5 Klotski

La matière travaillée et et les pensées de l'artisan se modifient simultanément dans une progression constante, jusqu'à ce que la pensée de l'homme soit au repos et le produit achevé. (Robert M.Pirsig (1974) « Traité du zen et de l'entretien des motocyclettes », ed. du Seuil, coll. Points Aventure, p.319)

L'Âne Rouge, aussi appelé *klotski*, semble être un jeu d'origine thaïlandaise, c'est du moins ce qu'on lit un peu partout sur le net où il reçoit le nom d'un prisonnier qui chercherait à s'évader « Khun chang khun phaen ». C'est un casse-tête de déplacement proche du taquin[1]. Á la suite du succès du puzzle 15, L. W. Hardy enregistre par copyright aux États-Unis les puzzles « Dad's puzzler » (en 1909) et « Pennant puzzle » (en 1912) qui introduisent les rectangles 1×2. Par la suite, J. H. Fleming dépose un copyright en 1934 pour l'âne rouge, mais ce puzzle est connu un peu partout à cette époque sous différents noms : « klotski » en Pologne (du polonais *klocki* signifiant pièces en bois), « Hua rong dao » en Chine, « Hakoiri musume » au Japon (ce qui signifie textuellement *fille enfermée dans une boîte*, dans l'idée de la protéger) et « Forget-me-not » ou « Donkey » en anglais. Ce jeu assez populaire et mondialement répandu est désormais disponible en version numérique sur internet et sur les plateformes de jeu mais aussi sous forme de jeu électronique indépendant. Il est d'ailleurs maintenant décliné avec de multiples variantes, généralement beaucoup plus faciles même si parfois elles paraissent complexes : meubles à déménager, véhicules à extraire de parking inextricables.

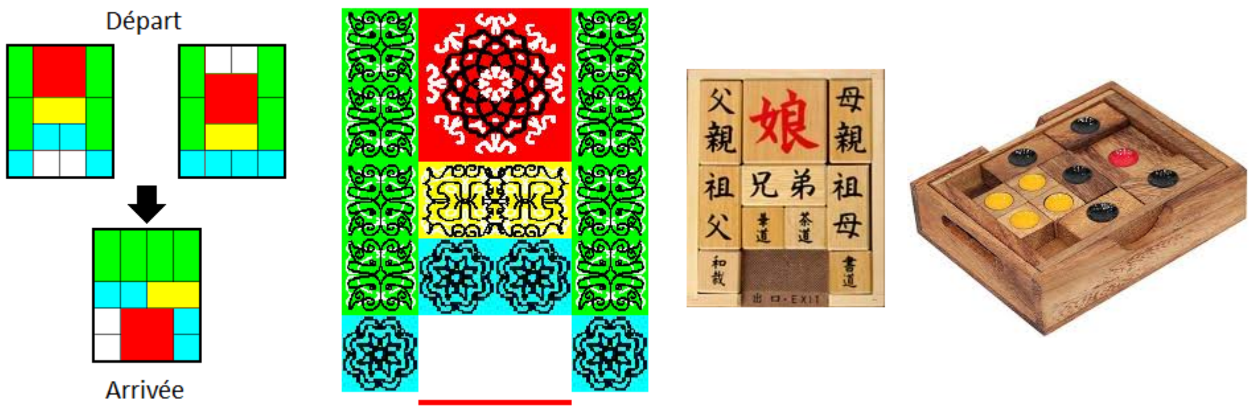


FIGURE 5.1 – *Les dix pièces du jeu de l'âne rouge (klotski) dans la configuration initiale (départ : l'âne rouge est au centre du bord supérieur entouré des 5 pièces rectangulaires, les 4 petites pièces carrées étant en-dessous) et dans une des configurations finales possibles (arrivée : l'âne rouge doit être au centre du bord inférieur). La version de départ à droite explique peut-être que ce jeu porte le nom d'un âne. Au centre, une version esthétique du jeu pour l'ordinateur, à droite la version japonaise où la fille est bien gardée et une version classique plus pratique.*

1. Le Taquin est un jeu popularisé par Sam LLoyd en 1878 qui proposa ce casse-tête de déplacement constitué de quinze cases carrées se déplaçant sur une surface carrée de 16 cases. Ce jeu fut d'abord appelé *puzzle quinze* car les nombres de 1 à 15 étaient écrits sur les pièces, le but du jeu étant de remettre les nombres dans l'ordre. Dans la position initiale, Loyd avait inversé les pièces 14 et 15, ce qui rendait impossible la remise en ordre. Loyd était un peu taquin...

Règle du jeu : Dans la version originale, le jeu est composé de quatre pièces carrées (recouvrant une unité de surface que l'on appellera *case* par la suite), cinq pièces rectangulaires de deux cases et une pièce carrée de quatre cases appelée « âne rouge ». Ces dix pièces sont disposées sur une surface rectangulaire de vingt cases, soit cinq cases verticalement sur quatre horizontalement (la figure ci-dessous montre le plateau avec les pièces dans leur disposition initiale). Le joueur n'est pas autorisé à enlever une pièce ; il peut uniquement faire glisser les pièces horizontalement ou verticalement. Comme celles-ci n'occupent que dix-huit cases, il reste deux cases vides qui permettent d'effectuer les déplacements.
Initialement, l'âne rouge est en haut flanqué de quatre gardes verticaux sur ses côtés et un garde horizontal en-dessous ; les quatre gardes carrés – les pièces les plus mobiles – sont tout en bas, à côté des cases vides. Le but du jeu est d'amener, par des glissements successifs des pièces, l'âne rouge dans la position centrale inférieure. Faire traverser tout le plateau de jeu à cette grande pièce n'est déjà pas évident, mais on peut accroître encore la difficulté en cherchant à résoudre ce problème en un nombre minimal de coups.

FIGURE 5.2 – *Deux jeux de l'âne rouge fabriqués par mes soins. Celui de gauche est en contreplaqué avec de petites poignées de manutention, celui de droite est réalisé avec des carreaux de céramique collés des deux côtés de rectangles en carton. Les pièces sont plus lourdes et glissent ainsi bien sur le support en carton.*

Quand je découvris ce jeu – en lisant l'article *Calculs et coulissements* de Jean-Paul Delahaye paru dans son livre de 2010 « Mathématiques pour le plaisir« où il est brièvement cité – je me mis à chercher une solution manuellement. Ce problème avait, d'après l'article, une solution minimale en 81 coups (j'appris par la suite que la première solution optimale en 81 coups fut publiée par Martin Gardner en 1964 dans Scientific American). J'avais réalisé pour cela le jeu dans du carton épais, pas très commode à utiliser, les pièces étant trop légères et trop peu épaisses se chevauchaient trop facilement. Rapidement je bricolais un jeu plus robuste en contreplaqué, avec des poignées pour déplacer les pièces. Malgré l'amélioration progressive de mon expérience de jeu que me procurait la qualité grandissante de mes réalisations, tous mes efforts pour réussir ce casse-tête étaient vains : je tournais en rond, mon âne rouge restant bloqué à une position proche de sa position initiale par des gardes qui se gênaient mutuellement et une absence de stratégie payante pour en neutraliser les inconvénients. Je me décourageais sensiblement et commençais à penser que ce jeu était impossible à résoudre.
Je me dis alors qu'en écrivant un programme je trouverai plus facilement une solution à ce problème si réellement il en existait. Naturellement, le plaisir du jeu et celui de la programmation ne sont pas de même nature mais j'étais d'autant plus motivé par la programmation que je cherchais à progresser dans ce domaine plutôt marginal pour un professeur de maths.

1. Résoudre le klotski

a. Encodage des pièces et du plateau

L'encodage du jeu est la première question qui se pose. Il y a toujours très certainement de multiples solutions, certaines plus astucieuses et d'autres plus techniques, l'un n'empêchant pas l'autre d'ailleurs, mais j'ai tendance à vouloir privilégier la simplicité : pas trop d'astuce et pas trop de technique, juste compréhensible et évidente avec un éventuel soucis d'optimisation quand il se présente. Je choisis donc d'encoder les cases du jeu avec les nombres de 1 à 20 : la 1^re^ ligne les cases sont numérotées de 1 (à gauche) à 5 (à droite), la 2^e^ ligne les cases sont numérotées de 6 à 10, etc. Pour ce qui est des pièces, j'opte pour les nommer avec des codes numériques de 0 à 4 : 0 pour l'âne rouge, 1 pour le rectangle horizontal, 2 pour chacun des rectangles verticaux, 3 pour chacun des petits carrés et 4 pour une case vide. Ainsi la composition du jeu est connue avec la liste `pt={0,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4}`. L'emplacement des pièces est enregistré en notant la case occupée par le coin du haut à gauche. Ainsi la configuration initiale est-elle codée par la liste `position={2,10,1,4,9,12,14,15,17,20,18,19}` qui indique que la pièce de rang `i` a son coin haut-gauche dans la case `position[i]` (par exemple, le rectangle horizontal qui est la pièce de rang `1` a son coin haut-gauche dans la case `position[1]=10`).

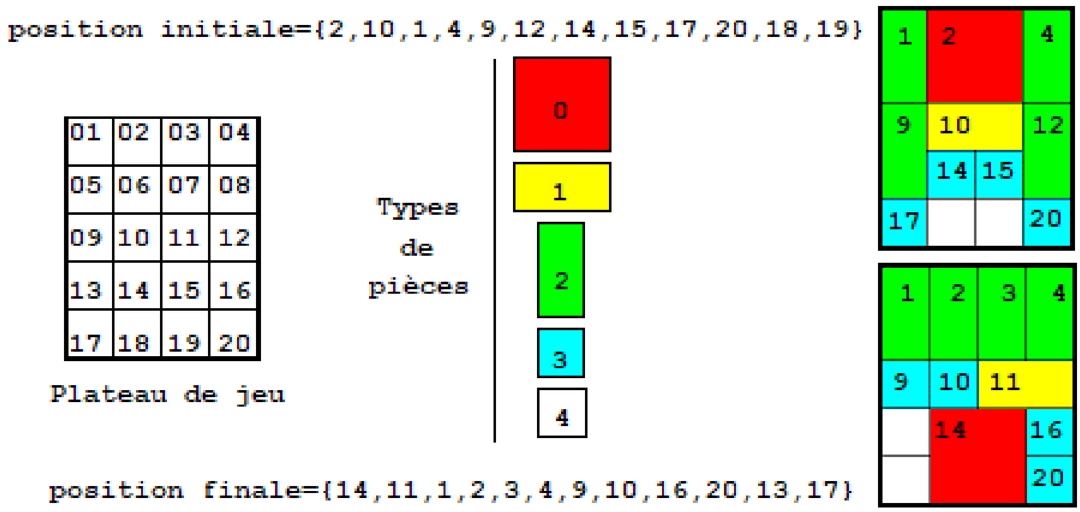


FIGURE 5.3 – *L'encodage des cases du plateau de jeu est réalisé par les nombres de 1 à 20 ; le type de pièce est un nombre de 0 à 4 ; l'emplacement d'une pièce correspond à la case où se situe le coin haut-gauche.*

Une fois ces grands principes d'encodage décidés, il est aisé de déterminer les coups possibles à partir d'une position donnée. Il suffit d'examiner les cases vides :

- Si la case i est vide, on peut y faire descendre la pièce 3 (petit carré) si l'emplacement de cette pièce est $i-4$ avec $i>4$. De même, on peut y faire descendre la pièce 2 (rectangle vertical) si l'emplacement de cette pièce est $i-8$ avec $i>8$. Inversement, on peut y faire monter la pièce 3 si elle est en $i+4$ avec $i<17$ et de même pour la pièce 2 avec $i<13$.
- Si la case i est vide, on peut y déplacer vers la gauche la pièce 3 si elle est en $i+1$ avec $i\%4 \neq 0$ [2]. Pour un déplacement vers la droite de cette pièce, son emplacement doit être $i-1$ avec $i\%4 \neq 1$. De même, un déplacement vers la gauche de la pièce 1 (rectangle horizontal) est possible si elle est en $i+1$ avec $0 < i\%4 < 3$ ($i\%4 = 1$ ou $i\%4 = 2$) ; on peut déplacer vers la droite cette pièce 1 si elle est en $i-2$ avec $i\%4 = 0$ ou $i\%4 = 3$.
- Si les deux cases vides sont côte à côte (en i et $i+1$ pour un déplacement vertical, i et $i+4$ pour un déplacement horizontal), on peut y déplacer les pièces larges (l'âne rouge, le rectangle vertical horizontalement ou le rectangle horizontal verticalement) si les emplacements vides voisins respectent certaines conditions qu'une analyse méticuleuse peut facilement déterminer.

2. $i\%4$ est le reste de la division euclidienne de i par 4, cette condition signifie que i ne doit pas être divisible par 4. On pourrait noter aussi cela $i \neq 0[4]$, soit i n'est pas congru à 0 modulo 4.

b. Le graphe de jeu

Sachant déterminer les coups possibles à partir d'une position donnée, on peut établir la liste des configurations accessibles en un coup à partir de la configuration initiale. Ensuite, en partant de chacune de ces nouvelles configurations, on peut déterminer les configurations accessibles en deux coups. Et, de proche en proche, on pourrait vérifier que l'âne rouge atteint une configuration finale valide en quatre-vingt-un coups.

Je ne vais pourtant pas me limiter à cela, je souhaite générer l'ensemble des configurations du jeu et déterminer pour chacune la liste de ses voisines (celles qui sont accessibles en un coup). En d'autres termes, je veux établir la matrice du graphe dont les configurations sont les sommets et les connexions entre voisins les arêtes. Comme il s'agit d'un graphe non orienté, toutes les arêtes pouvant être empruntées dans les deux sens, sa matrice d'incidence est symétrique. Avec elle, on pourra obtenir tous les renseignements désirés qui dépasse l'obtention du chemin entre la configuration initiale et une de celles où l'âne rouge est dans sa position finale.

Génération de l'ensemble des configurations

Pour générer toutes les configurations possibles il suffit de placer les pièces une par une aux différents emplacements vacants. L'âne rouge par exemple peut être placé de douze façons différentes. L'emplacement de son coin supérieur gauche ne peut être inséré que dans les cases 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14 et 15. En plaçant alors successivement les neuf autres pièces du jeu, on arrive à un total de 65 880 configurations distinctes.

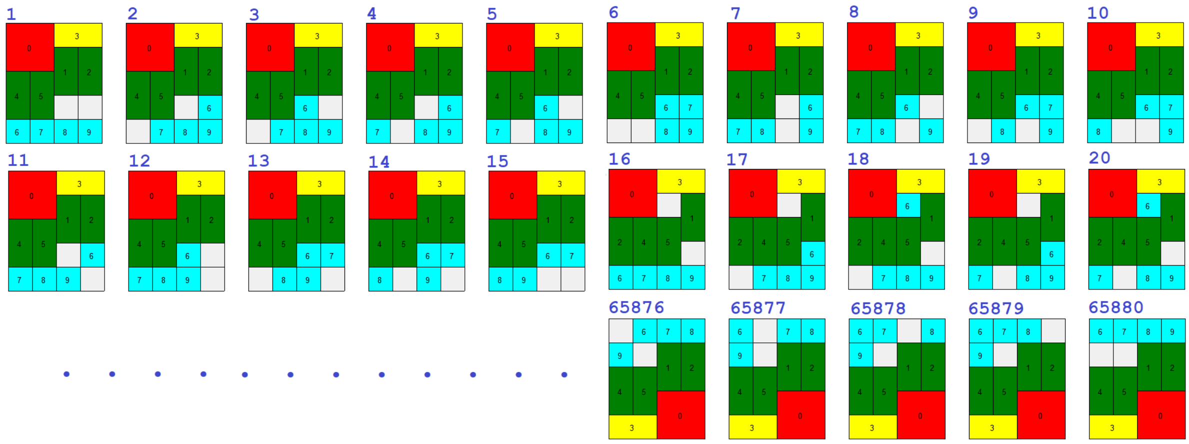


FIGURE 5.4 – *Le graphe du jeu contient* 65 880 *sommets représentant chacun l'une des configurations possibles.*

Identification des configurations voisines

J'ai indiqué plus haut comment identifier les configurations immédiatement voisines d'une configuration donnée – celles qui peuvent être atteintes en seul déplacement. En effectuant cette identification pour chacune des configurations du graphe, j'obtiendrai de précieux renseignements qu'il me conviendra d'enregistrer. Je pourrai alors compter l'ensemble des connexions du graphe. Ces connexions étant non orientées, il suffira de diviser par deux la somme des voisins de toutes les configurations. Je pourrai également obtenir les premières statistiques sur ces configurations : Y a t-il des configurations isolées (sans voisin accessible) ? Y en a t-il avec un seul voisin, avec deux voisins, avec trois voisins... ? Quel est le nombre maximum de voisins des configurations de ce jeu ?

