



Frises rationnelles

Qui veut faire de grandes choses doit penser profondément aux détails (Paul Valéry, Mauvaises pensées et autres)

On le remarque en classe de mathématiques, abordant la division « avec une virgule », lorsqu'on divise des nombres entiers entre eux, parfois la division « tombe juste », mais parfois il y a un ou plusieurs chiffres qui se répètent jusqu'à l'infini. Dans le premier cas, les quotients sont des nombres dits *décimaux*, dans les autres cas les nombres sont dits rationnels non-décimaux.

Les quotients $1 \div 2$, $3 \div 8$ et $93 \div 80$ sont des nombres décimaux car les divisions s'achèvent sur un reste nul : $1 \div 2 = 0,5$, $3 \div 8 = 0,375$ et $93 \div 80 = 1,1625$. Par contre $10 \div 9$, $10 \div 7$ et $100 \div 11$ sont des rationnels non-décimaux $10 \div 9 = 1,111\dots$, $10 \div 7 = 1,42857\dots$ et $100 \div 11 = 9,0909\dots$. La suite de chiffres se répétant jusqu'à l'infini est appelée *séquence périodique*, je noterai cette suite en la surlignant dans l'écriture décimale du nombre. La séquence périodique de $10 \div 9$ étant 1, je note ce nombre $1,\overline{1}$. De même, $10 \div 7$ et $100 \div 11$ ayant pour séquence périodique 428571 et 09, je note ces nombres $1,\overline{428571}$ et $9,\overline{09}$.

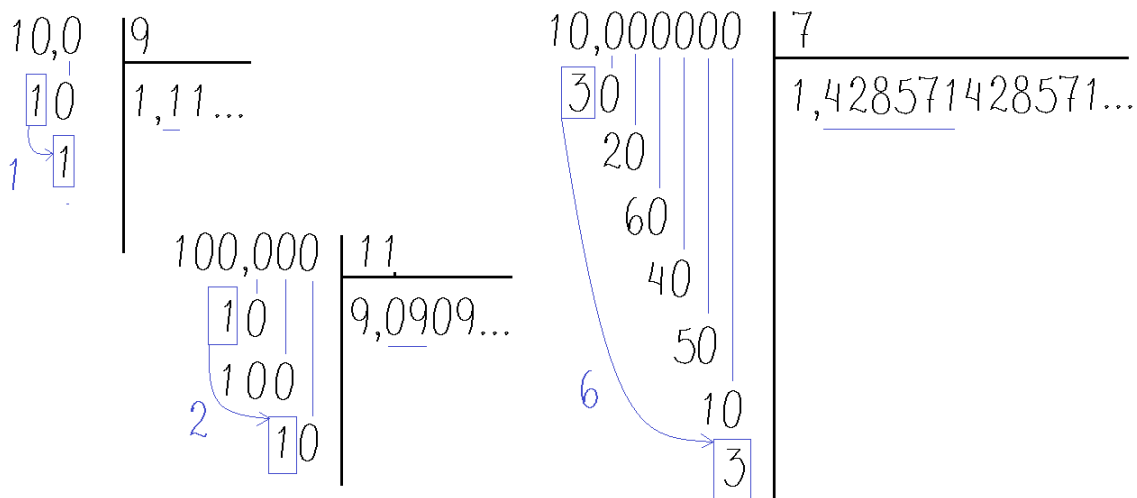


FIGURE 7.1 – Trois divisions effectuées « à la main » pour lesquelles ont été encadrés les premiers restes identiques qui en impliquent la répétition périodique ainsi que celle des chiffres du quotient.

Comme à chaque étape de l'algorithme de la division on doit obtenir un reste inférieur au diviseur, les différents restes que l'on peut obtenir, avant que l'un d'entre eux ne se répète, appartiennent tous à un ensemble fini qui ne contient que les nombres entiers non nuls strictement inférieurs au diviseur. Pour le dire autrement, si je note n le diviseur de cette division, cet ensemble peut être noté $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ou bien encore $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Comme il contient $n-1$ nombres, la division d'un entier par n conduit nécessairement à une séquence périodique de longueur inférieure ou égale à $n-1$.

Au passage, rappelons que les nombres décimaux (ceux dont la division tombe juste) ont deux écritures équivalentes : l'écriture *propre* pour laquelle la suite périodique est 0 et l'écriture *impropre* pour laquelle la suite périodique est 9. Par exemple $1 \div 2 = 0,5 = 0,4\overline{9}$. Les deux écritures sont possibles mais généralement on préfère l'écriture propre qui autorise de ne pas écrire la suite des zéros.

1. Nombres premiers

a. Nombres premiers longs

Parmi les nombres rationnels non-décimaux, quelques-uns ont la particularité de posséder une suite périodique de longueur maximale. Tous les restes de l'ensemble $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ sont alors rencontrés, dans un ordre particulier qui rend cela possible.

Dans l'exemple du quotient $10 \div 7$, les restes possibles appartiennent à l'ensemble $\llbracket 1; 6 \rrbracket = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et ils sont tous rencontrés dans l'ordre $3 - 2 - 6 - 4 - 5 - 1$ puisque 3 est le premier reste. Cela conduit à la séquence périodique 428571 qui se répète jusqu'à l'infini. Cette séquence de restes n'est pas propre au dividende puisqu'en modifiant celui-ci on obtient toujours la même succession périodique des restes et, concomitamment, des chiffres du quotient :

$1 \div 7 = 0, \overline{142857}$	$8 \div 7 = 1, \overline{142857}$	$15 \div 7 = 2, \overline{142857}$
$2 \div 7 = 0, \overline{285714}$	$9 \div 7 = 1, \overline{285714}$	$16 \div 7 = 2, \overline{285714}$
$3 \div 7 = 0, \overline{428571}$	$10 \div 7 = 1, \overline{428571}$	$17 \div 7 = 2, \overline{428571}$
$4 \div 7 = 0, \overline{571428}$	$11 \div 7 = 1, \overline{571428}$	$18 \div 7 = 2, \overline{571428}$
$5 \div 7 = 0, \overline{714287}$	$12 \div 7 = 1, \overline{714287}$	$19 \div 7 = 2, \overline{714287}$
$6 \div 7 = 0, \overline{857142}$	$13 \div 7 = 1, \overline{857142}$	$20 \div 7 = 2, \overline{857142}$
$7 \div 7 = 0, \overline{9}$	$14 \div 7 = 1, \overline{9}$	$21 \div 7 = 2, \overline{9}$

Sauf pour les cas où le numérateur est un multiple de 7, ce sont exactement les mêmes chiffres qui se répètent dans ces divisions ! Qu'elle vienne tout de suite ou qu'elle soit décalée, la séquence 142857 se répète, inlassablement, jusqu'à l'infini.

Si $2 \div 7$ donne la même séquence de chiffres que $1 \div 7$ alors que c'est son double, c'est que 142857×2 vaut 285714. Autrement dit, les six chiffres subissent une permutation circulaire lors de la multiplication par deux, et cette permutation débute par le 2^e plus grand chiffre qui est un 2. Il se produit une permutation du même type lorsqu'on multiplie 142857 par trois, quatre, cinq et six.

Quand on le multiplie par trois, la permutation obtenue débute par le 3^e plus grand chiffre qui est un 4, quand on le multiplie par quatre, la permutation obtenue débute par le 4^e plus grand chiffre qui est un 5, etc. La séquence de chiffres 142857 est ainsi dotée d'une propriété remarquable. Le double d'un nombre quelconque de six chiffres, par exemple $123456 \times 2 = 246912$ n'est pas constitué d'une permutation des chiffres du nombre. Il n'y a pas, normalement, de liaison entre les chiffres d'un nombre et ceux de son double ou de n'importe lequel de ces multiples.

$142857 \times 1 = 142857$	$142857 \times 2 = 285714$	$142857 \times 3 = 428571$
$142857 \times 4 = 571428$	$142857 \times 5 = 714285$	$142857 \times 6 = 857142$
$142857 \times 7 = 999999$		

Le nombre 142857 a ceci d'exceptionnel qu'il est cyclique. D'autres séquences possèdent la particularité d'être ainsi cycliques comme 0588235294117647 pour laquelle le 0 initial ne doit pas être omis :

$0588235294117647 \times 1 = 0588235294117647$	$0588235294117647 \times 2 = 1176470588235294$
$0588235294117647 \times 3 = 1764705882352941$	$0588235294117647 \times 4 = 2352941176470588$
$0588235294117647 \times 5 = 2941176470588235$	$0588235294117647 \times 6 = 3529411764705882$
$0588235294117647 \times 7 = 4117647058823529$	$0588235294117647 \times 8 = 4705882352941176$
$0588235294117647 \times 9 = 5294117647058823$	$0588235294117647 \times 10 = 5882352941176470$
$0588235294117647 \times 11 = 6470588235294117$	$0588235294117647 \times 12 = 7058823529411764$
$0588235294117647 \times 13 = 7647058823529411$	$0588235294117647 \times 14 = 8235294117647058$
$0588235294117647 \times 15 = 8823529411764705$	$0588235294117647 \times 16 = 9411764705882352$
$0588235294117647 \times 17 = 9999999999999999$	

Le produit $142857 \times 7 = 999999$ indiquait que la suite 142857 provient de la division par 7 car $999999 \div 7 = 142857$ et $1 \div 7 = 0, \overline{142857}$.

De même, la dernière ligne indique que la séquence de 16 chiffres provient de la division par 17 car $9999999999999999 \div 17 = 0588235294117647$ et $1 \div 17 = 0, \overline{0588235294117647}$.

Les seize restes possibles dans la division par 17 appartiennent à l'ensemble $\llbracket 1; 16 \rrbracket$ et se suivent dans un ordre cyclique qu'il est plus intéressant de visualiser sur un cercle car on s'aperçoit alors de la symétrie de la représentation. Les sommets de ce polygone à seize côtés sont orientés car toujours parcourus dans le sens $1 - 10 - 15 - 14 - 4 - 6 - 9 - 5 - 16 - 7 - 2 - 3 - 13 - 11 - 8 - 12$.

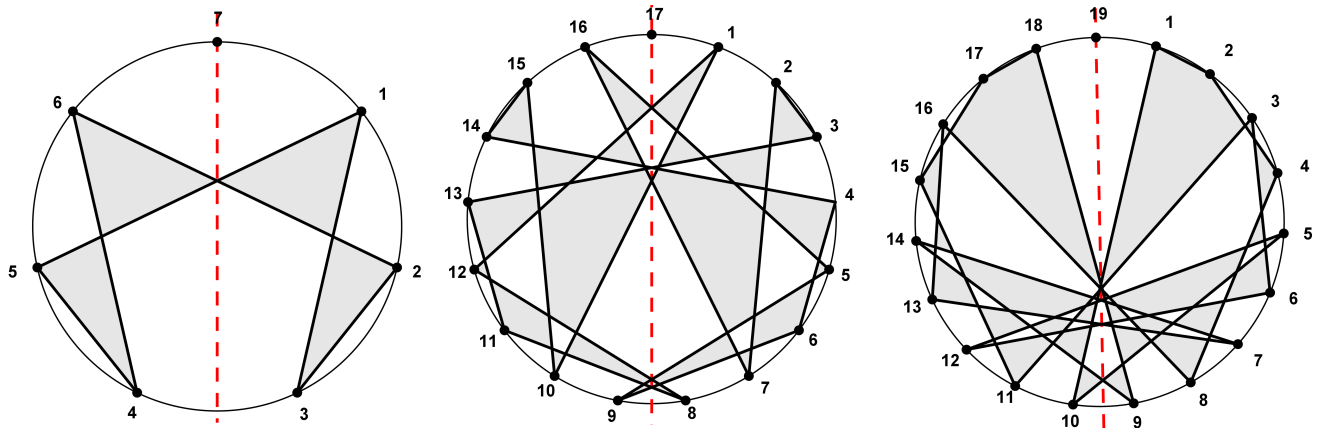


FIGURE 7.2 – Les trois suites de restes des divisions par 7, 17 et 19 dessinent un motif symétrique.

Les séquences périodiques des restes de la division par 7 et par 17 peuvent aussi être représentées dans une bande de largeur égale à 6 ou 16, soit le cardinal de l'ensemble des restes. En divisant cette bande en petits carrés d'une unité de côté et en noircissant le carré de coordonnées (a, b) où a est le rang du reste et b sa valeur, on obtient des frises que je qualifierai dans la suite de *frises rationnelles des restes*. Ici, les frises sont de type **F1g** (voir en annexe les différents types de frises), une symétrie glissée agissant sur la moitié du motif dessiné par les restes successifs.

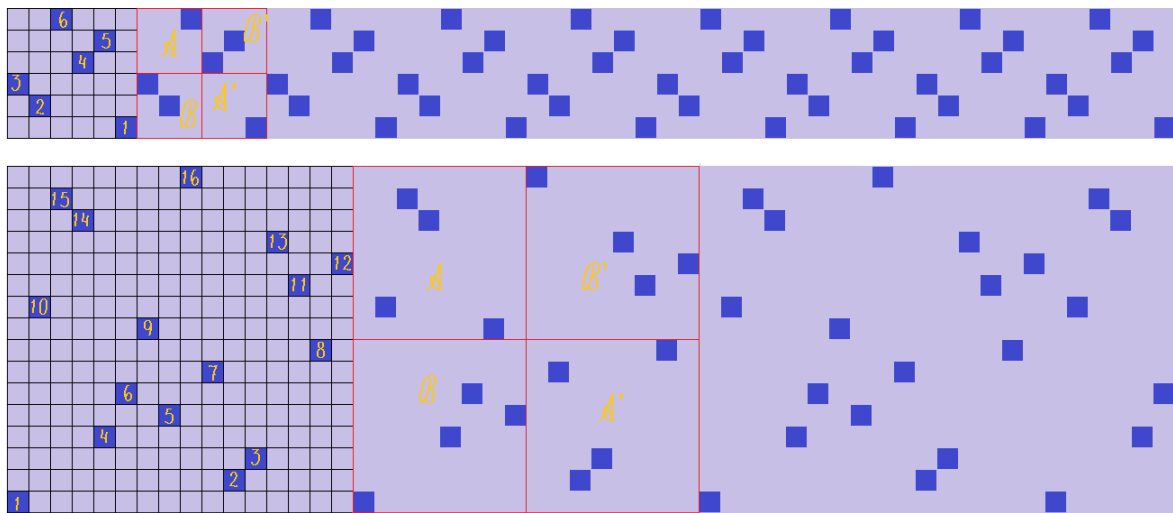


FIGURE 7.3 – Frises rationnelles associées aux restes des divisions par 7 et 17. Les carrés $\mathcal{A}$ sont retournés autour de l'axe central de la frise et translatés en $\mathcal{A}'$; de même, les carrés $\mathcal{B}$ sont transformés en $\mathcal{B}'$.

Une autre séquence cyclique est liée à la division par 19. Il s'agit de 052631578947368421. Pour ce 3^e nombre circulaire, on remarque le bel équilibre des chiffres de la séquence : tous les chiffres sont présents en double sauf 0 et 9 qui sont uniques. Les restes possibles dans la division par 19 appartiennent à l'ensemble $\llbracket 1; 18 \rrbracket$ et se suivent dans l'ordre cyclique et orienté $1 - 10 - 5 - 12 - 6 - 3 - 11 - 15 - 17 - 18 - 9 - 14 - 7 - 13 - 16 - 8 - 4 - 2$.

$$\begin{aligned}
052631578947368421 \times 1 &= 052631578947368421 & 052631578947368421 \times 2 &= 105263157894736842 \\
052631578947368421 \times 3 &= 157894736842105263 & 052631578947368421 \times 4 &= 210526315789473684 \\
052631578947368421 \times 5 &= 263157894736842105 & 052631578947368421 \times 6 &= 315789473684210526 \\
052631578947368421 \times 7 &= 368421052631578947 & 052631578947368421 \times 8 &= 421052631578947368 \\
052631578947368421 \times 9 &= 473684210526315789 & 052631578947368421 \times 10 &= 526315789473684210 \\
052631578947368421 \times 11 &= 578947368421052631 & 052631578947368421 \times 12 &= 631578947368421052 \\
052631578947368421 \times 13 &= 684210526315789473 & 052631578947368421 \times 14 &= 736842105263157894 \\
052631578947368421 \times 15 &= 789473684210526315 & 052631578947368421 \times 16 &= 842105263157894736 \\
052631578947368421 \times 17 &= 894736842105263157 & 052631578947368421 \times 18 &= 947368421052631578 \\
052631578947368421 \times 19 &= 999999999999999999 & &
\end{aligned}$$

À l'instar des séquences de restes, les séquences périodiques des chiffres d'un quotient peuvent aussi être représentées mais ici, toujours dans une bande de 10 unités de large (pour les 10 chiffres) ; on obtient alors les *frises rationnelles des quotients*. Pour les quotients de diviseurs 7, 17 et 19, ces frises sont de type F1g.

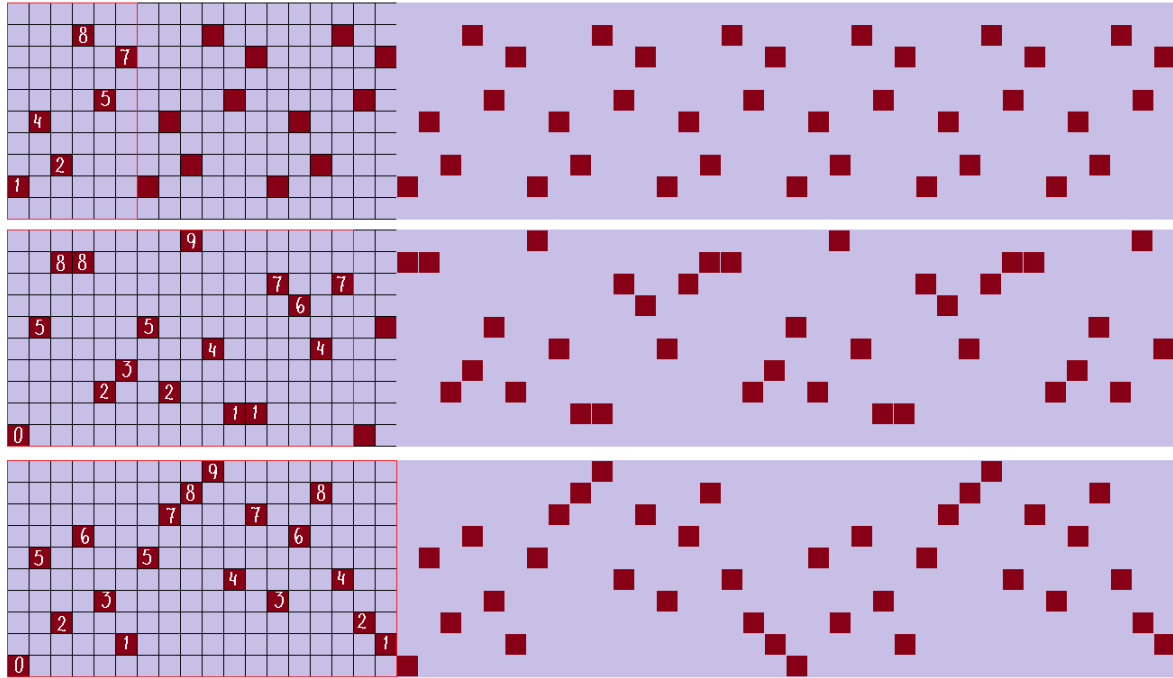


FIGURE 7.4 – Les frises rationnelles des quotients de diviseurs 7, 17 et 19.

