



Carrés imparfaits

Au début de l'été 2018, je tombe sur un article de La Recherche – la chronique de Roger Mansuy [3] – dont le titre, « La taille maximale du désordre », m'interpelle. Qu'est-ce que ça peut bien signifier ? Le désordre a-t-il une taille ? Peut-il se mesurer ? L'article commence par une référence au nombre de cheveux : si on suppose qu'une personne a entre 0 et 200 000 cheveux (c'est bien un mathématicien qui peut faire cette hypothèse !), et bien dans une ville de 200 002 habitants (notez la subtilité) il s'en trouvera forcément deux qui auront le même nombre de cheveux. La démonstration est facile à faire, je vous laisse l'imaginer. Mais quel rapport avec le désordre ?

La situation me rappelle le célèbre paradoxe des anniversaires en probabilités : si le nombre de personnes d'un groupe atteint ou dépasse 23 alors la probabilité que deux personnes au moins de ce groupe aient leur date d'anniversaire le même jour dépasse $\frac{1}{2}$. Cela se calcule au Lycée et ne constitue un paradoxe qu'en choquant l'intuition. Mais si le nombre de personnes atteint ou dépasse 366 alors on est certain d'en trouver deux qui ont leur date d'anniversaire le même jour. Là, c'est évident et structurel, comme l'histoire des cheveux.

L'idée présentée après cette introduction est bien plus intéressante car bien moins évidente : *dans un très grand système, à priori quelconque, on remarque que des « structures » apparaissent, c'est-à-dire des parties du système qui ne sont pas en « désordre »*. Un exemple est donné pour illustrer cette proposition : si on colorie une ligne de neuf points avec deux couleurs, alors il y en a forcément trois qui sont régulièrement espacés et qui sont de la même couleur. Le système est l'ensemble des points alignés, la structure est le groupe de trois points régulièrement espacés qui sont de la même couleur.

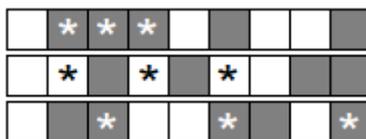


FIGURE 2.1 – Une ligne de neuf points coloriés avec deux couleurs, contient forcément trois points régulièrement espacés de la même couleur. Sur ces trois exemples, la structure a été marquée avec des astérisques.

Le désordre serait de réussir à produire une ligne de neuf points où cette structure n'apparaît pas. Or, il se trouve que dans cette situation, jusqu'à huit points alignés on peut ne pas trouver la structure. Mais à partir de neuf points, elle est nécessairement présente. Je cherche alors immédiatement à me prouver cela en produisant un ensemble de huit points alignés sans la structure, ce qui n'est pas si facile. Mais en enlevant juste le dernier carré de couleur de mon dernier exemple, la structure disparaît.



FIGURE 2.2 – Une ligne de huit points coloriés avec deux couleurs ne contient pas nécessairement trois points régulièrement espacés de la même couleur.

Ce résultat se généralise à un ensemble de n points alignés coloriés avec c couleurs : une structure de k points régulièrement espacés coloriés de la même couleur se retrouve toujours à partir du moment où le nombre n atteint ou dépasse une certaine valeur N . C'est le mathématicien néerlandais Bartel

Leendert van der Waerden [4] qui a énoncé et prouvé en 1927 ce théorème qui – notez le bien – ne donne pas la valeur de N . Celle-ci dépend de k et de c ; pour $(k, c) = (3, 2)$, ce nombre N vaut 9, encore faut-il s'en convaincre. La preuve de ce résultat peut venir d'un examen méthodique de tous les coloriages possibles de 9 points avec 2 couleurs. Facile, il n'y en a que $2^9 = 512$!

L'article de Mansuy donne alors la valeur de N pour $(k, c) = (3, 3)$: 27 ! Pour vérifier ce résultat, on doit trouver trois points régulièrement espacés de la même couleur dans un alignement de 26 points et tester les $3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$ coloriages possibles de 27 points avec 3 couleurs. Cela paraît déjà impossible, mais je comprends mieux pourquoi on ne connaît pas encore la valeur de N pour $(k, c) = (5, 3)$ sauf qu'on sait qu'elle dépasse 2173...

