



Les duos du Tangram

Jouer avec le Tangram et ses nombreuses configurations est une occupation qui m'est très familière et déjà ancienne. J'y ai consacré un livre de 340 pages, auto-édité en 2014, que curieusement j'ai nommé « Tangram Évolutif ». Avant cela, j'avais déjà rédigé un premier livre sur le même sujet, nommé très logiquement « L'Univers du Tangram », qui avait été accepté par la collection *Pour La Science* en 2010 et avait même été entièrement relu par cet éditeur. Pour une raison mystérieuse, ce livre n'a pourtant pas été édité.

Pour moi le sujet n'était pas clos. Je me posais encore quelques questions pour lesquelles je presentais la difficulté et imaginais le chemin long, mais prétextant le peu d'intérêt de la communauté sur ces propos, je retenais mes élans pour des jours plus propices. Secrètement je pensais qu'un ou une autre pourrait d'ici là prendre le relai de cette recherche ardue me délivrant ainsi de ces plans pour le futur que j'avais consigné dans mon quatorzième chapitre.

Huit années ont passé. J'avais mis mon livre auto-édité en téléchargement libre, comme un pêcheur jetant sa ligne j'attendais que le poisson morde mais rien, pas un retour malgré les 3065 téléchargements de cet ouvrage. Quand soudain je reçois le message d'un lecteur enthousiaste, Marc Jezequel¹, qui fait des spectacles avec les tangrams et édite lui même de petits fascicules sur ces thèmes. D'ailleurs il m'envoie deux d'entre eux – « l'Alphabet Amoureux du Tangram » et « le Chie-No-Ita, le tangram japonais » – me proposant d'en faire une lecture critique.

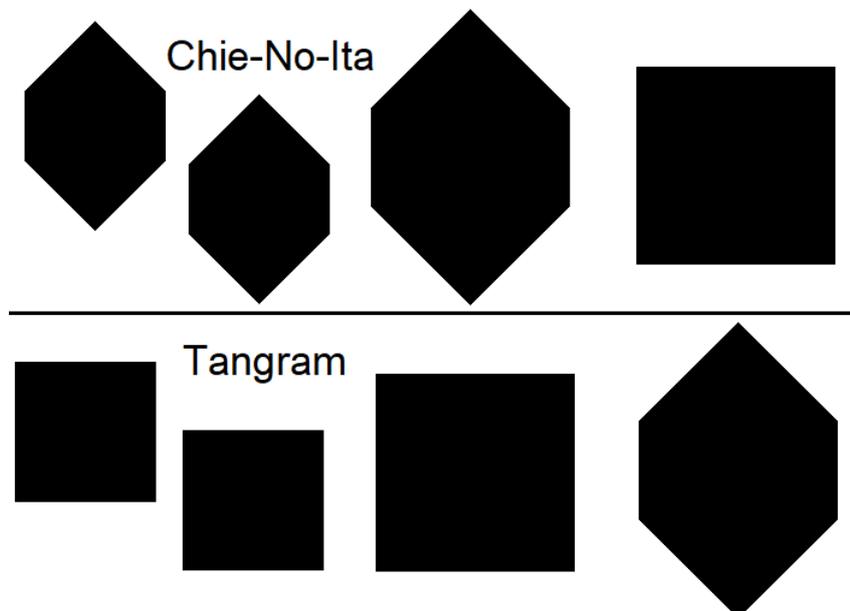


FIGURE 1.1 – Avec le *Chie-No-Ita*, on peut réaliser un grand hexagone ou deux petits semblables au grand tandis qu'avec le *Tangram*, on peut réaliser un grand carré ou deux petits semblables au grand. Par contre, si on peut réaliser un grand carré avec le *Chie-No-Ita* on ne peut pas faire les deux petits semblables au grand ; de même, si on peut réaliser un grand hexagone avec le *Tangram*, on ne peut pas faire les deux petits semblables au grand (solutions en fin de chapitre).

1. Retrouver les créations de Marc Jezequel, le Magicien du Tangram, sur son site <http://www.marcjezequel.com>

Je me lance dans cette relecture et, en approfondissant une réflexion sur une forme d'hexagone que l'on peut réaliser en double avec, pour chacune la moitié des pièces du Chie-No-Ita, je remarque que ces deux hexagones sont l'équivalent des deux carrés réalisables en double avec le Tangram. En effet, Le Tangram est une dissection d'un grand carré mais on peut avec ses pièces réaliser deux carrés plus petits. De même, le Chie-No-Ita est une dissection du carré mais on ne peut pas réaliser avec ses pièces les deux carrés plus petits. Par contre, ce puzzle peut réaliser un grand hexagone et également deux hexagones plus petits, ce que ne peut pas faire le Tangram (figure 1.1).

Je crois que ce qui avait titillé à ce sujet mon esprit était la proposition de Marc de réaliser un « Tangram décimètre-cube » : il superposait les deux petits carrés du Tangram, avec un jeu de pièces dont l'épaisseur était égale au côté de la pièce carrée, ce qui conduit à un cube de 1dm de côté si le côté de la pièce carrée mesure 5cm. Je m'interrogeais vaguement sur les possibilités combinatoires d'un tel puzzle en 3D et, transposant le concept au Chie-No-Ita, j'imaginai un « Chie-No-Ita décimètre-cube » en forme de prisme hexagonal.

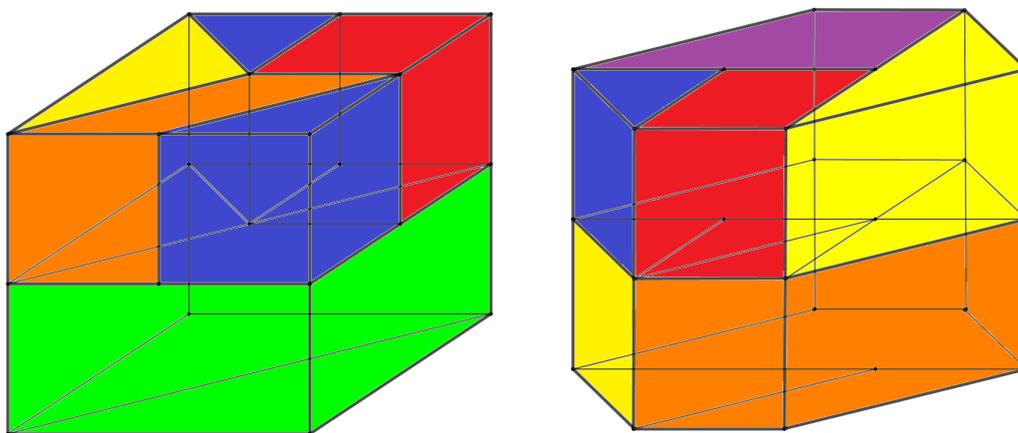


FIGURE 1.2 – Le « Tangram décimètre-cube » et le « Chie-No-Ita décimètre-cube »

Pourquoi donner la prédominance à l'hexagone ? Est-ce parce que celui là est une figure convexe ayant deux axes de symétrie, ou est-ce à cause de cette équivalence avec le carré du Tangram ? J'en vins à rechercher d'autres formes réalisables en double avec le Chie-No-Ita. Il va sans dire qu'à ce stade, la recherche est manuelle. Je manipulais les pièces en bois que m'avait envoyées également Marc et photographiais les solutions trouvées, au fur-et-à-mesure de leur découverte. Marc de son côté, pris comme moi à ce nouveau jeu, faisait de même et m'envoyait les solutions qu'il trouvait. On en vint à penser que celles-ci étaient très nombreuses. Marc m'envoyant la photo de cette forme de sapin, me disait qu'il y avait une infinité de telles solutions puisqu'il suffisait de faire glisser la partie supérieure d'une quantité infime pour en former une nouvelle. Fort de mon étude préalable des tangrams, je connaissais la cause de cette exubérante pléthore : la forme en question positionnait une de ses pièces sans obéir à la règle d'assemblage des formes homogènes. Cette règle – énoncée en premier par Ronald Read à propos des tangrams – stipule que les pièces doivent s'assembler sans chevauchement en mettant en commun au moins un sommet et une partie d'un côté, tous les sommets de toutes les pièces coïncidant avec les nœuds du quadrillage sous-jacent dont les mailles ont la forme de la pièce carrée.

La forme de sapin proposée par Marc a sa pièce supérieure qui n'est pas disposée selon cette règle. En l'absence de ces points d'ancrages, les pièces flottent plus facilement et conduisent à des assemblages qui glissent de façon continue d'une position extrême à l'autre, générant une infinité de variantes. Les formes homogènes – Read [14] parlait à leur propos de *snug forms* – sont, par définition, en nombre fini.

Trouver des collections finies de formes n'obéissant pas nécessairement aux règles de l'assemblage homogène est une entreprise difficile. La forme de sapin semble appartenir à une de ces familles puisqu'elle obéit à une règle qui en limite le nombre : elle possède un axe de symétrie. Mais rien n'interdit à une forme symétrique d'avoir une infinité de variantes. Pour preuve, j'exhibe une forme symétrique composée des sept pièces du jeu et possédant une infinité de variantes.

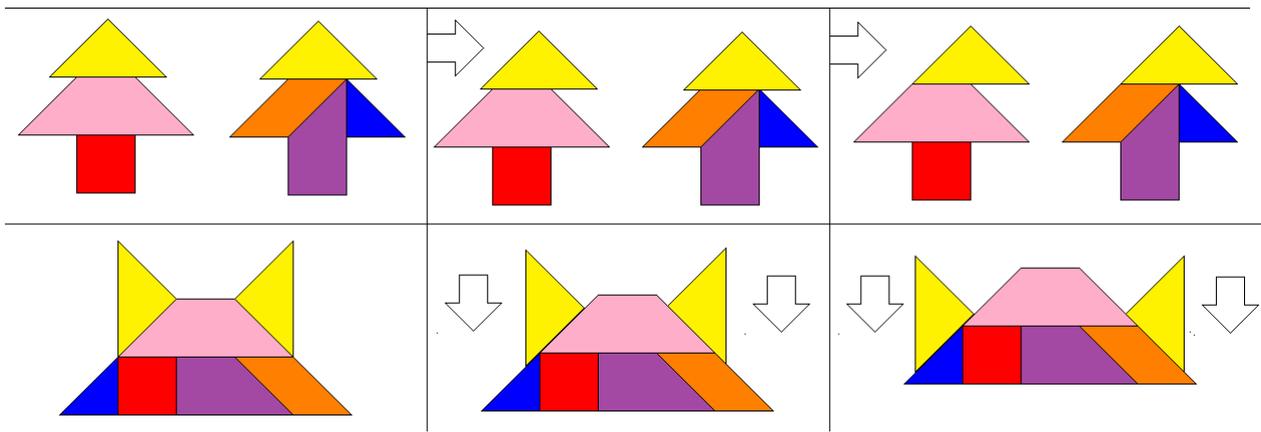


FIGURE 1.3 – En haut, la forme de sapin (symétrique) et ses multiples variantes non symétriques obtenues par glissement de la pièce supérieure; en bas, une forme symétrique possédant de multiples variantes, symétriques également, obtenues par des glissements de même intensité des deux triangles.

Les règles de formation ainsi précisées, je me lance dans une recherche plus systématique des formes homogènes réalisables deux fois, en dédoublant les pièces du jeu Chie-No-Ita. La liste de ces formes, dénommées « duos » s’allonge progressivement, et à chaque fois, je cherche s’il est possible de réaliser la même forme (une silhouette semblable à celles des duos) avec la totalité des sept pièces du jeu. Lorsque cela est possible, je me dis « le duo réalise son solo », mais la plupart des duos trouvés ne réalisent pas leur solo.

Cette recherche manuelle est assez difficile car passer de la forme duo à la forme solo est beaucoup moins évident qu’il ne paraît. De plus, même en s’appliquant méthodiquement à ce travail, on n’est jamais certain de ne pas écartier trop vite des possibilités restées inaperçues. Je résiste, le temps d’un week-end, à la mise en œuvre d’une recherche informatisée car mes programmes sont anciens, et pas forcément adaptés à ce type de formes. Mais la pensée continue son élaboration inconsciente et lorsque je me décide à lui consacrer quelques heures, histoire de voir ce que je pouvais faire, j’avais déjà en tête les grandes lignes de l’algorithme.

1. Les duos du Chie-No-Ita

La règle d’assemblage que j’ai adoptée pour les pièces a été définie plus haut : je ne cherche que des formes homogènes (des *snug forms*). Celles si sont codifiées dans mes programmes de la manière suivante : une forme homogène est contenue dans un rectangle minimum, découpé selon les lignes du quadrillage sous-jacent, au plus près de la forme. La description de la forme est obtenue en décrivant chacun des carreaux de ce rectangle minimum. Un carreau est dans l’un des états suivants : vide de la forme (code 0), rempli par la forme (code 5) ou à demi occupé par la forme (codes 1, 2, 3 ou 4 pour les demi-carrés). Ce système est illustré plus bas.