On constate que les trois premiers nombres n cités conduisant à des séquences périodiques de $n - 1$ chiffres (7, 17 et 19) sont des nombres premiers. On qualifie ces nombres premiers de *longs* (*full reptend prime* en anglais) et il y en a plein d'autres. Pour tester si un nombre premier est long, on effectue la division chiffre par chiffre, comme si on la faisait à la main, de l'unité par ce nombre. On fait la liste des restes obtenus à chaque étape et on arrête le processus lorsqu'on en obtient un qui est déjà dans la liste.

Parmi les nombres premiers inférieurs à 100 il y en a neuf qui sont longs : 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97 et seize qui ne le sont pas : 2, 3, 5, 11, 13, 31, 37, 41, 43, 53, 67, 71, 73, 79, 83 et 89. Un gros tiers des nombres premiers de cet intervalle sont donc longs ($\frac{9}{25} \approx 36\%$). Pour affiner cette fréquence, en poussant ce programme un peu plus loin, on trouve soixante nombres premiers longs inférieurs à 1000 et cent-huit qui ne le sont pas, soit environ 35,7% ($\frac{60}{168}$). La fréquence des nombres premiers longs parmi les nombres premiers semble donc stable. D'ailleurs elle est supposée avoir pour valeur limite, si on examinait tous les nombres premiers (ce qui ne se peut pas), un nombre appelé *constante de Artin*¹.

1. Cette constante définie par le mathématicien Emil Artin (1898-1962) est supposée être la proportion exacte de nombres premiers longs parmi les nombres premiers. Le nombre p décrivant l'ensemble des nombres premiers, cette constante vaut
$$\prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{20}\right) \cdots = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{19}{20} \cdots \approx 0,3739558136.$$

b. Autres nombres premiers

Un nombre premier p quelconque ne conduit généralement pas à une séquence périodique contenant une permutation des mêmes $p - 1$ chiffres :

- ♦ La division par 2 ou par 5 conduit toujours à des nombres décimaux (répétition du 0).
- ♦ $1 \div 3 = 0,\overline{3}$, $2 \div 3 = 0,\overline{6}$. En divisant par 3, 1 seul chiffre se répète et non 2.
- ♦ $1 \div 11 = 0,\overline{09}$, $2 \div 11 = 0,\overline{18}$, $3 \div 11 = 0,\overline{27}$... en divisant par 11, 2 chiffres se répètent et non 10
- ♦ $1 \div 13 = 0,\overline{076923}$, $2 \div 13 = 0,\overline{153846}$... en divisant par 13, 6 chiffres se répètent et non 12

Ces nombres premiers qui ne sont pas longs n'ont pas une unique séquence périodique de longueur maximale mais différentes séquences périodiques qui sont également remarquables.

Divisions par 11

Dans la division d'un entier par 11, on trouve cinq séquences périodiques concernant chacune deux dividendes : 09 (pour 1 et 10), 18 (pour 2 et 9), 27 (pour 3 et 8), 36 (pour 4 et 7) et 45 (pour 5 et 6)

La somme des deux dividendes vaut à chaque fois 11.

Les restes dans la division par 11 appartiennent à l'intervalle $[1; 12]$ et correspondent évidemment aux différents dividendes qui conduisent à une séquence périodique particulière. Ceci étant vrai d'ailleurs pour n'importe quelle division (les différents restes, multipliés par 10, devenant successivement les nouveaux dividendes, conduisent aux mêmes chiffres du quotient), je parlerai dorénavant de la suite des restes car celle-ci est dotée d'un ordre que l'ensemble des dividendes n'a pas.

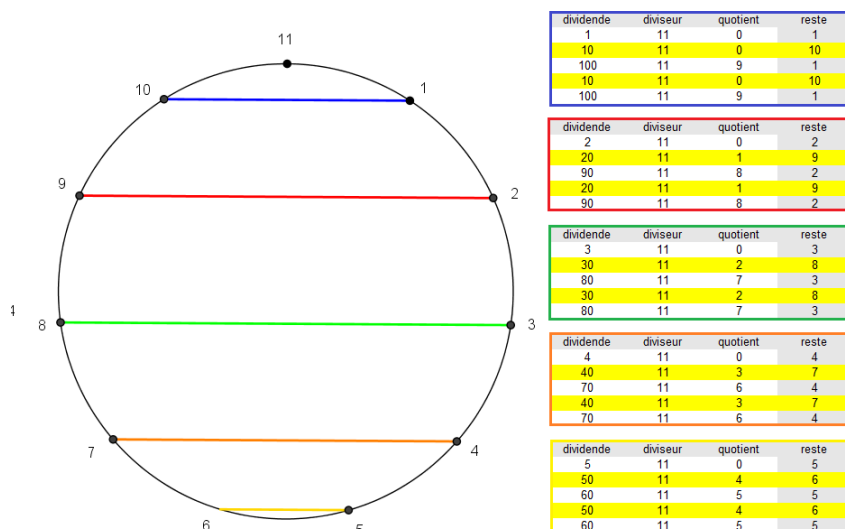


FIGURE 7.5 – Les cinq sous-ensembles de dividendes de la division par 11 répartis selon la suite périodique obtenue représentés dans un cercle (à gauche); ce sont également les séquences orientées des restes successifs (à droite).

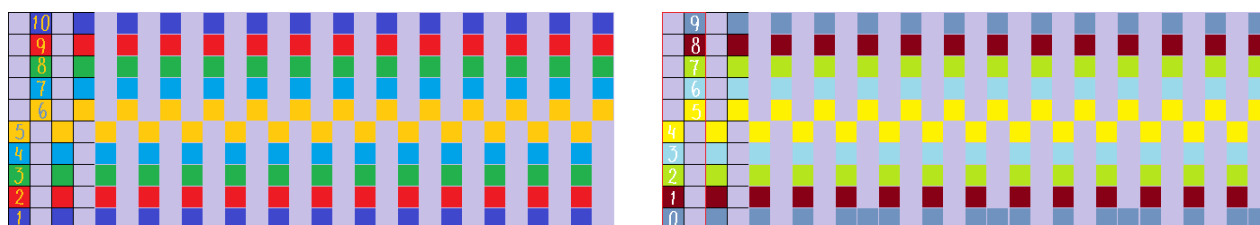


FIGURE 7.6 – Les frises rationnelles des restes (à gauche) et des quotients (à droite) pour les divisions par 11 sont identiques; seules les valeurs associées, décalées d'une unité, portent leur différence.

Divisions par 13

La division par 13 d'un entier non multiple de 13 conduit à deux séquences différentes de six chiffres 076923 et 153846. La première de ces séquences (076923) est obtenue en divisant 1, 3, 4, 9, 10 et 12 par 13 alors que la seconde (153846) est obtenue en divisant 2, 5, 6, 7, 8 et 11 par 13. Pour 076923 la permutation circulaire se

retrouve en multipliant par 1, 3, 4, 9, 10 et 12 mais saute sur l'autre séquence en multipliant par 2, 5, 6, 7, 8 et 11 par 13 (pour cette multiplication, on arrive sur 999999) :

$$\begin{array}{llll}
 076923 \times 2 = 153846 & 076923 \times 3 = 230769 & 076923 \times 4 = 307692 & 076923 \times 5 = 384615 \\
 076923 \times 6 = 461538 & 076923 \times 7 = 538461 & 076923 \times 8 = 615384 & 076923 \times 9 = 692307 \\
 076923 \times 10 = 769230 & 076923 \times 11 = 846153 & 076923 \times 12 = 923076 & 076923 \times 13 = 999999
 \end{array}$$

De la même façon, dans les produits de 153846 par 1, 3, 4, 9, 10 et 12 par 13 il y a permutation et dans ceux par 2, 5, 6, 7, 8 et 11 par 13 (pour cette multiplication, on arrive sur 1999998) on arrive sur l'autre séquence, avec une altération de la séquence dès que l'on dépasse six chiffres :

$$\begin{array}{llll}
 153846 \times 2 = 307692 & 153846 \times 3 = 461538 & 153846 \times 4 = 615384 & 153846 \times 5 = 769230 \\
 153846 \times 6 = 923076 & 153846 \times 7 = 1076922 & 153846 \times 8 = 1230768 & 153846 \times 9 = 1384614 \\
 153846 \times 10 = 1538460 & 153846 \times 11 = 1692306 & 153846 \times 12 = 1846152 & 153846 \times 13 = 1999998
 \end{array}$$

Ces sauts d'une séquence à l'autre obéissent à une loi interne dont on découvre un aspect en observant les deux sous-ensembles de six dividendes : $\{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$ et $\{2, 5, 6, 7, 8, 11\}$.

- ♦ Le cardinal de chacun de ces sous-ensembles est identique : 6
- ♦ La somme des nombres de chacun de ces sous-ensembles est identique : 39. Comme la somme des entiers de 1 à 12 vaut $1 + 2 + \dots + 12 = 13 \times 6 = 78$ et que cette somme est partagée en deux, il est assez logique d'obtenir 39, la moitié de 78.
- ♦ La répartition de ces nombres obéit à une symétrie par rapport au centre de l'intervalle $\llbracket 1; 12 \rrbracket$ auquel ils appartiennent (voir la figure ci-dessous) : si le nombre d appartient à un de ces sous-ensembles alors le nombre $13 - d$ appartient au même sous-ensemble. Autrement dit, les nombres d et d' appartiennent au même sous-ensemble si et seulement si $d + d' = 13$.

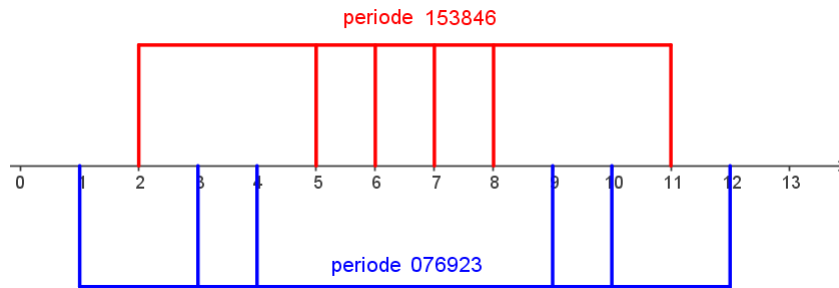


FIGURE 7.7 – Répartition des dividendes d'une division par 13 selon la suite périodique obtenue : les deux sous-ensembles, de même effectif et de même somme, présentent une belle symétrie.

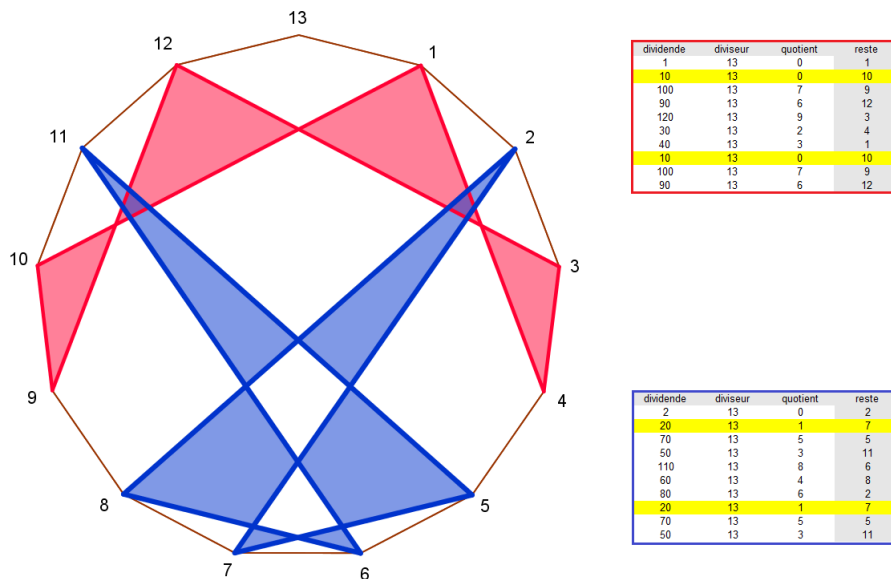


FIGURE 7.8 – Les deux sous-ensembles de dividendes de la division par 13 représentés dans un cercle (à gauche). Ces sous-ensembles sont également les séquences orientées des restes successifs (à droite).

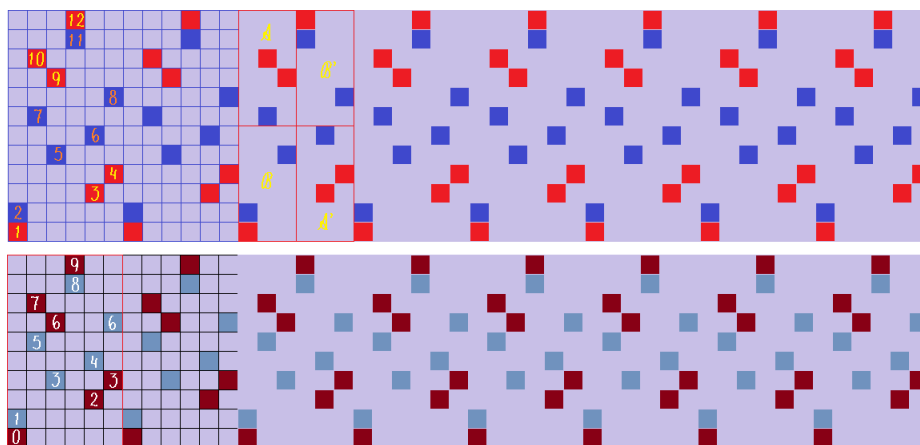


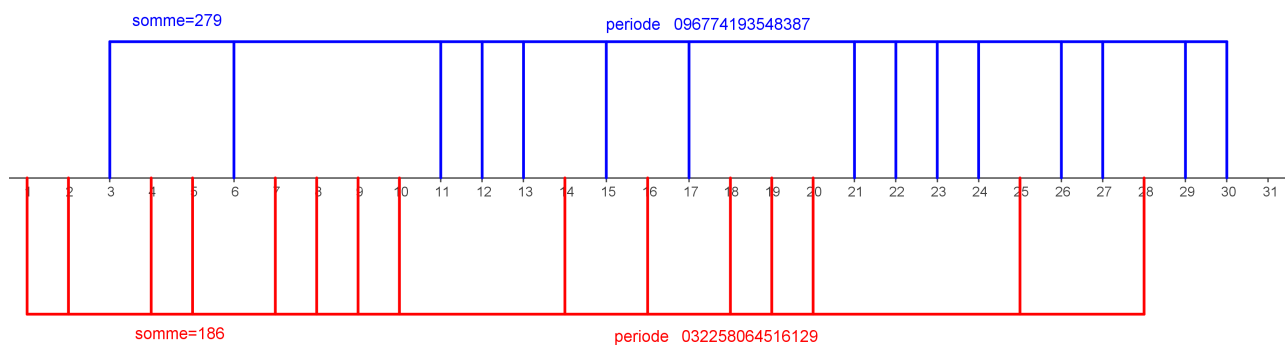
FIGURE 7.9 – Frises rationnelles des restes (en haut) et des quotients (en bas) pour les divisions par 13.

Divisions par 31

Dans la division par 31, la séquence qui se répète a une longueur de quinze chiffres et il y a seulement deux séquences différentes. Comme la somme des entiers de 1 à 30 vaut $1 + 2 + \dots + 30 = 31 \times 15 = 465$, cette somme ne peut être partagée en deux moitiés égales. Une des séquences doit avoir une somme inférieure à l'autre. La répartition s'effectue dans ce cas en 6 et 9 :

- ♦ Dans le 1^{er} groupe se trouvent des nombres (dividendes/restes) dont la somme égale $6 \times 31 = 186$. Les séquences périodiques répètent le motif 03225806451629 dont la somme des chiffres est $6 \times 9 = 54$.
- ♦ Dans le 2^e groupe se trouvent des nombres (dividendes/restes) dont la somme égale $9 \times 31 = 279$. Les séquences périodiques répètent le motif $03225806451629 \times 3 = 096774193548387$ dont la somme des chiffres est $9 \times 9 = 81$.

Les paires de compléments à 31 des nombres (comme 1 et 30 ou 15 et 16) sont dans des groupes différents car l'appariement au sein d'un même groupe est impossible, du fait de l'imparité de leurs effectifs (15). On se retrouve ainsi avec un partage qui présente une symétrie centrale entre les deux groupes.

FIGURE 7.10 – Partage des nombres de l'intervalle $\llbracket 1; 30 \rrbracket$ selon la séquence obtenue en divisant par 31.

On constate que les représentations sur un cercle des successions de restes admettent, encore ici, un axe de symétrie. Les représentations sous forme de frises, que ce soit la frise des restes ou celle des quotients, admettent également un axe de symétrie horizontal : les deux groupes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à cet axe horizontal. Il s'agit dans ce cas de frises du type F_m (voir en annexe).

Un autre constat doit être fait à ce stade : dans tous les exemples illustrés, les frises rationnelles des quotients ressemblent étrangement aux frises rationnelles des restes. Ces dernières sont plus étendues car l'intervalle $\llbracket 1; p - 1 \rrbracket$ des restes possibles devient de plus en plus grand, au fur et à mesure que le nombre premier p devient important. À contrario, la largeur des frises de quotients reste stable car, du fait qu'on reste dans la base 10, il y a toujours 10 chiffres et donc 10 unités dans leur largeur. Cependant, les similarités sont frappantes entre ces deux types de frises. Par la suite, compte-tenu de cette observation, je ne représenterai que les frises de quotients.

