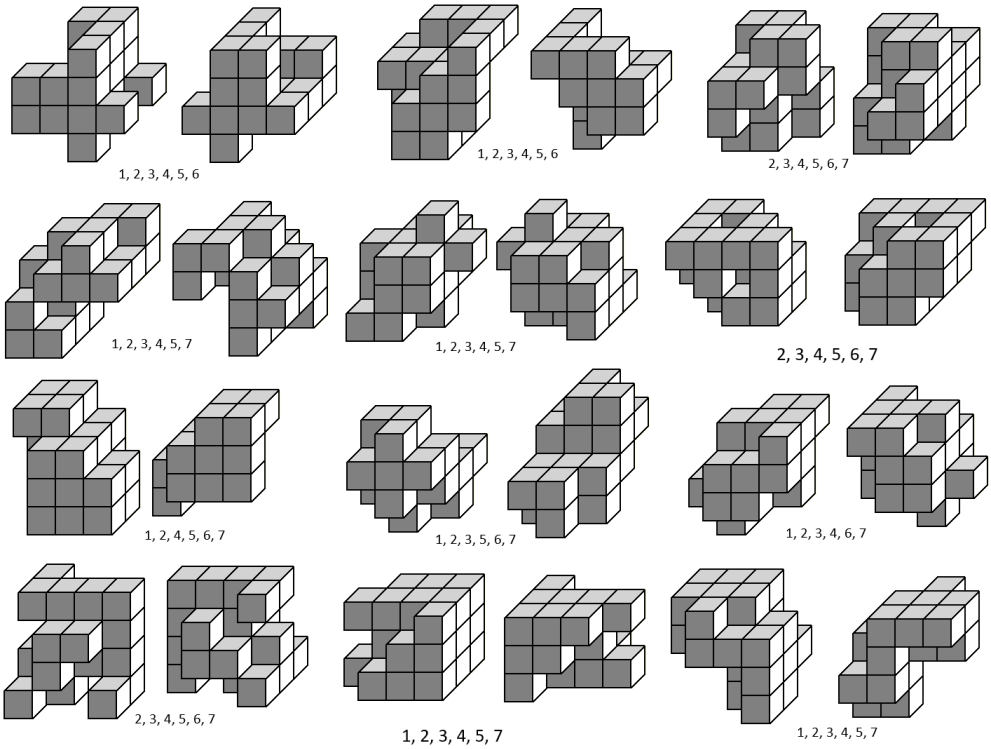

FIGURE 9.7 – Formes de six pièces entrant dans un bloc $3 \times 4 \times 4$ et présentant un élément de symétrie (12 alias). Les pièces utilisées sont indiquées ; formes représentées deux fois tournées d'un demi-tour.

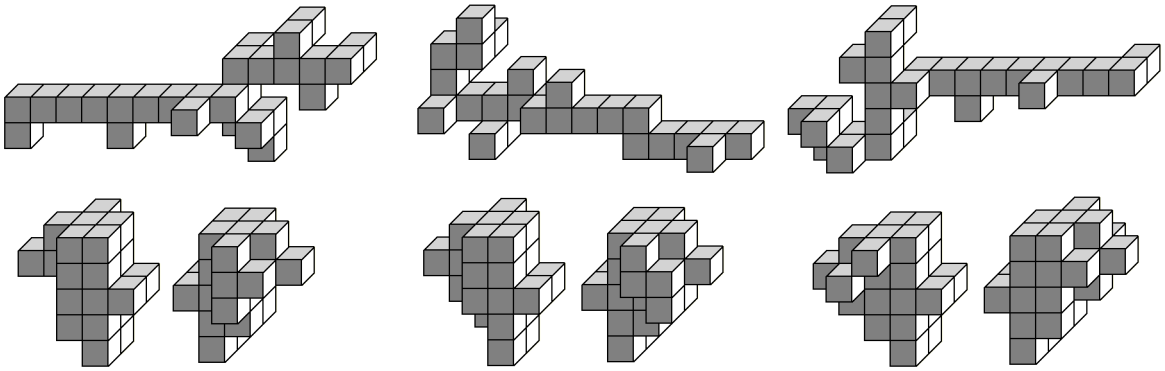

FIGURE 9.8 – Six agrégats de sept pièces obtenus parmi plus de cent millions générés primitivement (sans limite de bloc) : trois issus du bloc $4 \times 5 \times 13$, le plus étendu (en haut) et trois issus du bloc plus compact $3 \times 5 \times 5$ (en bas, formes représentées deux fois tournées d'un demi-tour).