Avant de m'atteler à la programmation de ce projet, je dois préciser ce que j'entends par configuration atteignable en un coup. Car lorsque les deux cases vides sont côte à côté, elles peuvent constituer pour les pièces étroites (les carrés ou les rectangles se déplaçant dans le sens de leur longueur) un corridor qui peut être parcouru de deux façons, selon qu'on avance de une ou de deux cases. Je considèrerai donc comme un coup valide une avancée de deux cases lorsque c'est possible. Ci-dessous, j'ai illustré ce choix en dessinant les différents coups possibles à partir d'une configuration. J'ai trouvé ainsi des configurations ayant entre un et six voisins.

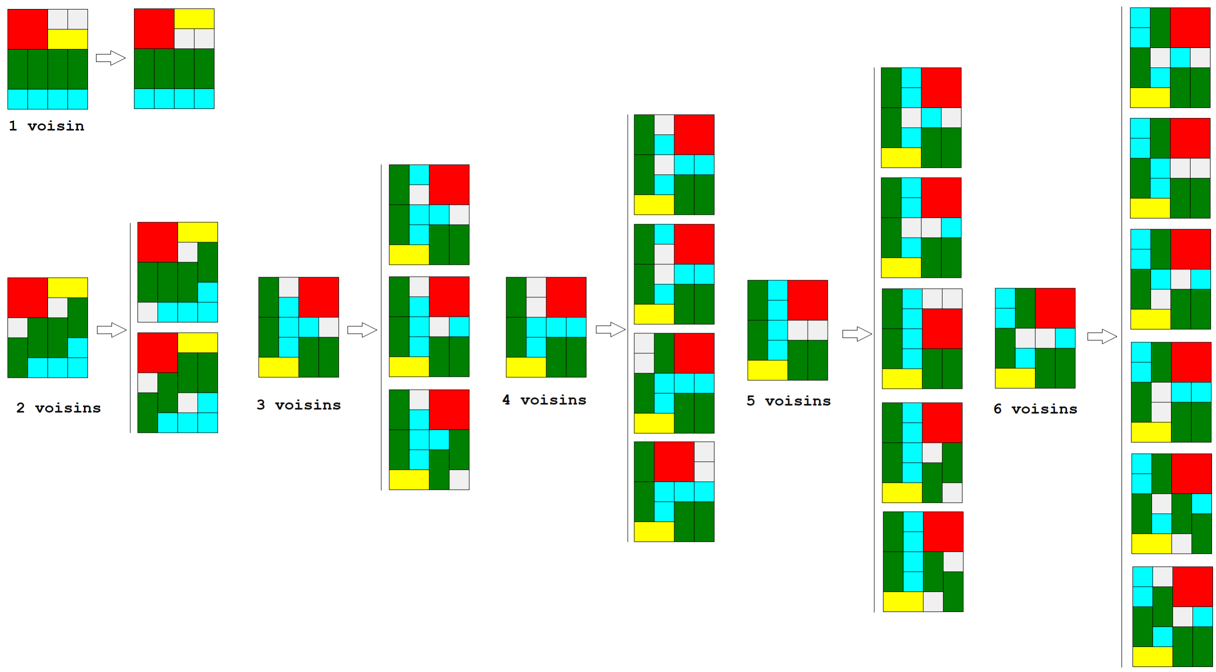


FIGURE 5.5 – *Ces exemples montrent des configurations qui ont entre un et six voisins.*
Je m'interroge alors : est-il possible d'avoir plus de six voisins ? y a t-il des configurations isolées ?

Le programme conçu pour répondre à ces questions est assez long à s'exécuter, mais tout est relatif. Une dizaine d'heures suffisent à établir le fichier donnant toutes les configurations du jeu avec, pour chacune, la liste de ses voisines. Ce fichier me servira par la suite pour déterminer les ensembles connexes du graphe et, en particulier, celui qui inclue la configuration initiale...

Pour l'instant, j'ai pu déterminer la répartition des configurations selon leur nombre de voisins. Aucune configuration n'est isolée, je l'avais pressenti. Par contre le nombre maximum de voisins pour une configuration est bien plus élevé que je ne l'avais estimé : 4 configurations détiennent le record de 10 voisins et il y a un millier de configurations pléthoriques qui possèdent plus de 6 voisins. Le nombre de voisins le plus fréquent est 3 et la moyenne environ 3,5. Cette distribution est donc légèrement asymétrique, l'étalement vers les valeurs élevées étant dû aux dédoublements des voisins lorsque les deux cases vides sont côte à côte. Il y a 114 958 ($229916 \div 2$) connexions entre configurations voisines dans ce graphe.

Voisins (vi)	Configurations (ci)	vi*ci
0	0	0
1	1368	1368
2	10048	20096
3	24960	74880
4	18572	74288
5	7642	38210
6	2292	13752
7	700	4900
8	264	2112
9	30	270
10	4	40
11	0	0
Total	65880	229916
Moyenne		3,49

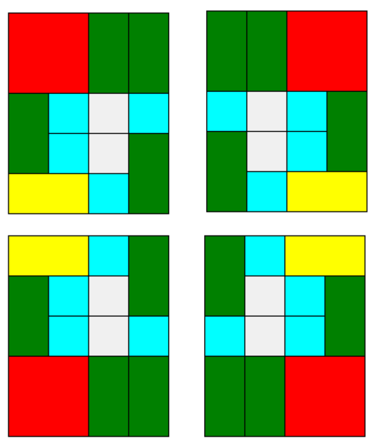


FIGURE 5.6 – *Répartition des configurations selon leur nombre de voisins.*
Les quatre seules configurations ayant dix voisins, parfaitement symétriques, sont représentées à droite.

En observant la symétrie des quatre configurations ayant dix voisins, je réalise que la symétrie par rapport à l'axe vertical va se retrouver dans les chemins solutions qui vont nécessairement aller par paires symétriques. Par contre, la symétrie par rapport à l'axe horizontal n'aura pas d'impact sur notre problème.

Le graphe connexe de la configuration initiale

La liste des voisins de la configuration initiale contient 8 configurations qui sont donc à une distance 1 de la configuration initiale. Si je cherche les voisins non-déjà-atteints (c'est-à dire ici qui ne sont pas la configuration initiale) des configurations de cette liste, je trouve 10 configurations qui sont à une distance 2 de la configuration initiale. Si je cherche ensuite les voisins non-déjà-atteints des configurations de la liste de celles qui sont à une distance 2, je trouve 15 configurations qui sont à une distance 3 de la configuration initiale. En procédant ainsi, j'obtiens 18 configurations qui sont à une distance 4 de la configuration initiale, puis 18 encore qui sont à une distance 5 de la configuration initiale, etc.

Je poursuis cette recherche jusqu'à ce que plus aucune configuration ne soit accessible. Les 8 configurations les plus éloignées de la configuration initiale sont à une distance de 124. Au total, il y a 25 955 configurations dans cet ensemble connexe. On peut toujours trouver un chemin qui joint deux configurations quelconques de cet ensemble. Par contre, passer d'une de ces configurations à une configuration qui n'y est pas incluse est impossible. La configuration retournée autour d'un axe horizontal de la configuration initiale n'est pas présente dans cet ensemble, cela implique qu'elle fait partie d'un autre ensemble connexe qui, pour une raison de symétrie évidente, doit contenir exactement 25 955 autres configurations, toutes symétriques des configurations du premier ensemble connexe.

Distance	Configurations	Finales
0	1	0
1	8	0
2	10	0
3	15	0
4	18	0
5	18	0
6	23	0
7	28	0
8	42	0
9	42	0
10	50	0
11	44	0
12	50	0
13	46	0
14	52	0
15	43	0
16	59	0
17	62	0
18	70	0
19	64	0
20	74	0
21	48	0
22	64	0
23	81	0
24	91	0
25	113	0
26	156	0
27	197	0
28	187	0
29	240	0
30	295	0
31	373	0
32	456	0
33	487	0
34	551	0
35	650	0
36	717	0
37	774	0
38	906	0
39	946	0
40	1038	0
41	1084	0
42	1042	0
43	890	0
44	804	0
45	739	0
46	667	0
47	595	0
48	517	0
49	420	0
50	340	0
51	258	0
52	178	0
53	153	0
54	151	0
55	170	0
56	174	0
57	162	0
58	140	0
59	164	0
60	160	0
61	172	0
62	196	0
63	240	0
64	278	0
65	274	0
66	298	0
67	329	0
68	348	0
69	381	0
70	408	0
71	383	0
72	412	0
73	371	0
74	305	0
75	277	0
76	261	0
77	260	0
78	242	0
79	201	0
80	159	0
81	130	2
82	103	4
83	94	12
84	96	15
85	86	19
86	75	12
87	58	16
88	49	18
89	56	22
90	68	30
91	78	52
92	72	44
93	66	38
94	52	28
95	68	36
96	60	30
97	42	32
98	30	28
99	26	22
100	26	22
101	24	18
102	28	24
103	34	28
104	26	20
105	22	14
106	28	14
107	36	16
108	44	28
109	64	46
110	58	44
111	50	38
112	58	40
113	82	58
114	84	48
115	56	30
116	28	12
117	14	4
118	12	0
119	12	0
120	16	0
121	20	0
122	16	0
123	8	0
124	8	0
Total	25955	964

FIGURE 5.7 – *Répartition des configurations de l'ensemble connexe principal (celui qui contient la configuration initiale) selon la distance à la configuration initiale. La 2e colonne indique le nombre de solutions au problème de l'âne rouge (la grosse pièce carrée a atteint le milieu du bord inférieur).*

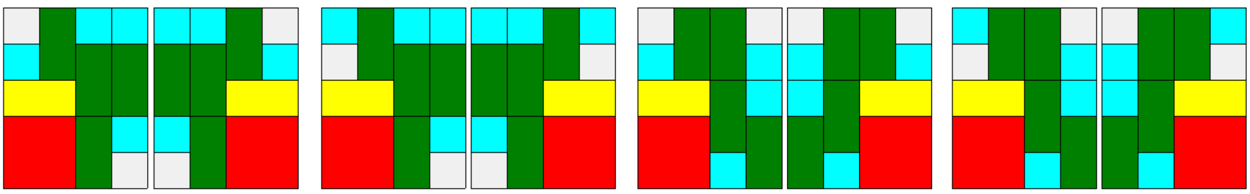


FIGURE 5.8 – *Les huit configurations les plus éloignées de la configuration initiale sont accessibles après* 124 *coups au minimum.*

J'observe alors qu'il est possible d'atteindre une configuration finale en 81 coups (deux solutions, sans doute symétriques par rapport à un axe vertical) mais aussi 82, 83, etc. jusqu'à 117 coups. Au total, pas moins de 964 configurations finales sont accessibles depuis la configuration initiale !

Chemin optimum vers la configuration finale

Pour déterminer le chemin – je devrai dire *les* chemins car il y en a deux, vraisemblablement symétriques – qui permet de résoudre de façon optimum le problème de l'âne rouge, je vais partir de la position finale (trouvée à l'étape précédente) et remonter le graphe connexe principal (mémorisé) :

- je cherche parmi les configurations accessibles en 80 coups celle qui fait partie des voisins de la configuration finale ; il y en a forcément au moins une.
- je cherche ensuite, parmi les configurations accessibles en 79 coups, celle qui fait partie des voisins de la configuration précédente.
- je continue de la même façon jusqu'à atteindre la configuration initiale, en enregistrant à chaque fois la configuration trouvée
- une fois ce chemin inverse enregistré j'en retourne la liste afin de l'obtenir dans le bon sens.

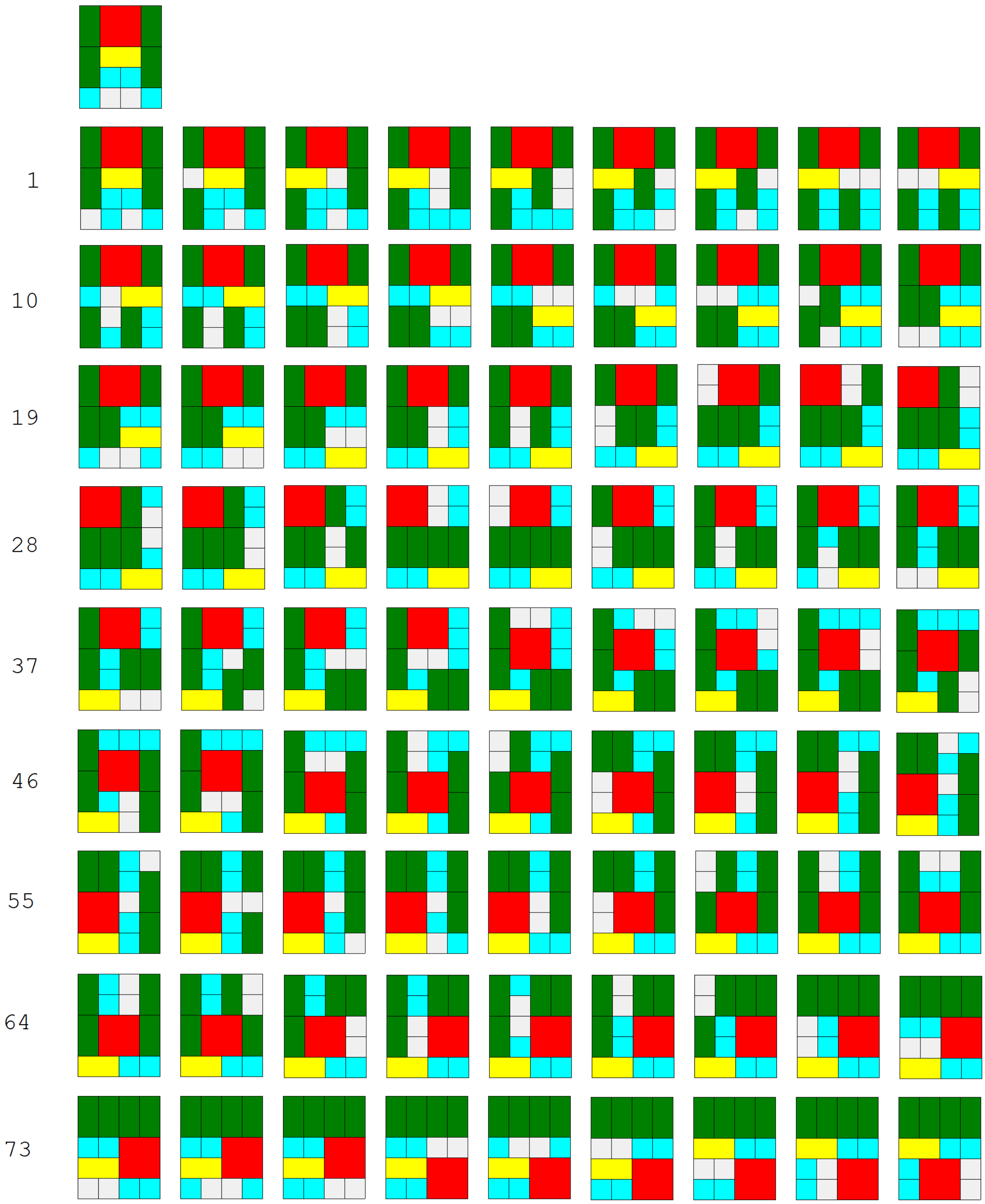


FIGURE 5.9 – *Les quatre-vingt-une configurations qui résolve le problème de l'âne rouge de façon optimale.*

Configurations symétriques

La configuration initiale a la particularité de posséder un axe de symétrie vertical, ce qui permet de la retrouver facilement. Dans l'ensemble connexe principal, il y a 67 configurations qui présentent un axe de symétrie vertical dont la configuration initiale et quatre configurations finales qui sont accessibles en 84, 85 ou 86 coups minimum.