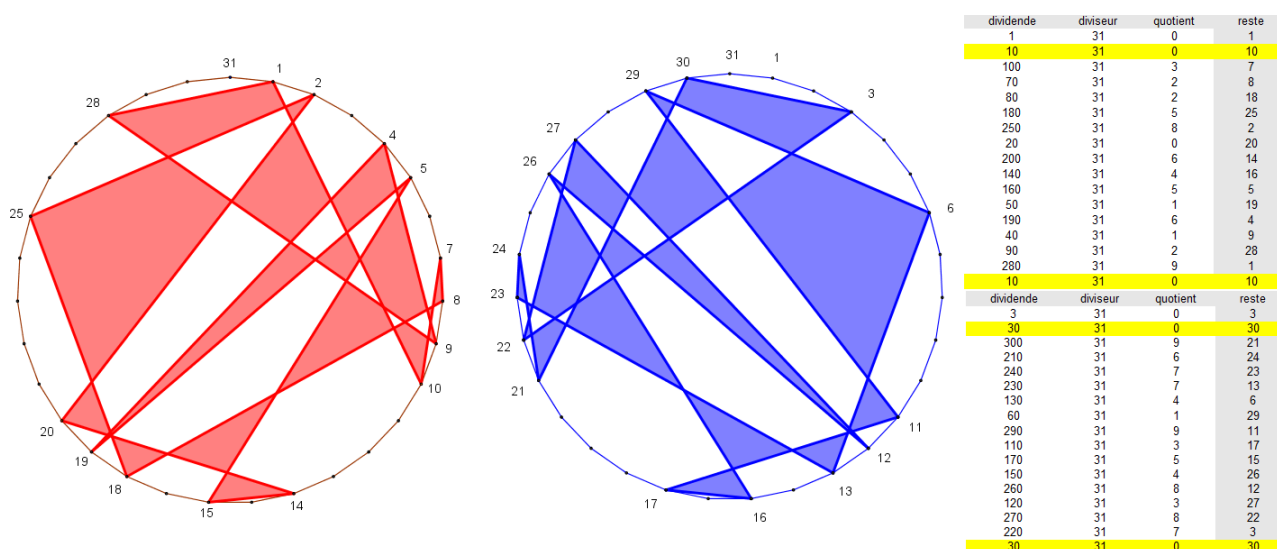


FIGURE 7.11 – Les deux sous-ensembles de dividendes de la division par 31 représentés dans deux cercles (à gauche). Ces sous-ensembles sont également les séquences orientées des restes successifs (à droite).

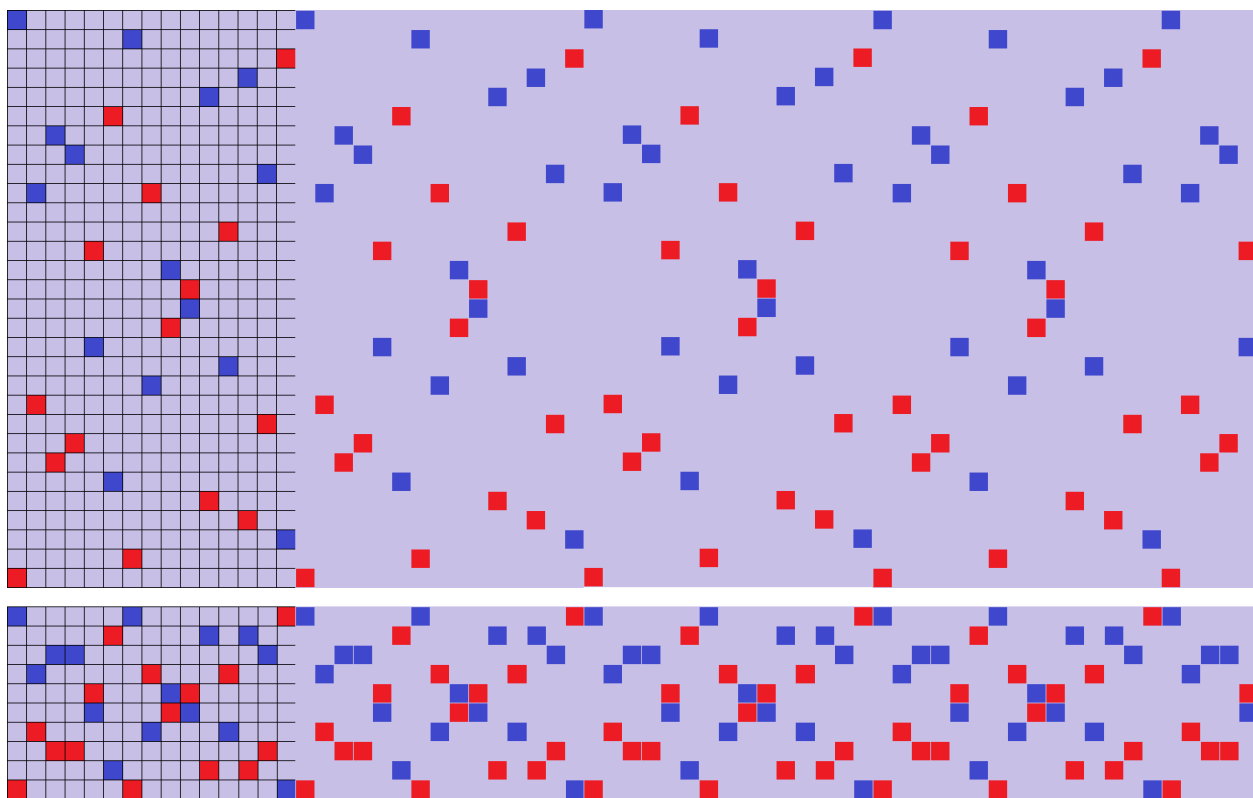


FIGURE 7.12 – Frises rationnelles des restes (en haut) et des quotients (en bas) pour les divisions par 31.

c. Trois types de nombres premiers

Arrivés à ce stade de l'exploration on peut faire une sorte de bilan concernant les frises rationnelles obtenues en ce qui concerne les nombres premiers. Sur le plan de la symétrie, il y en a de deux types : celles qui ont un axe de symétrie glissée et celles qui ont un axe de symétrie. Le nombre de groupes subdivise ces deux grandes catégories : seules les frises du premier type peuvent représenter un nombre premier long ; les autres nombres premiers peuvent appartenir aux deux catégories, cela dépend de la longueur de la séquence périodique. Lorsque la période est impaire, le nombre appartient à la 2^e catégorie, lorsqu'il est pair, il appartient à la 1^{re}.

Ce bilan étant de nature conjectural, il y aurait besoin de le conforter par de nouvelles données. Même si je m'aide d'un tableau pour obtenir les séquences des restes et des chiffres du quotient, ce travail devient trop laborieux : pour obtenir de nouvelles frises et confirmer ou infirmer mes hypothèses, j'élaboré un programme qui fera cela automatiquement et sans erreur.

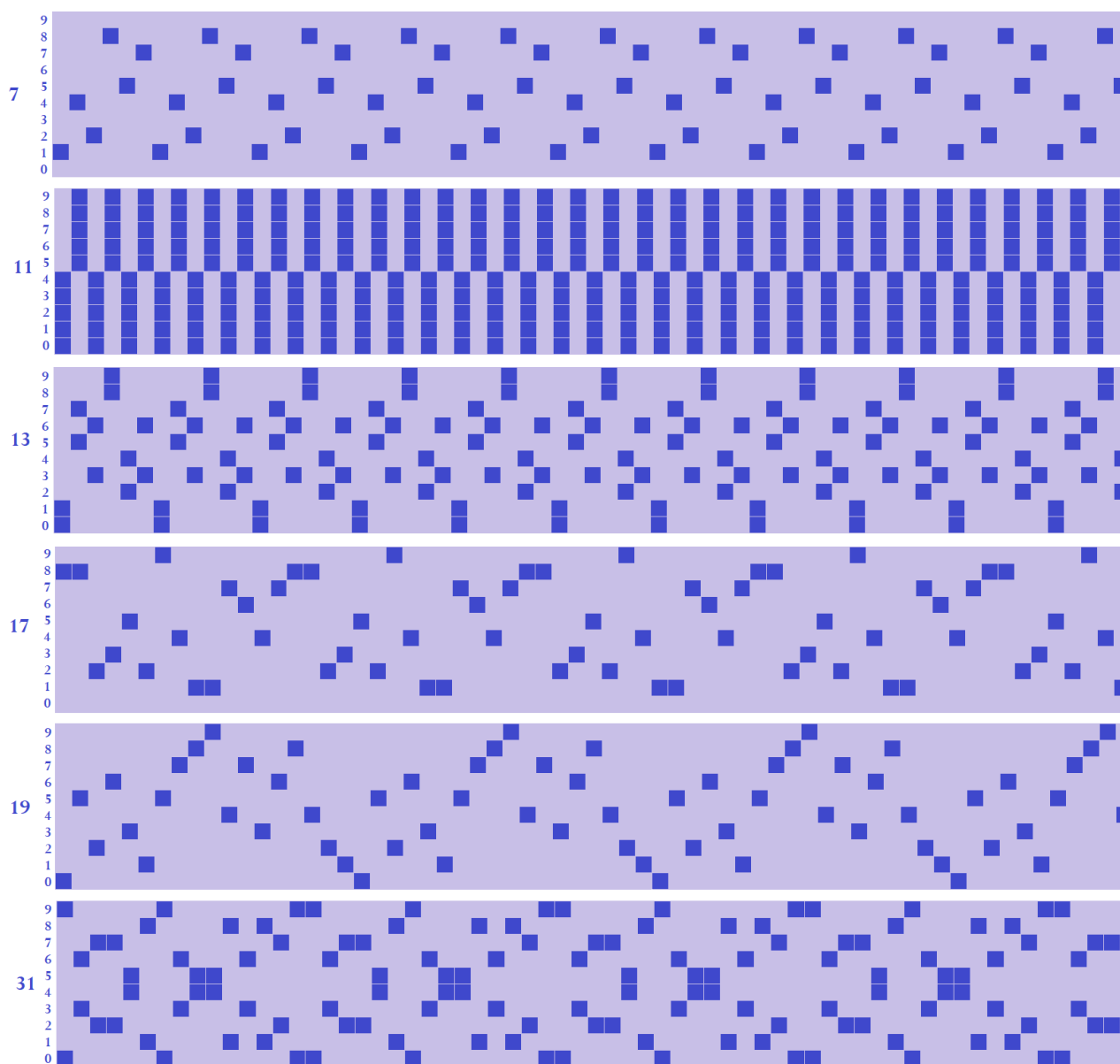


FIGURE 7.13 – Les frises rationnelles de quotients déjà rencontrées, rangées dans l'ordre croissant des nombres premiers auxquelles elles correspondent et colorées d'une seule couleur afin d'en faire ressortir la symétrie.

Pour les frises de quotients des nombres premiers non-longs inférieurs à 100, on peut réussir à tous les coups un appariement de deux séquences complémentaires lorsque la période (la longueur de la séquence périodique) est impaire, mais cette affirmation suppose que les nombres de périodes soient alors toujours pairs. Ce n'est qu'en effectuant cet appariement des couples de séquences périodiques qui se correspondent par symétrie que la frise résultante acquière un axe de symétrie horizontal. Sans l'appariement, les séquences périodiques de longueur impaire ne présentent aucun élément de symétrie. Dans la figure qui suit, mon programme a colorié les frises appariées de ce type avec une même couleur pour en faire ressortir la symétrie. Pour le nombre 37 qui présente 12 séquences périodiques de longueur impaire (3), on obtient ainsi 6 frises symétriques différentes.

Ces appariements de frises de quotients sont parfois également possibles lorsque la séquence est paire. Cela se produit notamment pour 11 et 13, mais cela est dû uniquement au fait que la longueur des séquences est courte : 5 séquences de longueur 2 pour 11 et 2 séquences de longueur 6 pour 13. J'avais spontanément dessiné les frises de ces nombres en les superposant (figure 7.6 pour 11 et 7.9 pour 13 ainsi que 7.13 pour les deux). Par la suite, cela devient souvent impossible de superposer les frises de quotients de longueur paire en évitant les chevauchements. De plus, la superposition de ce type de frise ne ferait que renforcer la symétrie-glissée qui se constate même lorsque les séquences ne sont pas superposées. Les nombres premiers longs p sont de beaux spécimens du genre : ils ont toujours une période paire égale à $p - 1$ et ont toujours une unique séquence magnifiquement symétrique.

Sur la page suivante j'ai représenté les frises rationnelles de quotients des nombres premiers non-longs inférieurs à 100. J'ai complété en annexe pour les nombres premiers allant de 100 à 200.

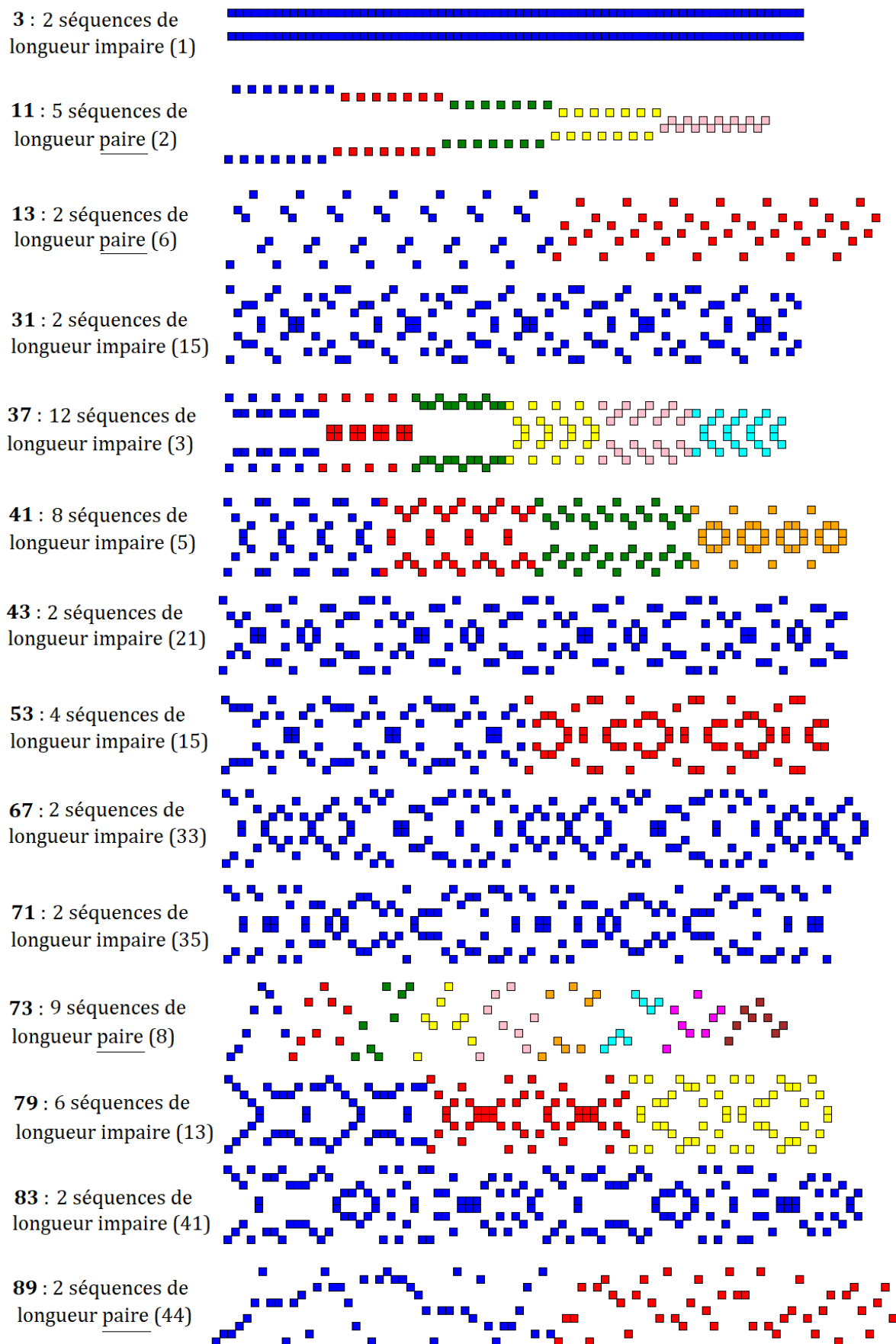


FIGURE 7.14 – Les frises rationnelles de quotients des nombres premiers non-longs inférieurs à 100. La superposition des séquences appariées de longueur impaire permet de faire ressortir la symétrie des motifs appariés. Les séquences de longueur paire ne sont jamais appariées ici ; elles présentent toujours une belle symétrie-glissée.

La répartition des 44 nombres premiers inférieurs ou égaux à 200 s'établit ainsi :

- ♦ 17, soit 38,6%, longs : 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193.
- ♦ 11, soit 25,0%, non-longs de longueur paire : 11, 13, 73, 89, 101, 103, 127, 137, 139, 157, 197.
- ♦ 16, soit 36,4%, non-longs de longueur impaire : 3, 31, 37, 41, 43, 53, 67, 71, 79, 83, 107, 151, 163, 173, 191, 199.

La proportion des non-longs de longueur impaire étant plus élevée ($\frac{10}{23} \approx 43,5\%$) avant 100 et plus faible ($\frac{6}{21} \approx 28,6\%$) entre 100 et 200, on peut penser que l'excès de cette catégorie peut être réduit lorsqu'on considère l'ensemble des nombres premiers. Tout cela reste évidemment conjectural, aucun argument mathématique évident ne soutenant l'hypothèse qu'il devrait y avoir autant de nombres de chacune de ces deux catégories de nombre premier non-long.

2. Changements de base

En base 7 où il n'y a que 7 chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), le nombre 7 s'écrit 10 et le nombre 7^2 s'écrit 100. Dans cette base 7^{-1} c'est à dire $\frac{1}{7}$ ($\frac{1}{10}$ en base 7) s'écrit 0,1 ce qui fait de ce nombre l'équivalent d'un nombre décimal dans cette base. Le nombre premier 7 n'est pas long en base 7 alors qu'il est long en base 10. Il joue le même rôle que les nombres 2 et 5 en base 10.

En base 11, 7 n'est pas long ($\frac{1}{7}$ s'écrit $0, \overline{163}$ en base 11, il n'y a que 3 chiffres dans la séquence périodique), par contre en base 12, 7 est long ($\frac{1}{7}$ s'écrit $0, \overline{186a35}$ en base 12, il y a bien 6 chiffres dans la séquence périodique). La liste des bases dans lesquelles le nombre premier 7 est long commence par 3, 5, 10, 12, 17, 19.

La caractéristique d'être un nombre premier long n'est donc pas une caractéristique intrinsèque des nombres premiers mais une conséquence du choix de la base de numération employée. La liste 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, etc. est la liste des nombres premiers longs en base 10, mais si on utilisait, comme les anciens celtes la base 20, la liste des nombres premiers longs commencerait par 3, 13, 17, 23, etc. Si on utilisait la base 2, comme les ordinateurs, cette liste commencerait par 3, 5, 11, 13, etc. Par contre en base 4 ou en base 16, il n'y a aucun nombre premier long et en base 9 il n'y a que le nombre 2 qui est long.