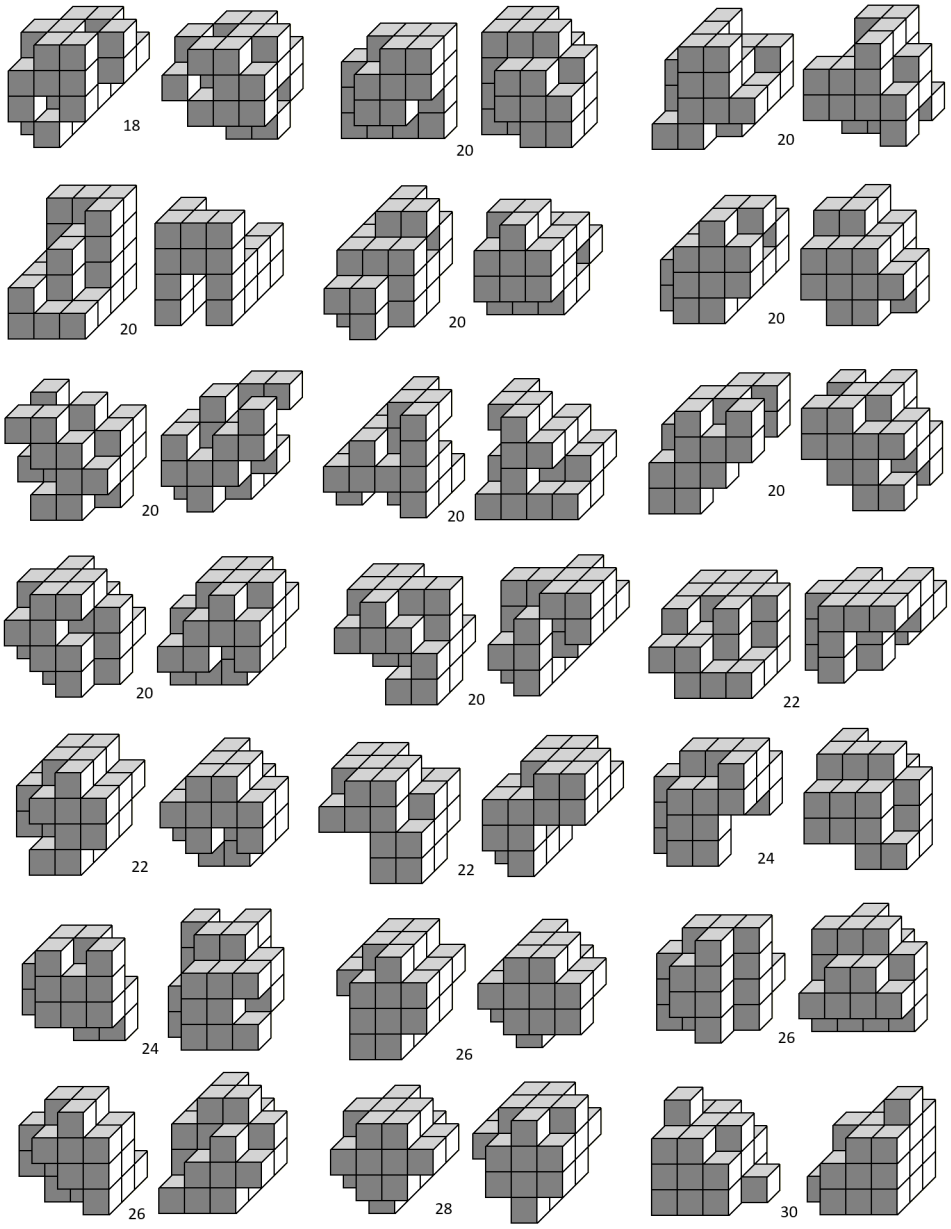

FIGURE 9.9 – Premières formes de sept pièces entrant dans un bloc $3 \times 4 \times 4$ et présentant un élément de symétrie. Les formes sont représentées deux fois tournées d'un demi-tour et sont classées selon le nombre croissant de liens entre les faces (entre 18 et 30).