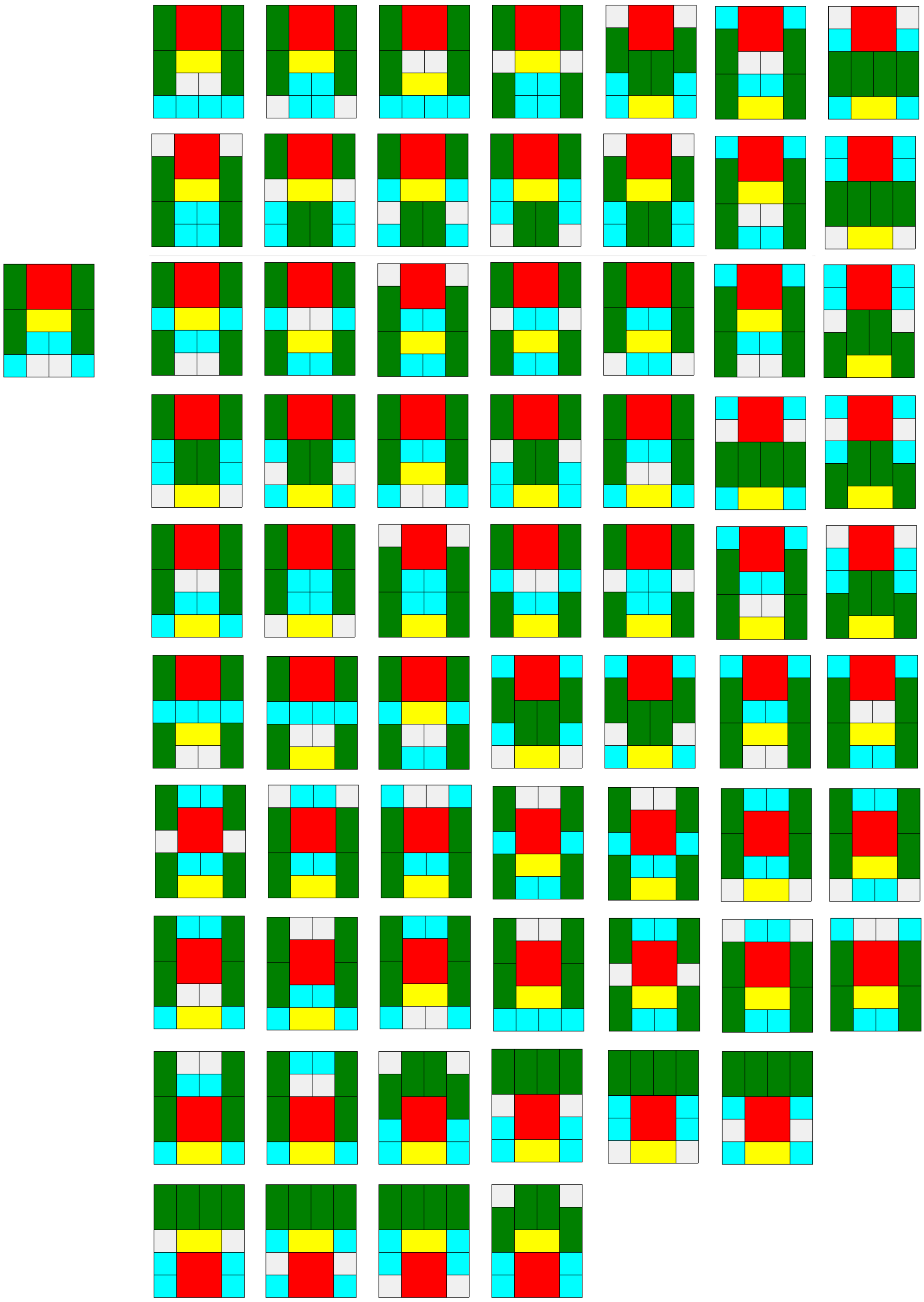


FIGURE 5.10 – *Les 67 configurations symétriques de l'ensemble convexe principal ont majoritairement l'âne rouge au milieu du côté supérieur (43 l'ont à la 1^re^ ligne, 14 l'ont à la 2^e^, 6 à la 3^e^ et 4 à la 4^e^). Ligne du bas, les seules quatre configurations symétriques qui résolvent le problème de l'âne rouge le font en un minimum de 84, 85 et 86 coups. Sauriez-vous déterminer le chemin optimum qui amène de la configuration initiale à chacun d'entre eux ? (réponse en annexe)*

Changer de configuration initiale

On peut explorer un peu plus la composante principale en modifiant la configuration de laquelle on part. Si on essaie tous les points de départ possibles (il y en a 25 955), le chemin le plus long contient 145 coups. Il n'est pas très remarquable, à part pour sa longueur, car il commence sur une configuration non-symétrique et se termine sur une autre configuration non-symétrique.

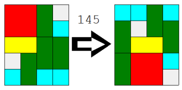


FIGURE 5.11 – *Un chemin de 145 étapes sépare ces deux configurations (solution en annexe).*

On peut choisir une configuration symétrique au départ et à l'arrivée de telle manière que ces deux extrémités correspondent à l'inversion de deux blocs, celui du bas passant en haut et réciproquement. La figure ci-dessous montre deux problèmes de ce genre qui ont des solutions en 59 et 77 coups.

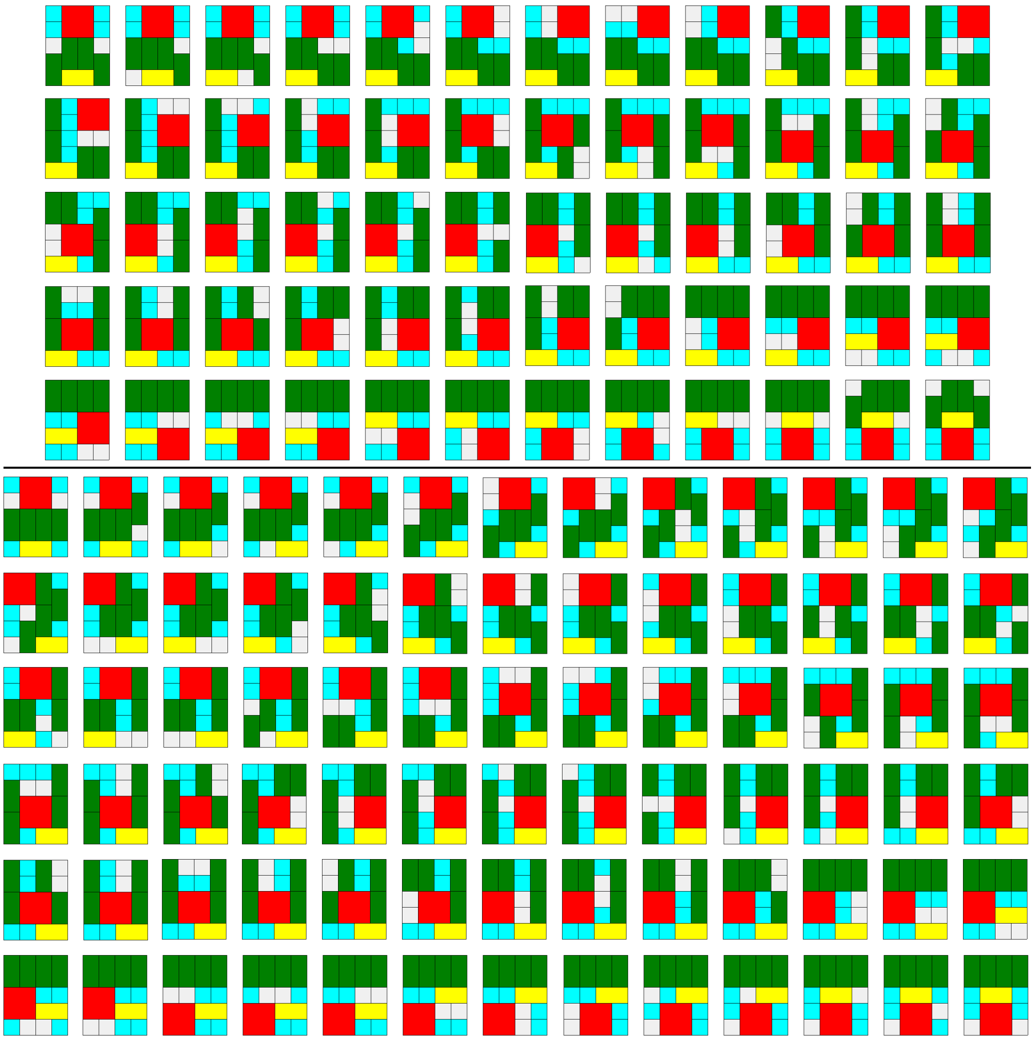


FIGURE 5.12 – *Deux problèmes qui inversent les blocs inférieurs et supérieurs de configurations symétriques.*

Inverser une configuration par rapport à un axe vertical est possible dans l'ensemble connexe principal, le plus long spécimen s'inverse en 120 coups. Pour inverser une configuration par rapport à un axe horizontal, par contre, il faut sortir de l'ensemble connexe principal.

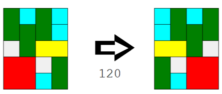


FIGURE 5.13 – *Inversion d'une configuration par rapport à un axe vertical (solution en annexe).*

Autres ensembles connexes

En dehors des $2 \times 25\,955 = 51\,910$ configurations qui appartiennent aux deux ensembles connexes principaux (celui qui contient la configuration initiale classique et celui qui contient sa configuration symétrique par rapport à un axe horizontal), il reste $65\,880 - 51\,910 = 13\,970$ configurations qui appartiennent nécessairement à d'autres ensembles connexes, plus ou moins grands, mais certainement bien moins importants que les principaux.

Après avoir réitéré le processus d'identification des configurations d'un ensemble connexe jusqu'à avoir assigné un ensemble connexe à chaque configuration, je constate que ce graphe contient 898 composantes connexes. Le nombre de configurations pour une composante connexe varie de 2 à 25 955 mais il n'y a que 38 valeurs différentes. Le tableau ci-dessous donne ces valeurs ainsi que l'effectif des composantes connexes correspondant.

Nombre de configurations dans l'ensemble	Nombre d'ensembles connexes	Total des configurations
2	36	72
4	292	1168
6	112	672
8	100	800
9	4	36
10	28	280
11	4	44
12	56	672
14	8	112
16	64	1024
18	4	72
19	4	76
20	8	160
21	4	84
24	42	1008
25	4	100
26	30	780
27	4	108
28	4	112
29	12	348
30	8	240
32	4	128
33	8	264
36	8	288
45	4	180
47	4	188
52	2	104
55	2	110
73	4	292
75	4	300
92	4	368
98	4	392
99	4	396
118	4	472
181	4	724
201	4	804
248	4	992
25955	2	51910
	898	65880

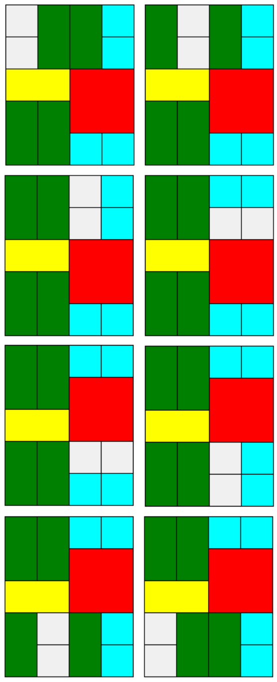


FIGURE 5.14 – *Répartition des composantes connexes selon le nombre de configurations qu'elles contiennent. À droite, la plus longue inversion par rapport à un axe horizontal appartient à un ensemble connexe de 16 configurations et est composé de 7 étapes.*

Bien sûr une composante connexe contenant 2 configurations ne peut être parcourue qu'en un seul coup. Pour les autres petites composantes, le chemin optimum le plus long contient 56 coups. Il appartient à une composante connexe de taille 248.

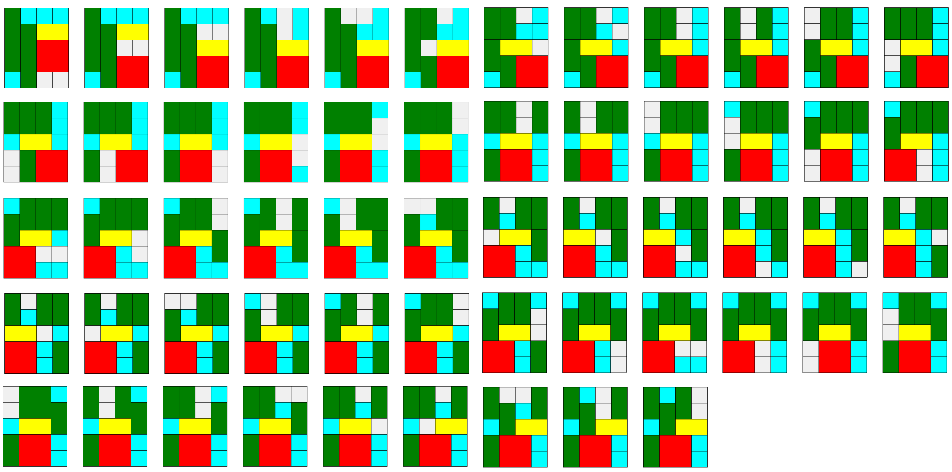


FIGURE 5.15 – *Chemin d'une longueur de* 56 *coups dans une composante connexe contenant* 248 *configurations.*

2. Variantes du klotski

De très nombreuses variantes de ce jeu existent et il s'en crée encore de nouvelles pour les applications de jeu sur mobile. Les plateaux sont le plus souvent rectangulaires mais on en trouve avec des formes plus complexes, parfois des ilots inamovibles à l'intérieur du plateau constitue des obstacles à contourner. Les pièces ne sont pas toujours des rectangles, on peut trouver des jeux avec des pièces en forme de L, de T ou d'autres formes encore. Un troisième facteur est variable : l'objectif à atteindre n'est pas toujours de faire traverser le plateau par une pièce. On a vu qu'on peut chercher à retourner une configuration complète autour d'un axe, pour certains jeux il faut réaliser une figure avec les pièces, pour d'autres il faut faire faire le tour des quatre coins avec une pièce. On peut aussi faire augmenter le nombre des pièces, ou bien au contraire le faire diminuer. L'âne rouge peut avoir une forme variable (petit carré 1×1 ou rectangle 1×3)... Bref, vous l'avez compris, il n'y a pas d'autres limites aux inventions de nouvelles variantes que celles de l'imagination des créateurs. C'est pourquoi je me limiterai à l'examen de quelques variantes proches.

Un jeu est une variante proche s'il est constitué d'un plateau de 4×5 cases, de pièces rectangulaires du même type que Klotski : petits et gros carrés (1×1 et 2×2), rectangles 1×2. L'âne rouge est toujours le gros carré qu'il faut amener à un emplacement particulier connu à l'avance . J'ai trouvé dans la littérature des listes de problèmes impliquant des variantes proches dont on donne généralement le nombre de coups du chemin optimum. Ces problèmes sont également accompagnés du nom de leur inventeur et de l'année de l'invention. En annexe une figure donne les principaux problèmes.

a. Variantes proches

Century

Century est un puzzle dû à John Horton Conway qui l'a nommé ainsi en 1975 car le chemin optimum qui amène le gros carré rouge au milieu du bord inférieur contient cent coups. Le placement original à mi-course du rectangle central assure la symétrie de la configuration et aussi permet d'ajouter le centième coup au chemin optimum qui, sans cet astucieux placement, n'aurait compté que quatre-vingt-dix-neuf coups. Dans mon programme, je considère que ce rectangle central est bien rangé, dans la 2^{e} colonne et j'ajoute le 100^{e} coups manuellement. Les résultats calculés par la suite considèrent uniquement les configurations bien rangées (pas de pièces à mi-course.