En base 7 le nombre premier 5 est long car il y a 4 chiffres qui se répètent dans l'écriture « décimale » de $\frac{1}{5}$ qui s'écrit $0, \overline{1254}$. Les nombres cycliques existent bien en base 7 : $1254 \times 2 = 2541$, $1254 \times 3 = 4125$, $1254 \times 4 = 5412$ et $1254 \times 5 = 6666$. La propriété de permutation des chiffres de ces séquences longues se retrouve en base 7. Le rôle du 9 en base 10 est attribué au 6 en base 7, et pour cette raison, l'écriture impropre des nombres « décimaux » en base 7 se termine par une succession infinie de 6 ($1 = 0, \overline{6}$ par exemple).

a. Condition nécessaire et suffisante

J'ai développé dans mon livre sur les nombres², dans la partie sur les nombres rationnels (pp. 109-137), l'explication mathématique du fait qu'un nombre premier p est long dans une base b : il faut et il suffit que b^{p-1} soit la première puissance de b à être congrue à 1 dans le modulo p . Autrement dit $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et $\forall q < p-1, b^q \not\equiv 1 \pmod{p}$. Je rappelle qu'être congru à 1 dans le modulo p signifie « avoir pour reste 1 dans la division euclidienne par p » et renvoie le lecteur à ce livre pour de plus amples détails.

b	b ²	b ³	b ⁴
1	1	1	1
2	4	3	1
3	4	2	1
4	1	4	1
5	0	0	0

mod 5

b	b ²	b ³	b ⁴	b ⁵	b ⁶
1	1	1	1	1	1
2	4	1	2	4	1
3	2	6	4	5	1
4	2	1	4	2	1
5	4	6	2	3	1
6	1	6	1	6	1
7	0	0	0	0	0

mod 7

FIGURE 7.15 – Tables des puissances de b dans le modulo 5 (à gauche) et 7 (à droite). Les chiffres 1 en gras signalent la première puissance de b à être congrue à 1 modulo p . Les cellules sur fonds colorés signalent un comportement habituel.

2. Comprendre et mieux connaître les nombres, *Algorithmes et programmation en Python*, P. Moutou, Ellipses, 2018

De même, il aurait fallu que $4^3 \not\equiv 1 \pmod{7}$ pour que 7 soit long en base 4 et que $4^5 \not\equiv 1 \pmod{11}$ pour que 11 soit long en base 4, etc. Hormis donc pour le nombre premier 2, la cause de l'absence de longs en base 4 est due à une première puissance de 4 égale à 1 trop précocement (avant la puissance $p - 1$ modulo p). Comme 4 est un carré ($4 = 2^2$), les puissances de 4 s'écrivent comme des puissances de 2 avec un exposant double : $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$.

$$\begin{array}{lll} 4^1 = 2^2 = 1 \pmod{3} & 4^2 = 2^4 = 1 \pmod{5} & 4^3 = 2^6 = 1 \pmod{7} \\ 4^5 = 2^{10} = 1 \pmod{11} & 4^6 = 2^{12} = 1 \pmod{13} & 4^8 = 2^{16} = 1 \pmod{17} \\ 4^9 = 2^{18} = 1 \pmod{19} & 4^{11} = 2^{22} = 1 \pmod{23} & 4^{14} = 2^{28} = 1 \pmod{29} \end{array}$$

Il s'agit donc toujours de 2^{p-1} modulo p qui, toujours égal à 1, empêche l'existence de nombres premiers longs dans la base 4. Cela n'est pas la condition nécessaire et suffisante. Il s'agit d'un autre résultat, intitulé « petit théorème de Fermat »³, une propriété des nombres premiers :

Si un nombre p est premier alors, pour tout entier n non multiple de p , on a $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Ce théorème explique pourquoi, pour toute base b non multiple de p , on trouvait $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ pour tous les nombres premiers p . C'est uniquement quand il y a une puissance de b inférieure à $p - 1$ qui est égale à 1 modulo p que le nombre premier p n'est pas long en base b .

Comme tous les nombres premiers supérieurs à 2 sont impairs, $p - 1$ est toujours pair. On peut alors écrire $p - 1 = 2p'$ et le petit théorème de Fermat $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ s'écrit alors $2^{2p'} = 4^{p'} \equiv 1 \pmod{p}$ avec $p' < p$ car $p' = \frac{p-1}{2}$. Ainsi, pour tous les nombres premiers $p > 2$, p ne peut jamais être long en base 4.

Le raisonnement pour la base 4 peut être étendu à toutes les bases qui sont des carrés d'entier. Par exemple pour la base $b = 9 = 3^2$, le petit théorème de Fermat implique que $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ mais comme $p - 1 = 2p'$ avec $p' < p$ on a $3^{p-1} = 3^{2p'} = 9^{p'} \equiv 1 \pmod{p}$. Par conséquent, bien que $9^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, $p - 1$ n'est pas la première puissance de 9 à être égale à 1 modulo p , ce qui fait que p n'est pas long en base 9. Cela est valable pour tous les nombres premiers impairs, soit tous les nombres premiers sauf 2.

Pour le nombre premier $p = 2$, le raisonnement est différent : $2^1 \equiv 0 \pmod{2}$ ou $4^1 \equiv 0 \pmod{2}$ mais $3^1 \equiv 1 \pmod{2}$ ou $9^1 \equiv 1 \pmod{2}$. Les nombres pairs sont égaux à 0 modulo 2 et les nombres impairs à 1. Or, comme tous les carrés de nombres pairs sont pairs et tous les carrés de nombres impairs sont impairs, pour les bases b^2 avec b pair ($b = 2k$) comme 4, 16 ou 36, le nombre $p = 2$ n'est pas long (car $(b^2)^1 = b^2 = (2k)^2 \equiv 0 \pmod{2}$ alors qu'il faudrait que $b^2 \equiv 1 \pmod{2}$ pour que $p = 2$ soit long en base b) alors que pour les bases b^2 avec b impair ($b = 2k + 1$) comme 9, 25, ou 49, le nombre $p = 2$ est long (car $(b^2)^1 = b^2 = (2k + 1)^2 \equiv 1 \pmod{2}$).

Longueur des séquences périodiques

L'explication du $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ ne semble pas liée au petit théorème de Fermat. Cependant, en considérant que $2 = 4^2 \pmod{7}$, on obtient $2^3 = (4^2)^3 = 4^6 \equiv 1 \pmod{7}$ qui s'explique par le théorème car 7 est un nombre premier et 4 est premier avec 7. De même $6^2 \equiv 1 \pmod{7}$ s'explique en utilisant le fait que $6 = 3^3 \pmod{7}$ car alors $6^2 = (3^3)^2 = 3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ puisque 7 est premier et 3 est premier avec 7.

Dans la table des puissances modulo 7 (figure 7.15), on lit $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ et, en effectuant la division de 1 par 7 en base 2 : $\frac{1}{7_{(10)}} = \frac{1}{111_{(2)}} = 0,001_{(2)}$, on constate une séquence périodique de 3 chiffres. Peut-on généraliser cette observation et inférer qu'il y a 3 chiffres dans le développement décimal de $\frac{1}{7}$ en base 2 du fait que 2^3 est la 1^{re} puissance de 2 égale à 1 modulo 7 ?

On lit encore dans la table que $4^3 \equiv 1 \pmod{7}$. Cela implique-t-il qu'il y ait une séquence de 3 chiffres qui se répète dans la division de 1 par 7 en base 4 ? Effectuons cette division en base 4 : $\frac{1}{7_{(10)}} = \frac{1}{13_{(4)}} = 0,021_{(4)}$. Il y a bien une séquence périodique de 3 chiffres. Pareillement en base 6 : $\frac{1}{7_{(10)}} = \frac{1}{11_{(6)}} = 0,05_{(6)}$; il y a une séquence périodique de 2 chiffres et $6^2 \equiv 1 \pmod{7}$. Ces exemples illustrent et fortifient cette hypothèse : il y a autant de chiffres dans la séquence périodique de $\frac{1}{p}$ que l'exposant de la 1^{re} puissance de la base égale à 1 modulo le diviseur premier p .

Il y a un seul chiffre qui se répète quand je divise 1 par 7 en base 8 car $8 \equiv 1 \pmod{7}$: $\frac{1}{7_{(10)}} = 0,1_{(8)}$.

De même, il y a 3 chiffres dans la base 9 car $9 \equiv 2 \pmod{7}$ et $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$. Comme 3 est le premier exposant pour lequel une puissance de 2 est égale à 1 modulo 7, on a $\frac{1}{7_{(10)}} = 0,125_{(9)}$.

De même, on a 6 chiffres dans la base 10 car $10 \equiv 3 \pmod{7}$ et $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Comme 6 est le premier exposant pour lequel une puissance de 3 est égale à 1 modulo 7, on a $\frac{1}{7_{(10)}} = 0,142857_{(10)}$.

3. Pierre de Fermat (1601-1665) énonce cette propriété en 1601 mais ce n'est qu'un siècle plus tard qu'elle fut démontrée, par Leonhard Euler (1707-1783) en 1736.

Quand on divise 1 par 3 en base 10, on n'a qu'un seul chiffre qui se répète car $10^1 = 1 \pmod{3}$. Pourquoi l'égalité $10 = 1 \pmod{3}$ permet-elle de comprendre qu'il n'y a qu'un chiffre dans la séquence ? Comme $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$, on comprend que les quotients $\frac{10}{3}$ et $\frac{1}{3}$ ont les mêmes parties décimales. Or $\frac{10}{3} = 10 \times \frac{1}{3}$, on passe de l'un à l'autre en déplaçant la virgule de un rang.

Dans la division par 11 il y a une séquence de 2 chiffres car $10^1 = 10 \pmod{11}$ et $10^2 = 1 \pmod{11}$. Le quotient de 1 par 11 est $0,09$ tandis que celui de 100 par 11 est $9,09$. Ces deux quotients diffèrent d'un entier comme le laisse prévoir l'égalité $10^2 = 100 = 1 \pmod{11}$ car elle rappelle que $100 = 11 \times 9 + 1$ et en divisant par 11 on obtient $\frac{100}{11} = 9 + \frac{1}{11}$. Or le quotient $\frac{100}{11}$ est 100 fois le quotient $\frac{1}{11}$, on passe de l'un à l'autre en déplaçant la virgule de deux rangs. La période du développement décimal est égale à 2 pour cette simple raison.

Dans la division par 7, du fait que 10^6 est la 1^{re} puissance de la base à être égale à 1 modulo 7, on peut en déduire que les quotients $\frac{10^6}{7}$ et $\frac{1}{7}$ ont la même partie décimale et comme on passe de l'un à l'autre en déplaçant la virgule de 6 rangs, cela signifie que leur développement décimal doit avoir une période égale à 6.

Cette explication se transpose dans toutes les bases aussi aisément car, par définition de l'écriture « décimale » des nombres en base b , multiplier par b^a revient à déplacer la virgule de a rangs. Si la virgule est déplacée de a rangs et que les parties décimales sont égales, a étant la plus petite valeur pour laquelle cette égalité se produit, c'est que le développement décimal dans cette base a une période égale à a . Or, pour que cela se produise, p étant le diviseur employé, il faut et il suffit que les quotients $\frac{b^a}{p}$ et $\frac{1}{p}$ aient la même partie décimale ce qui équivaut au fait que b^a soit la 1^{re} puissance de b égale à 1 modulo p .

Les nombres 9, 999999, 9999999999999999 obtenus en multipliant 3, 7 ou 13, 17 par la séquence périodique qui leur correspondait, sont de la forme $10^n - 1$ soit $b^n - 1$ avec $b = 10$. Le tableau ci-dessous donne, pour tous les exposants $n \geq 1$, la décomposition des nombres $10^n - 1$ en facteurs premiers. La longueur de la période de $\frac{1}{p}$ est alors donnée par la ligne où ce facteur premier p apparaît pour la 1^{re} fois. J'ai découvert ce tableau fascinant dans un livre de J.-P. Delahaye⁴. Il se prolonge à l'infini en donnant progressivement tous les nombres premiers.

n	$10^n - 1$	Décomposition en facteurs premiers	Première apparition d'un facteur
1	$10^1 - 1 = 9$	3^2	3
2	$10^2 - 1 = 99$	$3^2 \times 11$	11
3	$10^3 - 1 = 999$	$3^3 \times 37$	37
4	$10^4 - 1 = 9\,999$	$3^2 \times 11 \times 101$	101
5	$10^5 - 1 = 99\,999$	$3^2 \times 41 \times 271$	41, 271
6	$10^6 - 1 = 999\,999$	$3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$	7, 13
7	$10^7 - 1 = 9\,999\,999$	$3^2 \times 239 \times 4\,649$	239, 4 649
8	$10^8 - 1 = 99\,999\,999$	$3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137$	73, 137
9	$10^9 - 1 = 999\,999\,999$	$3^4 \times 37 \times 333\,667$	333 667
10	$10^{10} - 1 = 9\,999\,999\,999$	$3^2 \times 11 \times 41 \times 271 \times 9\,091$	9 091
11	$10^{11} - 1 = 99\,999\,999\,999$	$3^2 \times 513\,239 \times 21\,649$	513 239, 21 649
12	$10^{12} - 1 = 999\,999\,999\,999$	$3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9\,901$	9 901

FIGURE 7.17 – Premières apparitions d'un facteur premier dans la décomposition de $10^n - 1$. Le numéro n de la ligne où apparaît le facteur p indique que le quotient $\frac{1}{p}$ a une séquence périodique de n chiffres en base 10.

On peut dresser un tel tableau pour toutes les bases de numération. Dans mon livre sur les nombres, d'où je tire l'essentiel de cette sous-partie, j'ai dressé celui de la base 7 pour laquelle les nombres tels que 6, 666 ou 666666 jouent le même rôle que 9, 999 ou 999999 en base 10 puisqu'ils sont de la forme $b^n - 1$ avec $b = 7$ au lieu de $b = 10$. On peut y retrouver les nombres premiers 2, 5 et 13 dans les 1^{re}, 4^e et 12^e lignes, ce qui confirme que 2, 5 et 13 sont longs en base 7. Par contre, 3 ou 19 ne sont pas longs car 3 apparaît dans la 1^{re} ligne et 19 dans la 3^e, l'inverse de 3 a 1 seul chiffre dans sa séquence et 19 en a 3 ($\frac{1}{3_{(10)}} = 0,2_{(7)}$ et $\frac{1}{19_{(10)}} = 0,024_{(7)}$).

4. Jean-Paul Delahaye, Belin, collection « Pour La Science », 1998, *Jeux mathématiques et mathématiques des jeux*, Les fractions jouent avec les chiffres, pp.112-119

n	$7^n - 1$	Décomposition en facteurs premiers	Première apparition d'un facteur
1	$7^1 - 1 = 6$	2×3	2, 3
2	$7^2 - 1 = 48$	$2^4 \times 3$	-
3	$7^3 - 1 = 342$	$2 \times 3^2 \times 19$	19
4	$7^4 - 1 = 2400$	$2^5 \times 3 \times 5^2$	5
5	$7^5 - 1 = 16\ 806$	$2 \times 3 \times 2\ 801$	2 801
6	$7^6 - 1 = 117\ 648$	$2^4 \times 3^2 \times 19 \times 43$	43
7	$7^7 - 1 = 823\ 542$	$2 \times 3 \times 29 \times 4733$	29, 4 733
8	$7^8 - 1 = 5\ 764\ 800$	$2^6 \times 3 \times 5^2 \times 1201$	1 201
9	$7^9 - 1 = 40\ 353\ 606$	$2 \times 3^3 \times 19 \times 37 \times 1063$	37, 1063
10	$7^{10} - 1 = 282\ 475\ 248$	$2^4 \times 3 \times 11 \times 191 \times 2\ 801$	191
11	$7^{11} - 1 = 1\ 977\ 326\ 742$	$2 \times 3 \times 1123 \times 293\ 459$	1123, 293 459
12	$7^{12} - 1 = 13\ 841\ 287\ 200$	$2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 13 \times 19 \times 43 \times 181$	13, 181

FIGURE 7.18 – Premières apparitions d'un facteur premier dans la décomposition de $7^n - 1$. Le numéro n de la ligne où apparaît le facteur p indique que le quotient $\frac{1}{p}$ a une séquence périodique de n chiffres en base 7.

b. Frises rationnelles relatives à la base

Ces arguments mathématiques permettent-ils de mieux appréhender la distinction opérée précédemment entre les nombres premiers non longs dont la séquence périodique a une longueur impaire et ceux dont cette séquence a une longueur paire? Sans doute, car il s'agit finalement, ni plus ni moins, d'une alternance, paire ou impaire, des exposants n de la base de numération b , et de l'apparition, dans la décomposition en facteurs premiers de $b^n - 1$, des différents nombres premiers. Ceux qui apparaissent avec un exposant pair ont une frise avec symétrie-glissée; avec un exposant impair, la frise a un axe de symétrie.

Je refais par conséquent mon tableau 7.16 en indiquant, à la place de la lettre N la longueur de la période. Par la même occasion je vais remplacer de même la lettre L par la longueur qui vaut, à tous les coups, $p - 1$ pour le nombre premier p . On constate que les nombres premiers non-longs se répartissent équitablement entre ceux dont la période est de longueur paire et ceux dont elle est impaire. Certains nombres premiers sont particulièrement d'un type ou de l'autre : quand il n'est pas long, 23 a quasiment toujours des périodes impaires (11), à l'opposé 17 a quasiment toujours des périodes paires (0, 2, 4 ou 8).

p / b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	pair N	impair	
2	0	1																																							1	0		
3	2	0	1																																						1	1		
5	4	4	2	0	1																																				2	1		
7	3	6	3	6	2	0	1																																		2	3		
11	10	5	5	5	10	10	10	5	2	0	1																														2	5		
13	12	3	6	4	12	12	4	3	6	12	2	0	1																												6	3		
17	8	16	4	16	16	16	8	8	16	16	16	4	16	8	2	0	1																								8	1		
19	18	18	9	9	9	3	6	9	18	3	6	18	18	18	9	9	2	0	1																						4	9		
23	11	11	11	22	11	22	11	11	22	22	11	11	22	22	11	22	11	22	22	2	0	1																			2	11		
29	28	28	14	14	14	7	28	14	28	28	4	14	28	28	7	4	28	28	7	28	14	7	7	28	28	2	0	1													10	7		
31	5	30	5	3	6	15	5	15	15	30	30	30	15	10	5	30	15	15	15	30	30	10	30	3	6	10	15	10	2	0	1										8	15		
37	36	18	18	36	4	9	12	9	3	6	9	36	12	36	9	36	36	36	36	18	36	12	36	18	3	6	18	12	18	4	36	9	9	36	2	0	1				16	9		
41	20	8	10	20	40	40	20	4	5	40	40	40	8	40	5	40	5	40	20	20	40	10	40	10	40	8	40	40	10	4	20	40	40	20	5	8	20	2	0	1		20	5	
pair N	3	3	6	4	4	1	5	3	2	2	3	3	2	2	1	2	1	1	1	2	2	4	0	2	1	3	2	3	2	3	1	1	0	0	2	1	1	1	1	1	1	0	82	
impair	3	3	6	3	3	4	3	6	3	1	3	1	2	0	6	1	4	1	3	0	0	1	2	2	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	70	Σ		

FIGURE 7.19 – Les bases b pour lesquelles le nombre p est un nombre premier long sont indiquées par le nombre $p-1$ sur fond orange. Pour les autres bases, le nombre indique également la longueur de la période : si le fond est jaune elle est paire, s'il est vert elle est impaire (totaux pour les premiers non-longs uniquement).