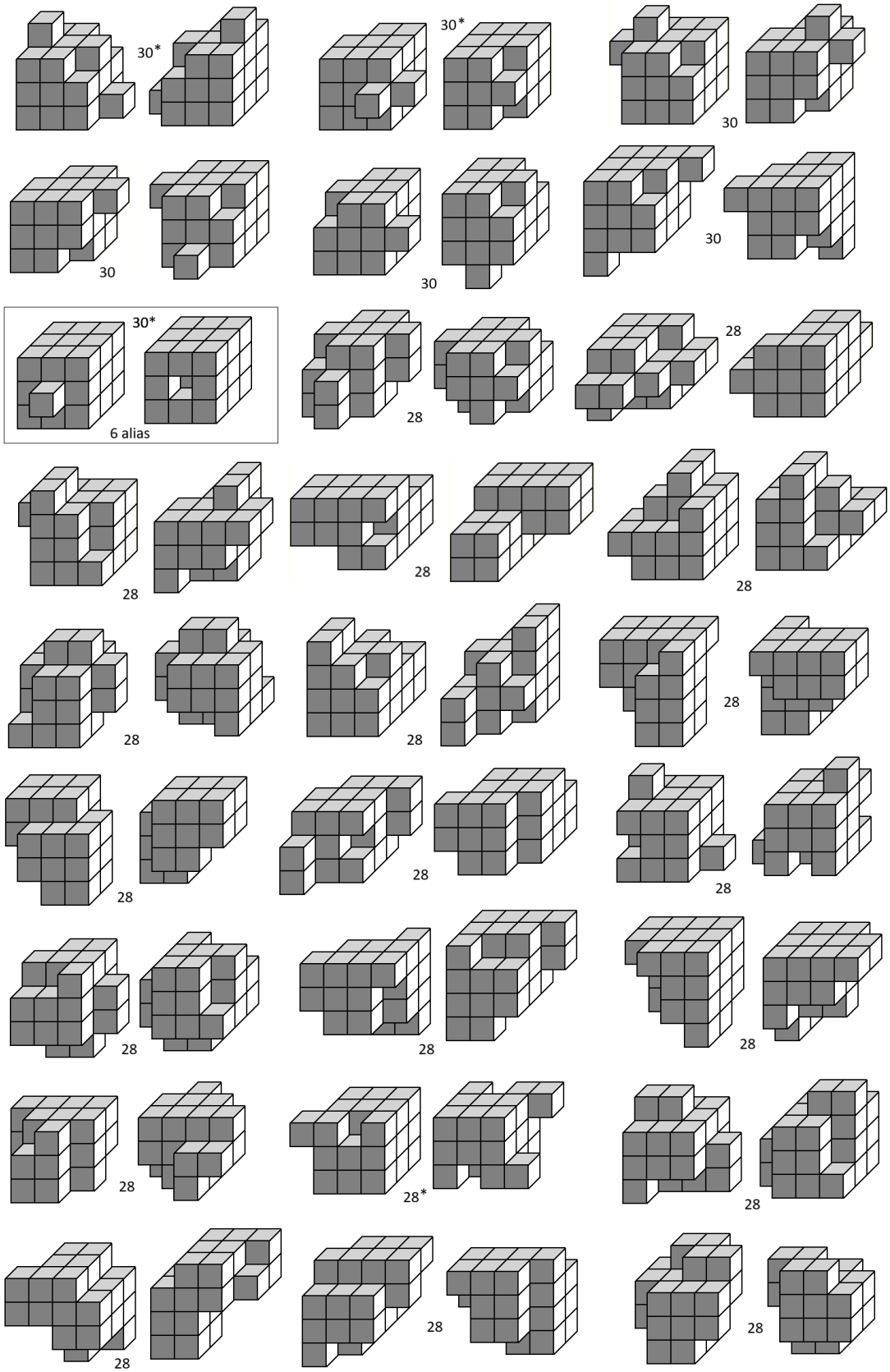

FIGURE 9.10 – Formes de sept pièces entrant dans un bloc $3 \times 4 \times 4$, présentant un élément de symétrie (avec une étoile : présence d'un plan de symétrie) et dont le nombre de liens entre les faces est le plus élevé (28 et 30). Les formes sont représentées deux fois tournées d'un demi-tour.

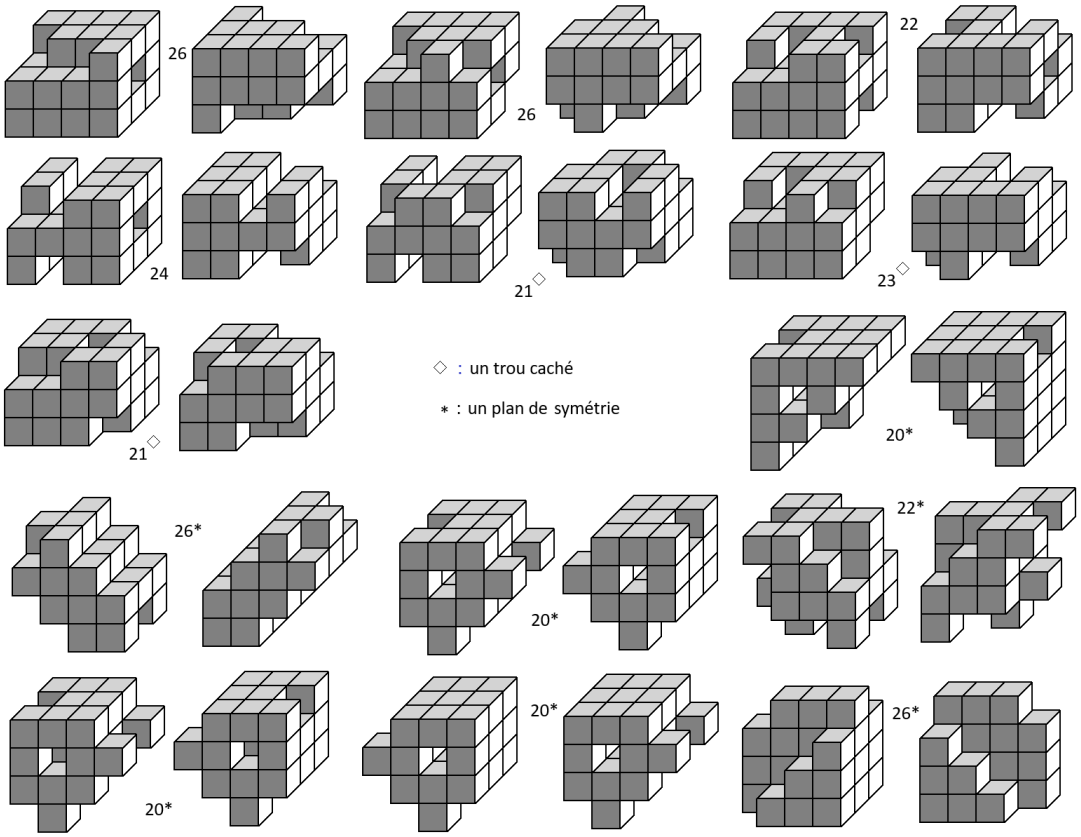

FIGURE 9.11 – En haut : formes de sept pièces non présentes dans la sélection précédente entrant dans un bloc $3 \times 3 \times 4$ et présentant un élément de symétrie. En bas, avec une étoile : présence d'un plan de symétrie.