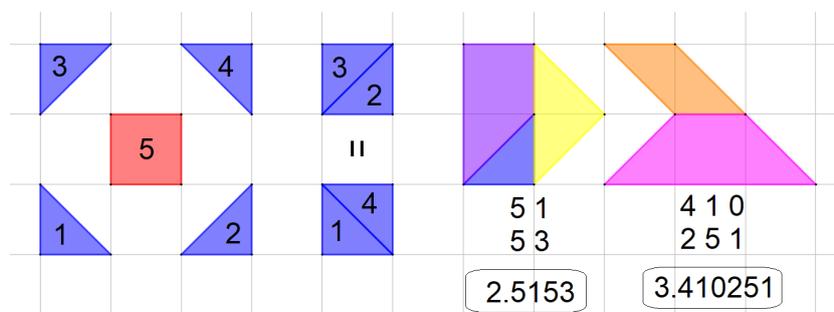


FIGURE 1.4 – à gauche, les codes attribués aux contenus d’une maille du quadrillage; au milieu, les assemblages de demi-triangles valides conduisent au code 5; à droite, deux exemples de codification d’assemblages homogènes.

Avec cette codification, lorsqu’il tente d’assembler deux pièces, l’ordinateur peut détecter un assemblage de deux demi-carrés : la somme des codes doit faire 5 ! Le code complet d’une pièce ou

d'un assemblage contient les chiffres des différents carreaux composants le rectangle minimum. Je fais précéder la liste de ces codes, ligne par ligne, par le nombre de colonnes suivi d'un point séparateur. Dans mon premier exemple, la forme est contenue dans un rectangle de 2 lignes de 2 colonnes ; son code commence par un 2 suivi d'un point, suivi de la description de la 1^{re} ligne (51) concaténée à la description de la 2^e ligne (53). Le code complet de cette forme est donc 2.5153. Selon le même principe, la forme de droite est codée 3.410251.

La description de mon système serait incomplet sans la règle de détermination de la codification canonique d'une forme. Cette codification canonique est nécessaire pour identifier les formes identiques qui sont dans des dispositions différentes : tournées de 90, 180 ou 270 degrés ou bien encore retournées autour d'un axe parallèle à une ligne du quadrillage sous-jacent. La forme codée 3.410251, n'ayant pas d'élément de symétrie, peut être disposée de huit façons différentes dans le quadrillage. Parmi les huit codes qui s'en déduisent, je retiens le code qui est le premier dans l'ordre alphanumérique et je le baptise « code canonique » de la forme. C'est ce code canonique que j'enregistre lors des différentes phases de l'assemblage des pièces.

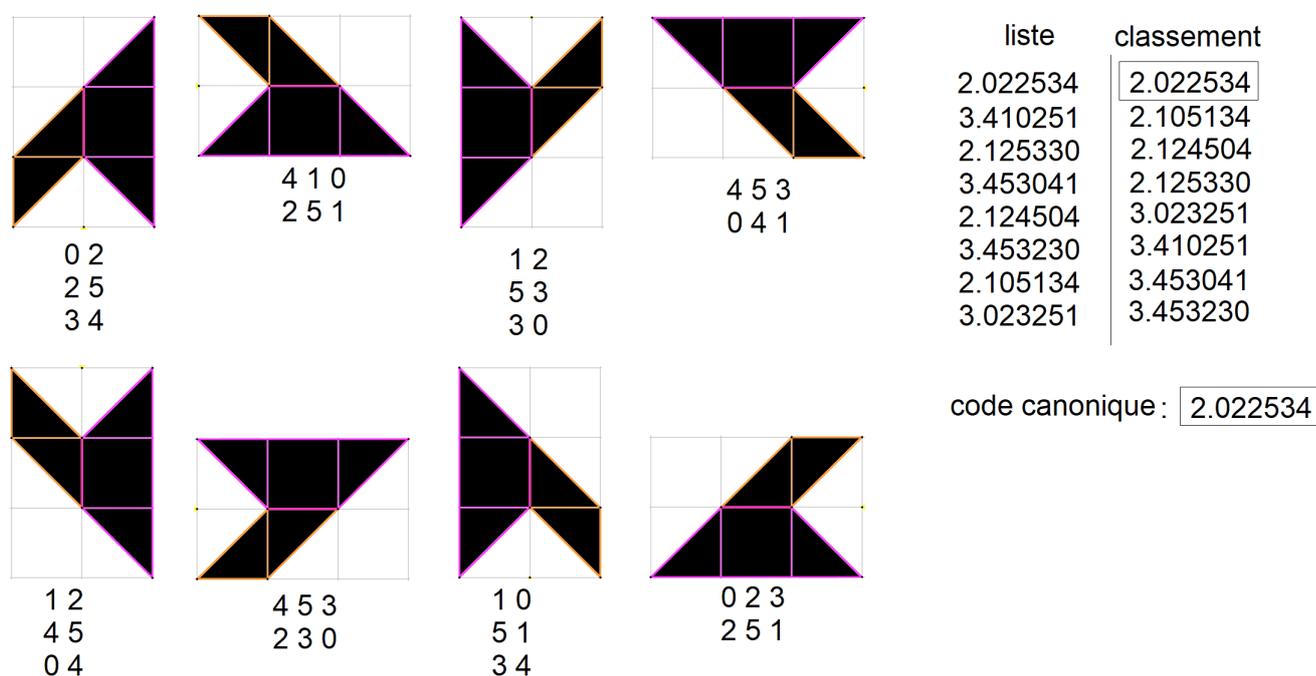


FIGURE 1.5 – Les huit dispositions différentes d'une même forme homogène et leurs codes ; le code canonique est celui qui vient en premier dans l'ordre alphanumérique.

Bien sûr, des programmes permettent de définir très rapidement le code canonique d'une forme. Mais les différentes dispositions d'une forme doivent être accessibles pour réaliser les assemblages. Car le protocole suivi essaie successivement d'assembler une pièce à un assemblage préexistant en la disposant de toutes les façons possibles autour de cet assemblage. Chacune des pièces constitue, successivement, le premier assemblage sur lequel est assemblée une autre pièce. En procédant ainsi, et en supprimant les doublons éventuels, j'obtiens tous les assemblages possibles de deux pièces que je mémorise avec une indication des pièces restant à agréger.

À partir de ces assemblages de deux pièces, le programme essaie pareillement d'assembler de toutes les façons possibles une 3^e pièce. Le processus se répète alors jusqu'à ce que toutes les pièces que l'on voulait agréger le soient. Le fichier final ne contient plus de doublon ; les différentes listes, en fusionnant dès que c'est possible, les éliminent. Cet algorithme sophistiqué a été mis au point par Ronald Read [13] pour générer les *snug tangrams* : en 2004, il en donnait le nombre, 5 583 516 dont 4 842 205 formes pleines (incluant les 13 convexe), 731 951 formes avec une baie et 9 360 formes avec un trou. J'ai vérifié par la suite ce nombre et appliqué cette méthode avec succès pour de très nombreux autres jeux de pièces dont le Chie-No-Ita.

Ce jeu de pièces est historiquement antérieur au Tangram puisqu'on en retrouve des traces au Japon dès les années 1750 alors que le Tangram n'est pas connu avant les années 1800. Cependant il a été moins répandu à l'extérieur de sa région de naissance et donc moins étudié. Alors que le Tangram est régulièrement revenu au devant, citons seulement Samuel Loyd [9] en 1968 et Martin Gardner [6] [7] en 1974 qui en renforcent la notoriété. Read ne mentionne même pas le Chie-No-Ita, c'est Gardner qui l'introduit en occident, par un court paragraphe de son addendum à son 2^e article [7]. Appliquant la méthode de Read au Chie-No-Ita, j'en découvre alors la formidable capacité combinatoire : il réussit à constituer 10 889 227 formes homogènes dont 9 207 589 formes pleines, 3 394 formes symétriques (Tangram n'en réalise que 2022) et 16 formes convexes.

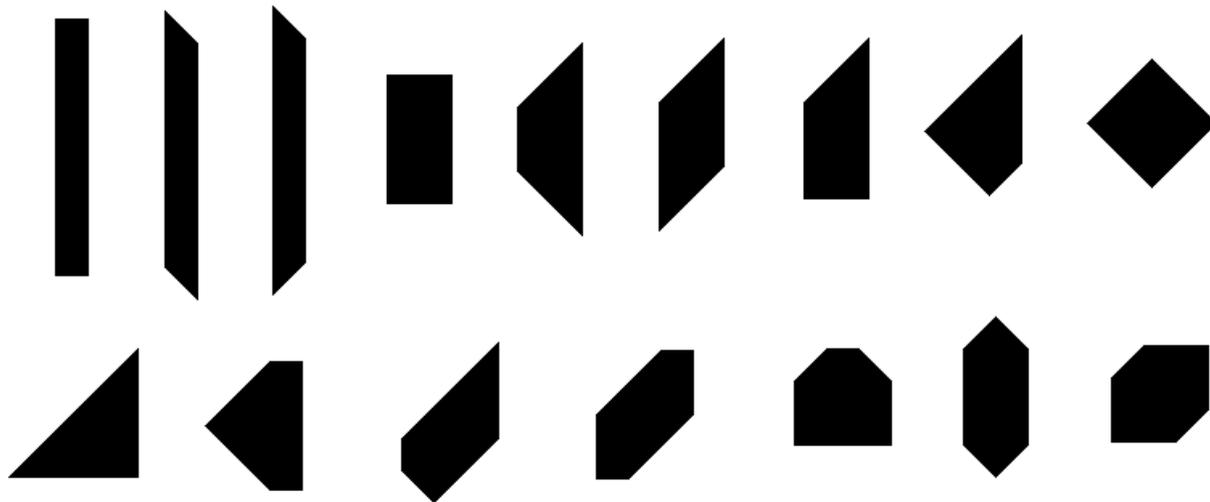


FIGURE 1.6 – Les 16 formes convexes réalisables avec Chie-No-Ita (solutions en fin de chapitre).

Pour déterminer l'ensemble des duos homogènes du Chie-No-Ita, je détermine dans un 1^{er} temps les formes réalisables avec les cinq groupes suivants, formés par la réunion du grand trapèze (d'aire 2) et de deux autres pièces totalisant une aire de 2 :

- ♦ Le groupe A_1 , constitué du grand trapèze, du trapèze rectangle et du petit triangle
- ♦ Le groupe B_1 , constitué du grand trapèze et des deux grands triangles
- ♦ Le groupe C_1 , constitué du grand trapèze, d'un grand triangle et du carré
- ♦ Le groupe D_1 , constitué du grand trapèze, d'un grand triangle et du parallélogramme
- ♦ Le groupe E_1 , constitué du grand trapèze, du parallélogramme et du carré

Dans un 2^e temps, je détermine les formes réalisables avec les cinq groupes complémentaires :

- ♦ Le groupe A_2 , constitué du parallélogramme, du carré et des deux grands triangles
- ♦ Le groupe B_2 , constitué du trapèze rectangle, du parallélogramme, du carré et du petit triangle
- ♦ Le groupe C_2 , constitué du trapèze rectangle, d'un grand triangle, du parallélogramme et du petit triangle
- ♦ Le groupe D_2 , constitué du trapèze rectangle, d'un grand triangle, du carré et du petit triangle
- ♦ Le groupe E_2 , constitué du trapèze rectangle, des deux grands triangles et du petit triangle

Ensuite, je sélectionne les duos formés par les deux parties du groupe A : il suffit de conserver dans la liste des formes A_1 celles qui sont dans A_2 . De même, je sélectionne les duos formés par les deux parties des groupes B , C , D et E . Ces listes de duos sont enfin fusionnées en une seule liste qui contient 87 formes. Ainsi, Chie-No-Ita réalise 87 formes en double – 87 duos – avec un dégroupement des sept pièces en un groupe de trois et un groupe de quatre pièces.