Les trois dernières bases du motif périodique suivent systématiquement le schéma 2 - 0 - 1.

- La longueur 0 indique un nombre « décimal » comme $\frac{1}{10} = 0,1$ en base 10. Ainsi $\frac{1}{11} = 0,1_{(11)}$ ou $\frac{1}{13} = 0,1_{(11)}$ en base 13 et plus généralement en base b on a $\frac{1}{b} = 0,1_{(b)}$.
- La longueur 1 correspond à $\frac{1}{9} = 0,\bar{1}$ en base 10. On a $\frac{1}{11} = 0,\bar{1}_{(12)}$ ou $\frac{1}{13} = 0,\bar{1}_{(14)}$ et, d'une façon générale, en base b on a $\frac{1}{b-1} = 0,\bar{1}_{(b)}$.
- La longueur 2 correspond à $\frac{1}{11} = 0,0\bar{9}$ en base 10. On a $\frac{1}{13} = 0,0\bar{b}_{(12)}$ (b est le chiffre 11 dans ce contexte), soit $\frac{1}{12^2}$, ou $\frac{1}{17} = 0,0\bar{f}_{(16)}$ (f est le chiffre 15), soit $\frac{1}{17^2}$. D'une façon générale, dans une base b quelconque, $\frac{1}{b+1} = 0,0\bar{b}'$, soit $\frac{b-1}{b^2}$, b' étant le plus grand chiffre de la base b ($b' = b - 1$).

Frises périodiques de 17 et 23

On l'a remarqué, le nombre premier 17 a systématiquement des périodes de longueur paire (sauf en base 18) égales à :

- ♦ Longueur 0 en base 17 mais aussi 34 et 51, etc.
- ♦ Longueur 2 en base 16 mais aussi 33 et 50, etc.
Séquences périodiques en base 16 : 0f, 1e, 2d, 3c, 4b, 5a, 69 et 78.
- ♦ Longueur 4 en bases 4 et 13 mais aussi 21 et 30, 38 et 47, etc.
Séquences périodiques en base 4 : 0033, 0132, 0231 et 1122 ; en base 13 : 09c3, 16b6, 23a9 et 4785.
- ♦ Longueur 8 en bases 2, 8, 9 et 15 mais aussi 19, 25, 26 et 32, 36, 42, 43 et 49, etc.
Séquences périodiques en base 2 : 00001111 et 00101101 ; en base 8 : 03607417 et 13226455 ;
en base 9 : 04678421 et 15257363 ; en base 15 : 0d37e1b7 et 29a8c546.

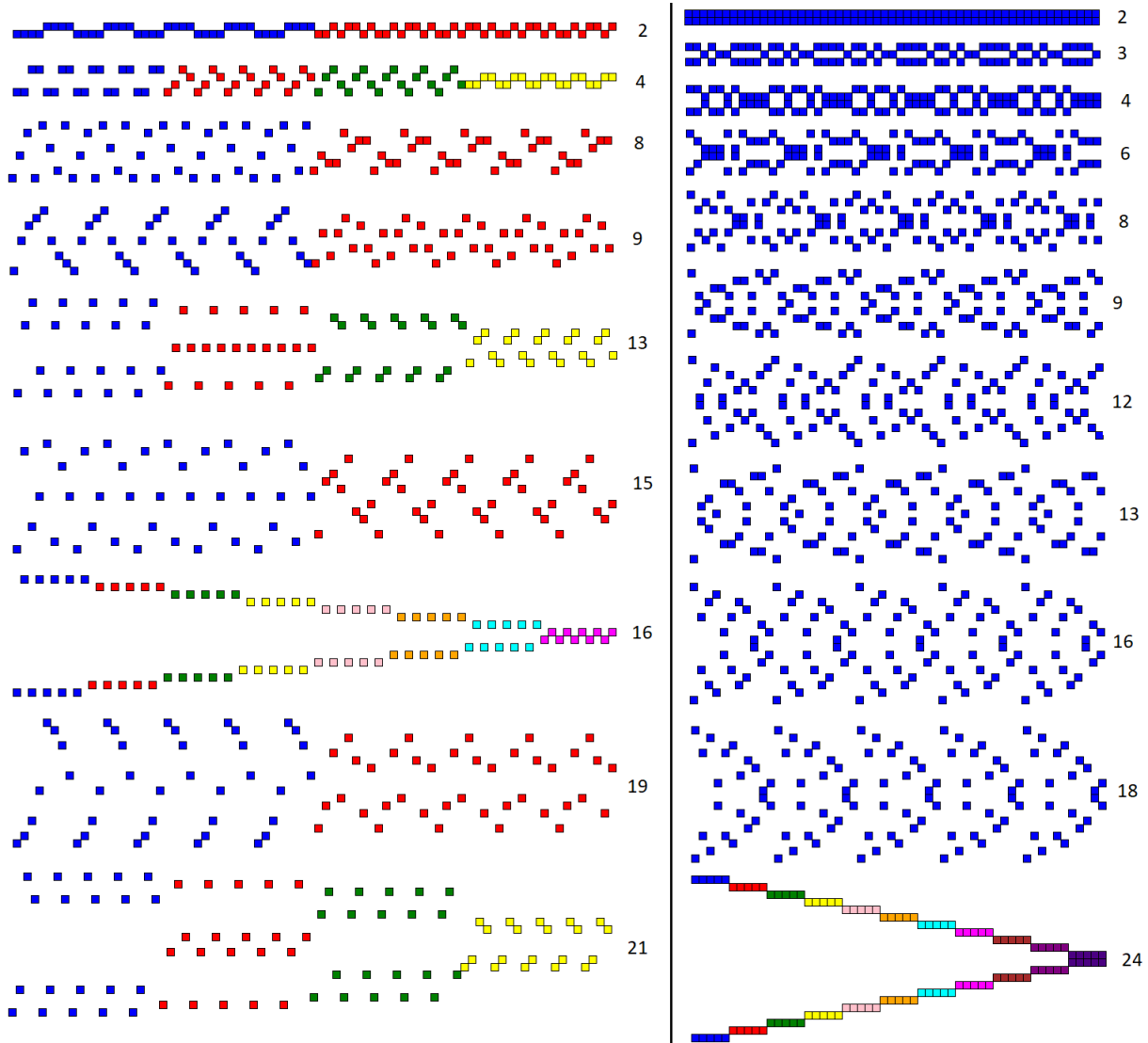


FIGURE 7.20 – Les premières frises de quotients de 17 (à gauche) et 23 (à droite) dans les bases pour lesquelles ces nombres premiers ne sont pas longs (sauf bases 17 et 18 pour 17 et bases 22 et 23 pour 23).

Le nombre premier 23 a, quant à lui, systématiquement des périodes de longueur impaire (sauf en base 22 et 23) égales à :

- ♦ Longueur 1 en base 24 mais aussi 47 et 71, etc.
Séquences périodiques en base 24 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l et m.
- ♦ Longueur 11 en bases 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16 et 18 mais aussi 25, 26, 27, 29, 31, 32, 35, 36, 39, etc.
Séquences périodiques en base 2 : 00001011001 et 00110111101 ; en base 3 : 00101120021 et 01221211022 ;
en base 4 : 00230201121 et 03132212331 ; en base 6 : 01322030441 et 11454233525 ;
en base 8 : 02620544131 et 15723364675 ; en base 9 : 03462311507 et 18542657738 ;
en base 12 : 06316948421 et 27379ab58a5 ; en base 13 : 0746a235119 et 2a97bb3c586 ;
en base 16 : 0b21642c859 et 37a6f4de9bd ; en base 18 : 0e1a3264c97 et 3g7efbd58ah.

La distinction entre ces nombres premiers p pour la nature homogène de leurs frises de quotients tient essentiellement à l'ensemble D_{17} des diviseurs de $p - 1$: pour $p = 17$ les diviseurs de 16 sont pairs pour la plupart $D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ alors que pour 23, il y a un diviseur impair (11) qui sert à la plupart des séquences périodiques non longues ($D_{22} = \{1, 2, 11, 22\}$).

Frises périodiques de 29

Ce nombre premier offre un panachage équilibré des séquences périodiques pour les bases où ce nombre n'est pas long. Sans compter les séquences de longueur nulle (nombre décimal), il y a 7 bases amenant des périodes de longueur impaire (6 bases de longueur 7 et 1 de 1) et 9 amenant des périodes de longueur paire (6 bases de longueur 14, 2 de 4 et 1 de 2). Le motif est complété par 12 bases dans lesquelles 29 est long, c'est-à-dire que la séquence y est de longueur maximale (28).

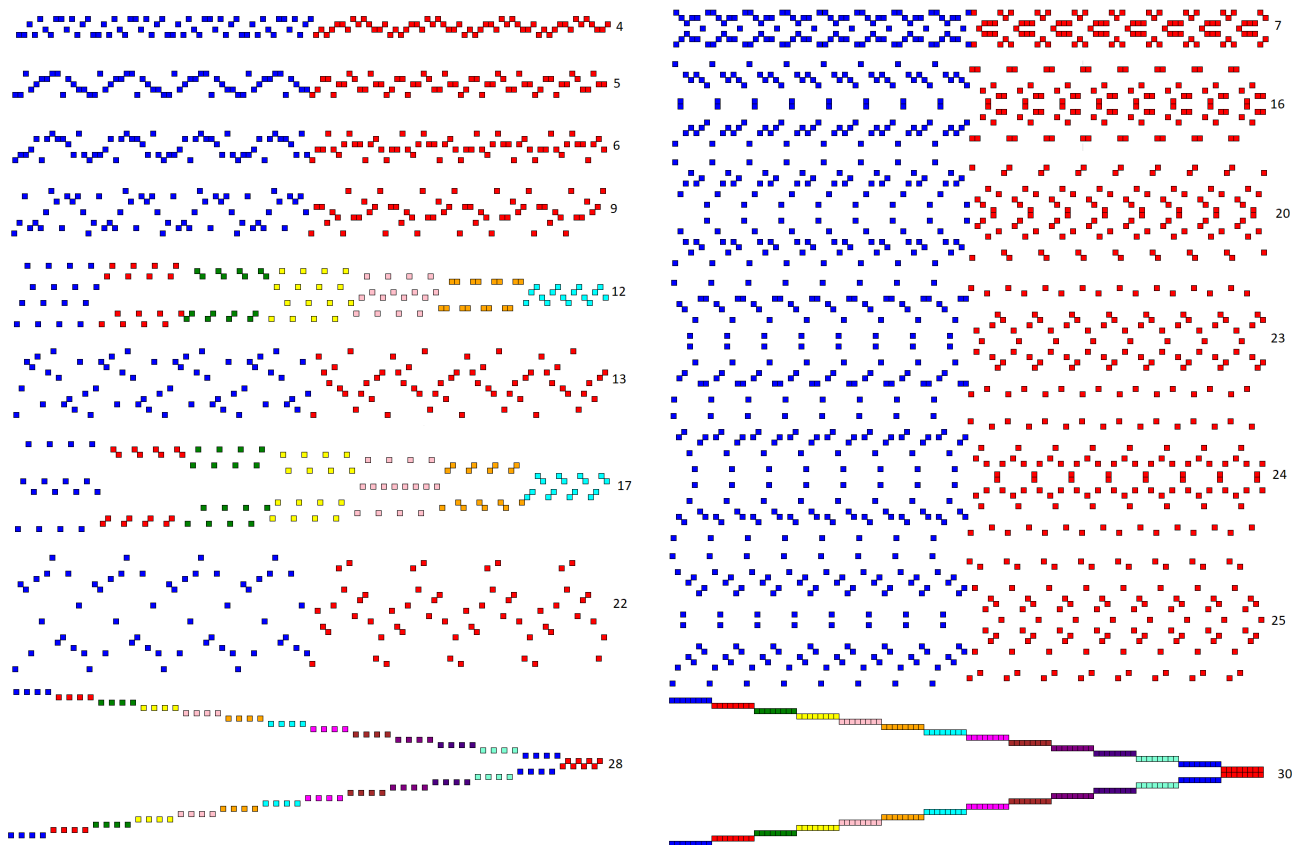


FIGURE 7.21 – Les premières frises de quotients de 29 dans les bases pour lesquelles ces nombres premiers ne sont pas longs. Celles de gauche ont des périodes paires alors que celles de droite ont des périodes impaires.

Observons les frises de quotients pour les 16 bases où la période n'est pas longue sur l'illustration ci-dessus.

- ♦ Longueur 0 en base 29 mais aussi 58, etc.
- ♦ Longueur 1 en base 30 mais aussi 59, etc.
Séquences périodiques en base 30 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r et s.
- ♦ Longueur 2 en base 28 mais aussi 57, etc.
Séquences périodiques en base 28 : 0r, 1q, 2p, 3o, 4n, 5m, 6l, 7k, 8j, 9i, ah, bg, cf et de.
- ♦ Longueur 4 en bases 12 et 17 mais aussi 41, 46, etc.
Séquences périodiques en base 12 : 04b7, 09b2, 12a9, 17a4, 2596, 3388 et 4675 ;
en base 17 : 09g7, 12fe, 1cf4, 25eb, 38d8, 4bc5, 67a9.
- ♦ Longueur 7 en bases 7, 16, 20, 23, 24 et 25 mais aussi 36, 45, 49, 52, etc.
Séq. pér. en base 7 : 0145536, 0324405, 0652113, 1634226 ; en base 16 : 08d3dcb, 11a7b96, 234f72c et 469ee58 ;
en base 20 : 0dfh4gb, 17be9d2, 2f38j64 et 5a6hic8 ; en base 23 : 0i5cfjj, 1db28gf, 33m4ha7 et 67l9bke ;
en base 24 : 0jkgd5j, 1fh92be, 37ai4n4 et 6elc9m8 ; en base 25 : 0ldjkh6, 1i2eg9c, 3b547io et 6ma8fcn.
- ♦ Longueur 14 en bases 4, 5, 6, 9, 13 et 22 mais aussi 33, 34, 35, 38, etc.
Séq. pér. en base 4 : 00203103313023 et 01012213232112 ; en base 5 : 00412334403211 et 01330224311422 ;
en base 6 : 01124045443151 et 02252135330342 ; en base 9 : 02712148617674 et 05524308336458 ;
en base 13 : 05a9b28c7231a4 et 0b86954c146378 ; en base 22 : 0gf3h9il56i4c3 et 1b87cjfkade926.

Superposition des périodes paires

J'ai représenté les frises de période impaire en les superposant deux à deux car il y avait forcément, pour ce type de frise, un appariement des séquences périodiques et cela en faisait ressortir la complémentarité, puisqu'alors les frises acquéraient un axe de symétrie. Ce faisant, je représentais les frises de période paire sans accommodation particulière. J'avais même écarté l'idée d'essayer de les faire se superposer car j'avais vu (figure 7.29 en annexe) que, dans certains cas, les frises de quotients de période paire pouvaient se chevaucher.

En considérant les résultats obtenus à ce stade de mon étude, je réalise qu'il serait judicieux cependant de tenter la superposition, ne serait-ce que pour des raisons esthétiques. Quelle allure pourraient avoir les frises de ces nombres qui conduisent à des séquences de longueur paire si on accepte de les faire se chevaucher ? Pour tenir compte des chevauchements j'ai l'idée de changer de couleur en fonction du nombre de fois où un chiffre est utilisé. Je garde le bleu pour une unique fois et choisis le rouge pour une 2^e fois, le vert pour une 3^e, etc. Je teste alors les différentes bases pour les nombres 17 et 29 que j'ai préalablement représenté sans les superpositions.

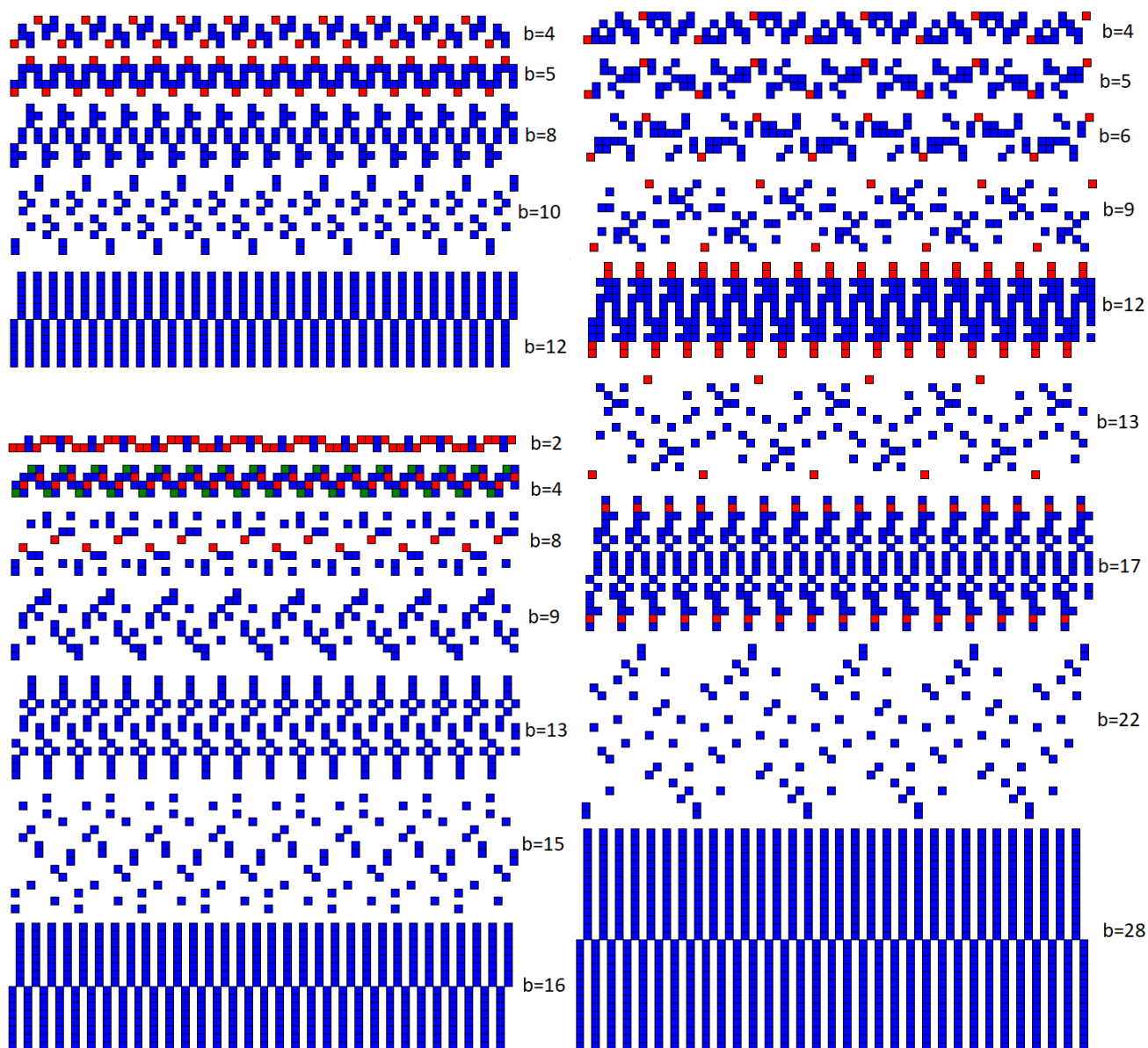


FIGURE 7.22 – Les Frises de quotients de 13 (en haut à gauche), 17 (en bas à gauche) et 29 (à droite) dans les bases pour lesquelles ces nombres premiers ne sont pas longs et ont des périodes paires. Les différentes séquences sont superposées, le code couleur donne le nombre de chevauchements (1 : bleu, 2 : rouge, 3 : vert).