2. Les Solutions

Les solutions sont souvent multiples : en utilisant les même pièces mais disposées autrement, il est possible de reconstituer une même forme. Cela a été montré par exemple que le cube peut se reconstituer de 240 façons différentes, aucune rotation ou inversion dans un miroir ne permettant de passer de l'une à l'autre.

a. Soma incomplet

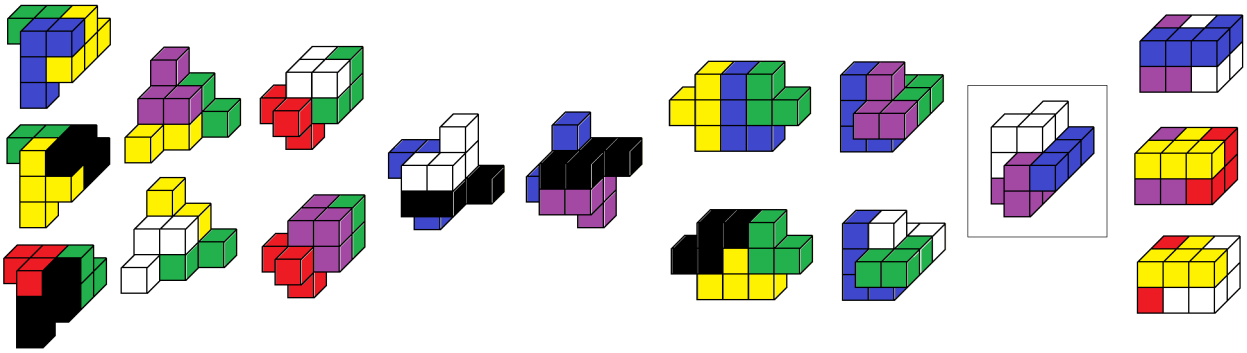

FIGURE 9.12 – Solution de la figure 2 : les neuf agrégats de trois pièces ayant uniquement 3, 6 ou 8 alias. Certains ont plusieurs solutions. L'agrégat encadré recèle un trou.

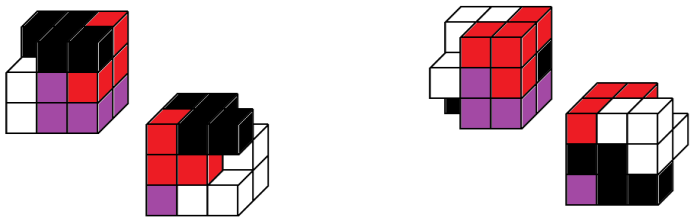

FIGURE 9.13 – Solution de la figure 3 : les deux seuls agrégats réalisables avec les pièces 4, 5, 6 et 7 qui tiennent dans une boîte de format $2 \times 3 \times 3$.

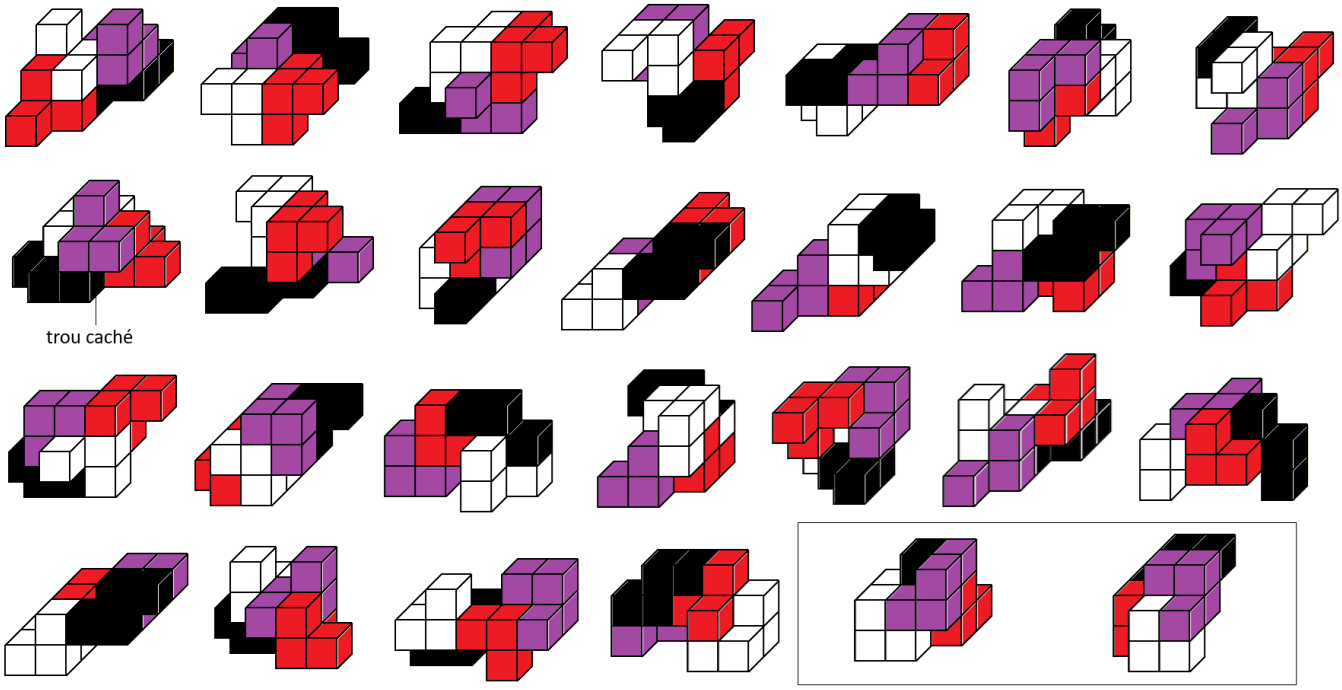

FIGURE 9.14 – Solution de la figure 4 : les vingt-cinq agrégats réalisables avec les pièces 4, 5, 6 et 7 qui présentent un élément de symétrie limitant leurs alias au nombre de 12 (8 pour les encadrés).