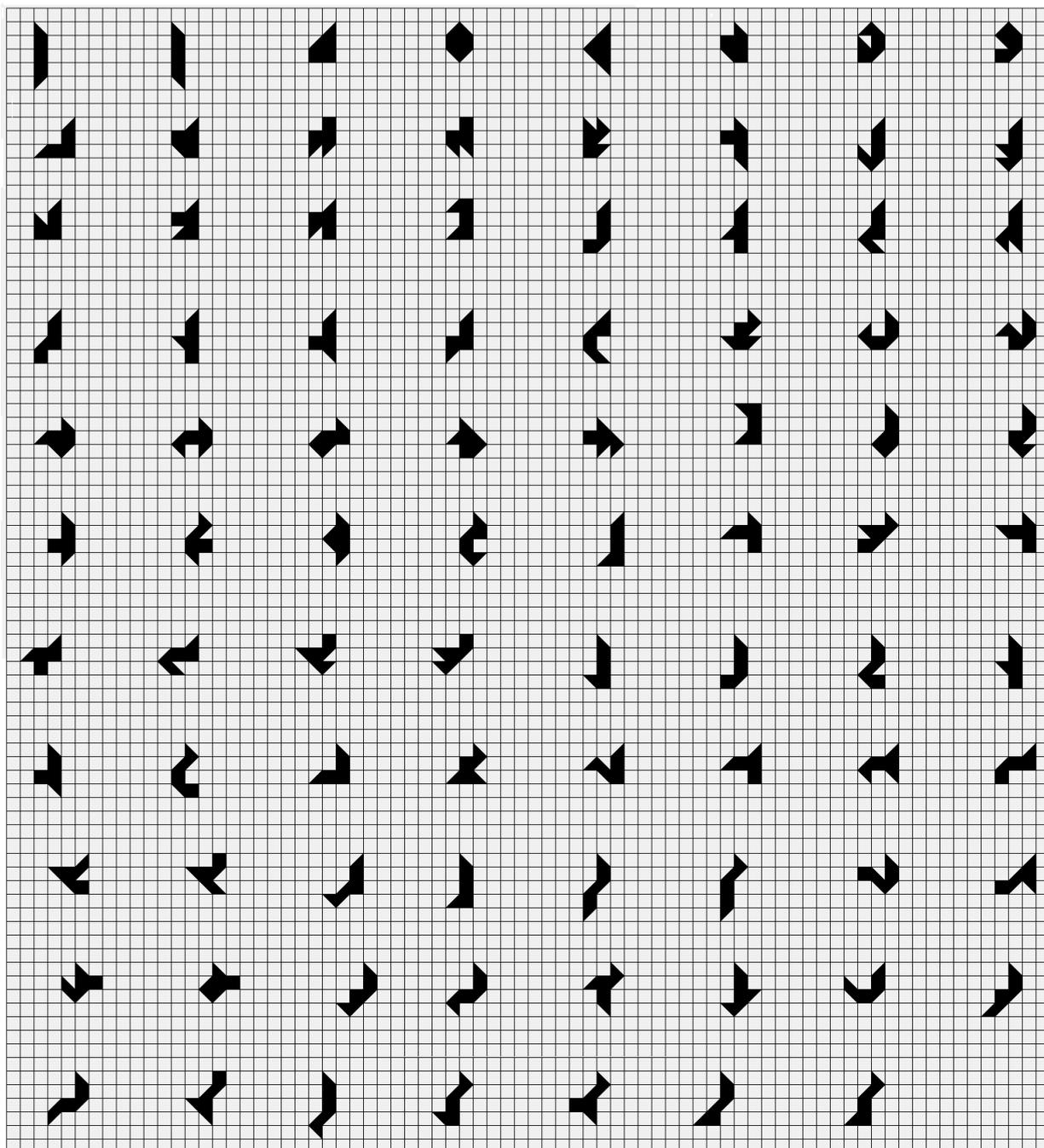


FIGURE 1.7 – Les 87 duos réalisables avec Chie-No-Ita (solutions en fin de chapitre).

Cette première liste fut rapidement constituée car mes anciens programmes pouvaient facilement être adaptés pour l'obtenir. Ce qui me paraissait moins évident était la réalisation d'un programme qui teste si l'ensemble des sept pièces pouvait reconstituer la même forme d'aire double – le solo du duo. Pour cela la silhouette devait être tournée de 45° pour que le carré de côté 1 soit agrandi en un carré de côté $\sqrt{2}$. En partant de mes codes décrivant l'occupation des mailles du quadrillage, je devais produire de nouveaux codes correspondants à cette transformation.

La figure 1.1 donne une idée fautive de cette transformation. Il faut restituer les formes agrandies dans le quadrillage sous-jacent pour les voir telles que le programme peut les traiter. Cette difficulté surmontée, il me serait alors en principe facile de trouver, avec un autre des programmes initialement écrit pour le Tangram, les formes reconstituables par les sept pièces du jeu ainsi que l'emplacement de ces pièces. La transformation de chacun des codes, par une rotation de 45° dans le sens trigonométrique, se traduit par : 1 se transforme en 2.43, 2 se transforme en 1.13, 3 se transforme en 1.24, 4 se transforme en 2.21 et 5 se transforme en 2.2143. Cela se trouve simplement en dessinant les triangles ou le carré, avant et après la transformation.

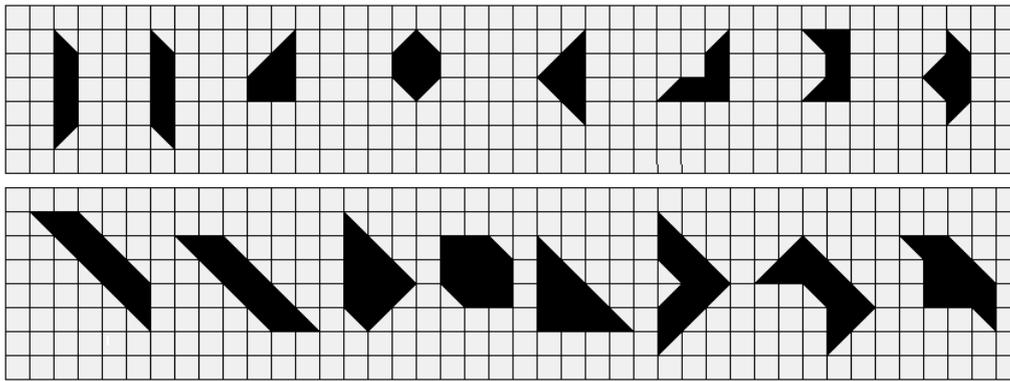


FIGURE 1.8 – Les duos convexes ou symétriques réalisables avec Chie-No-Ita, aux deux échelles d’observation.

Ce qui fut moins évident, c’était l’addition de ces différentes sous-formes, au bon endroit dans le code de la forme agrandie. Expliquer ceci avec des mots ne rend pas la chose plus évidente, au contraire. Mais si un duo se code sur plusieurs lignes, à chaque nouvelle ligne, il faut décaler les codes transformés vers la droite et lorsqu’il y a une nouvelle colonne, il faut aussi décaler les codes transformés vers le haut. Sur l’image, pour illustrer cela, la forme du milieu n’ayant qu’une colonne, il suffit de décaler les codes de chaque ligne transformée vers la droite. Pour la forme de droite qui s’écrit sur trois colonnes, remarquez la 3^e ligne qui contient deux codes non nuls : la transformation du code 5 (2.2143) s’écrit au niveau de la lignes 3 (s’y s’écrivent les codes 4 3, les codes 2 1 s’écrivant au-dessus) alors que la transformation du code 3 (1.24) s’écrit au niveau de la lignes 2 (s’y s’écrit le code 4, le code 3 s’écrivant au-dessus).

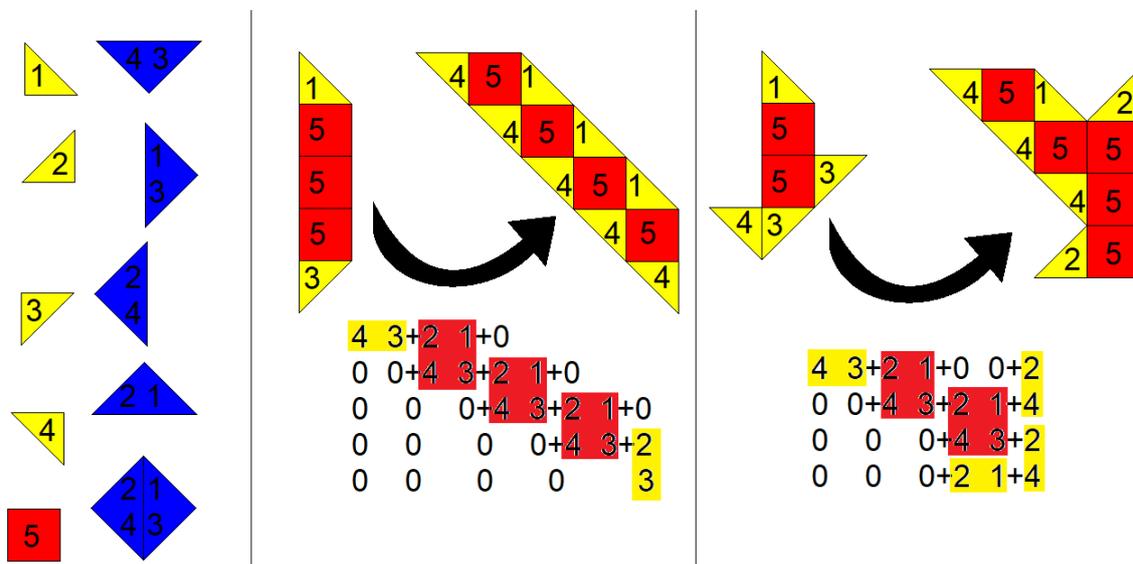


FIGURE 1.9 – Transformation des codes pour rendre compte de la rotation de 45° suite à l’agrandissement de coefficient $\sqrt{2}$; à gauche, les cinq codes d’une maille et leur transformé ; au centre et à droite, deux exemples de transformation d’un code de forme.

Les 87 duos de Chie-No-Ita sont ainsi transformés, leur aire passant de 4 à 8, pour devenir accessible potentiellement à l’ensemble des pièces du jeu. Il reste à déterminer lesquelles reconstituent réellement ces formes doublées. Un autre de mes anciens programmes, adapté pour utiliser les pièces de ce jeu, entre en action et me révèle alors que cinquante de ces formes réalisent leur solo, trente-sept n’y parvenant pas. C’est un peu surprenant car mes essais manuels alliés à ceux de Marc ne parvenaient pas à une si importante proportion. Mais l’exercice n’est pas aisé : partez d’un duo pris au hasard dans la figure 1.7 et essayez de déterminer s’il réalise son solo...

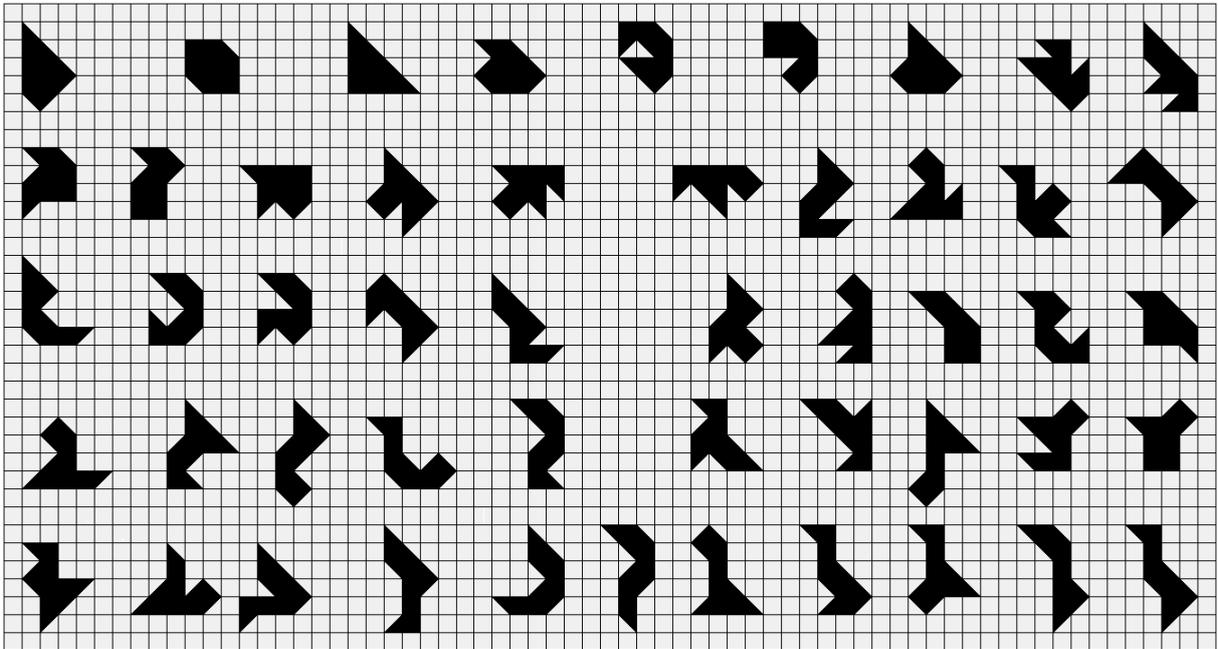


FIGURE 1.10 – Les cinquante duos du Chie-No-Ita qui réalisent leur solo (solutions en fin de chapitre).