J'ai ajouté à mon illustration des frises paires le nombre 13 que je n'avais pour l'instant représenté qu'en base 10. Pour ce nombre, sans compter la séquence de longueur nulle (obtenue pour $b = 13$ modulo 13), il y a 4 bases pour lesquelles ce nombre est long, 3 amenant des périodes de longueur impaire (2 bases de longueur 3

et 1 de 1) et 5 amenant des périodes de longueur paire non-longues (2 bases de longueur 6, 2 de 4 et 1 de 2), ces dernières se distribuent ainsi :

- ♦ Longueur 2 en base 12 mais aussi 25, etc.
Séquences périodiques en base 12 : 0b, 1a, 29, 38, 47 et 56.
- ♦ Longueur 4 en bases 5 et 8 mais aussi 18, 21, etc.
Séquences périodiques en base 5 : 0143, 0341 et 1232 ; en base 8 : 0473, 1166 et 2354.
- ♦ Longueur 6 en bases 4 et 10 mais aussi 17, 23, etc.
Séquences périodiques en base 4 : 010323 et 021312 ; en base 10 : 076923 et 153846.

Ma première remarque concernant ce type de représentation est sur le plan esthétique, du fait des superpositions, la frise a une bien meilleure allure car les espaces vides sont alors remplis et un motif se dessine bien mieux. J'apprécie l'apport d'une 2^e et parfois une 3^e couleur mais je constate, et ce faisant je m'écarte du plan esthétique et m'approche du mathématique, que de nombreuses frises restent unicolores malgré les superpositions. Cela signifie que les séquences périodiques de ces nombres qui ont une longueur paire s'arrangent mieux lorsqu'elles le peuvent en choisissant des chiffres différents.

Je dois m'interroger sur ma façon de faire se superposer les séquences périodiques car ce n'est pas anodin. Dans mon programme, je sélectionne les séquences périodiques qui ont une permutation en commun et j'enregistre la séquence qui arrive en premier dans l'ordre lexicographique. Du coup, la représentation sous forme de frise conserve cet ordre et, en les superposant, je mets en correspondance ces premières séquences. Les chiffres de même rang constitue le motif généré par ces superpositions et ce sont ces chiffres de même rang qui rechignent, en quelques sortes, à être identiques.

Prenons l'exemple des séquences liées au nombre 13 en base 10, il s'agit de 076923 et 153846 ce qui correspond aux premières décimales de $\frac{1}{13} = 0,076923$ et $\frac{2}{13} = 0,153846$. On peut observer sur la figure 7.9 que la disposition des chiffres du quotient miment la disposition des restes qui, par nature, sont tous différents. Comme je n'utilise toujours que des bases petites, il y a moins de chiffres dans ces bases que de restes possibles, et par conséquent le resserrement opéré en passant aux frises de quotient a tendance à transférer la non-superposition des restes à celle des chiffres du quotient au prix de quelques chevauchements inévitables. C'est pour cela qu'essentiellement avec de petites bases (2, 4, ...) on peut observer des chevauchements.

Superposition des périodes impaires

Le procédé appliqué aux séquences de longueur paire peut également être appliqué aux séquences de longueur impaire, même si, comme cela a déjà été remarqué, j'ai déjà fait se superposer les séquences de longueur impaire deux à deux. Il n'y avait jamais de chevauchement en procédant ainsi car, dans ce cas, chaque séquence possède son exact complémentaire et la superposition de ces frises complémentaires conduisait à une frise possédant un axe de symétrie horizontal.

Dans certains cas, il n'y a qu'une paire de séquences de longueur impaire, forcément complémentaires, et après superposition, une seule frise symétrique. Mais le cas général est un ensemble de plusieurs paires de séquences complémentaires. Par exemple, pour le nombre 29, il y a 6 bases (7, 16, 20, 23, 24, 25) pour lesquelles on a deux paires de frises de longueur impaire (7). Ces paires de frises peuvent être superposées avec le même procédé que pour les séquences de longueur paire : j'utilise alors le même code couleur, à savoir bleu quand il n'y a pas de chevauchement, rouge quand deux séquences superposent le même chiffre, etc. En regardant mon tableau de la figure 7.19, je constate qu'il devrait y avoir des superpositions intéressantes pour le nombre 31 pour les bases 2, 4, 5, 8, 16 et 25 car les séquences mesurant 3 (bases 5 et 25) ou 5 (bases 2, 4, 8, 16), il devrait y avoir 5 ou 3 paires de séquences complémentaires à superposer.

J'ai aussi représenté ci-dessous les frises des nombres 13 et 19 dans les bases pour lesquelles ces nombres ont des périodes impaires inférieures à 6 (pour 13) et inférieures à 9 (pour 19). Pour ces 2 nombres, il n'y a que 2 bases du motif élémentaire qui conviennent :

- ♦ Pour 13, dans la base 3, 4 séquences de longueur 3 (002/220 et 011/211) et dans la base 9, 4 séquences de longueur 3 (062/826 et 134/754)
- ♦ Pour 19, dans la base 7, 6 séquences de longueur 3 (024/642, 051/615 et 132/534) et dans la base 11, 6 séquences de longueur 3 (064/a46, 118/992 et 235/875)

Hormis ces 2 nombres, il n'y a aucun autre nombre premier p inférieur à 31 qui possède des séquences impaires de longueur inférieure à $\frac{p-1}{2}$. Pour les nombres supérieurs à 31, toujours d'après mon tableau figure 7.19, il faut considérer le nombre 37 qui a des séquences impaires de longueur inférieure à 18 pour les bases 7, 9, 12, 16, 33 et 34 (longueur 9), 10 et 26 (longueur 3). Ensuite, le nombre 41 a des séquences de longueur 5 pour les bases 10, 16, 18 et 37. J'ai mis les frises correspondantes en annexe.

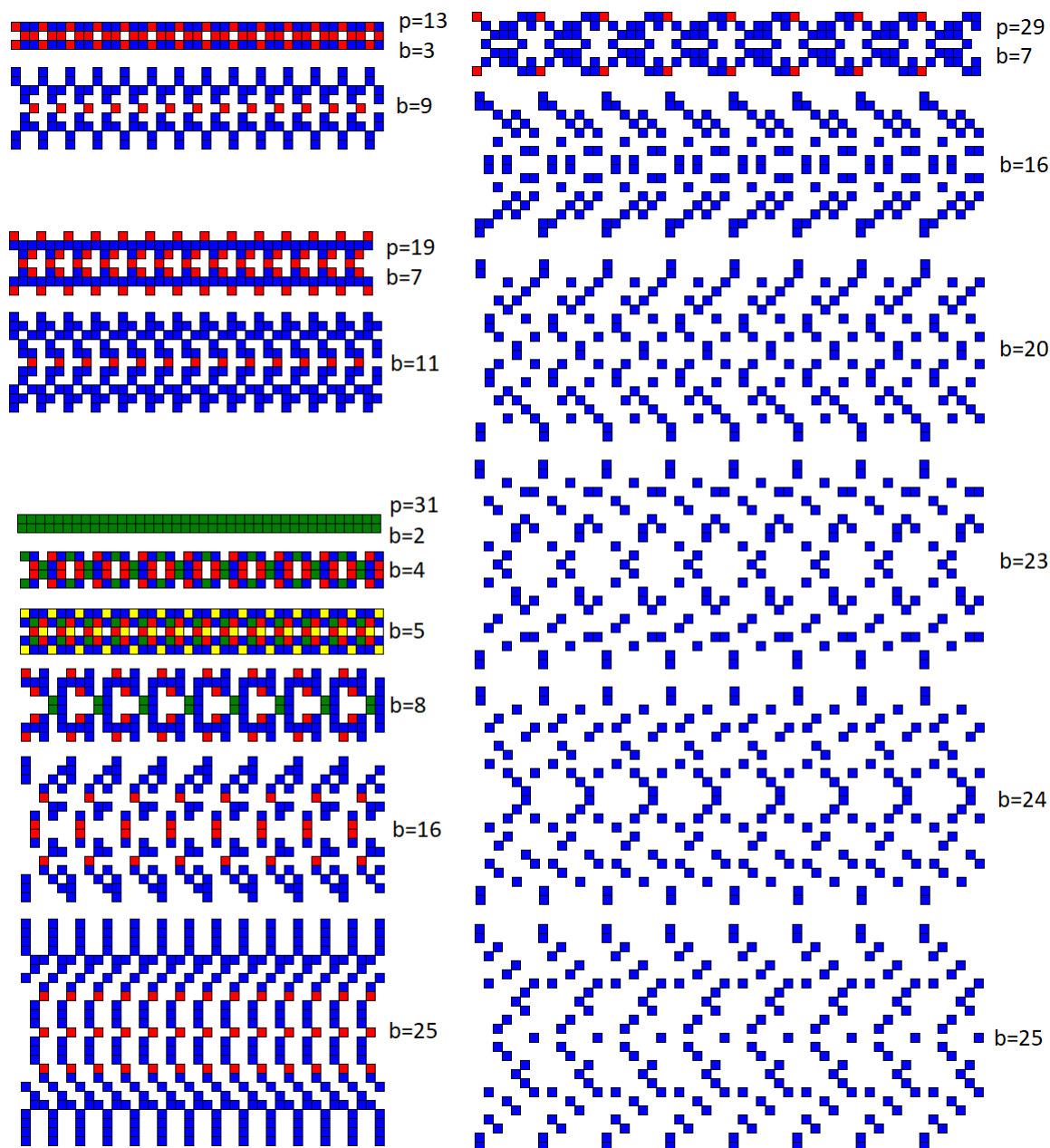


FIGURE 7.23 – Les Frises de quotients de 13, 19, 31 (à gauche, de haut en bas) et 29 (à droite) dans les bases pour lesquelles ces nombres premiers p ont des périodes impaires inférieures à $\frac{p-1}{2}$. Les différentes séquences sont superposées, le code couleur donne le nombre de chevauchements (1 : bleu, 2 : rouge, 3 : vert, 4 : jaune).

Notez que tous les nombres p ont une base du motif élémentaire ($b = p + 1$) dans laquelle la séquence a une longueur 1, soit une longueur impaire inférieure à $\frac{p-1}{2}$ mais je n'ai pas illustré ces cas qui présentent une bande uniformément bleue (voir ci-dessous pour $p = 11$ et $p = 13$). De même, des frises superposées dont les longueurs sont égales à 2 se présentent pour tout nombre p dans la base $b = p - 1$; ces frises ne présentent pas non plus d'intérêt car elles ont toujours la même allure (voir ci-dessous à droite).

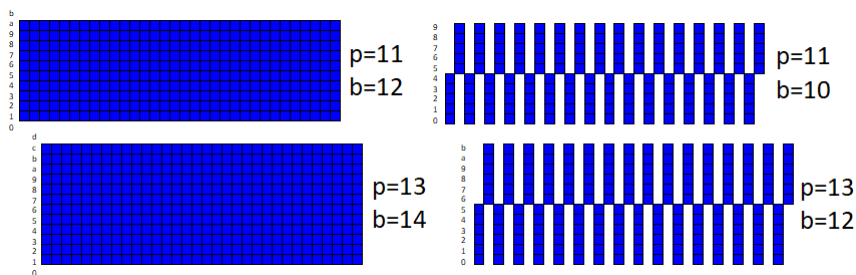


FIGURE 7.24 – Les frises superposées de quotients pour 11 et 13 dans les bases pour lesquelles ces nombres ont des périodes impaires égales à 1 (à gauche) ou paires égales à 2 (à droite).

c. Représentativité rationnelle des frises

La remarque précédente introduit la question que je me propose d'explorer dans cette dernière partie : une frise constituée de la répétition d'un motif élémentaire construit selon les deux contraintes suivantes (celles des frises rationnelles superposées) caractérise-t-elle forcément et de manière univoque un nombre premier dans une certaine base de numération ?

- ♦ Contrainte des colonnes : une colonne est constituée de b carrés de couleurs, chaque couleur représentant un nombre (par exemple 0 : blanc, 1 : bleu, 2 : rouge, 3 : vert, 4 : jaune, 5 : rose, 6 : orange, 7 : cyan, etc.), la somme s des nombres de chaque colonne doit toujours être identique. Le motif élémentaire est constitué de n colonnes. On peut aussi bien représenter ce motif par une matrice de b lignes et n colonnes dont les éléments seraient les nombres correspondant aux couleurs.
- ♦ Contrainte de symétrie : le motif élémentaire possède un axe de symétrie horizontal (la ligne de rang $\frac{n+1}{2}$) si la longueur n est impaire et dans ce cas la somme s est nécessairement paire ; si la longueur n est paire, le motif présente une symétrie-glissée, c'est-à-dire qu'il se compose de 2 parties successives, superposables après un retournement autour d'un axe horizontal.

Pour ce qui est des frises rationnelles superposées, la base de numération est facile à déterminer puisqu'il s'agit du nombre de lignes b de la frise. La somme s indique le nombre de séquences périodiques superposées et la longueur n correspond à la période des séquences de quotients. La question posée n'interdit pas de se servir de la table des périodes – la figure 7.19 et son extension aux nombres inférieurs à 100 en annexe – mais est-ce suffisant ?

Imaginons une frise pour laquelle on a $n = 5$ et $b = 5$. En examinant mes deux tableaux, je m'aperçois qu'il se pourrait que ce soit $p = 11$ qui présente $s = 2$ frises superposées ou bien ce pourrait être $p = 71$ qui présente $s = 14$ frises superposées (cette frise est représentée en annexe). Mes tableaux ne donnent pas d'autres cas pour $n = 5$ et $b = 5$ et il n'existe aucun autre nombre premier qui se présente avec ces caractéristiques. Le nombre s de frises superposées pourrait-il être différent ? Le produit $n \times s$ étant toujours égal à $p - 1$ (cela tient aux $p - 1$ restes possibles dans la division par p), pour la configuration $n = 5$ et $b = 5$, on ne peut avoir que $s = 2$ ou $s = 14$. Une frise respectant les contraintes et vérifiant $n = 5$, $b = 5$ et $s = 6$ ne peut pas représenter un nombre premier car ce devrait être $p = n \times s + 1 = 5 \times 6 + 1 = 31$ or 31 en base $b = 5$ a une période de $n' = 3$. De même pour n'importe quelle longueur s distincte de 2 ou 14. Une frise quelconque respectant les contraintes énoncées ne représente pas nécessairement un nombre premier.

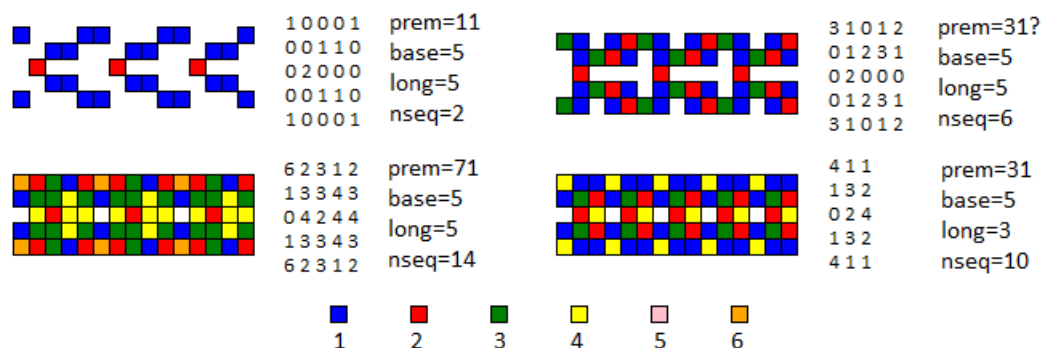


FIGURE 7.25 – Frises superposées de quotients ayant des périodes de longueur $n = 5$ en base $b = 5$ pour trois nombres premiers ($p = 11$, $p = 31$ et $p = 71$) ; celle du haut à droite est une fausse frise de quotients, malgré les apparences, le nombre 31 ayant des périodes de longueur 3 (et non 5) en base $b = 5$.

Cet exemple montre bien que ces seules contraintes ne suffisent pas à créer une frise rationnelle superposée qui caractériserait un nombre premier représenté par ses séquences périodiques dans une base donnée. Il y a cette hypothèse, évoquée plus haut dans la partie 2.a (longueur des séquences périodiques) : il y a autant de chiffres dans la séquence périodique de $\frac{1}{p}$ que l'exposant de la 1^{re} puissance de la base égale à 1, modulo le diviseur premier p . Autrement dit, sur mon exemple, comme on doit avoir $b = 5$ et $n = 5$, il faut que les premières puissances de 5 modulo un nombre premier p soient différentes de 1 et que b^n (ici 5^5) soit égal à 1 modulo p . En essayant tous les nombres premiers inférieurs à un million (il y en a 78 498), je n'ai trouvé que 11 et 71. Aucune autre possibilité et, sans pouvoir le prouver, c'est sans doute le cas aussi pour l'infinité des nombres premiers supérieurs à un million.