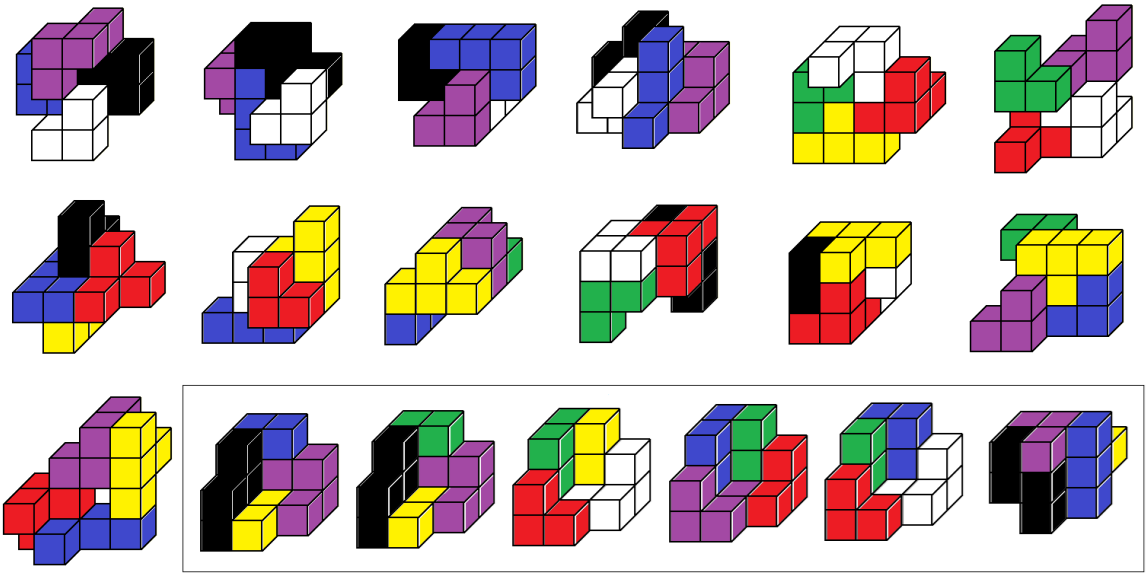

FIGURE 9.15 – Solution de la figure 5 : formes de quatre pièces entrant dans un bloc $3 \times 4 \times 4$ et présentant au moins un élément de symétrie (12 alias ou seulement 8 pour les encadrées).

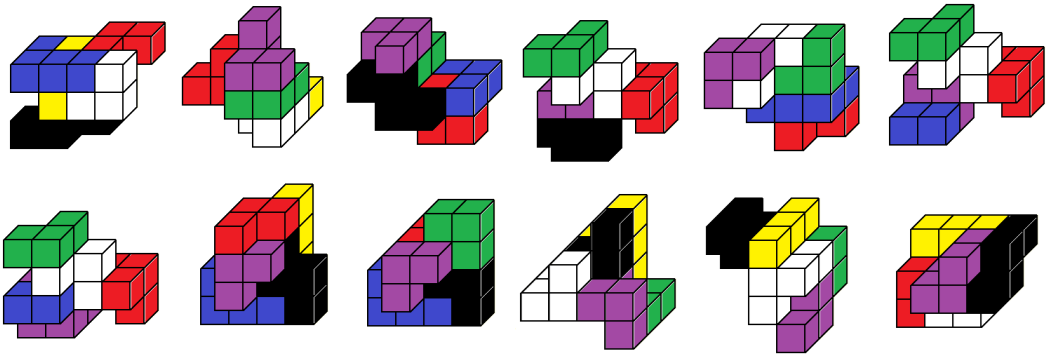

FIGURE 9.16 – Solution de la figure 6 : formes de cinq pièces entrant dans un bloc $3\times4\times4$ et présentant un élément de symétrie (12 alias).