Sans un programme informatique qui explore systématiquement toutes les possibilités, il est très difficile de se convaincre qu'une forme n'est pas réalisable avec les sept pièces du jeu. Une preuve rigoureuse nécessite un argument inattaquable comme celui que peut fournir l'impossibilité de loger le grand trapèze. Cette grande pièce, en effet, ne peut pas se loger dans un espace trop réduit, mais il n'y a que les deux premiers duos (marqués d'un astérisque) qui sont explicables aussi simplement. Un argument puissant d'impossibilité avec le Chie-No-Ita est le nombre de maille pleine couvertes par la forme : les pièces du jeu contiennent trois mailles pleines (dans les deux trapèzes et la pièce carrée) et si la forme à reconstituer n'en contient pas autant, il n'y aura pas de solution. Cet argument fonctionne bien pour trouver manuellement des duos mais pour les solos, aucune forme ne présente un défaut de maille pleine. Souvent, on réalise qu'une forme n'est pas réalisable car il nous reste une pièce d'aire 1 alors qu'on aurait besoin de deux petits triangles, or il n'y en a qu'un seul dans le jeu (le Tangram, lui, est moins contraint à ce propos puisqu'il en a deux ; on étudiera plus loin sa capacité à réaliser le solo de ses duos).

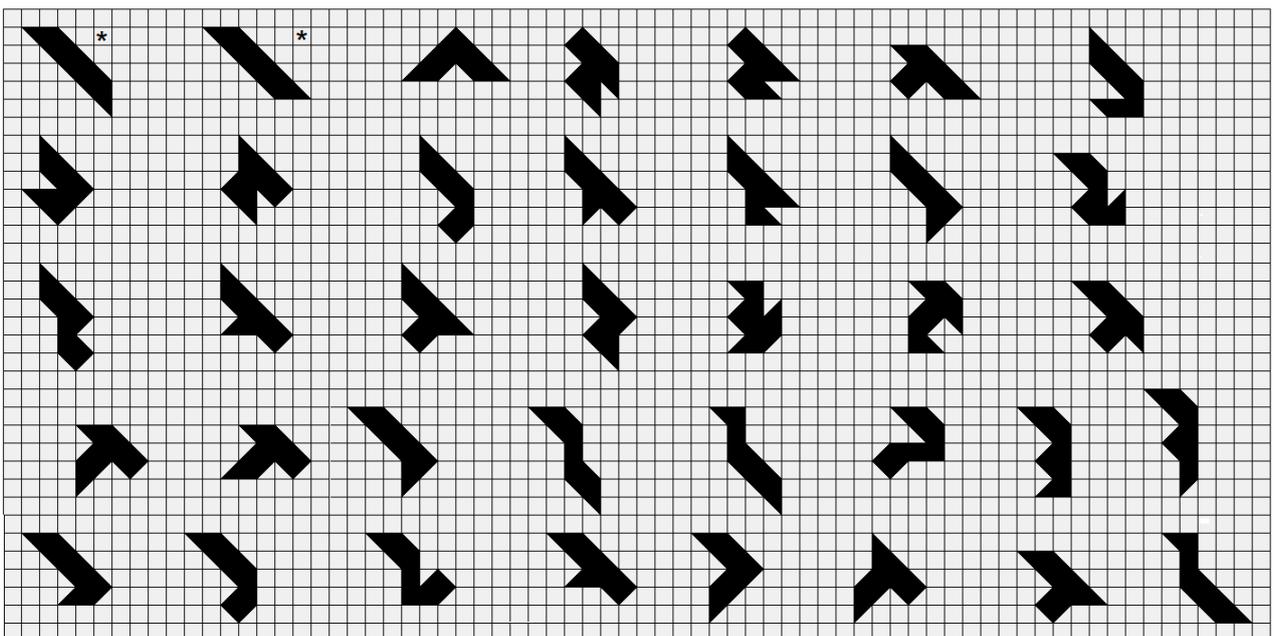


FIGURE 1.11 – Les trente-sept duos dédoublés qui ne réalisent pas leur solo avec Chie-No-Ita.

2. Les duos du Tangram

Après avoir obtenu ces résultats avec Chie-No-Ita, il me fallait les comparer avec ceux du Tangram relativement au même problème. Tout le monde connaît la possibilité qu'a ce jeu pour réaliser deux petits carrés, possibilité déjà mentionnée plus haut (voir les figures 1.1 et 1.2). Mais je n'avais pas le souvenir d'autres duos mentionnés dans la littérature et encore moins d'étude systématique faite à ce propos. Comme les outils pour faire cette étude étaient déjà prêts dans mon ordinateur, les adapter au jeu de pièces du Tangram ne présentait aucune difficulté.

Au lieu des cinq groupes de trois pièces et des cinq groupes complémentaires dont il fallait produire la liste des formes homogènes pour en extraire leur intersection (les duos), le Tangram doit être partagé en seulement quatre groupes. Les deux grands triangles, totalisant une aire de 4, forment à eux seuls le premier groupe. Le groupe complémentaire de ce 1^{er} groupe est l'ensemble des cinq petites pièces dénommé « mini-tangram ». Il y a une énorme différence entre les nombres de formes générées par la combinaison homogène des pièces de ces groupes : 962 pour le mini-tangram et 7 seulement pour les deux grands triangles (p.33 et Solutions-14 dans [11]).

Les autres groupes contiennent, chacun, un grand triangle. Les deux petits triangles sont nécessairement dans un même groupe sinon l'aire totale ne pourrait pas être entière. Il faut leur adjoindre une des trois pièces d'aire 1 entre le carré, le parallélogramme et le triangle moyen. Les groupes complémentaires contiennent alors la combinaison des deux pièces d'aire 1 restante avec le grand triangle.

Après avoir fusionné les listes de duos produit par chacun des quatre groupes avec ceux de son groupe complémentaire, j'obtiens l'ensemble des duos possibles avec le Tangram. Ils sont au nombre de 65.

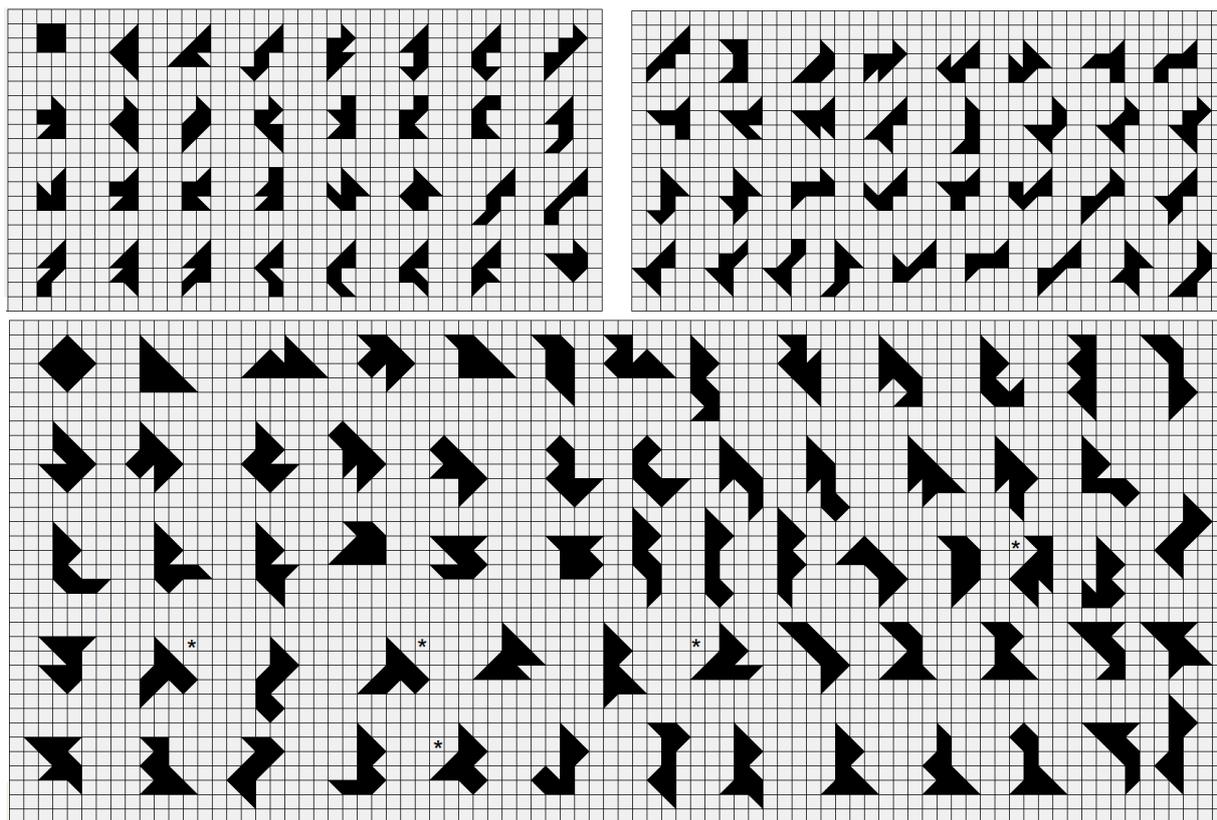


FIGURE 1.12 – En haut, les soixante-cinq duos du Tangram, en bas les mêmes doublées (solutions en fin de chapitre).

Naturellement je m'interroge alors sur la capacité qu'a le Tangram de reconstituer, avec ses sept pièces, les formes doublées de ces duos. L'opération qui consiste à obtenir les codes des formes doublées (tournées de 45° et agrandies d'un coefficient $\sqrt{2}$) me permet de visualiser ces formes et de les solutionner ensuite avec les pièces du jeu.

Je ne m'attendais pas à ce résultat, puisque avec Chie-No-Ita la proportion des duos qui ne font pas

leur solo est de 43%, mais tous les duos du Tangram réussissent leur solo ! J'ai d'abord cru à une erreur de ma part dans l'utilisation des programmes, mais finalement, après avoir cherché à vérifier ces résultats de différentes façons, je compris qu'ils étaient corrects. Le fait que, dans le Tangram, il y ait deux petits triangles permet une plus grande souplesse dans les combinaisons qu'avec Chie-No-Ita qui n'en contient qu'un seul.

Je voulu alors poursuivre cette comparaison entre ces deux jeux en produisant l'ensemble de leurs duos communs. Cet ensemble ne contient que dix formes dont trois ne sont pas réalisables en solo par le Chie-No-Ita. L'intersection de ces ensembles de duos est assez maigre : cinquante-cinq duos du Tangram ne sont pas réalisables avec le Chie-No-Ita tandis que soixante-dix-sept duos du Chie-No-Ita ne sont pas réalisables avec le Tangram.

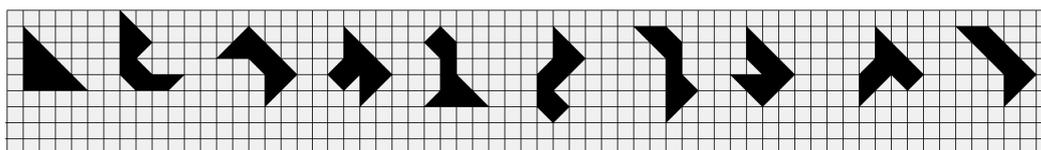


FIGURE 1.13 – Les dix duos communs au Tangram et au Chie-No-Ita, les trois derniers ne réalisant pas leur solo avec ce dernier (solutions en fin de chapitre).

En écrivant, au début de cette partie sur le Tangram, « je n'avais pas le souvenir d'autres duos mentionnés dans la littérature », je m'épargnais la revue de cette littérature non négligeable (voir la bibliographie ci-dessous). Rien sur les duos dans les ouvrages de Martin Gardner, rien non plus dans ceux de Ronald Read. Par contre, le petit livre de Ellfers [4] publié en français chez Chêne (beaucoup d'erreurs typographiques non corrigées), mentionne l'existence de ces formes appelées « tangrams jumeaux ». Je suppose que ceux-ci ont été trouvés par une exploration manuelle qui se voulait systématique car l'article affirme qu'ils sont soixante. Les cinq manquants sont marqués d'un astérisque dans la figure 1.12, leur existence prouvant une fois encore l'utilité de l'ordinateur pour certaines tâches comme la recherche exhaustive.

Malgré cette petite erreur, j'admire cette étude remarquable qui cherche à obtenir des résultats par le calcul, comme Fu Traing Wang et Chuan-Chih Hsiung [5] l'avaient fait en pionnier pour les formes convexes. Par le calcul donc, Ellfers (en réalité, cette étude mathématique a été conduite par Michel Dekking et Jaap Goudsmit) détermine qu'il y a 133 tangrams de convexité 1, ce qui signifie qu'en ajoutant un petit triangle à ces formes, on obtient une forme convexe. J'avais effectué cette détermination lors de ma première étude en 2010 et trouvé qu'il y avait 123 tangrams de convexité 1. Les dix formes excédentaires de Ellfers ne vérifient pas la règle d'assemblage homogène : une pièce est assemblée au reste de la forme par juste un sommet (ou deux) mais ne met pas en commun une partie au moins d'un côté. La « règle de cohésion » qu'il énonce ensuite n'y est pas appliquée.