La composition du jeu est quasiment la même que pour l'âne rouge, seul un rectangle vertical a été changé en un rectangle horizontal. La barrière qu'offrent ces rectangles horizontaux aux déplacements des verticaux est plus efficace et allonge la longueur du chemin.

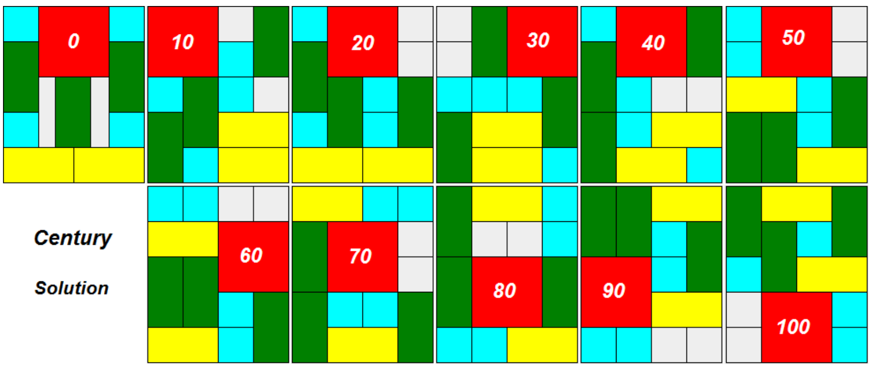


FIGURE 5.16 – *Dix étapes du chemin optimum d'une longueur de* 100 *coups qui résout le Century (chemin complet en annexe). Ce chemin est inclus dans une composante connexe contenant 81 340 configurations.*

Le graphe du Century contient 109 260 configurations réparties en 2 653 composantes connexes dont la plus importante contient 81 340 configurations dont les 99 du chemin optimum. En partant de la position initiale, on peut faire 189 coups (190 si on part du rectangle à mi-course) sans utiliser deux fois une même configuration.

Contrairement à l'âne rouge, la configuration du Century peut être retournée horizontalement en 148 coups. Si on ajoute les deux coups supplémentaires, au départ et à l'arrivée pour placer le rectangle central à mi-course, ce chemin demande exactement 150 coups. Ce problème a été identifié par J.H. Conway sous le nom de *Century and a half* et figure avec d'autres variantes en annexe.

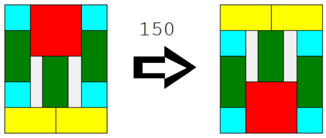


FIGURE 5.17 – *Retournement horizontal du Century en* 150 *coups (solution en annexe).*

Le plus long chemin optimum du Century est inclus dans l'ensemble connexe principal et a une longueur de 230 coups. La configuration de départ a été enregistrée par Gil Dogon en 2004 sous le nom de *Super-Century*, l'objectif est ici de retourner la configuration de 180° autour de son centre, un objectif impossible à réaliser avec Klotski. Ce problème figure avec les variantes en annexe et un autre problème est également mentionné : amener le gros carré au milieu du bord inférieur, 138 coups seulement sont alors nécessaires.

FIGURE 5.18 – *Super-Century est cette configuration du graphe du Century qui peut être retournée de* 180° *autour de son centre en* 230 *coups minimum (à droite, solution en annexe). Pour cette configuration, amener le gros carré au milieu du bord inférieur est possible en* 138 *coups minimum (à gauche, solution en annexe).*

Le puzzle de papa

Le *Dad's puzzle* fut d'abord connu sous les noms de *Pennant puzzle* (1909) et *Dad's puzzler*, puis *Moving day Puzzle* et *Magnetic square Puzzle.* Il est composé de neuf pièces uniquement : six rectangles dont quatre horizontaux, un gros carré et deux petits carrés. À l'origine le gros carré représentait une équipe dont le *pennant*(fanion) devait atteindre le coin représentant la tête du championnat, puis ce fut un piano que papa devait déplacer au milieu de meubles encombrant la pièce. Malgré le plus petit nombre de petits carrés, ce jeu semble plus facile que les deux premiers si l'on en juge par la longueur du chemin minimum pour le résoudre.

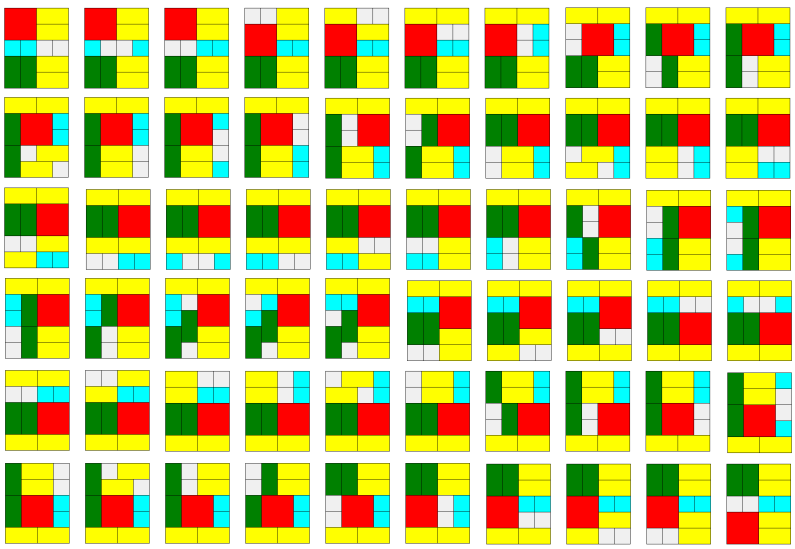


FIGURE 5.19 – *Pennant Puzzle est un jeu à neuf pièces où il faut faire descendre le gros carré jusqu'au coin inférieur gauche, ce qui peut se réaliser en* 59 *coups au minimum.*

En effet, il ne faut que 59 coups pour amener le gros carré dans le coin gauche du bord inférieur. Certes, la notion de difficulté est assez subjective mais le graphe du Pennant est largement plus petit que ceux des autres jeux avec seulement 18 504 configurations. Mon dernier argument concerne la composante connexe principale : il y a 1 074 ensembles connexes dans le graphe du Pennant dont les deux plus grands contiennent chacun 1 398 configurations. Il n'y a donc qu'un millier de positions accessibles, ce qui est très peu en comparaison de Klotski (25 955 configurations dans chacune des deux composantes principales) ou de Century (81 340 configurations). Peu de possibilités n'implique pas forcément plus de facilité mais je reste convaincu que les deux autres puzzles de ce chapitre sont bien plus difficiles que le vieux puzzle de papa.

FIGURE 5.20 – *Les deux autres coins sont plus faciles à atteindre puisqu'il suffit de* 24 *coups pour le coin supérieur droit et de* 29 *coups pour le coin inférieur droit (solutions en annexe).*

En partant d'une autre configuration initiale, on peut retourner l'ensemble des pièces autour d'un axe horizontal en 105 coups minimum. Ce chemin optimum est aussi le plus long que l'on puisse faire dans le graphe du jeu. Les configurations traversées appartiennent à la même composante connexe que celles du problème classique. On peut s'en assurer en constatant des points d'intersection entre les deux chemins : les configurations aux étapes 48 et 49 sont les mêmes, mais parcourues en sens inverse, que les configurations des étapes 37 et 38 du chemin de la figure 5.18. À titre de comparaison, la configuration initiale du problème classique peut, elle aussi, être retournée, mais 61 coups y suffisent.

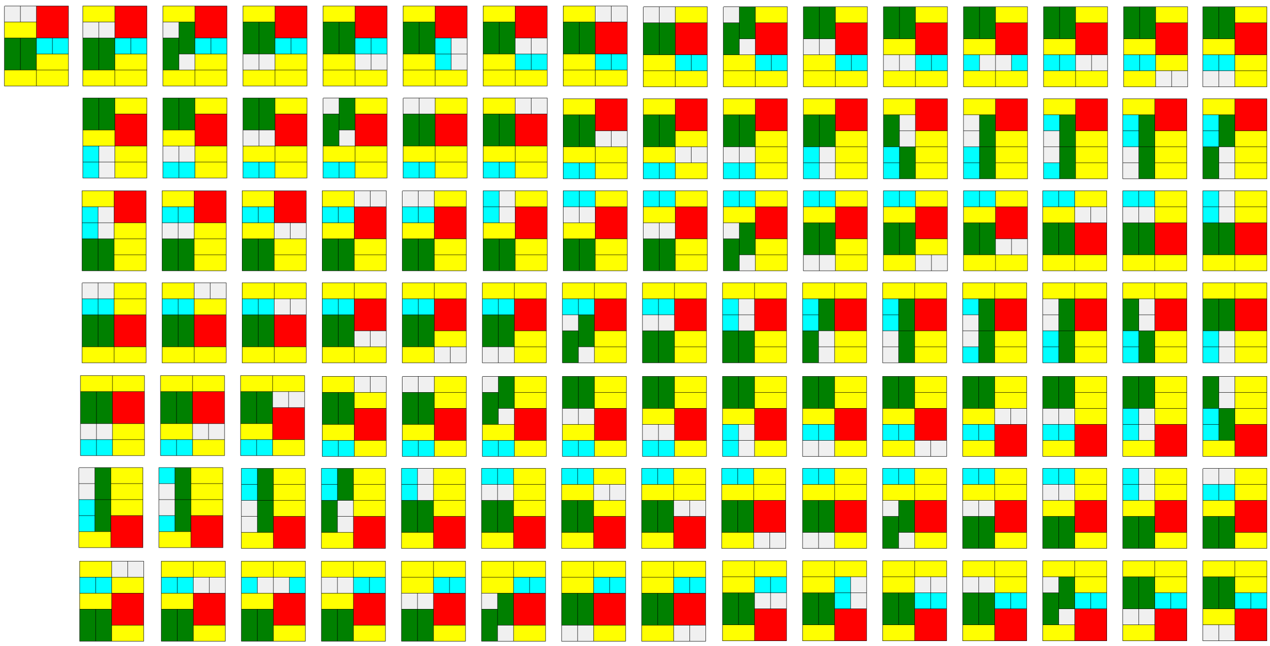


FIGURE 5.21 – *Le retournement autour d'un axe horizontal est possible en* 105 *coups minimum, mais pour ce chemin qui est aussi le plus long possible, la configuration initiale a été modifiée.*

Pour retourner l'ensemble des pièces autour d'un axe vertical il faut sortir de la composante connexe principale où ce mouvement est impossible. Ce problème a des solutions en 28 coups maximum.

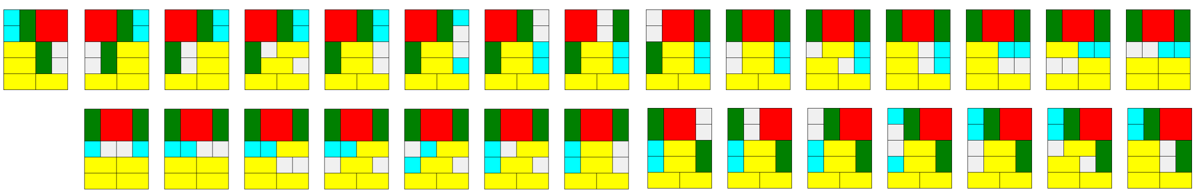


FIGURE 5.22 – *Le retournement autour d'un axe vertical est possible en* 28 *coups minimum, mais pour ce chemin on ne se situe pas dans composante connexe du puzzle classique.*

b. Variantes plus lointaines

Si on accepte de s'écarter davantage du puzzle de départ, les possibilités sont infinies. J'ai sélectionné une liste de jeux ci-dessous qui montre une variété déjà conséquente de problèmes. De nombreux sites sur internet [3] proposent d'autres variantes, parfois beaucoup plus complexes. Les auteurs de ces nouveaux puzzles jouent sur trois facteurs :

- L'objectif : La *Petite Maison* de Pierre-François Culand apporte une légère variation dans l'objectif à atteindre : il ne s'agit pas seulement d'amener le gros carré au milieu du bord inférieur, on doit dessiner la figure de la maison avec les neuf autres pièces. Contrairement aux retournements que j'ai envisagé avec les variantes proches, ici on a un objectif global qui n'a rien à voir avec la configuration initiale. De même, le *Voyage de Marco Polo* du Dr R.I. Hess apporte une originalité dans l'objectif : il faut amener successivement le gros carré dans les quatre coins du plateau.
- La forme des pièces : Six des neuf puzzles proposés contiennent des pièces en forme de L, ce qui était exclu pour les variantes proches. Cette pièce est même doublée pour cinq d'entre eux, l'objectif étant, soit de reconstituer un rectangle avec les deux L côte à côte (*The Imp*, *Mini Ma's Puzzle*), soit de former un bloc qu'il faut reconstituer à l'identique une fois les rectangles jaune et rouge interchangés (*Picnic*, *Soap*). Dans le puzzle *Super Dries* de Dries De Clercq, la pièce en L doit seulement être déplacée d'un cran vers la gauche. Mais ce minuscule déplacement est si difficile à effectuer qu'on a besoin d'au moins 321 coups pour l'effectuer. Un des puzzles proposés (le *Voyage de Marco Polo*) mobilise une pièce rectangulaire de trois cases de long, plus facile à déplacer dans le sens de sa longueur.
- La forme du plateau : Quatre puzzles utilisent un plateau non rectangulaire : hexagonal pour les puzzles de Dries De Clercq (*D 209* et *Super Dries*), octogonal pour le *Simplicity 2* d'Ed Pegg junior (*Simplicity* de James Stephens utilise un plateau carré de 4×4 avec la même configuration) et dodécagonal pour le *Picnic* de James Stephens. Les angles rentrants ajoutent très certainement une difficulté de déplacement supplémentaire que ces auteurs ont cherché à exploiter. Le *Voyage de Marco Polo* utilise, quant à lui, un plateau carré de cinq cases de côté ce qui illustre bien l'objectif de circumnavigation assigné au gros carré.

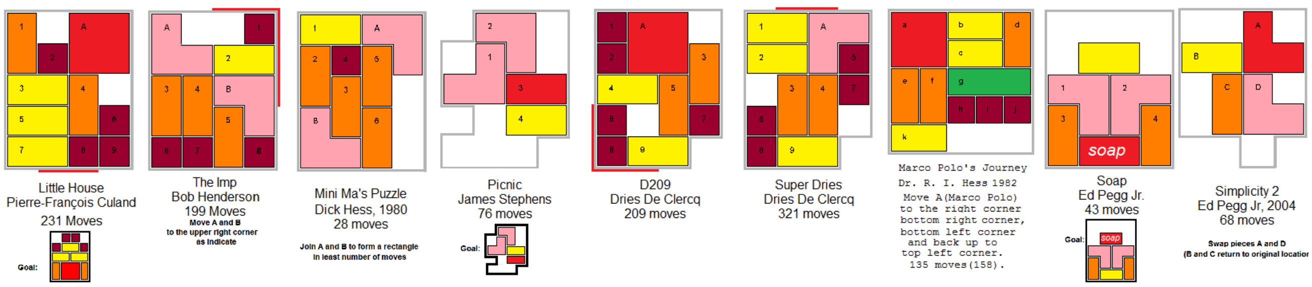


FIGURE 5.23 – *Neuf variantes assez éloignées de l'âne rouge qui se détachent par leur objectif plus élaboré, par des formes de pièces nouvelles ou par un plateau différent.*

Simplicity

Le bien nommé puzzle *Simplicity* de James W. Stephens [4] est une variante séduisante par son petit nombre de pièces : seulement quatre dont deux en forme de L. L'objectif est simple, il suffit d'amener le bloc rouge dans le coin supérieur gauche. Ce problème a une solution en 18 coups mais qui n'est pas facile du tout à trouver. James Stephens la donne en indiquant la pièce à déplacer par un numéro suivi par le chemin que doit suivre la pièce en utilisant pour cela les points cardinaux (voir l'image ci-dessous). Par exemple `2SWW` indique qu'il faut bouger la pièce numéro `2` d'abord vers le bas (`S` : Sud, en bas sur une carte) puis deux fois vers la gauche (`W` : Ouest, à gauche sur une carte).