On en vient à la fin de l'article : si on considère n^2 points disposés en carrés de n sur n et coloriés avec deux couleurs, il est toujours possible, à partir d'une certaine valeur N de n , de trouver une structure de quatre points disposés aux sommets d'un carré de côté inférieur ou égal à n et coloriés de la même couleur. L'article propose une illustration pour $n = 5$ dans laquelle il n'y a pas une telle structure et énonce alors le « défi de l'été » : déterminer la valeur de N pour cette situation. Comme on sait que $N > 5$, on doit tester les $2^{36} = 68\,719\,476\,736$ grilles de côté 6 pour savoir si, par hasard, N serait égal à 6 (il faudrait trouver au moins une grille de côté 6 contenant la structure des quatre points monochromatiques en carré). Sinon, il faut explorer les carrés de côtés 7, puis ceux de côté 8...

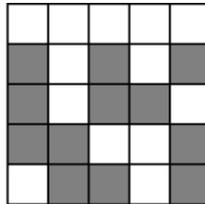


FIGURE 2.3 – Le carré de côté 5 proposé par Mansuy dont les 25 carreaux sont coloriés avec deux couleurs. Il ne contient pas quatre points monochromatiques disposés en carré de côté 2, 3, 4 ou 5 donc $N > 5$ pour ce système.

Ce défi est assorti d'un prix relativement peu motivant : le gagnant, tiré au sort parmi les meilleures propositions, obtiendra un abonnement d'un an au magazine. La perspective d'être tiré au sort ne me sourit pas car ce n'est jamais moi qui est tiré. Mais le challenge néanmoins m'attire car programmer m'amuse. Cette version multidimensionnelle du résultat de van der Waerden augmente la variété des systèmes ; Hillel Furstenberg [2] et Benjamin Weiss l'établissent en 1978. On ne se limite plus aux alignements unidimensionnels de points, on explore la dimension 2. J'imagine que l'on pourrait faire de même avec des points disposés en cubes de côté n dans lesquels on chercherait des structures de huit points monochromatiques disposés aux sommets d'un cube de côté inférieur ou égal à n , mais cela serait plus difficile à représenter graphiquement.

1. Le défi de l'été

Je n'y ai pas pensé tout de suite, mais pour trouver un carré de côté 6 sans la structure carrée monochromatique, il suffit de prendre un carré de côté 5 sans cette structure et de le compléter en mettant les couleurs qui conviennent dans les 11 carrés additionnels.

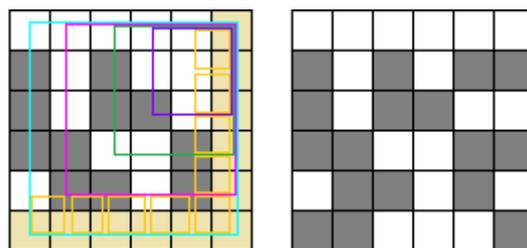


FIGURE 2.4 – En partant du carré de côté 5 sans la structure monochromatique ci-dessus et en lui ajoutant un gnomon de côté 6, on trouve rapidement un carré de côté 6 sans structure. Sur la figure de gauche sont figurés quelques-uns des carrés dont il faut vérifier le bichromatisme.

Cela simplifie notablement le problème puisqu'il y a nettement moins de vérifications à effectuer. En partant du carré de Mansuy de côté 5, je trouve rapidement le carré de côté 6, ci-dessus à droite, dans lequel il n'y a pas la structure carrée. Cela suffit à prouver que le nombre N cherché est supérieur ou égal à 6.

En partant du carré de côté 5, il faut effectuer $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ vérifications de monochromatisme. Sur l'illustration, à gauche, j'ai tracé les 9 carrés de côté 2 (en jaune) dont il faut tester les quatre coins pour savoir s'ils ont la même couleur. De même, il y a 7 carrés de côté 3, 5 carrés de côté 4, 3 carrés de côté 5 et 1 carré de côté 6 dont il faut tester le monochromatisme ; je n'ai tracé que le premier de chaque sorte (respectivement en violet, vert, magenta et cyan). Ce nombre de vérifications est bien moins important que celui qu'il faudrait faire si on devait tester tout le carré puisqu'il y en aurait alors $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