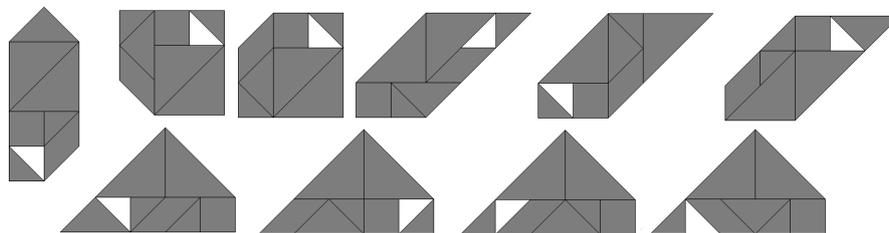


FIGURE 1.14 – Dix formes de convexité 1 réalisables avec le Tangram mais non homogènes (à mon sens), c'est-à-dire non snug (au sens de Read) ou non cohérentes (au sens de Ellfers).

Avant de refermer cette parenthèse qui ne concerne pas directement les duos du Tangram, je rappelle la liste des formes homogènes que réalise ce jeu, avec la répartition selon le type de forme (formes pleines, formes ayant un trou sur le bord que Read a proposé d'appeler « baie », forme ayant un vrai trou) et selon la convexité. Cette caractéristique prend, pour le Tangram, toutes les valeurs entières comprises entre 0 (formes convexes) et 41, comme l'a montré Read [13].

convexité	pleins	baie	trou	total					
0	13	0	0	13	21	164570	3991	1	168562
1	67	48	8	123	22	189642	4066	0	193708
2	718	717	57	1492	23	114984	857	0	115841
3	3329	3606	214	7149	24	72201	844	0	73045
4	8301	8180	384	16865	25	85736	494	0	86230
5	18786	15777	604	35167	26	63350	223	0	63573
6	51658	35834	1176	88668	27	37294	88	0	37382
7	76940	42273	974	120187	28	16371	2	0	16373
8	98306	42098	696	141100	29	16880	37	0	16917
9	150586	66325	1499	218410	30	13650	0	0	13650
10	263722	87004	1075	351801	31	8399	1	0	8400
11	331348	88113	997	420458	32	4088	0	0	4088
12	282519	62328	571	345418	33	1524	0	0	1524
13	319583	49020	209	368812	34	2028	0	0	2028
14	513991	81827	603	596421	35	607	0	0	607
15	384691	42094	119	426904	36	597	0	0	597
16	245477	22857	62	268396	37	145	0	0	145
17	398332	35243	91	433666	38	102	0	0	102
18	374107	16995	3	391105	39	50	0	0	50
19	294908	13515	17	308440	40	7	0	0	7
20	232584	7494	0	240078	41	14	0	0	14
					total	4842205	731951	9360	5583516

FIGURE 1.15 – Nombre de formes homogènes par convexité et par type réalisables avec le Tangram (résultats issus d'une étude non publiée [11])

3. Les formes divisibles

La partie mathématique du livre de Ellfers se termine par ce beau prolongement : en combinant de toutes les façons possibles chacun des tangrams jumeaux, on obtient les « tangrams cohérents divisibles », un ensemble que l'article dit composé de plusieurs milliers de formes. Une grande proportion de ces tangrams divisibles semble symétrique : sur les trente-six que donne Ellfers, trente-deux le sont. Par symétrique, j'entends ayant au moins un centre ou un axe de symétrie. En réalité combien sont-ils ? Quelle est la proportion des divisibles symétriques parmi les divisibles ? Quelle est la proportion des divisibles symétriques parmi les symétriques ?

Pour mémoire, il y a 2022 tangrams homogènes symétriques dont un seul a 4 axes (le carré), un seul a un centre de rotation quart-de-tour (l'étoile de ninja), neuf ont deux axes, 929 ont un centre demi-tour et 1082 ont un axe. Je passe sur les détails techniques pour l'obtenir – une fois n'est pas coutume – mais la liste des tangrams cohérents divisibles contient 1892 formes. Pour répondre à mes précédentes questions, je décompte les divisibles ayant un élément de symétrie : il y en a 783 dont 582 ont un centre demi-tour, 195 un axe, 4 ont deux axes, les deux formes restantes étant le carré et l'étoile de ninja. Ainsi 41% des tangrams divisibles sont symétriques et 39% des tangrams symétriques sont divisibles.

Lors de la génération de ces divisibles à partir des combinaisons d'un duo avec son jumeau, il apparaît une bonne centaine de doublons ce qui indique que certains divisibles sont réalisables par au moins deux couples de jumeaux. Du coup, l'idée me vient de collecter séparément les tangrams deux fois divisibles et, s'il y en a, les tangrams trois fois divisibles ou davantage de fois divisibles. Il s'avère alors que 3 formes sont quatre fois divisibles, 13 le sont trois fois et 101 deux fois. Je cherche manuellement les différentes solutions pour les tangrams quatre et trois fois divisibles. Heureusement, ils ne sont que seize. la tâche n'est pas si facile, mais développer des programmes spécifiques serait beaucoup plus long. Cette étape est pourtant importante car elle permet de confirmer, au moins partiellement, les résultats.

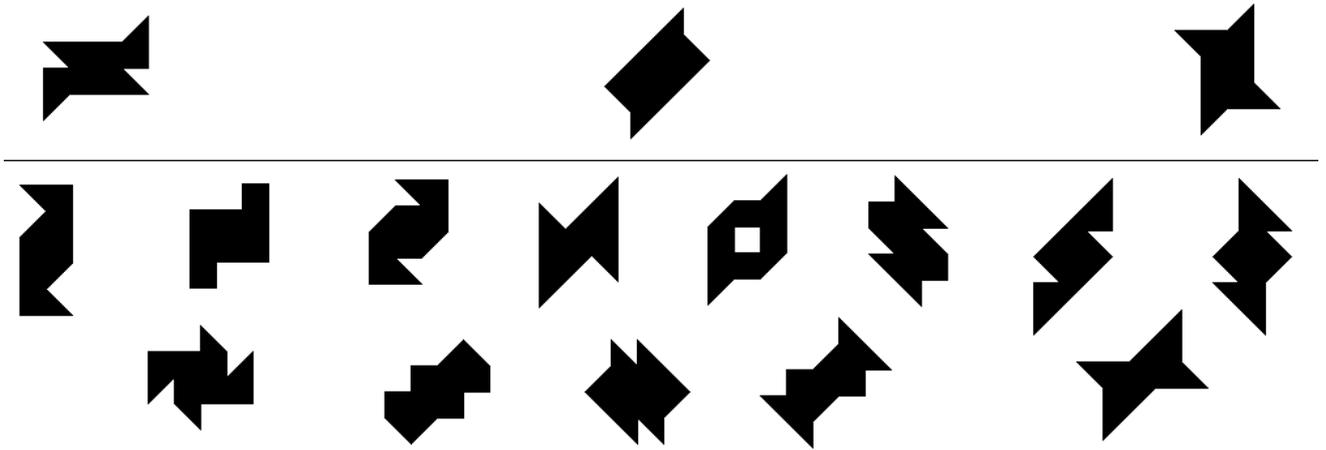


FIGURE 1.16 – Les 3 tangrams quatre fois divisibles et les 13 trois fois divisibles (solutions en fin de chapitre).

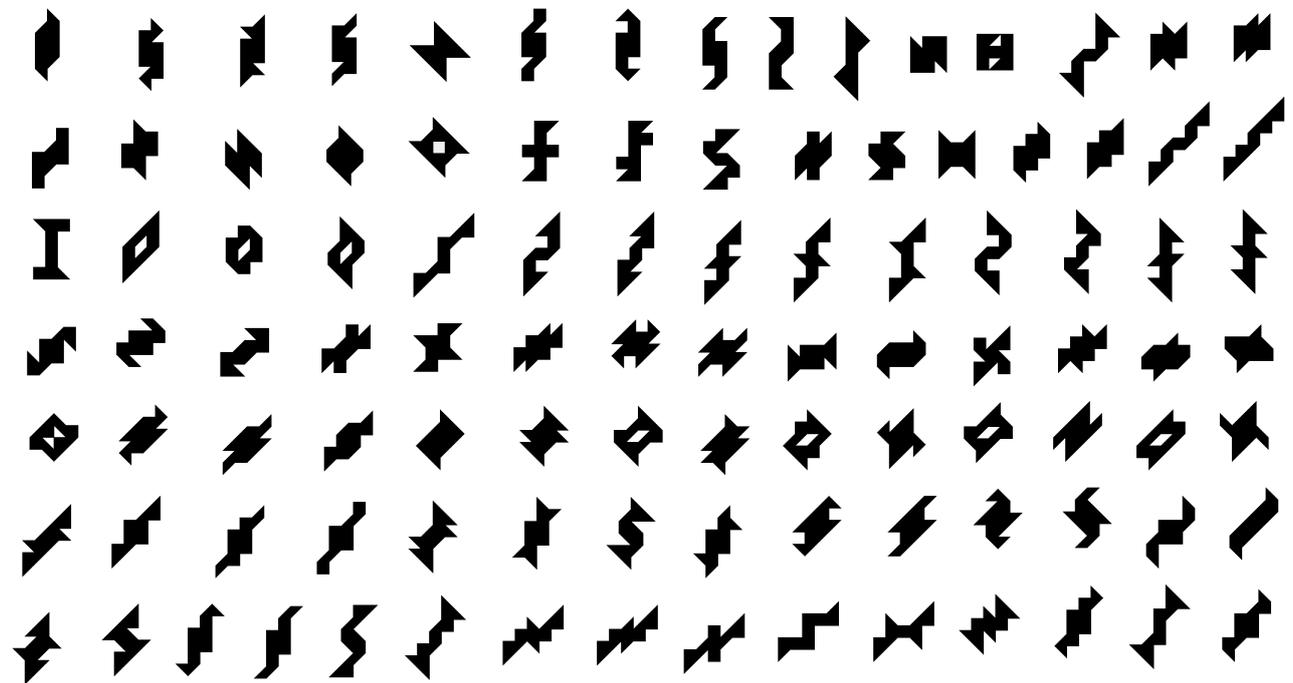


FIGURE 1.17 – Les 101 tangrams deux fois divisibles (vérification laissée au lecteur).

Je mesure le chemin parcouru depuis l'idée de départ qui avait germé pendant la relecture du fascicule de Marc sur le Chie-No-Ita. De la recherche des duos réalisables avec ce jeu, j'ai déterminé ceux qui réalisent leur solo, puis j'ai voulu comparer ces résultats avec le Tangram qui reste le jeu de référence, le plus étudié et le plus répandu. De là j'ai compris, grâce au petit livre de Ellfers, l'intérêt des duos qui permettent de fabriquer les tangrams divisibles. Pour achever ce cycle d'études, il me faut maintenant déterminer les formes divisibles du Chie-No-Ita.

Je dispose déjà du fichier des quatre-vingt-sept duos de ce jeu. Le programme que j'ai utilisé pour générer les divisibles du Tangram va me générer pareillement ceux du Chie-No-Ita. Il n'y a qu'à mettre tout cela en action et, de la même façon que pour le Tangram, il me faut séparer les différentes formes divisibles en isolant celles qui sont deux, trois ou quatre fois divisibles (ou cinq fois, qui sait ce que nous réserve le Chie-No-Ita).

La liste des formes cohérentes divisibles réalisables avec le Chie-No-Ita contient 1897 formes. Parmi celles-ci, j'en décompte 807 qui ont un élément de symétrie : 556 ont un centre demi-tour, 237 un axe, 12 ont deux axes, les deux formes restantes étant les deux carrés (le plein et le creux, ce dernier n'étant pas réalisable avec le Tangram). Le Chie-No-Ita peut reconstituer 3394 formes homogènes symétriques. Parmi celles-ci, deux ont quatre axes (les deux carrés), dix-neuf ont deux axes, 1333 ont

un centre demi-tour et 2040 ont un axe. Ainsi 29% des chie-no-itas divisibles sont symétriques et 24% des chie-no-itas symétriques sont divisibles.

Pour ce qui est des doublons rencontrés en générant les chie-no-itas divisibles, il y en a 80 dont 7 sont divisibles de quatre façons différentes, 13 le sont de trois façons différentes et 60 le sont de deux façons différentes. 1817 chie-no-itas sont donc divisibles d'une façon unique.