3. Le site *Baxter's Pegg Page* de Nick Baxter `http://www.johnrausch.com/SlidingBlockPuzzles/pegg.htm` contient quelques puzzles de Ed Pegg Jr, Rudolfo Kurchan, Harold Cataquet et Michael McKee avec lesquels on peut jouer
4. Jouer sur le site sliding-block Puzzles de James Stephens `http://www.puzzlebeast.com/slidingblock/`

Title	Number of Moves	Solution
Simplicity	18	3W 1W 4S 2NEE 3NN 1W 4WN 1E 3SS 4W 2SS 4EE 3NNE 1WN 2SWW 4SS 3E 1N

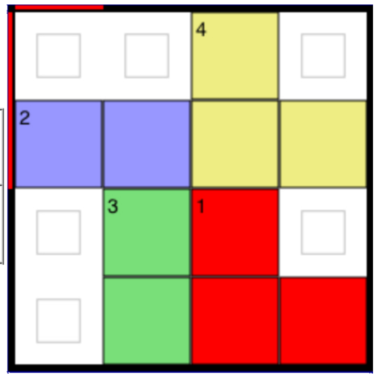
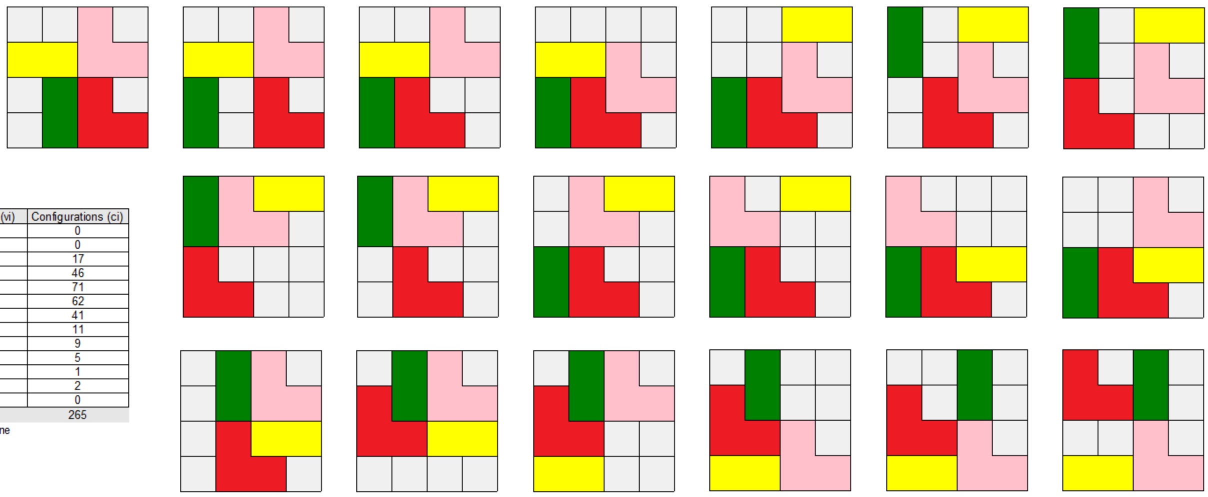


FIGURE 5.24 – *La configuration initiale du Simplicity avec son objectif (la pièce rouge doit atteindre le trait rouge) et sa solution telles qu'on peut les obtenir du site* `puzzlebeast.com`.

Cette codification est intéressante par sa concision mais elle ne montre pas le résultat. Pour l'obtenir avec mon programme, et vérifier par la même occasion le résultat de J. Stephens, j'ai dû modifier profondément ma procédure d'identification des voisins car celle que j'utilisais avec les puzzles proches de l'âne rouge était adaptée pour les puzzles ayant deux cases vides, mais ici il y a six cases vides ! les pièces peuvent faire des bonds considérables en un seul coup. Les chemins potentiels que peut suivre une pièce lors d'un coup étant trop nombreux, j'ai abandonné l'idée de les examiner tous. Ma nouvelle procédure fait la liste des configurations accessibles en un saut unitaire (déplacement de une case dans une des quatre directions), puis pour chacune, en déplaçant la même pièce, celles qui sont nouvelles et accessibles en un saut unitaire supplémentaire, et enfin celles qui ne sont accessibles qu'à l'issue d'un 3e saut unitaire.



Voisins (vi)	Configurations (ci)
0	0
1	0
2	17
3	46
4	71
5	62
6	41
7	11
8	9
9	5
10	1
11	2
12	0
Total	265
Moyenne	

FIGURE 5.25 – *La solution optimum du Simplicity obtenue par mon programme nécessite* 18 *coups. Correspond-elle à celle de Stephens ? Le tableau indique les nombres c_i de configurations ayant v_i voisins.*

Le graphe de ce jeu est considérablement plus petit que ceux des jeux précédemment examinés : seulement 265 configurations ! Un gros ensemble connexe regroupe 161 configurations, ensuite il y a un ensemble connexe contenant 69 configurations, trois ensembles en contenant 9 et un dernier en contenant 8. Les configurations ont en moyenne $4,6$ voisins (le détail de la distribution est donné dans l'image ci-dessus) alors que pour l'âne rouge cette moyenne était de $3,5$. Il y a donc plus de chance de se tromper et de tourner en rond malgré le faible nombre de possibilités.

En partant de la configuration initiale, on peut faire un chemin optimum de 26 coups si on se donne comme objectif d'avoir, non seulement la pièce rouge en haut à gauche mais aussi la pièce rose en haut à droite. La figure suivante nous montre les extrémités de ce chemin qui peut être poursuivi un coup supplémentaire pour atteindre une des trois configurations les plus éloignées de la configuration initiale (en annexe, le chemin complet est donné).

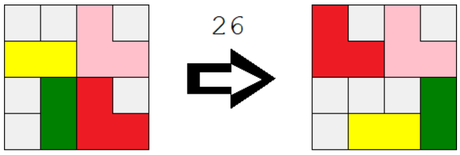


FIGURE 5.26 – *En partant de la configuration initiale, atteindre la configuration de droite où la pièce rose est inchangée tandis que la rouge a atteint le bord supérieur nécessite* 26 *coups au minimum (solution en annexe).*

Pour ne citer que l'autre relativement important composante connexe – celle qui contient 69 configurations – le chemin le plus long qu'on peut y tracer ne contient que six configurations. La figure suivante en montre un de ces chemins que l'on ne rencontrera jamais si on part de la configuration initiale du jeu et qu'on en respecte les règles (ne pas sortir une pièce pour la déplacer, sautant ainsi un obstacle).

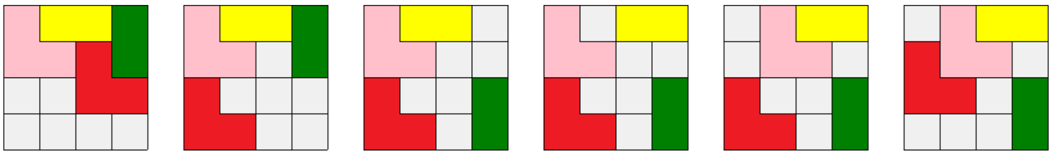
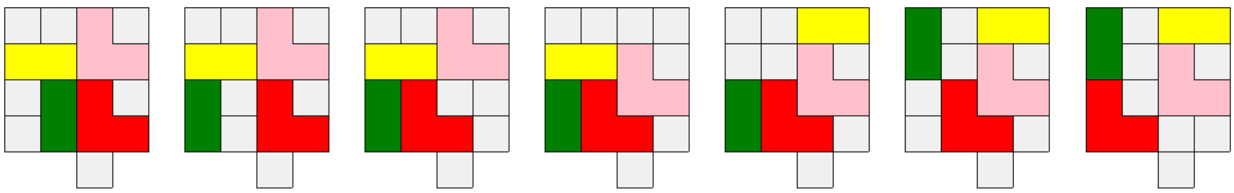


FIGURE 5.27 – *Le diamètre de la 2ᵉ composante connexe du Simplicity a une longueur de* 5 *coups.*

Simplicity 2

Le puzzle *Simplicity* de J. Stephens a été légèrement modifié par Ed Pegg Jr. [5] en décembre 2004 : ce dernier a juste ajouté une case supplémentaire en bas du plateau. Ce faisant, le puzzle semble être devenu plus difficile car son chemin optimum contient maintenant 68 coups. Comment est-ce possible qu'en ajoutant de la surface, pour se mouvoir plus aisément on ne fasse pas au moins aussi bien que sans cette unité de surface additionnelle ?

Cette question est mal posée car l'objectif du *Simplicity 2* est différent : il s'agit ici d'intervertir les deux pièces en forme de L tout en remettant les deux autres pièces à leur place initiale. Cet objectif est beaucoup plus ambitieux que celui du *Simplicity* et je me demande si on peut obtenir la configuration finale du *Simplicity 2* sur le plateau du *Simplicity*. Comme aucun des auteurs ne parle de ce problème, je suppose qu'il n'a pas de solution mais j'aimerai en avoir le cœur net.



Voisins (vi)	Configurations (ci)
0	0
1	0
2	36
3	120
4	158
5	142
6	96
7	30
8	20
9	6
10	0
11	2
12	0
13	0
14	0
Total	610

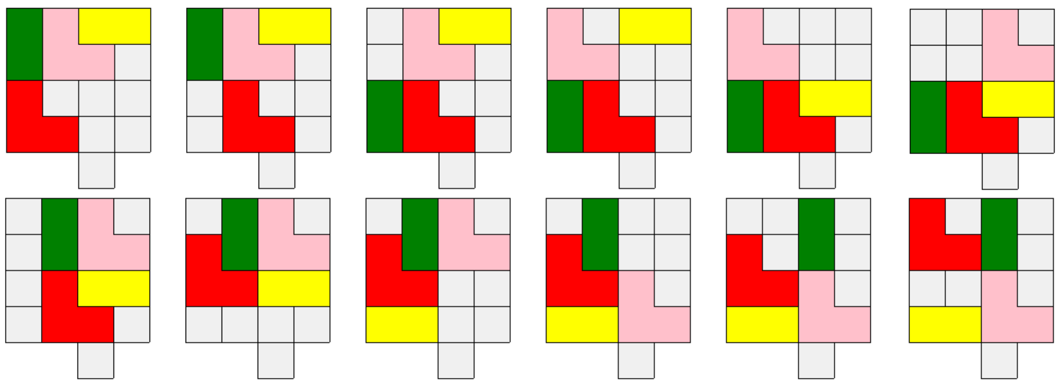


FIGURE 5.28 – *Résoudre le problème du Simplicity sur le plateau du Simplicity2 se fait en* 18 *coups, comme sur le plateau d'origine. Le graphe du Simplicity2 par contre (à gauche), est très différent de celui du Simplicity.*

5. Edward Taylor Pegg Jr(1963-) est un spécialiste des mathématiques récréatives de l'Université du Colorado qui écrivit ses articles *Math Games* dans les publication de la *Mathematical Association of America* entre 2003 et 2007.

Pour répondre à cette question comme pour résoudre le *Simplicity 2*, je dois distinguer les deux pièces en formes de L afin que les configurations initiale et finale ne se confondent pas. Ces objectifs m'obligent encore à modifier mes procédures mais, finalement, celles-ci devenant polyvalentes pourront traiter d'autres problèmes du même type, je pense notamment au *Soap* d'Ed Pegg Jr. (figure 5.23) qui nécessite de distinguer les deux rectangles horizontaux.

Après les inévitables difficultés liées à ces modifications, j'obtiens le bon graphe du jeu : il contient 610 configurations regroupées, pour la plupart, dans une très grosse composante connexe (558 configurations). En dehors, de cette composante principale, cinq autres composantes contiennent 9 ou 8 configurations. La distributions des configurations selon leur nombre de voisins est donnée dans la figure précédente ; le nombre moyen de voisins par configuration est de $4,5$ soit un peu moins que pour le *Simplicity*. Je vérifie alors le résultat de Ed Pegg, à savoir que l'inversion des pièces en L sans autre modification est possible en 68 coups.

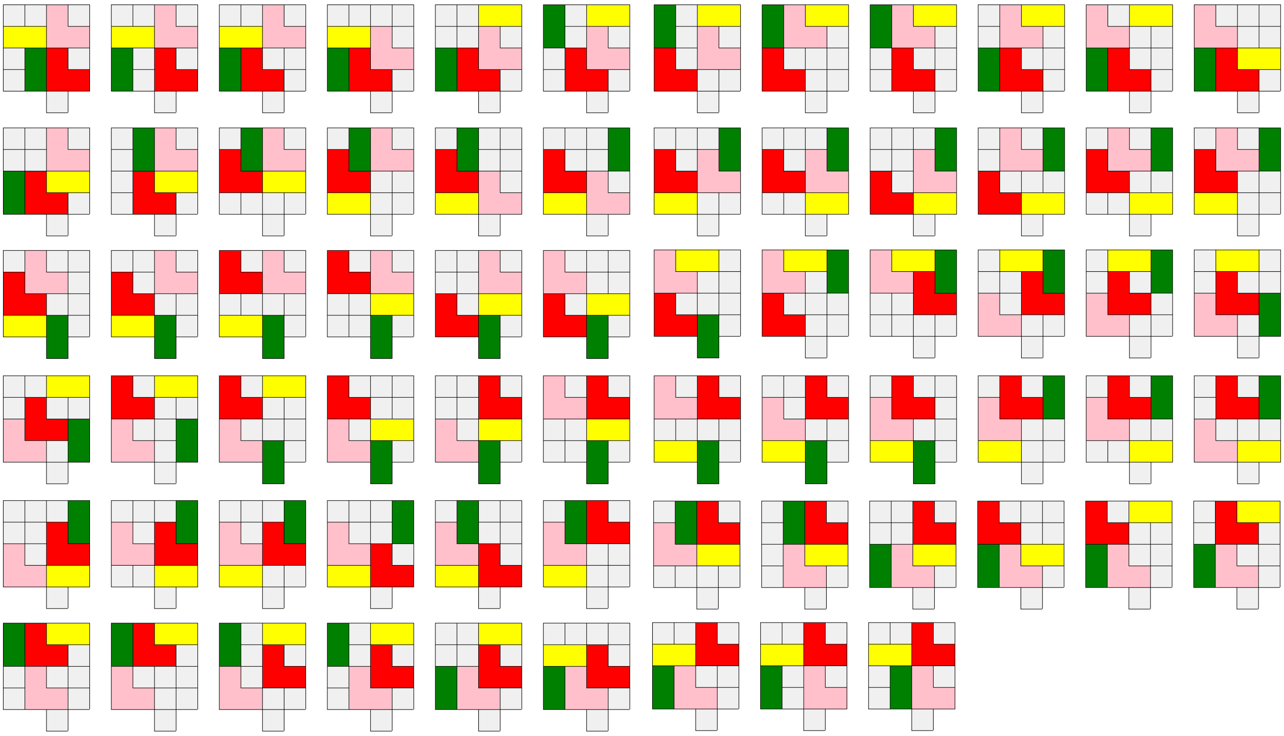


FIGURE 5.29 – *Solution du Simplicity 2 en 68 coups.*

J'ai examiné également l'autre question : peut-on inverser les pièces en L sur le plateau du *Simplicity* ? Pour cela, j'ai généré le graphe de ce jeu (530 configurations) et j'en ai examiné la connexité. La réponse est alors « Non » car les configurations inversées appartiennent à deux composantes connexes différentes contenant chacune 161 configurations (les mêmes que dans la composante principale de *Simplicity* en intervertissant les pièces en L). Par contre, la composante contenant 69 configurations du *Simplicity* se dédouble en fusionnant pour constituer sur ce plateau une composante de 138 configurations au sein de laquelle il est possible d'obtenir une inversion des pièces en L.