La somme des n premiers nombres impairs vaut n^2 tandis que celle des n premiers carrés vaut $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (ces formules se démontrent facilement par récurrence). Ici, en partant d'un carré sans structure de côté $n = 5$, on doit donc effectuer $5^2 = 25$ vérifications au lieu des $\frac{5 \times 6 \times 11}{6} = \frac{330}{6} = 55$ vérifications qu'il faudrait faire pour un carré quelconque. L'écart entre ces deux nombres de vérifications se creuse quand n augmente.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	819	1015	1240	1496

Le nombre de combinaisons de couleurs à générer est aussi, évidemment, bien moins important lorsqu'on passe d'un carré de côté n déjà testé à un carré de côté $n + 1$ – il vaut $2^{2n+1} - 2^{(n+1)^2}$ comparativement aux $2^{(n+1)^2}$ carrés différents que l'on devrait générer si on combine la couleur de chacun des points du carré de côté $n + 1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^{2n+1}	8	32	128	512	2 048	8 192	32 768	131 072	524 288	2 097 152
$2^{(n+1)^2}$	16	512	65 536	33 554 432	6,87E+10	5,63E+14	1,84E+19	2,42E+24	1,27E+30	2,66E+36

Après ce préliminaire calculatoire, je définis une méthode d'attaque :

Premièrement, partir de la liste des carrés de côté 2 sans structure monochromatique. Cet ensemble est facile à déterminer, il contient 7 colorations différentes obtenues de la façon suivante : on choisit la couleur du 1^{er} point et les trois autres peuvent prendre une quelconque des deux couleurs, sauf qu'ils ne peuvent pas tous être de la même couleur. Le nombre de ces colorations est donc $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$. Le codage que je vais choisir pour décrire ces formes consiste en une concaténation des code-couleurs de chaque ligne. Un code-couleur est un chiffre 0 ou 1. Comme les couleurs sont interchangeables, je conviens de toujours donner le code-couleur 0 au 1^{er} point. Ainsi les sept codes correspondants aux sept coloriages sans structure sont 0001, 0010, 0100, 0011, 0110, 0101 et 0111.

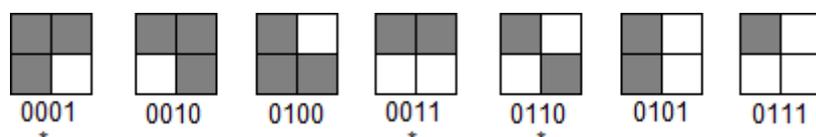


FIGURE 2.5 – Les sept carrés de côté 2 sans structure monochromatique.

Deuxièmement, prendre un des carrés de côté n sans structure monochromatique, ajouter à ce carré un gnomon de $2n + 1$ points sur un des quatre coins, tester la configuration obtenue et enregistrer celle-ci si elle n'a pas de structure monochromatique. Refaire ensuite de même avec les $2^{2n+1} - 1$ configurations de couleurs restantes, et recommencer tout cela sur les trois autres coins du carré. Passer alors au prochain carré de côté n sans structure monochromatique jusqu'à épuisement de la liste. On obtient ainsi la liste de tous les carrés de côté $n + 1$ sans structure monochromatique. En partant de la liste des 7 carrés de côté 2 sans structure monochromatique, on obtient ainsi la liste des carrés de côté 3 sans structure monochromatique. Mais cette liste contient de nombreux doublons qui peuvent être plus ou moins facilement éliminés. Deux carrés seront considérés comme identiques

s'ils se superposent directement ou s'ils se superposent après une rotation de 90, 180 ou 270 degrés ou bien un retournement d'une des quatre positions. Il me faut aussi considérer comme identiques deux colorations où les couleurs sont juste inversées. Par exemple les colorations 0001 et 1110 doivent être considérées comme identiques puisque les deux couleurs, interchangeable, sont justes inversées. Lorsqu'on élimine ainsi les doublons de la liste des 7 colorations sans structure monochromatique d'un carré de côté 2, il n'en reste plus que 3.