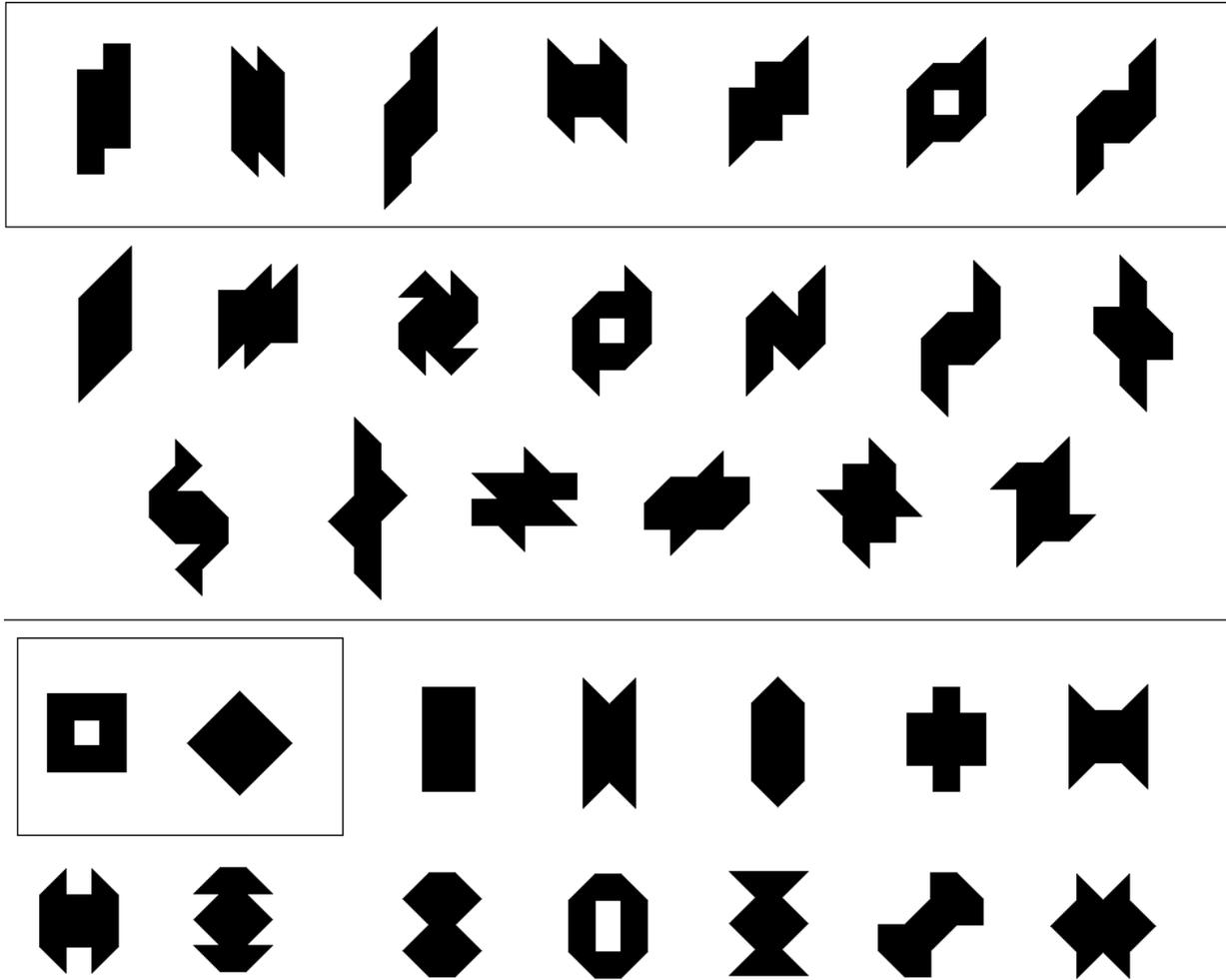


FIGURE 1.18 – Avec le Chie-No-Ita, 20 formes sont trois ou quatre fois divisibles (en haut, ces dernières encadrées, solutions en fin de chapitre), 14 formes divisibles ont deux ou quatre axes de symétrie (en bas, ces dernières encadrées, solutions en fin de chapitre).

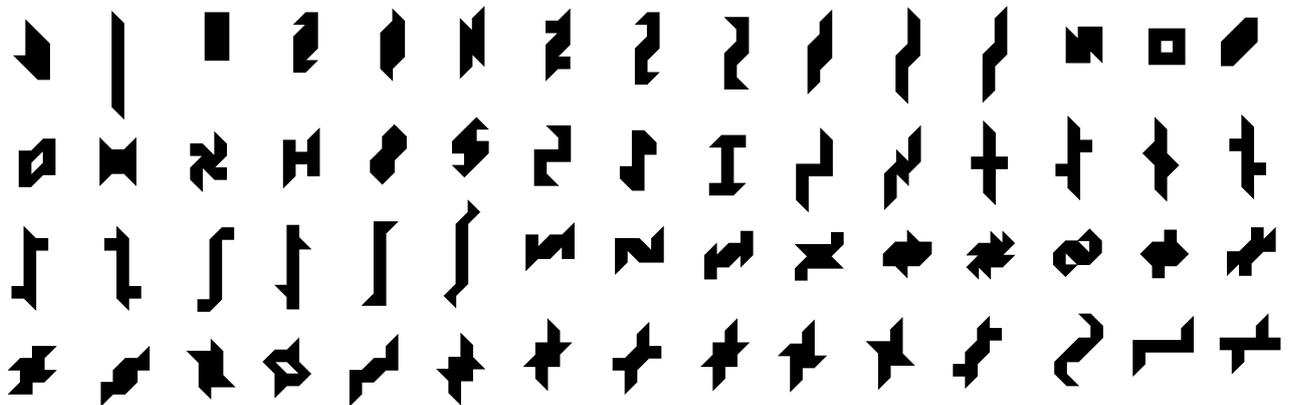


FIGURE 1.19 – Les 60 formes deux fois divisibles du Chie-No-Ita ne contiennent qu'une seule forme non symétrique (au début, vérification laissée au lecteur).

Pour conclure, je sélectionne les formes divisibles réalisables à la fois par les deux jeux de pièces. Il n'y en a pas beaucoup : rien que cinq et, parmi celles-ci, une seule est divisible deux fois par les deux jeux de pièces. Sur l'illustration, j'ai signalé par la lettre D, un jeu qui reconstitue une de ces formes de deux façons différentes.

		symétriques	symétriques (détail)					non symétriques	Total	réalise leur solo	divisibles (détail)			
			centre R2	1 axe	2 axes	4 axes	c. R4				1 façon	2 façons	3 façons	4 façons
Chie-No-Ita	duos	7	1	5	1	0	0	80	87	50	-	-	-	-
	divisibles	807	556	237	12	2	0	1 090	1 897	-	1817	60	13	7
	total	3 394	1 333	2 040	19	2	0	10 885 833	10 889 227	-	-	-	-	-
Tangram	duos	5	2	2	0	1	0	60	65	65	-	-	-	-
	divisibles	783	582	195	4	1	1	1 109	1 892	-	1775	101	13	3
	total	2 022	929	1 082	9	1	1	5 581 494	5 583 516	-	-	-	-	-

FIGURE 1.20 – Comparatif des capacités de Chie-No-Ita et Tangram relativement aux duos et aux divisibles.

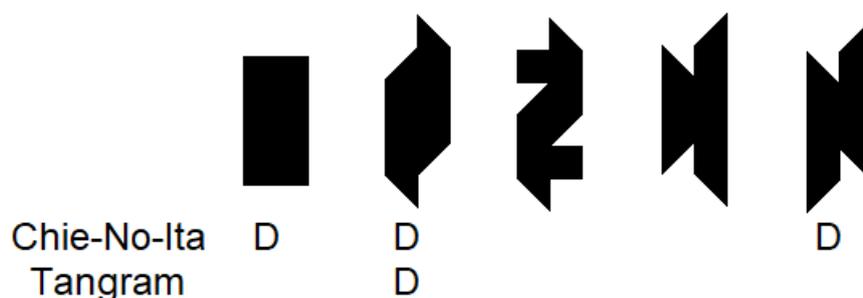


FIGURE 1.21 – Les 5 formes divisibles à la fois par le Tangram et le Chie-No-Ita. La lettre D indique que la forme est divisible de deux façons différentes (solutions en fin de chapitre).

4. Les solutions

Quelques unes des figures qui suivent proviennent plus ou moins directement de l'interface graphique de mes programmes. En effet, lorsque je dispose de la forme codée et des pièces à utiliser, je peux activer un programme qui détermine une solution et l'affiche. Elles se reconnaissent ici au quadrillage sous-jacent qui est affiché. Cependant, cela n'est pas toujours possible ou, plutôt, cela demanderait de développer des spécificités, ce qui n'est jamais simple. Pour représenter les différents duos notamment, j'ai perdu en fin de processus, les pièces qu'il faut utiliser par chacun des deux jumeaux. De même, pour les formes divisibles, le programme qui trouve les solutions s'arrête à la première solution trouvée, et celle-ci n'est généralement pas divisible.

Dans ces cas, j'utilise une applet (un programme normalement exécutable dans un navigateur) qui me permet de jouer avec les pièces pour reconstituer les formes. Lorsque j'obtiens en jouant le résultat souhaité, je le copie/colle dans mes documents. L'applet utilisée est celle de Sergio Antoy². Pour moi elle est parfaite, et dans sa version téléchargée, on peut modifier la composition des jeux, les couleurs des pièces, etc.

2. L'applet de Sergio Antoy pour jouer avec le Tangram, le Chie-No-Ita et bien d'autres puzzles de ce genre se trouve à l'adresse <http://web.cecs.pdx.edu/~antoy/private/tangram-dir/tangram.html>

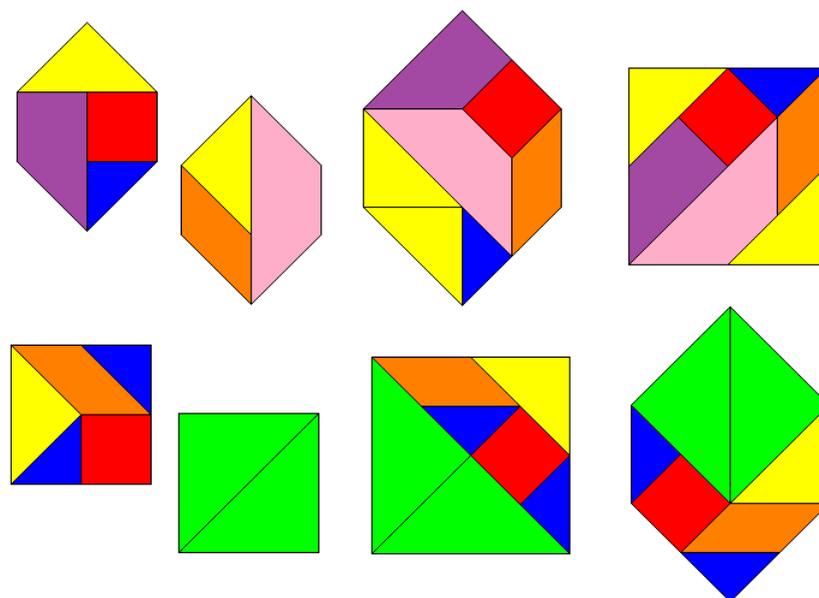


FIGURE 1.22 – Avec le *Chie-No-Ita*, on peut réaliser un grand hexagone ou deux petits semblables au grand tandis qu’avec le *Tangram*, on peut réaliser un grand carré ou deux petits semblables au grand.

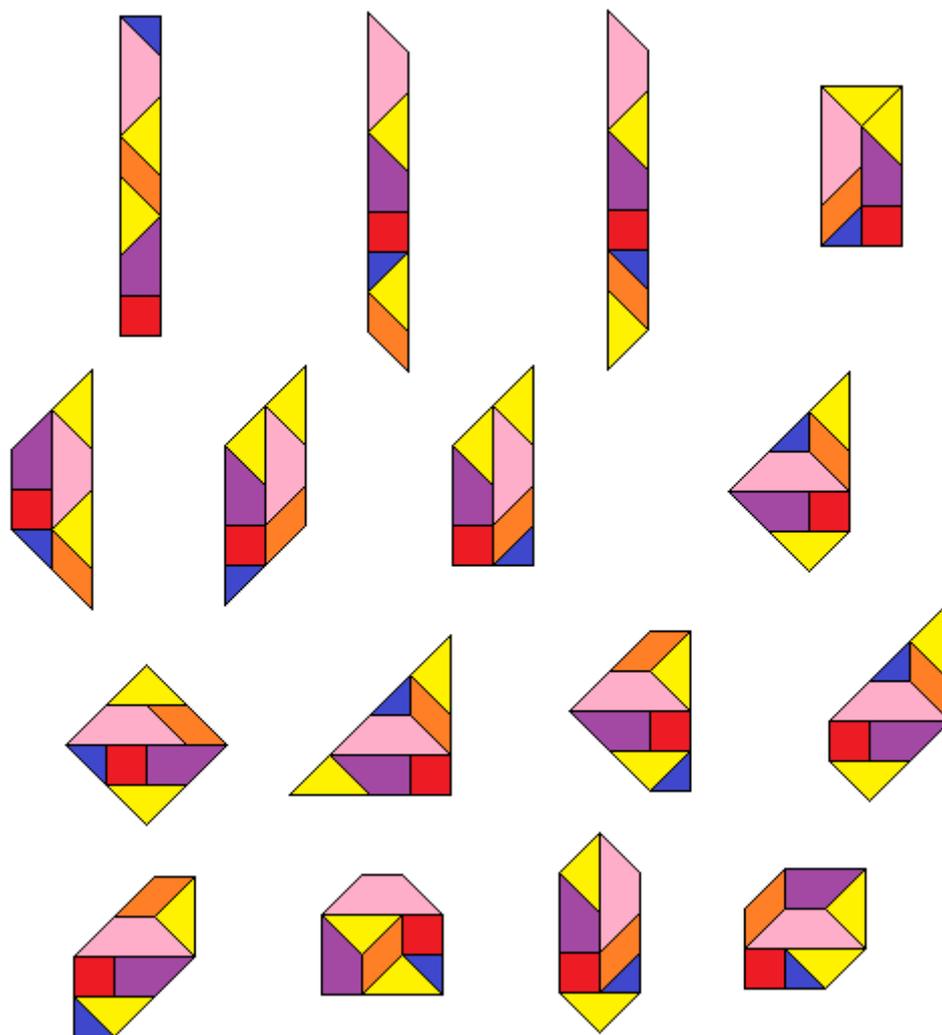


FIGURE 1.23 – Les 16 formes convexes réalisables avec *Chie-No-Ita*.