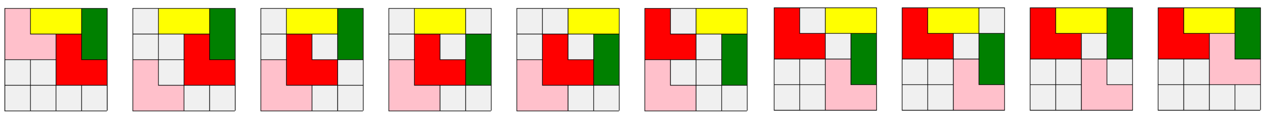


FIGURE 5.30 – *Inversion sur le plateau du Simplicity en 9 coups.*

Dans son article « *sliding-block Puzzles* »du 13 décembre 2004 de la MAA Online, Ed Pegg Jr. recherche les critères qui permettraient de juger de la difficulté d'un puzzle à pièces coulissantes. C'est là qu'il introduit son *Simplicity 2* qui se distingue des autres jeux difficiles nommés par le faible nombre de pièces. Le puzzle *Soap* qui est dû au même Ed Pegg Jr. doit être plus tardif car il n'est pas mentionné dans cet article.

Soap

Soap est un jeu de six pièces, ce qui le situe entre le classique âne rouge (dix pièces) et le minimaliste *Simplicity* (quatre pièces). Sa difficulté tient à la forme des pièces (deux pièces en L) et au grand nombre de possibilités à chaque étape lié au nombre important (six) de cases vides. Ce jeu se joue sur un plateau de 20 cases et nécessite au minimum 43 coups pour être résolu. L'objectif est ici d'échanger les deux pièces rectangulaires en replaçant les autres pièces à leur position initiale. Cet objectif et la composition du jeu étant assez proches de ceux du *Simplicity 2*, mon programme peut s'y adapter assez facilement.

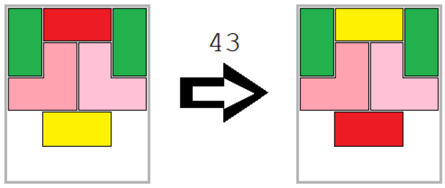


FIGURE 5.31 – *L'objectif du Soap est de parvenir à échanger les deux pièces horizontales tout en ramenant les autres pièces à leur position d'origine.*

Je commence par générer le graphe du jeu. Celui-ci se révèle assez important puisqu'il y a 19 908 configurations différentes lorsqu'on ne différencie pas les pièces verticales (on ne compte qu'une configuration lorsqu'on échange les deux pièces verticales). En différenciant les pièces verticales – ce que m'oblige à faire ma nouvelle procédure de détermination des voisins – il y en a le double, soit 39 816 ! Dans ce plus grand graphe, la distribution des configurations selon leur nombre de voisins montre qu'il y a environ $5,2$ voisins en moyenne par configuration.

FIGURE 5.32 – *Solution du Soap en* 43 *coups.*

La composante connexe principale occupe quasiment tout le graphe puisqu'elle contient 38 276 configurations. Les autres composantes (il y en a 104) contiennent entre 8 et 51 configurations. Le problème et sa solution appartiennent bien sûr à la composante principale. Je vérifie que la solution optimale demande 43 coups mais constate que cette solution échange les deux rectangles verticaux. Si ils étaient de deux couleurs différentes, on n'obtiendrait pas un retour à la position initiale en suivant ce chemin.

Il existe une solution en 44 coups qui n'échange pas les rectangles verticaux. Cette solution est, par ailleurs, un joli palindrome puisqu'elle peut se lire à l'endroit et à l'envers de la même façon : exception faite pour les rectangles horizontaux qui ont été peints de couleurs différentes pour mieux les distinguer, il y a une symétrie parfaite des configurations par rapport à la configuration centrale qui est elle-même symétrique.

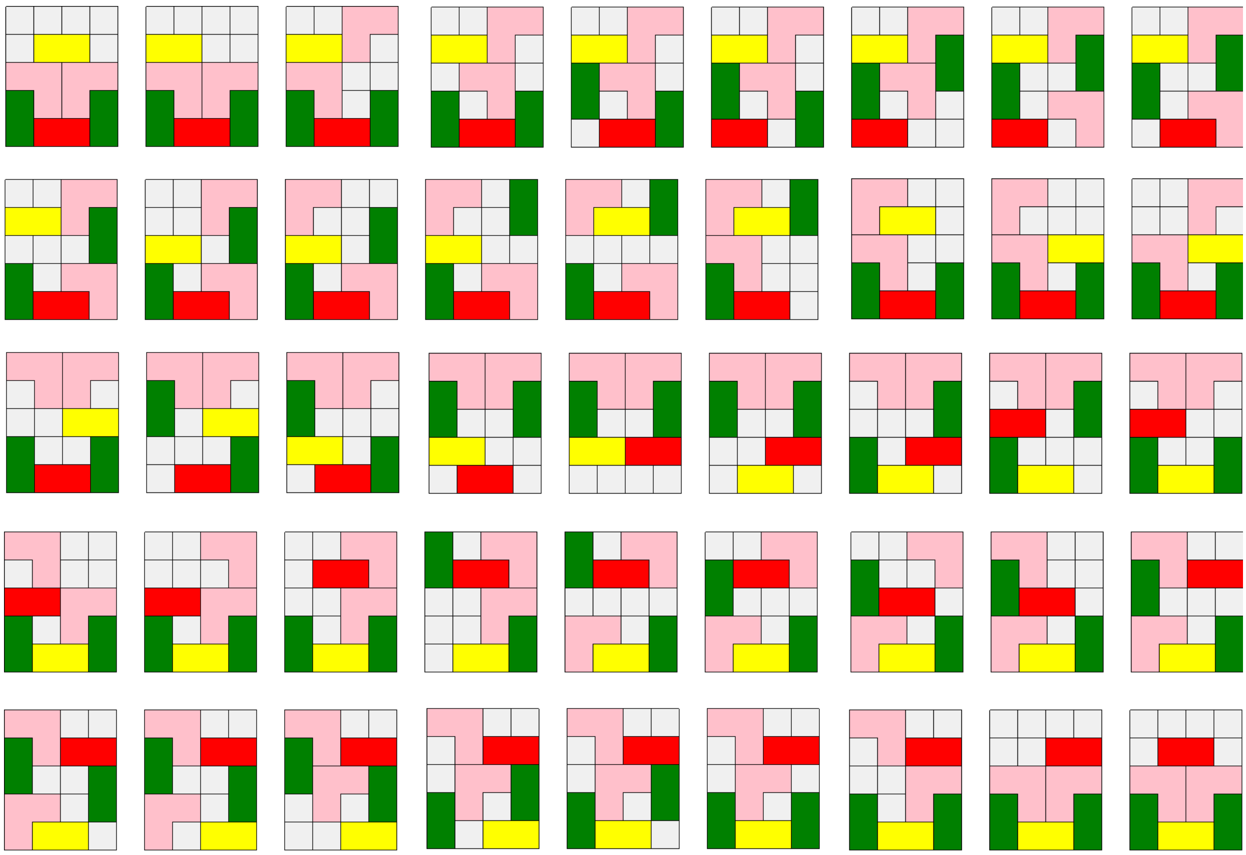


FIGURE 5.33 – *Solution-palindrome du Soap en 44 coups. Elle possède un axe de symétrie : le coup i et le coup 44-i sont symétriques par rapport à un axe vertical. La configuration centrale, celle du 22^e^ coup, inclut cet axe.*

Connaissant le graphe du jeu et disposant d'un programme qui permet de lister les voisins de chaque configuration et qui, ensuite, détermine les configurations accessibles en $1, 2, 3, \ldots n$ coups à partir d'une configuration donnée, je peux facilement créer de nouveaux problèmes et obtenir leur solution. Pour cette raison, je vais donc clôturer cette partie en donnant de nouveaux objectifs pour ce jeu de pièces. Dans les quatre problèmes qui suivent, il s'agit de passer d'une configuration symétrique à une autre. Avec un choix de couleurs limité à deux, j'individualise clairement chaque pièce et peut ainsi colorier mes configurations initiale et finale pour en souligner le côté symétrique.

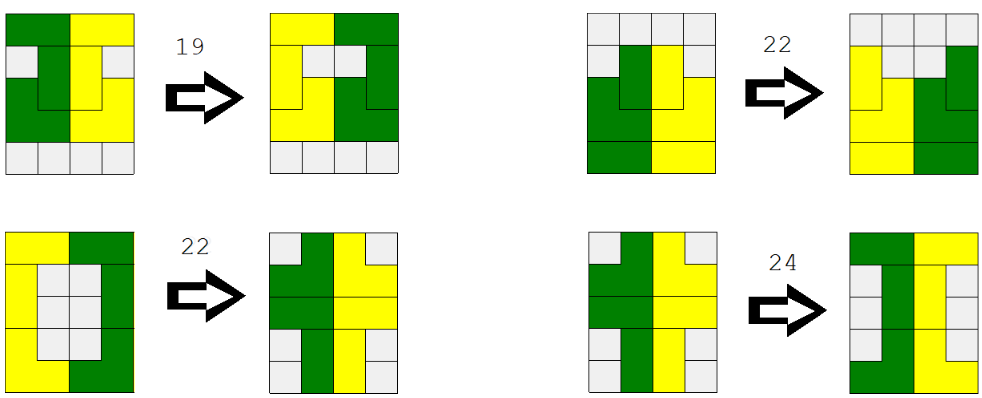


FIGURE 5.34 – *Quatre nouveaux problèmes avec les pièces du Soap recolorisé selon un bichromatisme qui en souligne la symétrie (solutions en annexe).*

Ces objectifs paraissent plus simples que celui du *Soap* si l'on en juge du petit nombre de coups nécessaires pour les atteindre. Mais ce critère est-il pertinent pour évaluer la difficulté ? Voici un dernier puzzle constitué des mêmes quatre pièces que le *Soap* mais dont la solution optimale nécessite 45 coups. Cette fois j'ai colorié les pièces avec un nouveau choix de quatre couleurs pour souligner à nouveau l'aspect symétriques des configurations extrêmes. Comme ce problème améliore le *Soap* dans le sens qu'il augmente la longueur du chemin optimum tout en respectant partiellement l'objectif de celui-ci (échanger les deux rectangles horizontaux), et pour faire un clin d'œil à Ed Pegg Jr. qui améliora avec son *Simplicity 2* le *Simplicity* de J. Stephens, je baptise ce nouveau problème *Soap 2*.

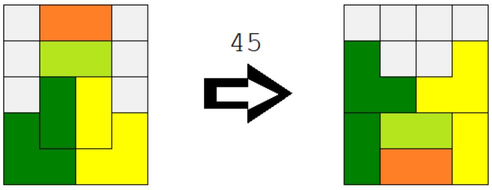


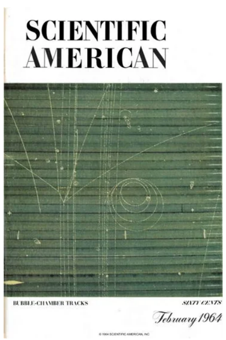
FIGURE 5.35 – *Le problème Soap 2 en quadrichromie (solution en annexe).*

3. Annexes

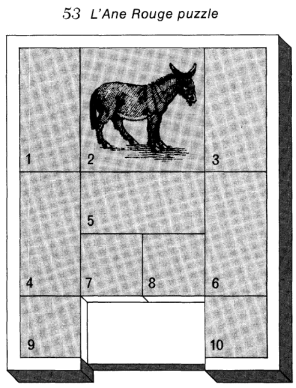
a. Martin Gardner

Martin Gardner (1914-2010) est un écrivain américain de vulgarisation mathématique et scientifique, aux intérêts portant aussi bien sur le scepticisme scientifique et la micromagie que sur la philosophie, la religion ou la littérature – en particulier les écrits de Lewis Carroll, L. Frank Baum, et G. K. Chesterton. Il est surtout connu pour la création et le maintien de l'intérêt pour les mathématiques récréatives tout au long de la seconde moitié du XXe siècle, grâce à ses colonnes *Mathematical Games*, qui parurent pendant vingt ans dans *Scientific American* et les livres suivants qui les regroupaient (d'après Wikipédia).

Dans son article de 1964, Gardner cite de très nombreux puzzles à pièces coulissantes dont le Taquin de Loyd (le fameux puzzle 14-15), le Dad'puzzler de 1926 et son prédécesseur de 1909, le Pennant puzzle. Gardner cite ensuite l'âne rouge et donne la solution en 81 coups dont il a été prouvé en 1964 qu'elle était optimale. Voici l'extrait de cet article concernant l'âne rouge. On remarquera la façon concise dont Gardner donne la solution en indiquant juste quelle pièce doit être jouée à chaque étape, en précisant le sens ou l'amplitude de ce mouvement, seulement lorsqu'il y a une ambigüité.



Dad's Puzzle is cut in half to make two unit squares, the resulting ten pieces provide the sliding blocks for a more difficult puzzle [*see Figure 53*] that has long been popular in France under the name of L'Âne Rouge (The Red Donkey). The object of the puzzle is to move the large square with the red donkey's picture to the bottom of the border so that it can be slid out of the box through the opening. A correspondent in Scotland recalls seeing an English version on sale in the early 1930's. More recently it has been sold in this country under such trade names as Intrigue, Mov-it Puzzle and Hako. The minimum-move solution requires 81 moves. It was worked out by Thomas B. Lemann, a New Orleans attorney; and it was proved minimal in 1964 by John Larmouth of Cambridge University, and later by Michel Hénon, both men using



Answer L'Âne Rouge: 81 moves.
9 (halfway), 4, 5, 8 (down), 6.
10 (halfway), 8, 6, 5, 7 (up, left).
9, 6, 10 (left, down), 5, 9.
7, 4, 6, 10, 8.
5, 7 (down, right), 6, 4, 1.
2, 3, 9, 7, 6.
3, 2, 1, 4, 8.
10 (right, up), 5, 3, 6, 8.
2, 9, 7 (up, left), 8, 6.
3, 10 (right, down), 2, 9, (down, right), 1.
4, 2, 9, 7 (halfway), 8.
6, 3, 10, 9 (down), 2.
4, 1, 8, 7, 6.
3, 2, 7, 8, 1.
4, 7 (left, up), 5, 9, 10.
2, 8, 7, 5, 10 (up, left).
2.