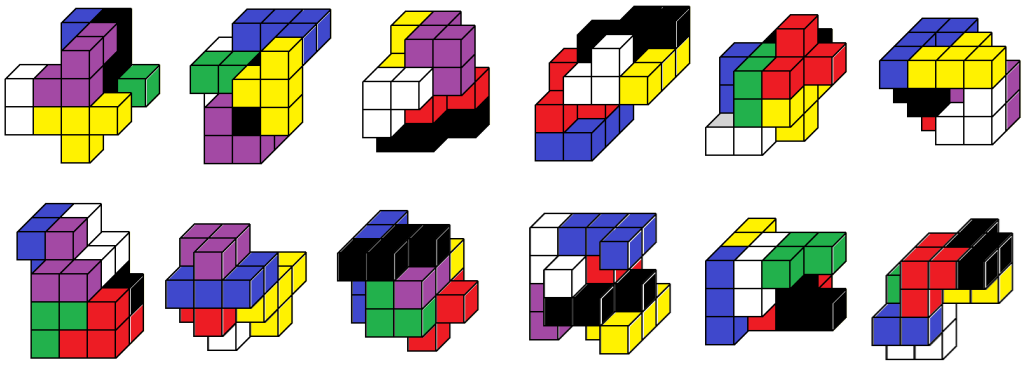

FIGURE 9.17 – Solution de la figure 7 : formes de six pièces entrant dans un bloc $3\times4\times4$ et présentant un élément de symétrie (12 alias).

b. Soma complet

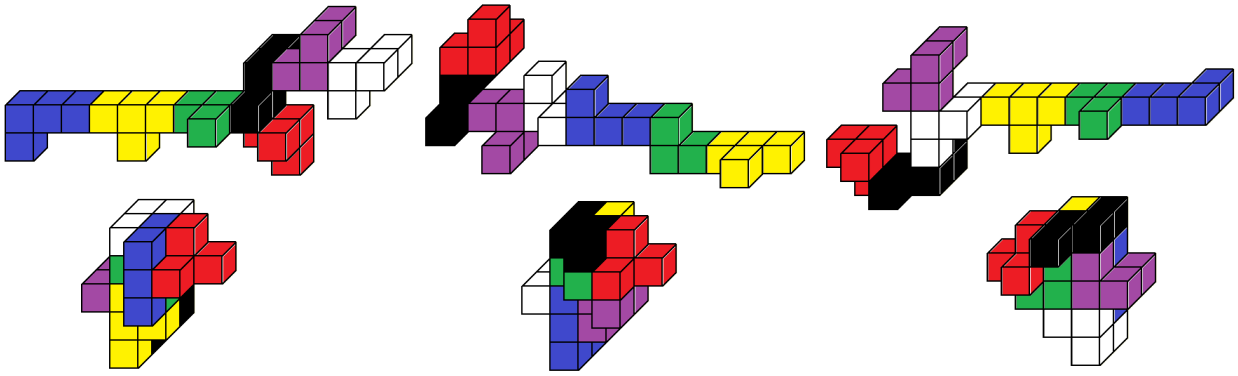

FIGURE 9.18 – Solution de la figure 8 : six agrégats de sept pièces : trois issus du bloc $4\times5\times13$, le plus étendu et trois issus du bloc plus compact $3\times5\times5$.

Appel à témoin : ce manuel liste quelques problèmes de Soma créés lors de mes tentatives non abouties de génération de l'ensemble des formes réalisables. Je me suis évertué à en chercher les solutions, notamment pour valider ces figures mais aussi pour rassurer d'éventuels utilisateurs. Cependant quelques-uns de ces problèmes me résistent ce qui m'amène à suspecter une erreur dans mes programmes ce qui serait catastrophique (à mon humble échelle) : la figure 9 montre ainsi les premières formes symétriques trouvées et comme je n'ai pas de solution pour certaines d'entre elles, je sollicite les meilleurs d'entre vous pour m'en apporter. En notant ces figures 11, 12, 13, 21, 22, ... (ligne :1er chiffre, colonne : 2e chiffre), j'ai pour l'instant une solution pour 21, 72 et 73 uniquement.