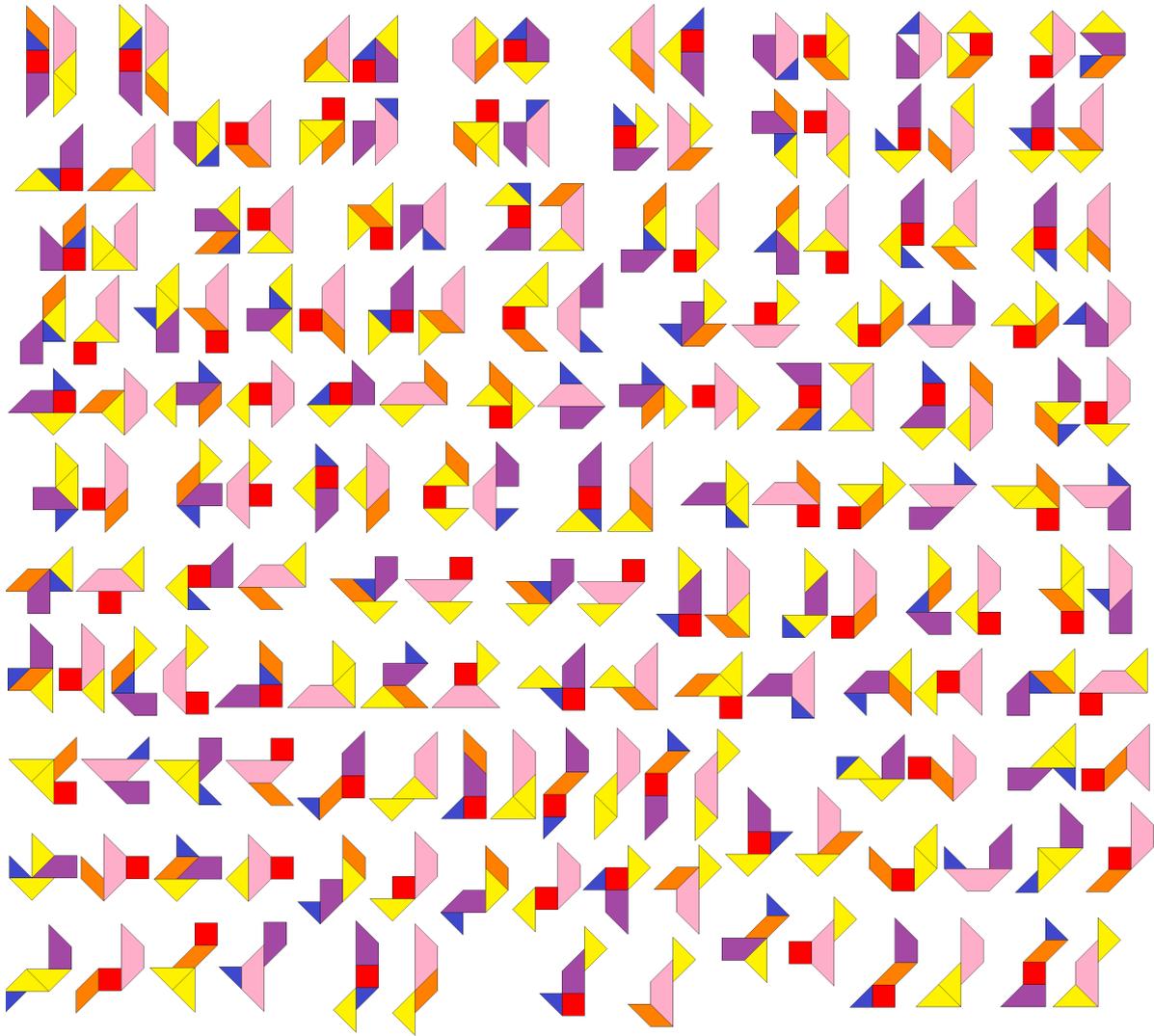


FIGURE 1.24 – Les quatre-vingt-sept duos réalisables avec *Chie-No-Ita*.

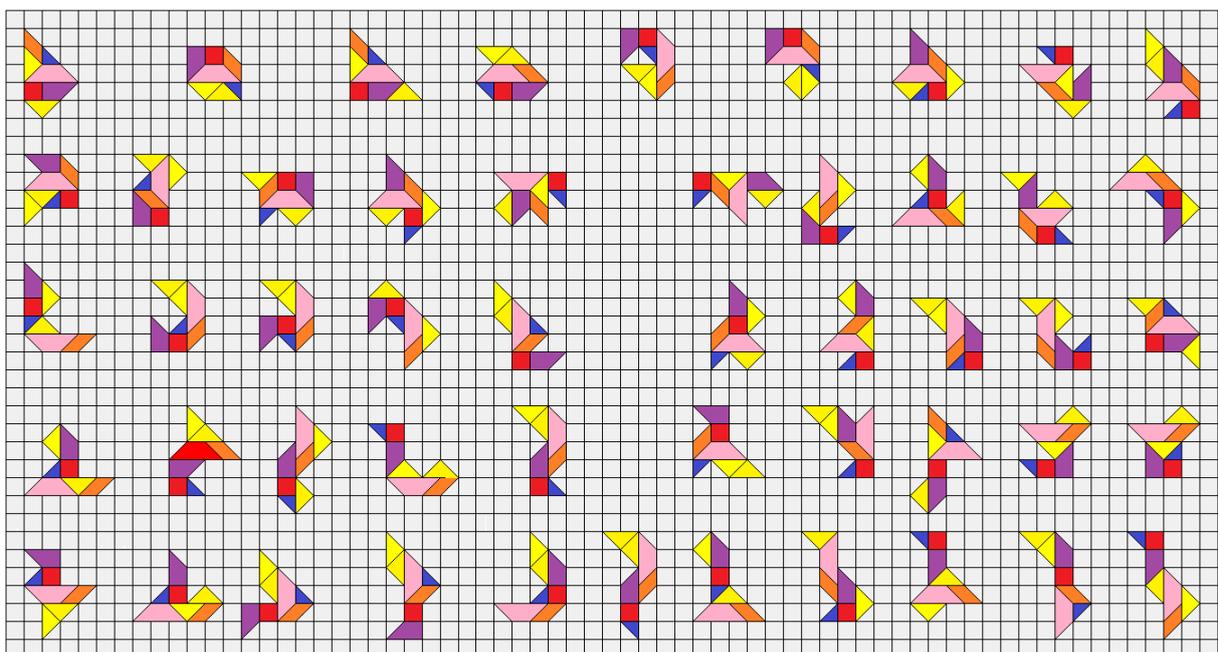


FIGURE 1.25 – Les cinquante duos du *Chie-No-Ita* qui réalisent leur solo.

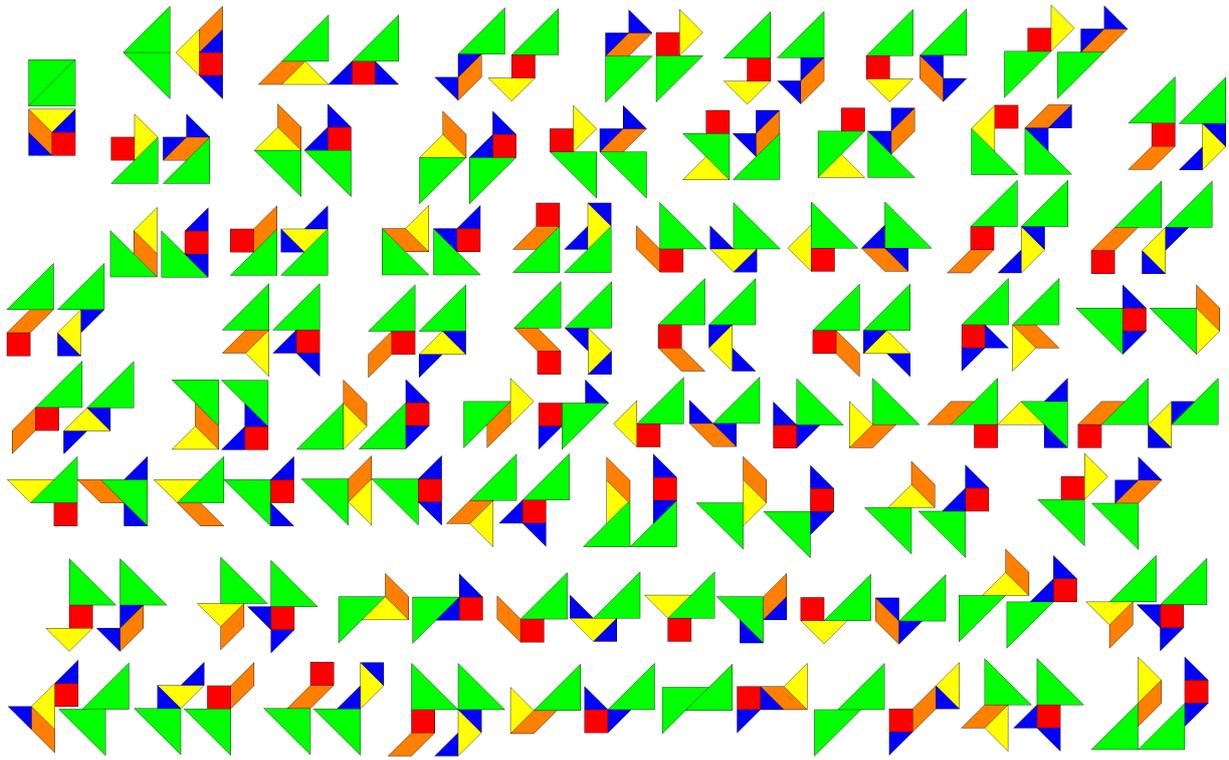


FIGURE 1.26 – Les soixante-cinq duos du Tangram, version duo.

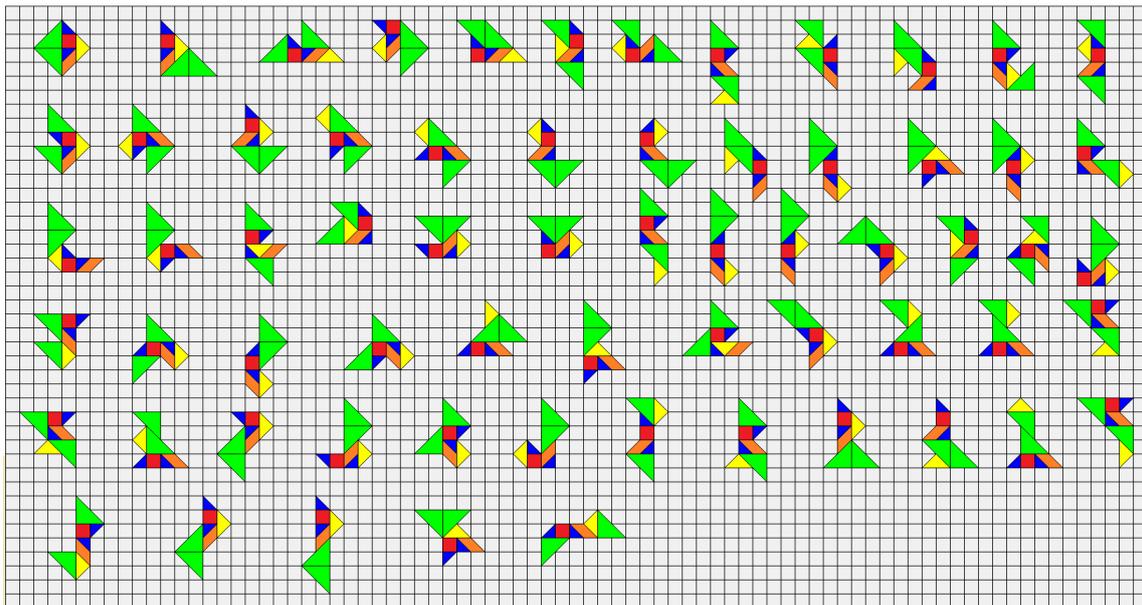


FIGURE 1.27 – Les soixante-cinq duos du Tangram, version solo.