FIGURE 5.36 – *Couverture du Scientific American de février 1964 (vol.210 issue 2) et extraits de « Sliding-Block puzzles », l'article de Martin Gardner qu'il contenait concernant l'âne rouge.*

b. Variantes proches

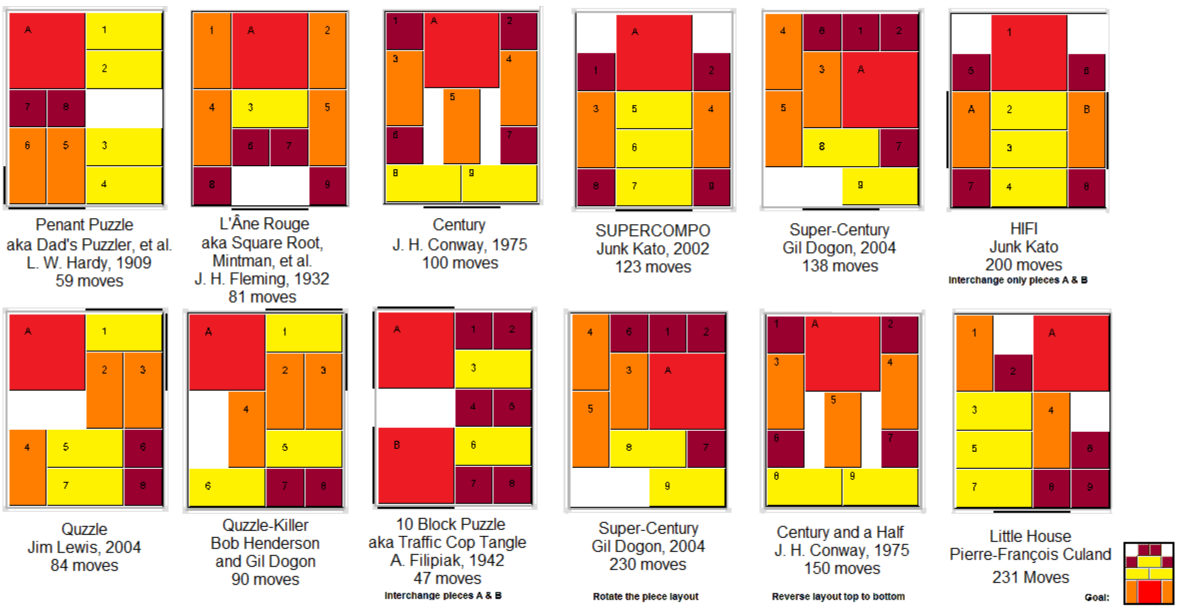


FIGURE 5.37 – *Les variantes proches du Klotski telles qu'on peut les trouver dans la littérature.*

c. Réponse aux questions posées

Réponse aux questions posées

FIGURE 5.38 – *Solution du problème de la figure 5.9 : les chemins optimum pour les quatre configurations finales symétriques en partant de la configuration initiale classique commencent tous par les 81 coups de la solution au problème de l'âne rouge.*

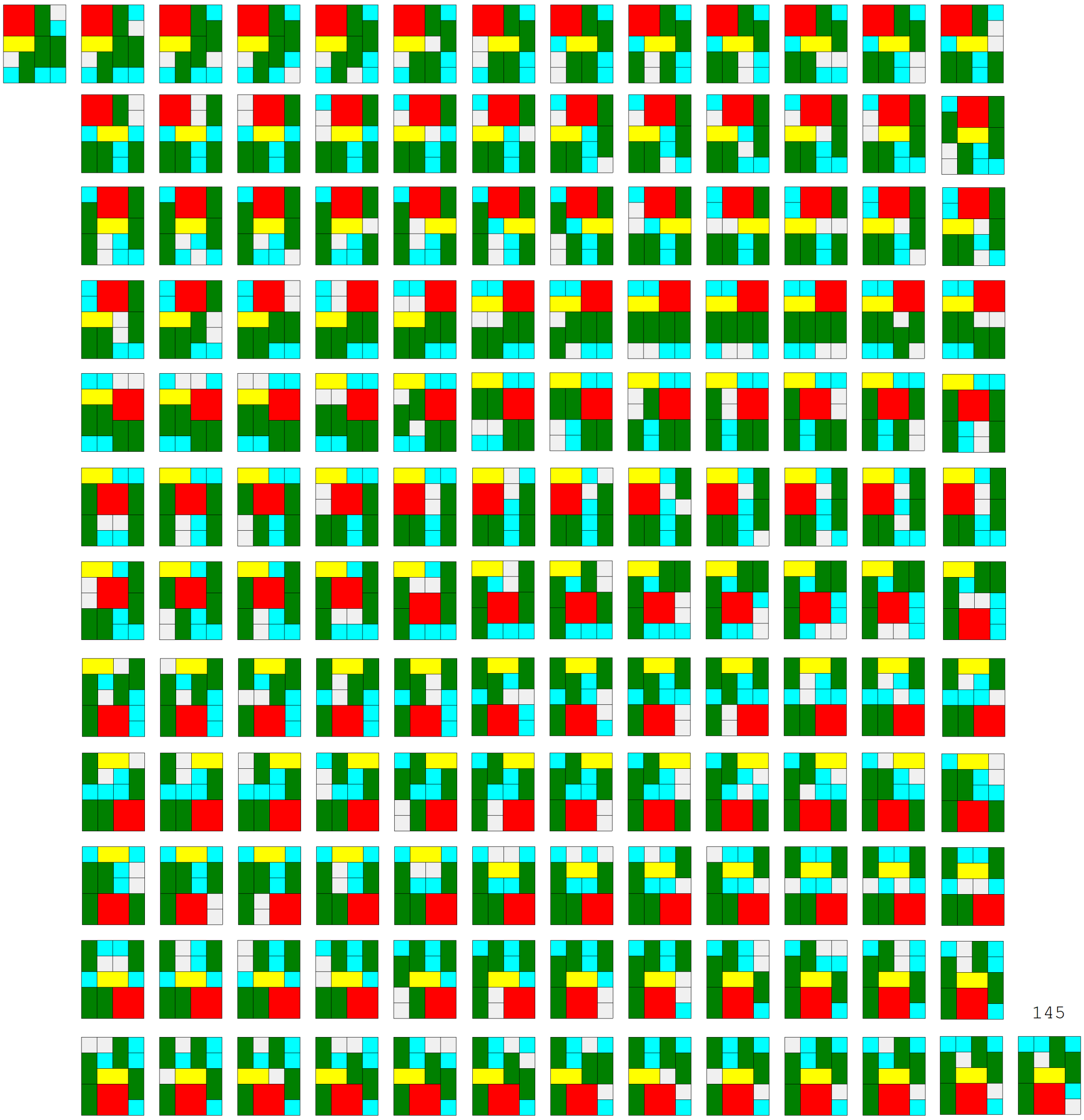


FIGURE 5.39 – *Solution du problème de la figure 5.11 : le plus long chemin du graphe appartient à l'ensemble connexe principal et est composé de 145 étapes.*

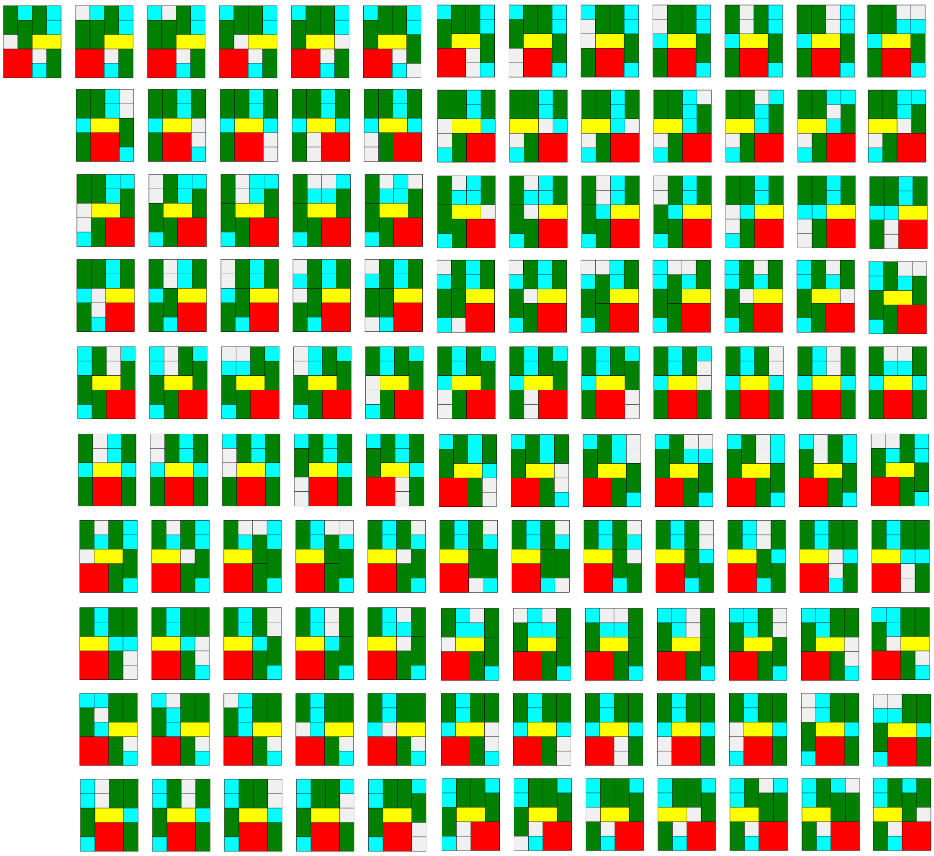


FIGURE 5.40 – *Solution du problème de la figure 5.13 : la plus longue inversion par rapport à un axe vertical est composée de 120 étapes.*

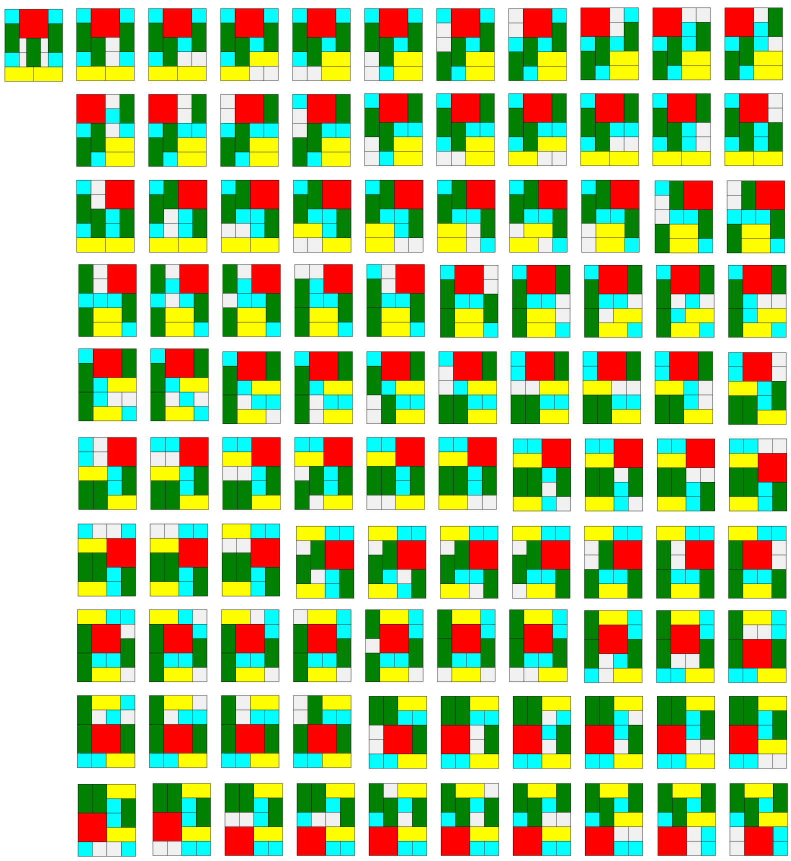


FIGURE 5.41 – *Solution complète du Century, le problème de la figure 5.16 qui se résout en 100 coups.*

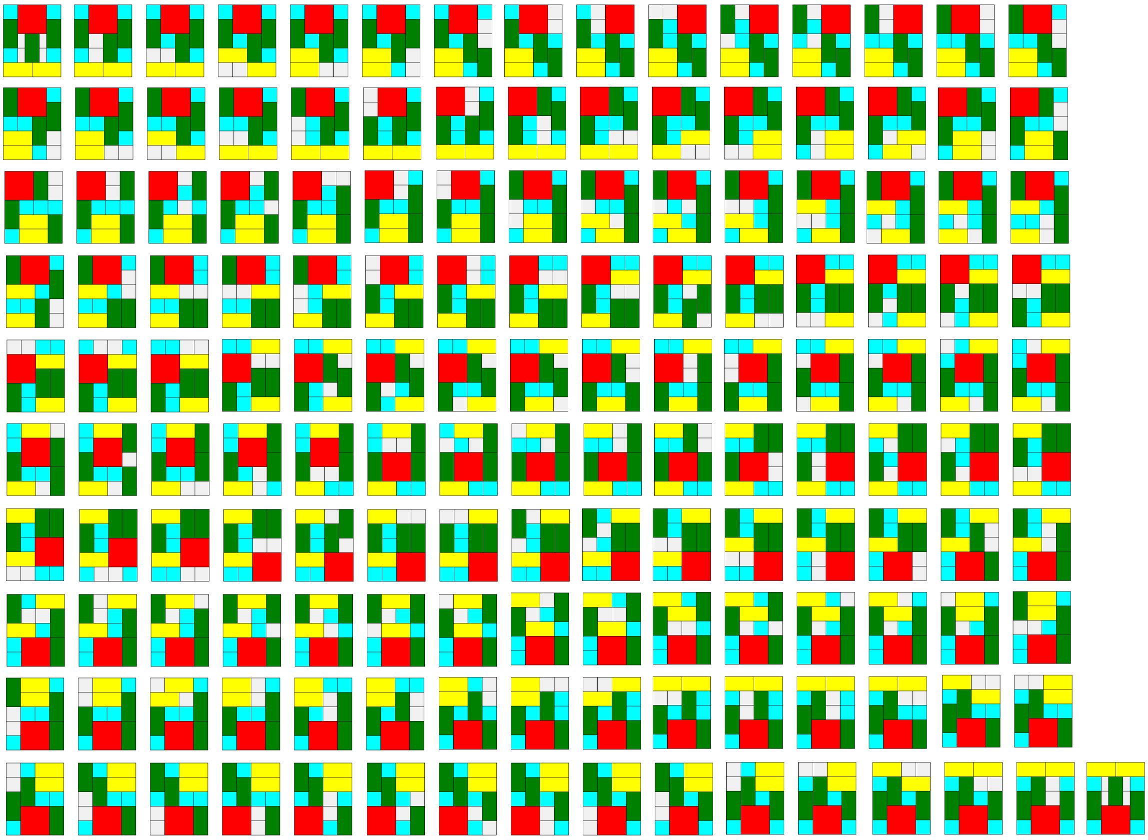


Figure 5.42 – *Le retournement du Century – problème de la figure 5.17 – se réalise en un minimum de 150 coups, d'où le nom de « Century and a half » qui lui a été donné.*

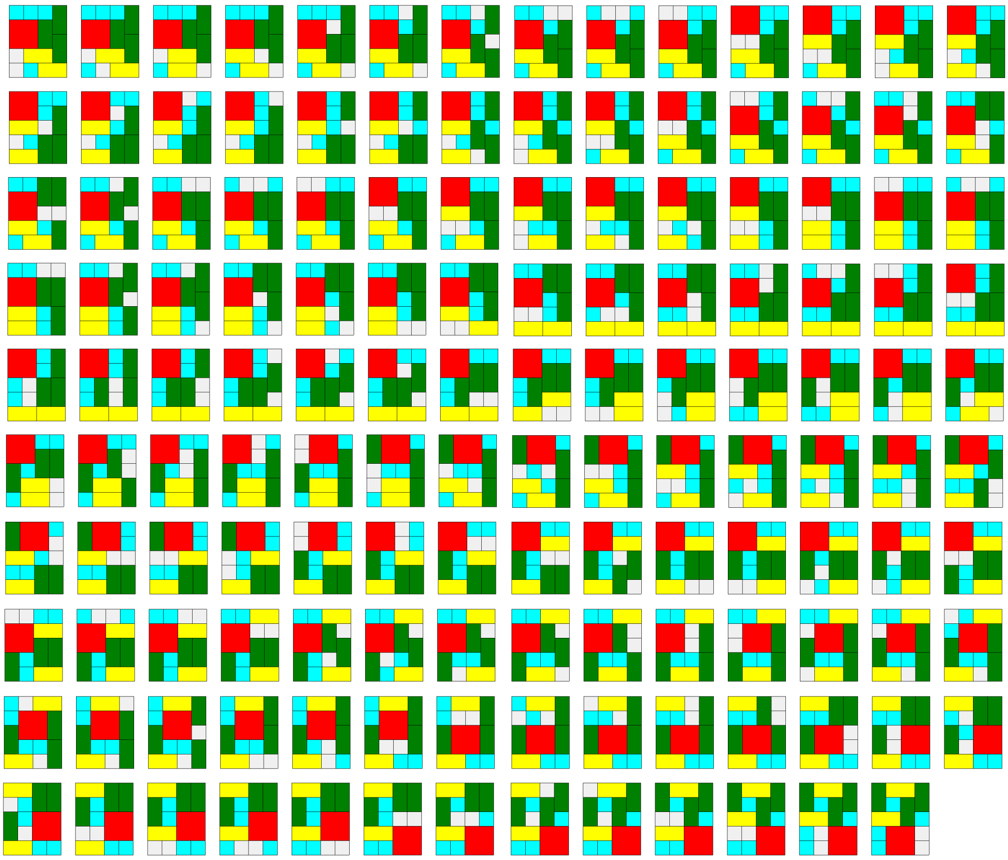


Figure 5.43 – *Solution du problème de gauche de la figure 5.18 : amener le gros carré au milieu du bord inférieur en 138 coups minimum.*