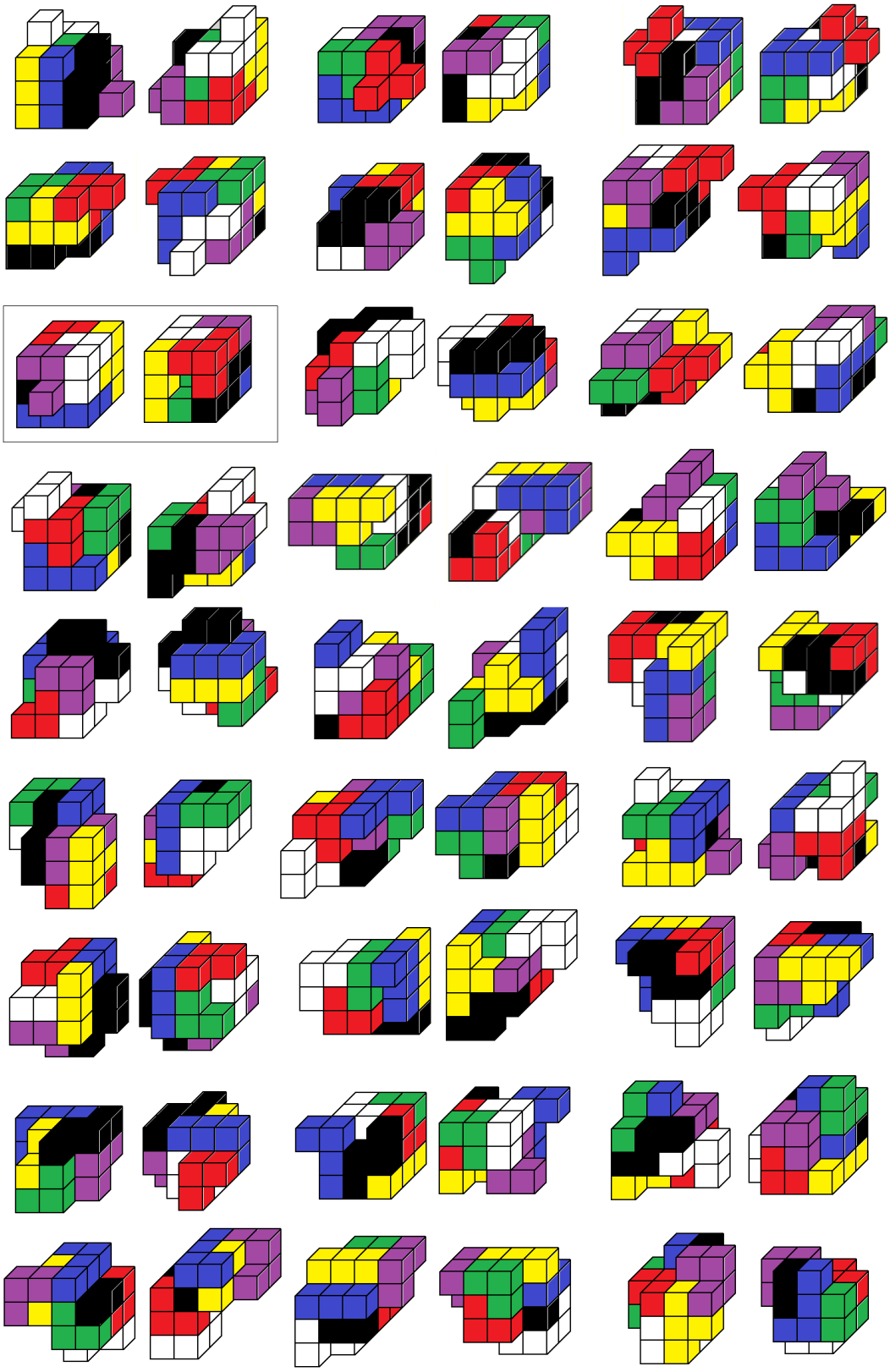

FIGURE 9.19 – Solution de la figure 10 : formes réalisées avec les 7 pièces présentant un élément de symétrie et un nombre de connexions maximum (28 ou 30).

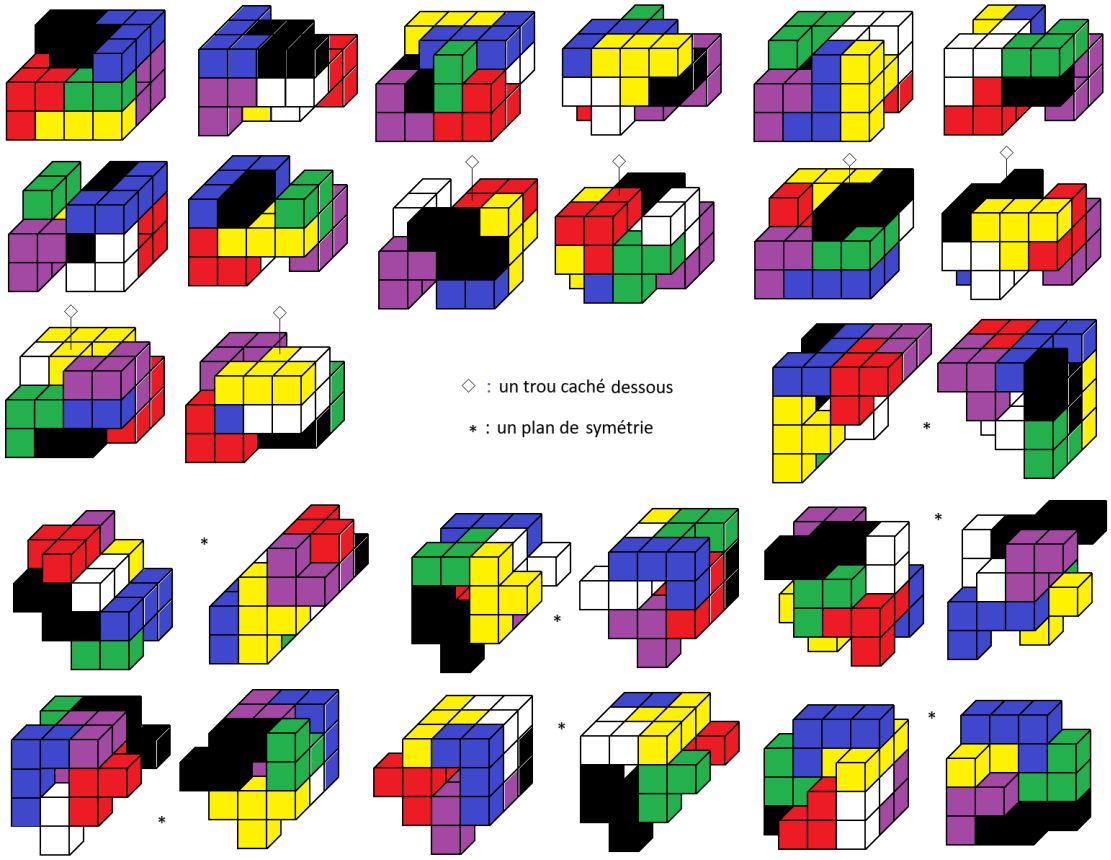

FIGURE 9.20 – Solution de la figure 11 : formes réalisées avec les 7 pièces dont le nombre de connexions est inférieur à 28 présentant un élément de symétrie et entrant dans un bloc $3 \times 3 \times 4$ (en haut) ou présentant un plan de symétrie et entrant dans un bloc $3 \times 4 \times 4$ (en bas).