Le petit programme écrit pour cet exemple peut être utilisé dans d'autres situations. Par curiosité, je sais qu'en base $b = 10$, on trouve des séquences périodiques de longueur $n = 6$ pour les nombres premiers 7 et 13. Y a-t-il d'autres nombres premiers qui, en base 10, conduisent à des séquences de longueur 6 ? On n'en trouve aucun inférieur à un million et il n'y en a aucun sans doute. Je relance mon programme sur d'autres exemples pour m'en convaincre tout-à-fait :

- ♦ en base $b = 9$ (base dans laquelle il n'y a pas de nombre premier long), pour $n = 8$ je trouve 17 et 193, pour $n = 11$ je trouve 23, 67, 661 et 3851.
- ♦ en base $b = 10$, pour une longueur $n = 4$ je ne trouve que le nombre 101, pour une longueur $n = 5$ je ne trouve que 41 et 271, pour $n = 6$ je ne trouve que 7 et 13, pour $n = 7$ que 239 et 4649, pour $n = 8$ que 73 et 137, pour $n = 9$ que 333 667, pour $n = 10$ que 9091, pour $n = 15$ que 31 et pour $n = 60$ que 61.
- ♦ en base $b = 12$, pour une longueur $n = 11$ je ne trouve que le nombre 23, pour $n = 16$ je ne trouve que 17, 97 et 260 753, pour $n = 17$ je ne trouve aucun nombre.
- ♦ en base $b = 16$ (autre base dans laquelle il n'y a pas de nombre premier long), pour $n = 7$ je trouve 29, 43, 113 et 127, pour $n = 9$ je trouve 19, 37, 73 et 109, pour $n = 15$ je trouve 61, 151, 331 et 1321.

Ces essais répétés montrent que les seuls nombres premiers qui correspondent à une certaine combinaison des valeurs de n et b sont ceux qui apparaissent pour la 1^{re} fois dans la décomposition de $b^n - 1$ en facteurs premiers (partie 2.a, longueur des séquences périodiques). Cette propriété est non seulement suffisante pour obtenir des séquences de n chiffres, mais elle est aussi nécessaire d'où le « il faut et il suffit » que j'avais écrit. J'ai mis en annexe un tableau pour les bases allant de 2 à 16 et les longueurs de séquence allant de 1 à 20. On y retrouve les valeurs des exemples ci-dessus ainsi que celles des tableaux 7.17 et 7.18 pour les bases 10 et 7.

J'ai colorié dans ce tableau les cases occupées par trois nombres premiers (7, 11 et 17) afin de montrer que, pour un quotient dont le diviseur est un nombre premier p , la longueur d'une période est toujours un diviseur de $p - 1$. On pourrait effectuer ce repérage pour tous les nombres premiers mais je me suis limité à ces trois nombres premiers car il n'y avait pas de superposition dans les plages considérées.

- ♦ Pour $p = 7$, la longueur d'une période est 6 dans les bases 3 et 5 (le nombre 7 est alors un premier long) mais elle peut être aussi de 3 (bases 2 et 4 mod 7), 2 (6 mod 7) ou 1 (8 mod 7).
- ♦ Pour $p = 11$, la longueur d'une période est 10 dans les bases 2, 6, 7 et 8 (le nombre 11 est alors un premier long) mais elle peut être aussi de 5 (bases 3, 4, 5 et 9 mod 11), 2 (10 mod 11) ou 1 (12 mod 11).
- ♦ Pour $p = 17$, la longueur d'une période est 16 dans les bases 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 et 14 (le nombre 17 est alors un premier long) mais elle peut être aussi de 8 (bases 2, 8, 9 et 15 mod 17), 4 (4 et 13 mod 17), 2 (16 mod 17) ou 1 (18 mod 17).

Ainsi, finalement, il y a très peu de frises construites selon les deux contraintes précédemment énoncées qui correspondent à un nombre premier. Lorsqu'on connaît la longueur de la période – et celle-ci se détermine facilement comme on l'a vu, en étudiant les puissances de la base modulo le nombre premier – la seule variable qui reste à découvrir est la séquence périodique des chiffres du quotient. Bien sûr, on peut effectuer la division jusqu'à obtenir cette séquence mais on peut aussi utiliser le procédé suivant qui ne nécessite pas d'effectuer les divisions euclidiennes. Soit donc le quotient $q = \frac{1}{p}$ exprimé dans une base b :

- ♦ Si la période du développement est n , en déplaçant la virgule de n rangs vers la droite on obtient $b^n \times q$
- ♦ En enlevant q à $b^n \times q$ on obtient un nombre entier $m = (b^n - 1) \times q$ (les chiffres après la virgule s'éliminent)
- ♦ Le nombre m est la séquence périodique cherchée, on la détermine en effectuant la division $\frac{b^n - 1}{p}$
- ♦ On peut obtenir les $s = \frac{p-1}{n}$ autres séquences périodiques en listant les produits de m par 2, 3, etc.

Le plus simple est de montrer cela en base $b = 10$: quel est le développement de $\frac{1}{41}$ dans cette base ? En considérant que $10^1 = 10$ [41], $10^2 = 18$ [41], $10^3 = 16$ [41], $10^4 = 37$ [41] et $10^5 = 1$ [41] on en déduit qu'il y aura une période de $n = 5$ chiffres. On effectue donc le calcul $\frac{10^5 - 1}{41} = \frac{99\,999}{41} = 2439$. Comme il doit y avoir $s = \frac{41-1}{5} = 8$ séquences différentes, les autres séquences sont données par les produits $2439 \times 2 = 04878$, $2439 \times 3 = 07317$, $2439 \times 4 = 09756$, $2439 \times 5 = 12195$, $2439 \times 6 = 14634$, $2439 \times 8 = 12512$ et $2439 \times 11 = 26829$ (je n'ai pas mis $2439 \times 7 = 17073$ ni 2439×10 car la présence du 0 m'indique qu'il s'agit de la permutation d'une séquence déjà listée). Inutile d'effectuer d'autres multiplications, les 8 séquences sont 02439, 04878, 07317, 09756, 12195, 14634, 12512 et 26829. On peut voir ces frises séparées sur la figure 7.14 et en annexe, figure 7.32 les 8 frises superposées.

Ce procédé peut s'effectuer avec d'autres bases que la base 10, même si on est moins familiarisé avec les autres bases. Cherchons la ou les séquences périodiques des quotients du genre $\frac{k}{17}$ en base 8. Les puissances de 8 modulo 17 indiquent que $8^8 = 1$ [17] alors que pour des exposants n inférieurs $8^n \neq 1$ [17]. Il y a donc 8 chiffres et 2 séquences à trouver car $\frac{17-1}{8} = 2$. En effectuant la division $\frac{8^8 - 1}{17} = \frac{16\,777\,216 - 1}{17} = 986895$. J'obtiens la séquence m mais celle-ci doit être convertie en base 8. J'ai un petit programme pour effectuer cette conversion, je trouve $986895_{10} = 3607417_8$, d'où la 1^{re} séquence 03607417 (elle doit avoir 8 chiffres), la 2^e est obtenue en effectuant le produit 03607417×2 en base 8 ou $986895 \times 2 = 1973790$ en base 10 et en convertissant ce résultat en base 8 : $1973790_{10} = 7417036_8$. Ce n'est qu'une permutation de la 1^{re} séquence ; par contre $986895 \times 3 = 2960685$ et $2960685_{10} = 13226455_8$. Voilà la 2^e séquence : 13226455. La figure 7.22 montre cette frise.

Pour terminer ce chapitre, voici quelques frises superposées de quotient inédites. À vous de découvrir quel nombre premier se cache derrière chacune d'elles. Pour vous aider, j'ai mis le motif élémentaire sous la forme d'une matrice qui indique les nombres de superpositions pour chaque chiffre.

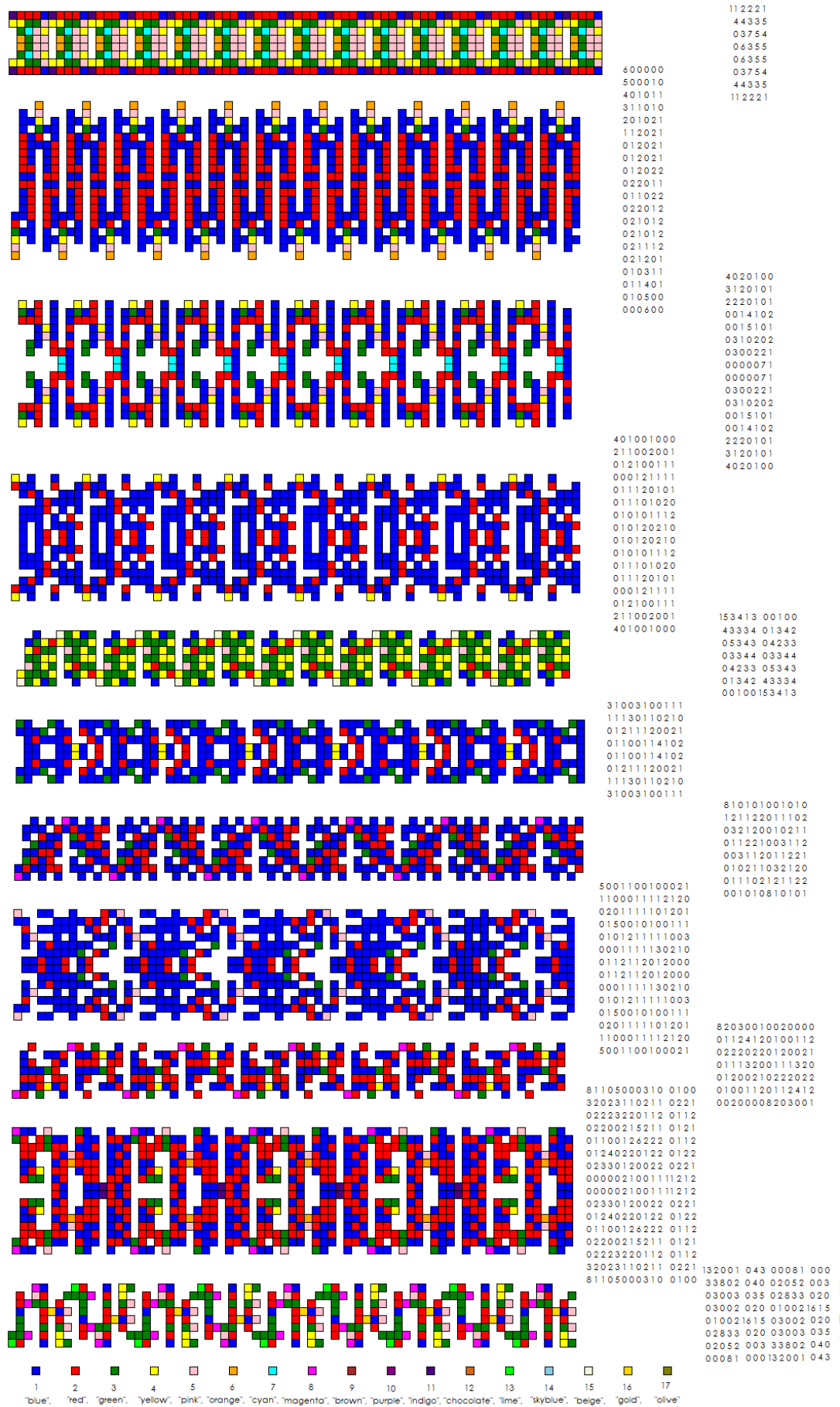


FIGURE 7.26 – Frises superposées de quotients pour des nombres premiers et dans des bases à déterminer (solutions en annexe).

3. Annexes

a. Les différents types de frises

- ✦ F1 : frises simples, sans éléments de symétrie. Un motif sans élément de symétrie se répète par translation
- ✦ F1m : frises possédant un axe de symétrie horizontal
- ✦ F1g : le motif élémentaire est glissé et retourné par symétrie autour d'un axe horizontal ; on parle donc ici d'une symétrie-glissée
- ✦ F2 : le motif élémentaire a un centre de symétrie
- ✦ Fm2 : le motif élémentaire possède un centre de symétrie et un axe de symétrie vertical qui le retourne
- ✦ Fmm : le motif élémentaire possède un axe de symétrie vertical
- ✦ F4 : frises comportant des axes de symétries verticaux et un axe de symétrie horizontal

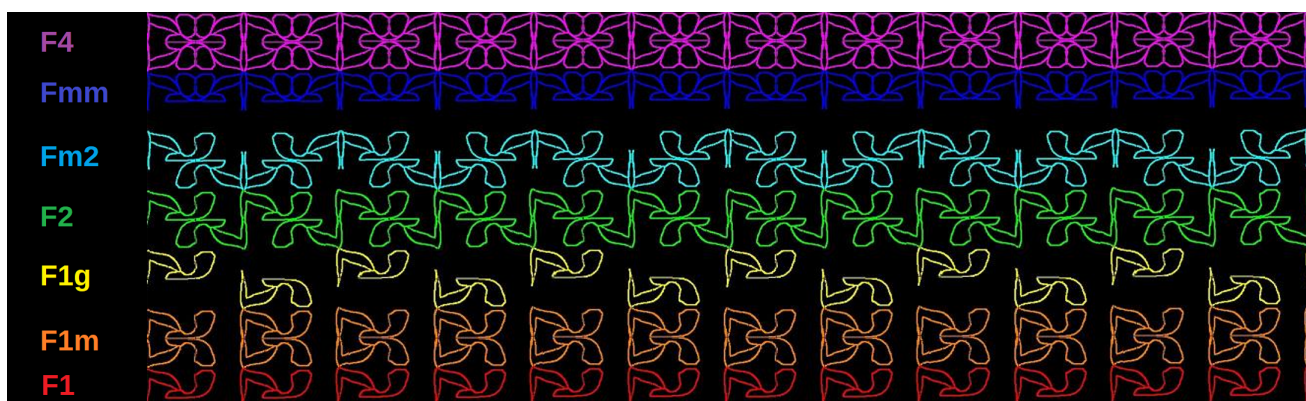


FIGURE 7.27 – Les sept types de frises construites avec le même motif initial.

aucun élément de symétrie	uniquement un (ou deux) axe(s) de symétrie	un centre de symétrie et éventuellement, un axe de symétrie	un axe de symétrie-glissée
f1	f1m fmm f4	f2 fm2	f1g

FIGURE 7.28 – Les éléments de symétrie des sept types de frises.

b. Frises rationnelles en base 10

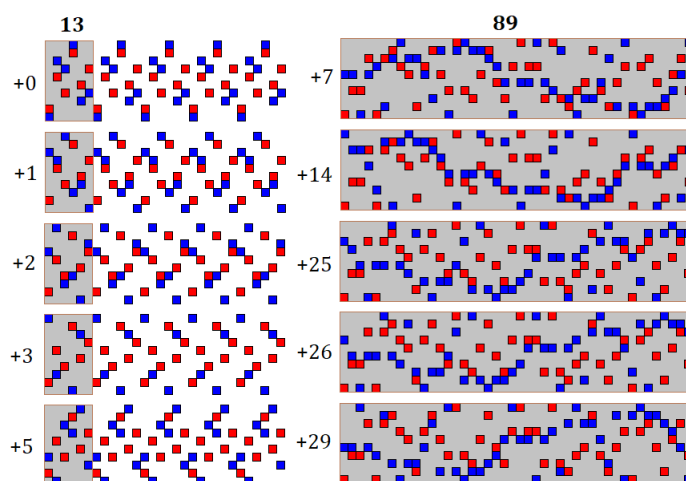


FIGURE 7.29 – Tentatives de superposition des frises rationnelles de quotients de 13 et 89, pour des décalages qui évitent les chevauchements. Aucune proposition ne semble particulièrement intéressante, toutes conservent la symétrie-glissée.

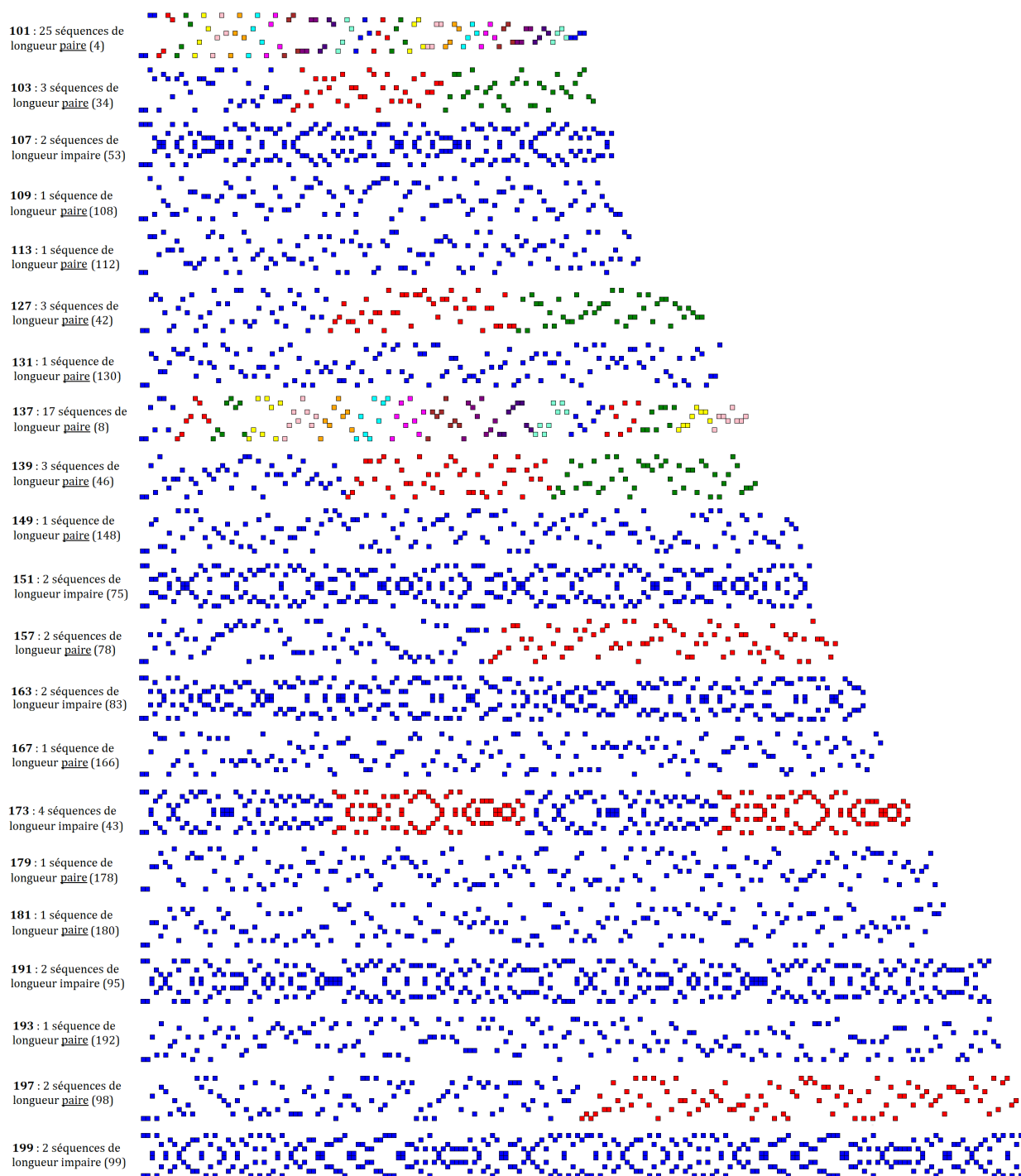


FIGURE 7.30 – Les frises rationnelles de quotients des nombres premiers compris entre 100 et 200.