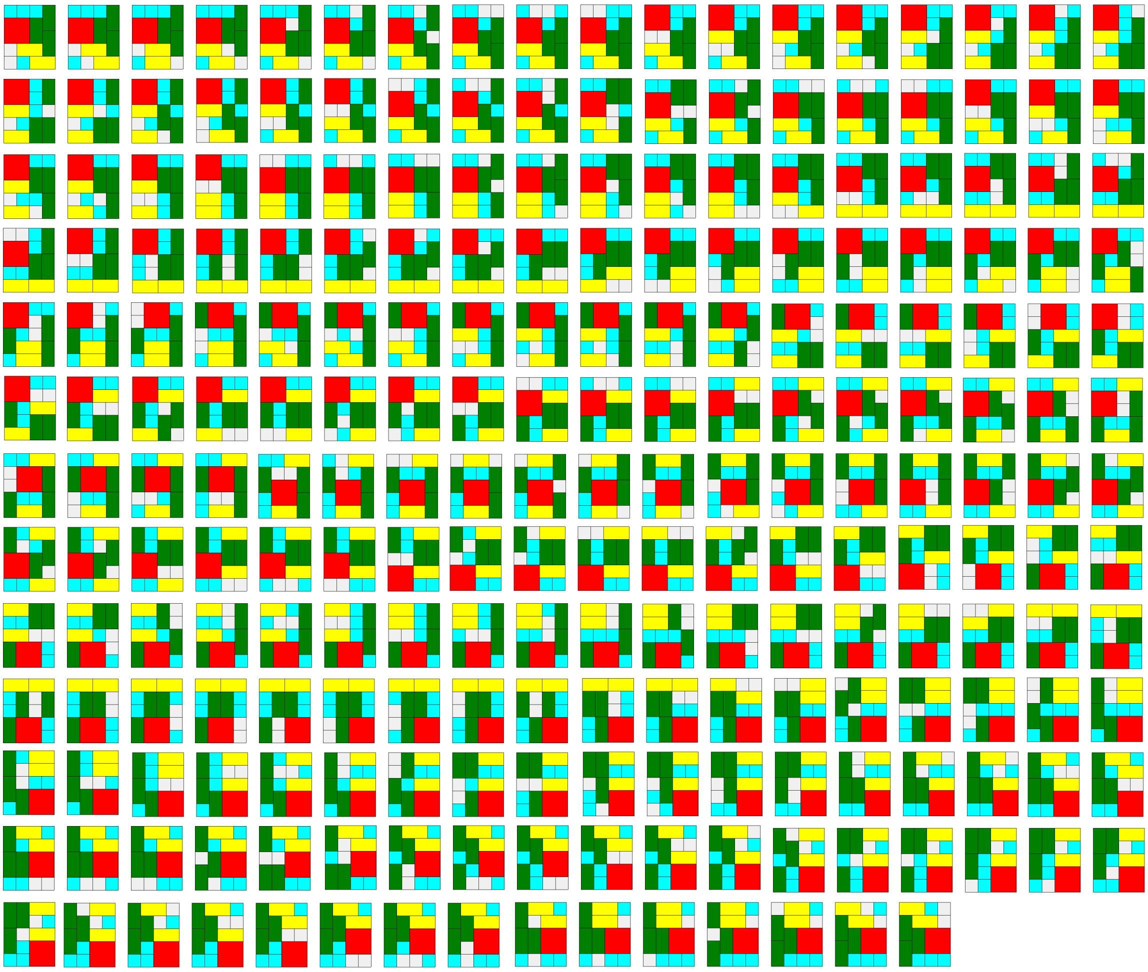
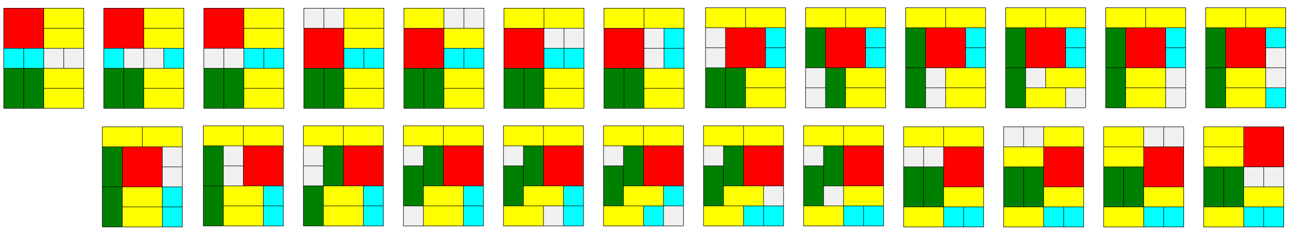


FIGURE 5.44 – *Solution du problème de droite de la figure* 5.18 *: retourner la configuration de* 180° *autour de son centre en* 230 *coups minimum.*



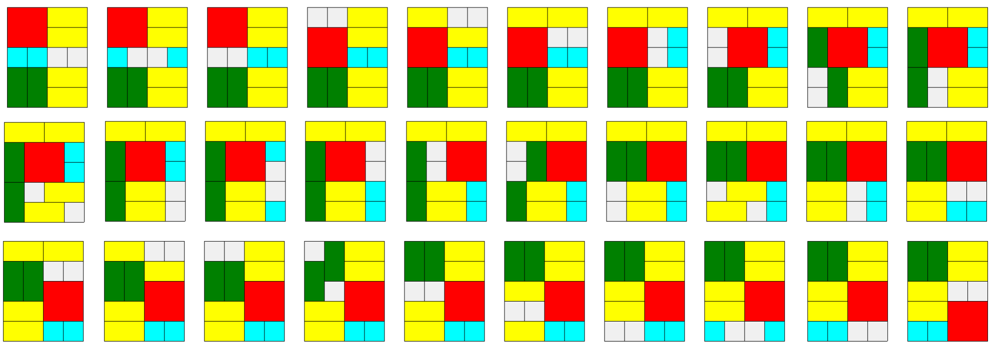


FIGURE 5.45 – *Solution du problème de droite de la figure* 5.20 *: atteindre un des coins de droite en partant de la configuration du « Pennant Puzzle » est possible en* 24 *et* 29 *coups minimum pour les coins haut et bas.*

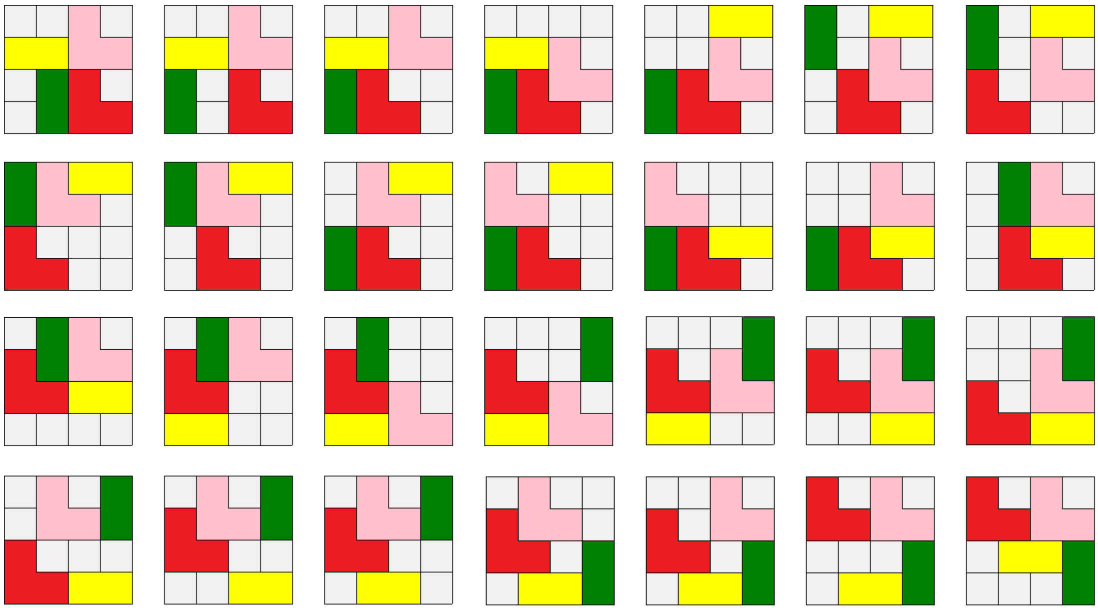


FIGURE 5.46 – *Le chemin optimum le plus long en partant de la configuration initiale du Simplicity a une longueur de 27 coups. En l'empruntant jusqu'au coup 26, on atteint pour la 1re fois les pièces rouge et rose côte à côte et dans cet ordre sur la rangée du haut.*

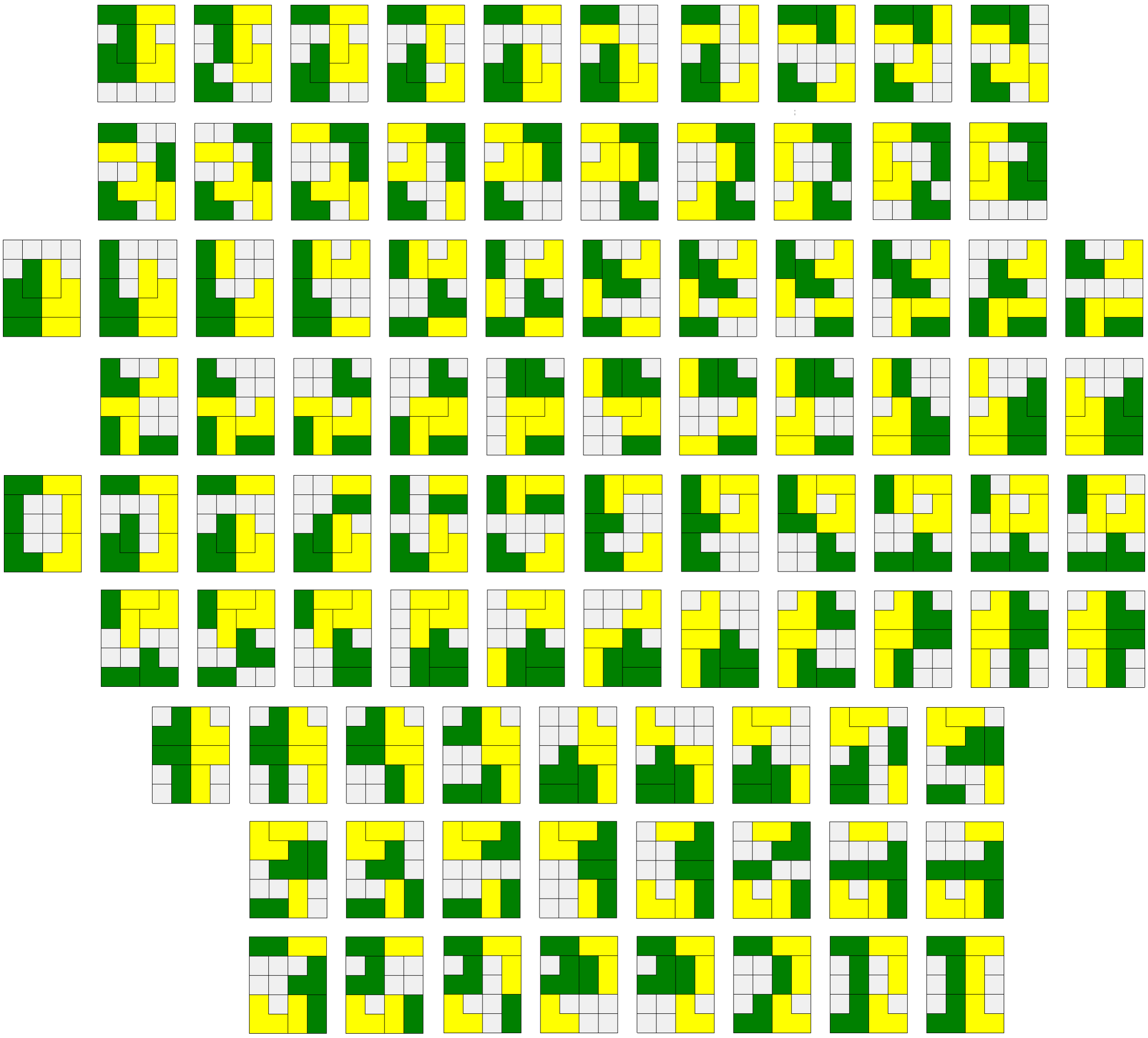


FIGURE 5.47 – *Solutions aux quatre problèmes avec les pièces du Soap.*

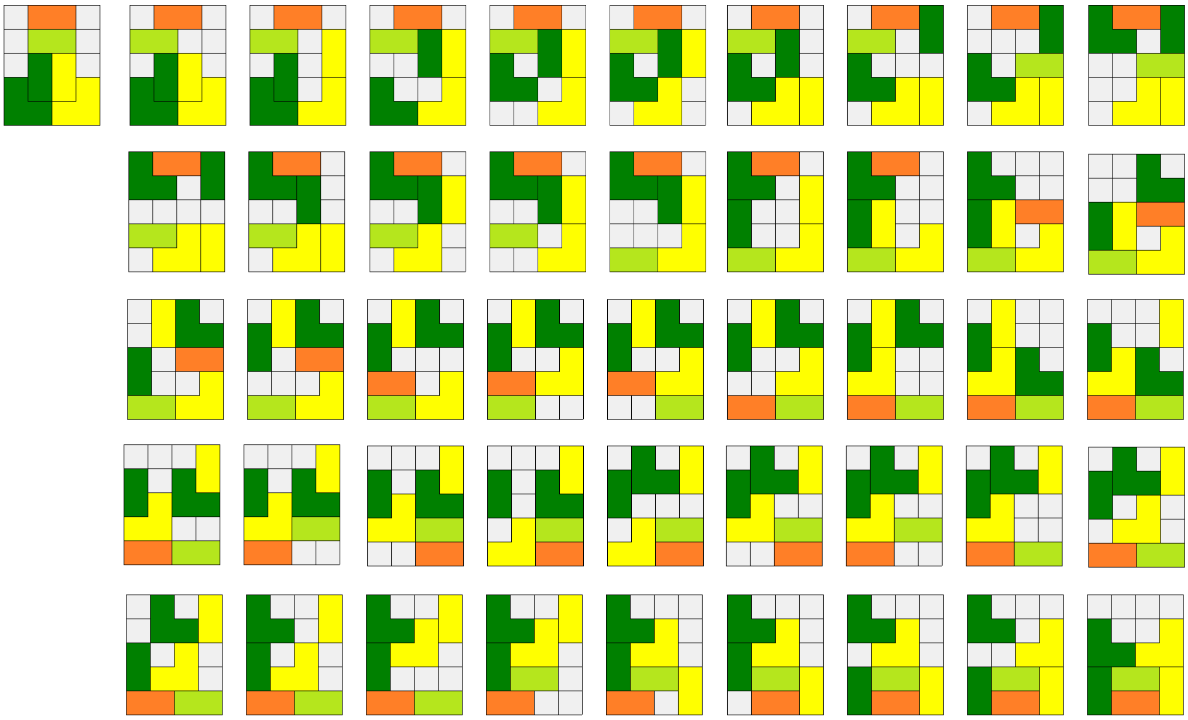


Figure 5.48 – *Solution du Soap 2.*