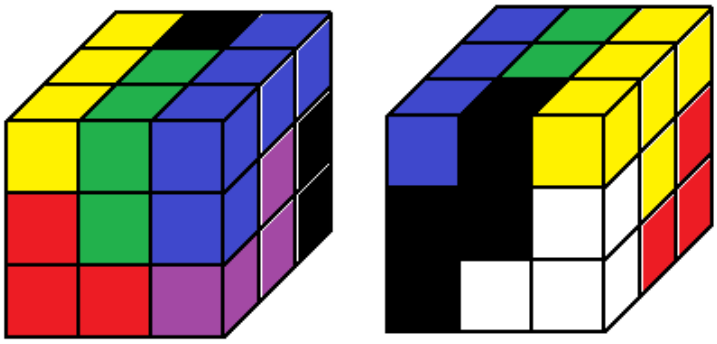

FIGURE 9.21 – Solution de la figure 1 : une des 240 solutions du cube Soma

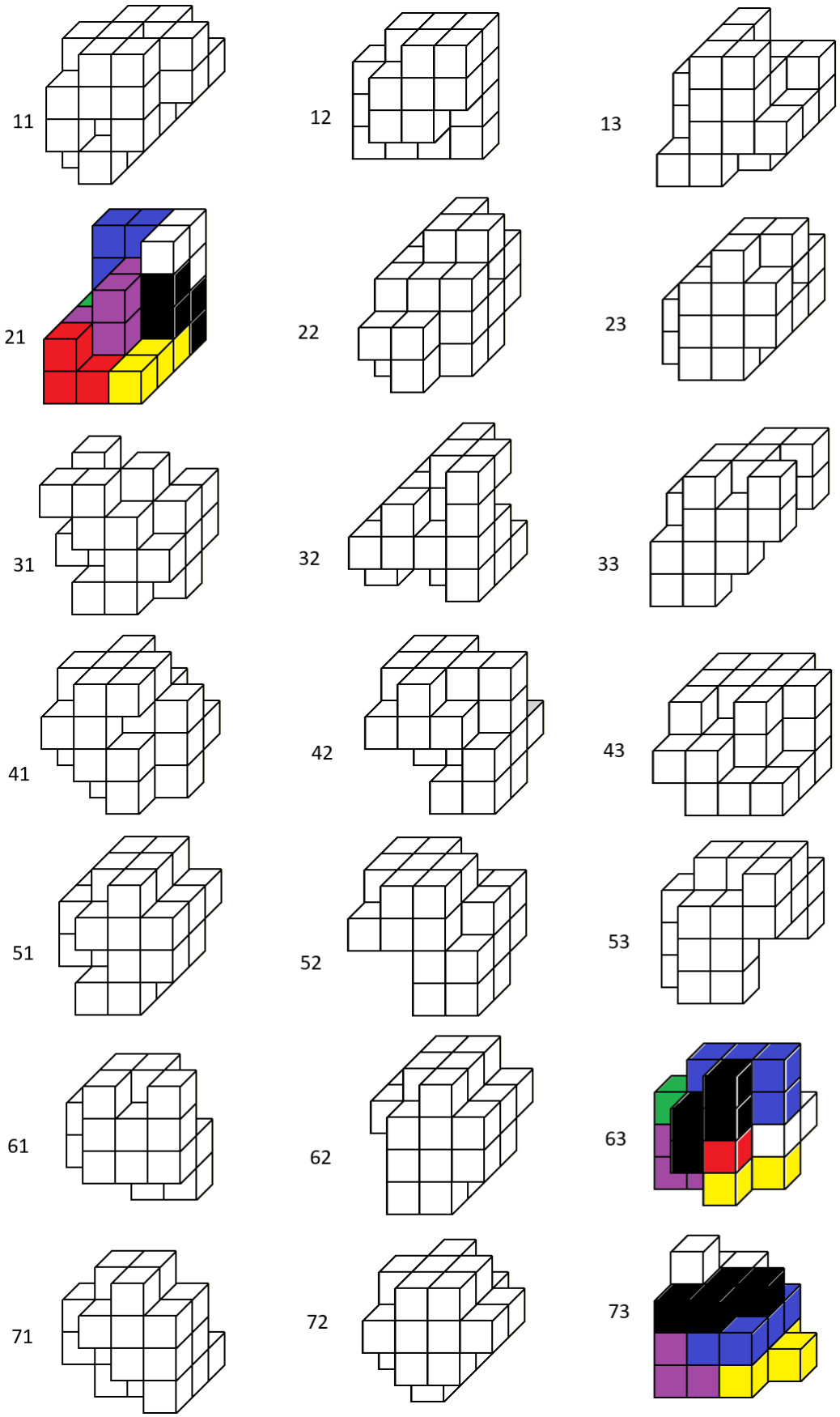

FIGURE 9.22 – Solution à construire et colorier de la figure 9 : formes entrant dans un bloc $3 \times 4 \times 4$ et présentant un élément de symétrie. Merci pour votre collaboration !