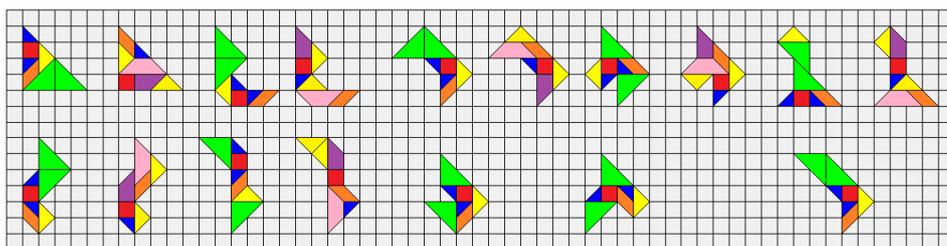


FIGURE 1.28 – Les dix duos communs au Tangram et au Chie-No-Ita, les trois derniers ne réalisant pas leur solo avec ce dernier.

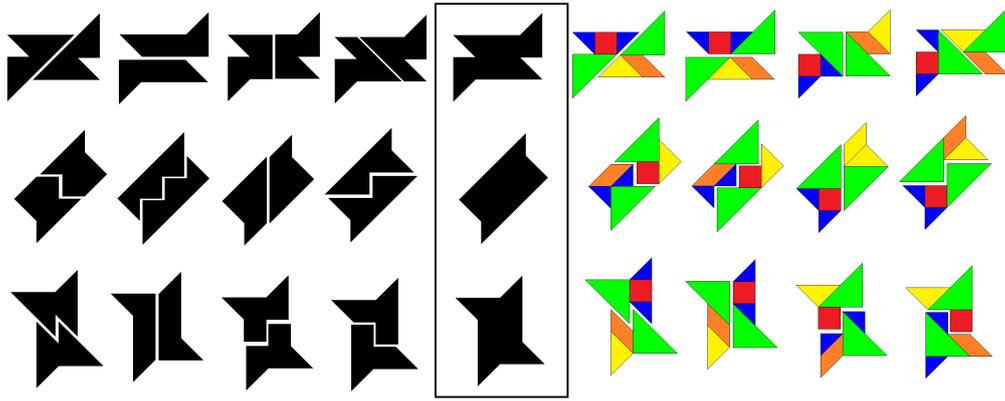


FIGURE 1.29 – Les 3 tangrams quatre fois divisibles.

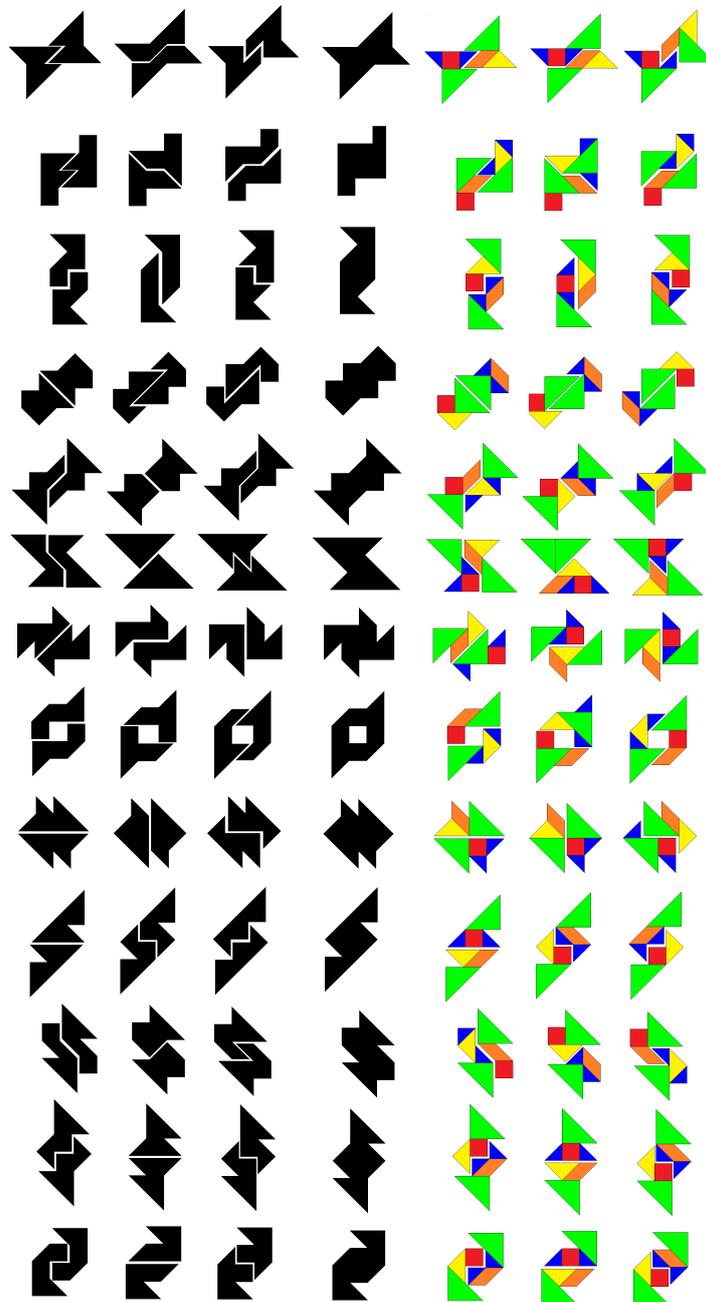


FIGURE 1.30 – Les 13 tangrams trois fois divisibles.

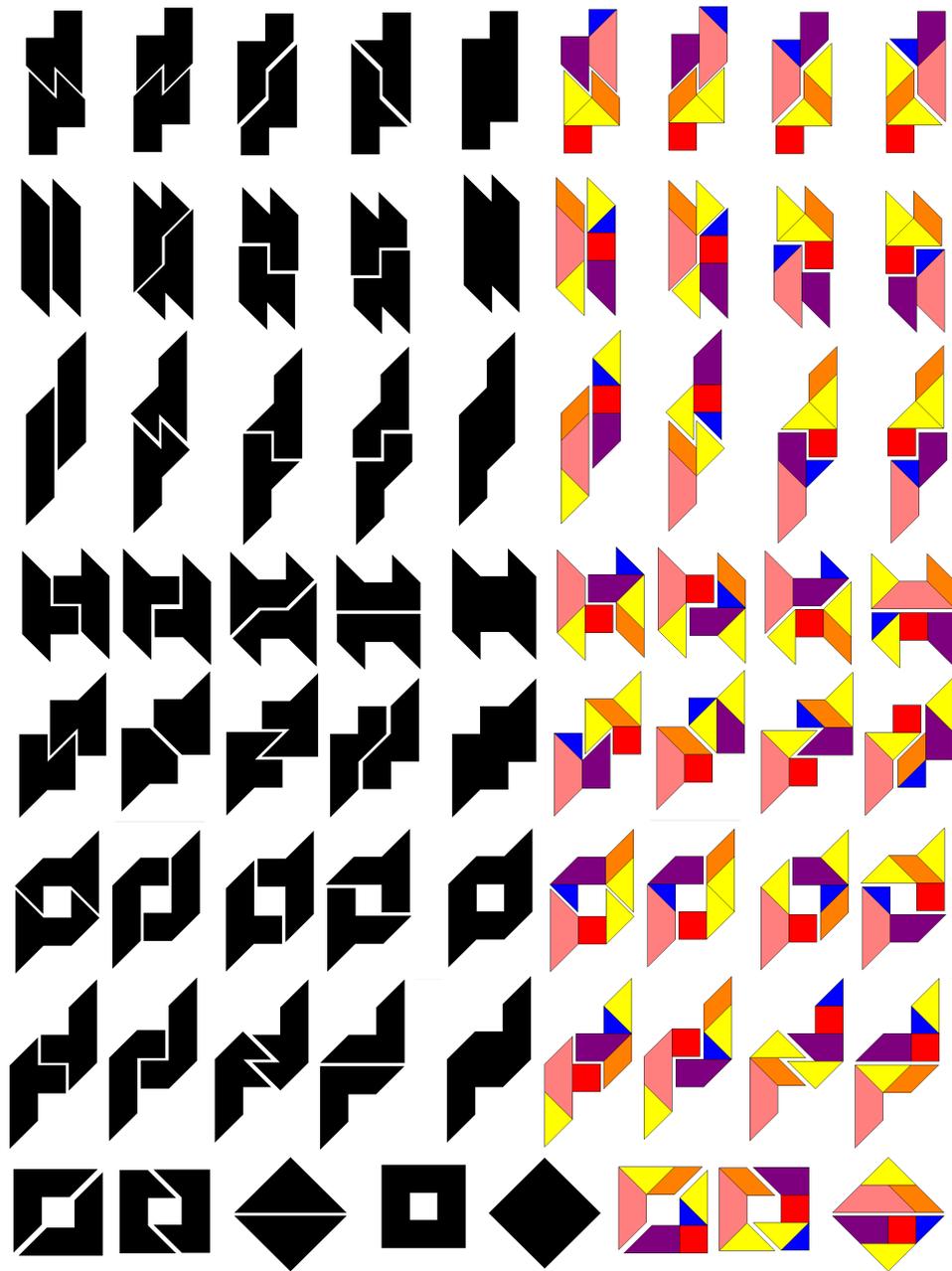


FIGURE 1.31 – Les 7 formes quatre fois divisibles du Chie-No-Ita et les 2 formes ayant quatre axes de symétrie.

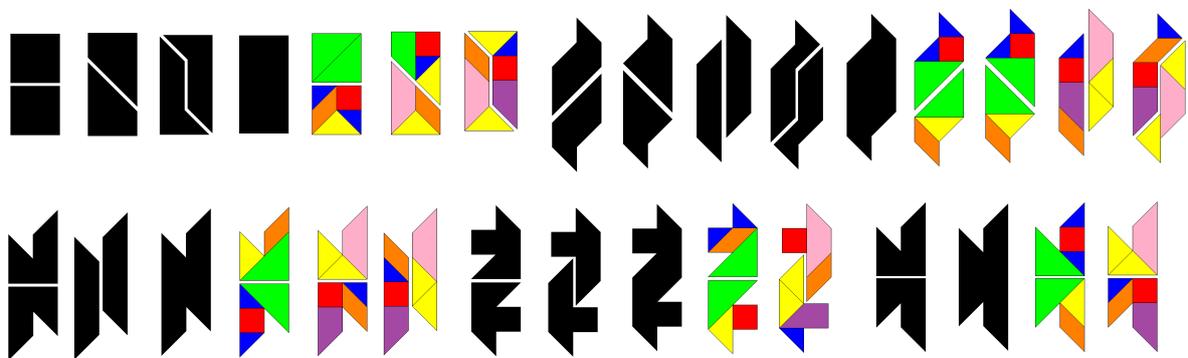


FIGURE 1.32 – Les 5 formes divisibles à la fois par le Tangram et le Chie-No-Ita avec les deux types de division lorsqu'ils se présentent.

Bibliographie

- [1] DELAHAYE, Jean-Paul, *Tangram*, Pour La Science n° 398, pp. 288-293, décembre 2010.
- [2] DUDENEY, Henry, *Tales with Tangram*, Strand Magazine, Vol. 36., 1908.
- [3] DUDENEY, Henry, *War Tangrams*, Strand Magazine, Vol. 54., 1917.
- [4] ELLFERS, Jean-Paul, *Tangram*, Verlag M. DuMont Schauberg, Köln, 1975.
- [5] FU , Traing Wang et Chuan-Chih Hsiung , *A Theorem on the Tangram*, The American Mathematical Monthly, vol. 49, no 9, p. 596–599, novembre 1942.
- [6] GARDNER, Martin, *Mathematical Games, on the fanciful history and the creative challenges of the puzzle game of Tangrams*, Scientific American, pp. 98-103, août 1974.
- [7] GARDNER, Martin, *More on Tangram*, Scientific American, pp. 187-191, septembre 1974.
- [8] GARDNER, Martin, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, W.H. Freeman and Company, New York, pp. 28-54, 1988.
- [9] LOYD, Samuel, *The eighth book of Tan*, Dover, New York, 1968.
- [10] MOUTOU, Philippe, *L'Univers du Tangram*, non publié, 2010.
- [11] MOUTOU, Philippe, *Tangram Évolutif*, éditions Mathadomicile (auto-édition)³, 2014.
- [12] READ, Ronald C., *Some computer applications in combinatorial analysis*, Quaterly Bull.Canad. Information Processing Soc. 8, 5-10, 1968.
- [13] READ, Ronald C., *The snug tangram number and some other contributions to the corpus of mathematical trivia*, Bulletin of the ICA, vol. 40, pp. 31-39, 2004.
- [14] READ, Ronald C., *Tangram 330 puzzles*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.

3. le livre numérique est à télécharger sur le site <http://ph.moutou.free.fr/>