Les 100 premiers nombres premiers longs⁵ en base 10 :

7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223, 229, 233, 257, 263, 269, 313, 337, 367, 379, 383, 389, 419, 433, 461, 487, 491, 499, 503, 509, 541, 571, 577, 593, 619, 647, 659, 701, 709, 727, 743, 811, 821, 823, 857, 863, 887, 937, 941, 953, 971, 977, 983, 1019, 1021, 1033, 1051, 1063, 1069, 1087, 1091, 1097, 1103, 1109, 1153, 1171, 1181, 1193, 1217, 1223, 1229, 1259, 1291, 1297, 1301, 1303, 1327, 1367, 1381, 1429, 1433, 1447, 1487, 1531, 1543, 1549, 1553, 1567, 1571, 1579, 1583, 1607, 1619.

Les nombres cycliques en base 10 (liste A180340 de l'OEIS) se déduisent de la séquence périodique des inverses des nombres premiers longs. L'inverse de p contenant $p - 1$ chiffres, ajouter les zéros éventuels omis au début : 142857 - 588235294117647 - 52631578947368421 - 434782608695652173913 - 344827586206896551724137931 - etc.

5. La liste A001913 de l'OEIS (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences de N.J.A. Sloane) qui donne les Full reptend primes (primes with primitive root 10) est à l'adresse <https://oeis.org/A001913>

c. Frises rationnelles de quotients dans différentes bases

Séquences de longueur paire

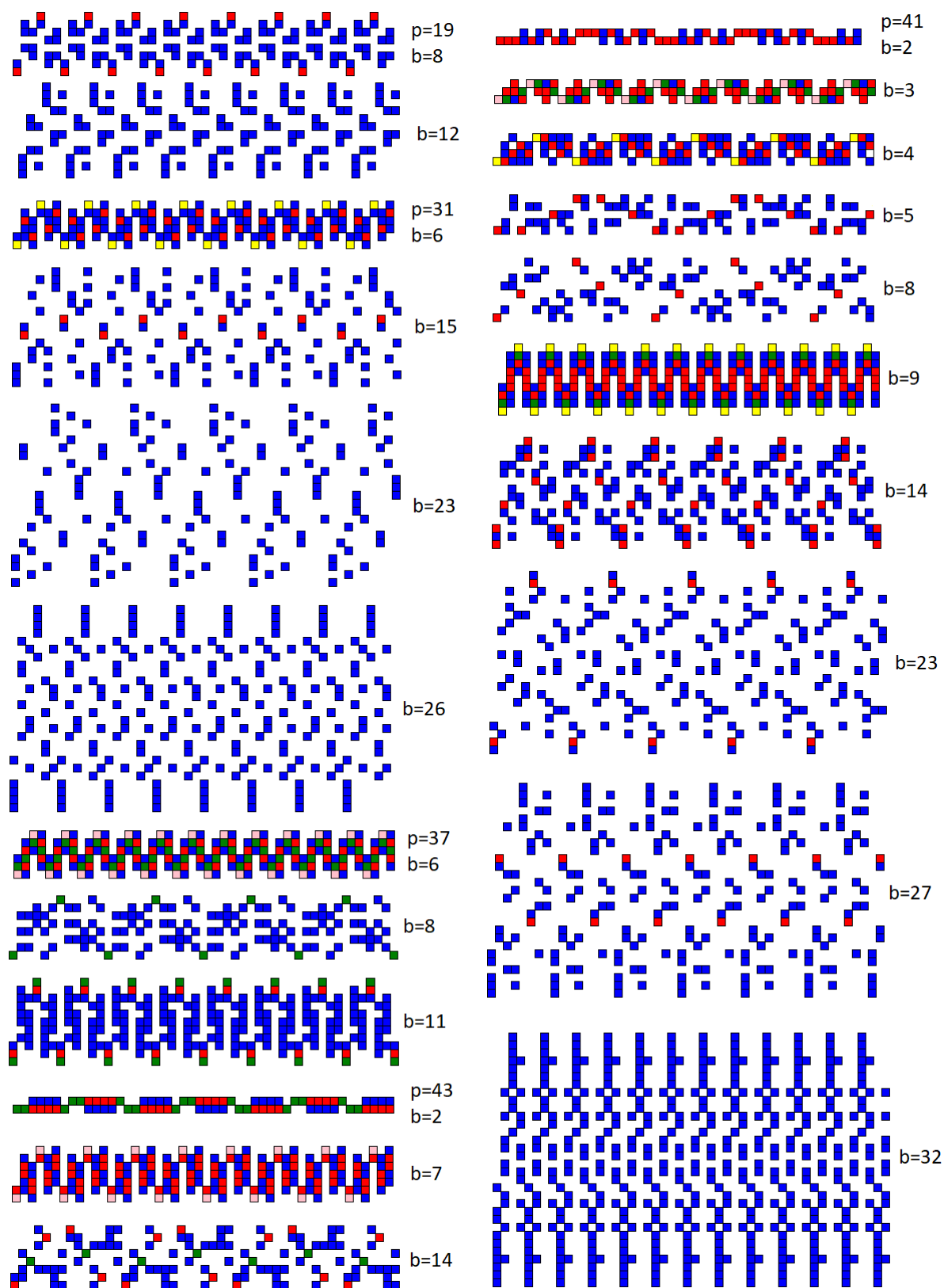


FIGURE 7.31 – Les frises superposées des quotients de 19, 31, 37, 43 (à gauche, de haut en bas) et 41 (à droite) dans certaines des bases pour lesquelles ces nombres premiers p ont des périodes paires inférieures à $p - 1$. Le code couleur donne le nombre de chevauchements (1 : bleu, 2 : rouge, 3 : vert, 4 : jaune, 5 : rose).

Séquences de longueur impaire

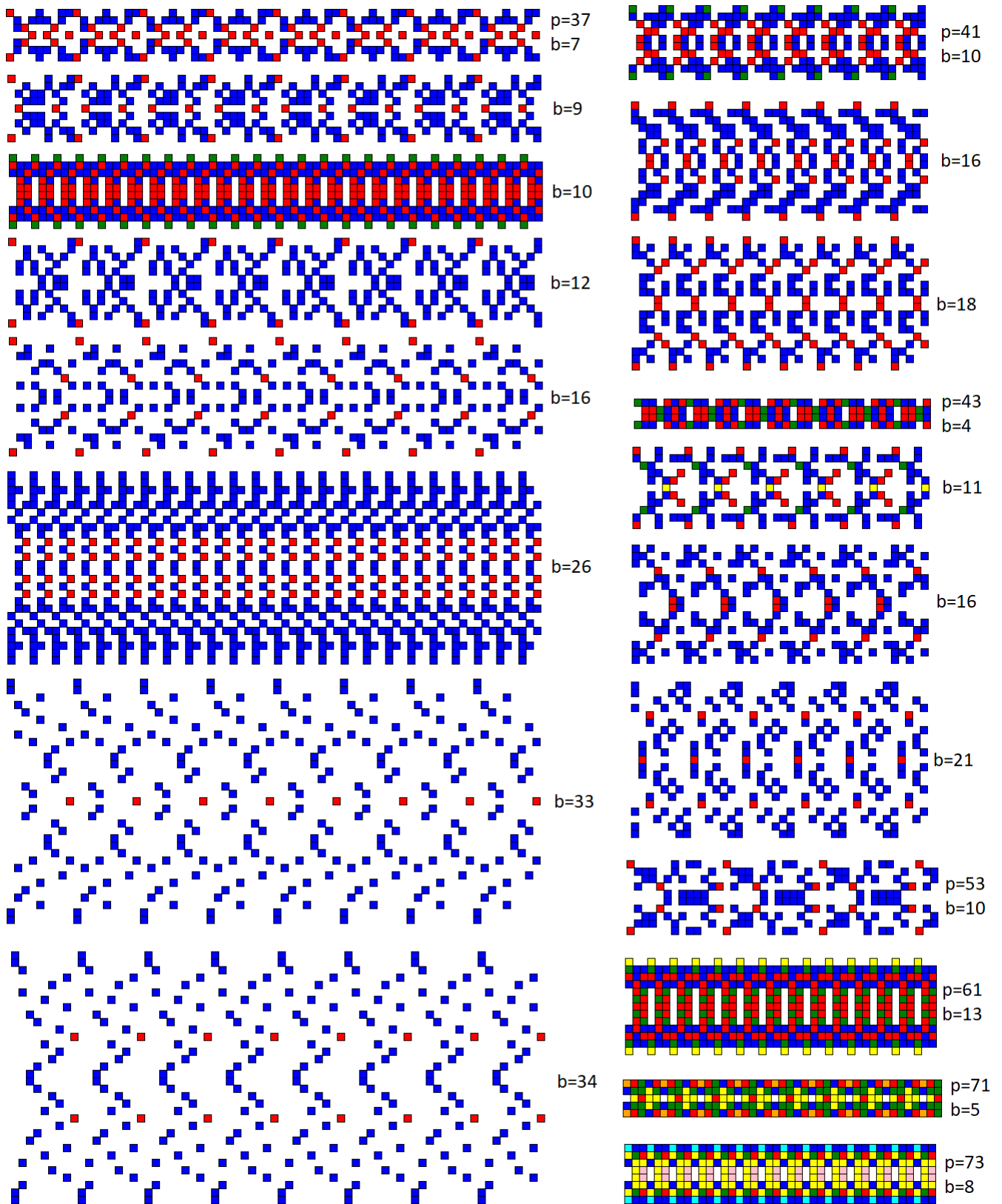


FIGURE 7.32 – Les frises superposées des quotients de 37 (à gauche), 41, 43, 53, 61, 71 et 73 (à droite) dans certaines des bases pour lesquelles ces nombres premiers p ont des périodes impaires inférieures à $\frac{p-1}{2}$ (toutes celles du motif élémentaire pour 37 et 41). Le code couleur donne le nombre de chevauchements (1 : bleu, 2 : rouge, 3 : vert, 4 : jaune, 5 : rose, 6 : orange, 7 : cyan).

Quelques données explicites sur les séquences périodiques superposées de l'image ci-dessus

Frises rationnelles superposées du nombre 37 :

base	sequences	base	séquences
7	012161463/654505203 et 024353256/642313410	9	021628238/065086726 et 043357477/118455314
10	027/972, 054/945, 081/918, 135/864, 162/837 et 243/756	12	03a85232b/b81369890 et 0794a465a/b42717561
16	06eb3e453/f914c1bac et 0dd67c8a6/f22983759	26	0i7/p7i, 1ae/ofb, 22l/nn4, 3d9/mcg, 45g/lk9 et 68b/jhe
33	0te8uan68/w3io2m9qo et 1psrhldcg/w74f5bjkg	34	0v896enub/x2porja3m et 1sgictdqm/w5hfl4k7b

Frises rationnelles superposées du nombre 41 :

base	séquences	base	séquences
10	02439/97560, 04878/95121, 07317/92682 et 14634/85365	16	063e7/f9c18, 0c7ce/f3831, 12bb5/ed44a et 2576a/da895
18	07g47/ha1da, 0fe8e/h2393, 15cd3/gc54e et 2b786/f6a9b	37	0xeg9/A3mkr, 1tswi/z784i, 2q6br/yaup9 et 5fcn/vlodj

Extension de la table des périodes (figure 7.19)

[illegible]

FIGURE 7.33 – Longueurs des séquences périodiques des quotients dont les diviseurs sont les nombres premiers p compris entre 43 et 101 selon les bases b du motif élémentaire de p (le même motif se répète modulo p).

b/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	-	3	7	5	31	-	127	17	73	11	23 89	13	8191	43	151	257	131071	19	524287	41
3	2	-	13	5	11	7	1093	41	757	61	23 3851	73	797161	547	4561	17 193	1871 34511	19 37	1597 363889	1181
4	3	5	7	17	11 31	13	43 127	257	19 73	41	23 89 683	241	2731 8191	29 113	151 331	65537	43691 131071	37 109	174763 524287	61681
5	2	3	31	13	11 71	7	19531	313	19 829	521	-	601	-	29 449	181 1741	17 11489	409	5167	191 6271	41 9161
6	5	7	43	37	311	31	55987	1297	19 2467	11 101	23	13 97	3433 760891	29 197	1171 1201	17 98801	239 409 1123 30839	46441	191	241 6781
7	2 3	-	19	5	2801	43	29 4733	1201	37 1063	11 191	1123 293459	13 181	-	113 911	31 159871	17 169553	14009	117307	419	281 4021
8	7	3	73	5 13	31 151	19	127 337	17 241	262657	11 331	23 89 599479	37 109	79 8191 121369	43 5419	631 23311	97 257 673	103 2143 11119 131071	87211	32377 524287	41 61 1321
9	2	5	7 13	41	11 61	73	547 1093	17 193	19 37 757	1181	23 67 661 3851	6481	398581 797161	29 16493	31 271 4561	-	103 307 1021 1871 34511	530713	1597 2851 101917 363889	-
10	3	11	37	101	41 271	7 13	239 4649	73 137	333667	9091	513239 21649	9901	53 79	909091	31	17	-	19 52579	-	3541 27961
11	2 5	3	7 19	61	3221	37	43 45319	7321	-	13421	15797	13 1117	1093	-	-	17	-	590077	-	-
12	11	13	157	5 29	22621	7 19	659 4943	89 233	37 80749	19141	23	20593	477517	211 13063	61 661 9781	17 97 260753	-	1657 1801	-	-
13	2 3	7	61	5 17	30941	157	-	14281	-	11 2411	23 419 859 18041	28393	53 264031	29 22079	4651 161971	-	103 443	19 271 937	-	421 601 641
14	13	3 5	211	197	11 3761	61	-	41 937	397 18973	71 101	67 4027	37 1033	157	-	31 2851 15511	17 5393 16097	103	19 132049	-	1061
15	2 7	-	241	113	11 4931	211	-	17 1489	541 21061	31 1531	67 463 2333 8537	13 3877	53 157483	-	61	7121 179953	-	19 739 811	-	19421 131381
16	3 5	17	7 13	257	11 31 41	241	29 43 113 127	65537	19 37 73 109	61681	23 89 397 683 2113	97 673	53 157 1613 2731 8191	-	61 151 331 1321	641	137 953 26317 43691 131071	433 38737	229 457 174763 524287 525313	-

FIGURE 7.34 – Nombres premiers inférieurs à 1 000 000 exprimés dans les bases b comprises entre 2 et 16 dont les quotients ont des séquences périodiques de longueur n comprises entre 1 et 20. Voir 7.2.c pour les coloriations.

Solutions des frises superposées à déterminer (figure 7.26)

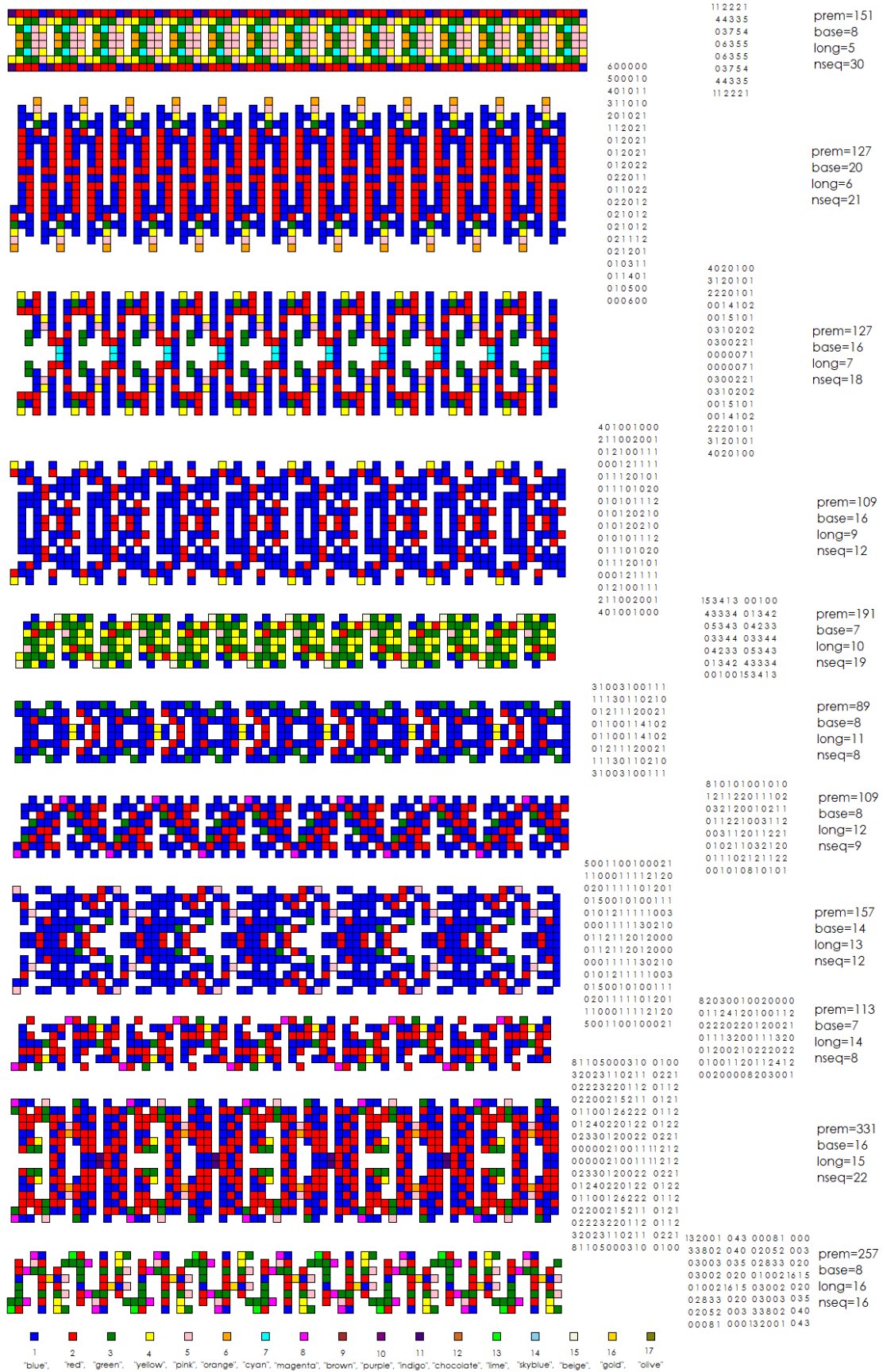


FIGURE 7.35 – Frises superposées de quotients pour des nombres premiers indiqués à droite (*prem*) et dans des bases indiquées également à droite (*base*). J'ai aussi indiqués à droite la longueur de la séquence (*long*) et le nombre des séquences périodiques (*nseq*).