Comme il a fallu le faire pour la génération des tangrams homogènes (chap. 2), il me faut donc définir ici la forme canonique qui représentera les différentes variantes d'une même coloration sans structure du carré. Comme précédemment, je choisis de conserver celle qui arrive en premier dans l'ordre lexicographique. Ainsi, il ne reste plus que les colorations canoniques 0001, 0011 et 0110 (notées avec un astérisque sur l'illustration ci-dessus). Ce choix va considérablement diminuer la dimension des listes. Ce gain en volume conduit à un gain de temps de traitement, d'autant plus important que le côté n du carré est plus grand.

Déterminer la forme canonique nécessite le calcul des seize formes équivalentes d'une coloration : 3 s'obtiennent par une rotation d'un quart de tour de la coloration initiale, 4 autres sont des retournements des 4 premières, les 8 dernières sont les inversions chromatiques des 8 premières. Cette détermination va avoir un cout non négligeable en temps de traitement. Mais on peut difficilement l'ignorer car on produirait alors des solutions redondantes. La question est d'effectuer ce traitement au moment le plus propice : après avoir obtenu un résultat négatif au test de détection d'une structure monochromatique et avant l'enregistrement dans la liste finale.

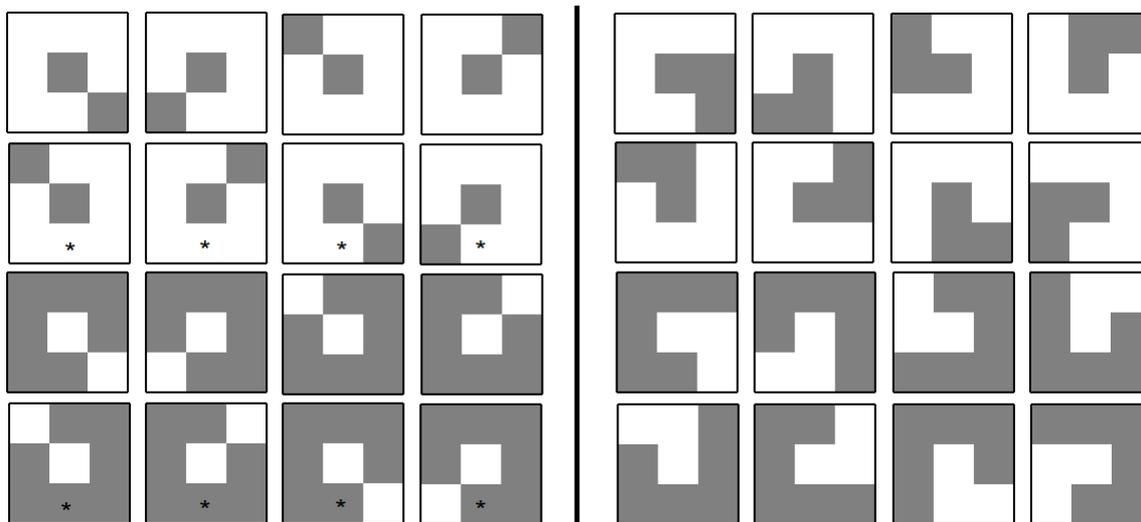


FIGURE 2.6 – Les seize colorations équivalentes d'un carré de côté 3 peuvent se réduire à huit lorsque la coloration est symétrique : les carrés marqués d'un astérisque sont des doublons.

Pour valider mon premier programme, je visualise les 24 colorations canoniques différentes trouvées pour les carrés de côté 3. Il semble qu'il n'y manque rien, qu'il n'y a rien en trop et qu'aucune structure de côté 2 ou 3 n'y soit présente. Je valide ma liste de ces 24 colorations sans structure des carrés de côté 3 et l'utilise pour générer la liste des colorations sans structure des carrés de côté 4 : j'en trouve 727. Je passe ensuite aux carrés de côté 5 : il y en a 48 978. Pour obtenir ce dernier résultat, mon ordinateur a travaillé plus de deux minutes alors que pour obtenir le précédents, il lui avait fallu moins de deux secondes ! Cet accroissement considérable de la durée de traitement présage des durées rédhibitoires pour les plus grandes dimensions. La croissance des effectifs est aussi très impressionnante :

- ♦ du côté 2 au côté 3, ils ont été multipliés par $\frac{24}{3} = 8$
- ♦ du côté 3 au côté 4, ils ont été multipliés par $\frac{727}{24} \approx 30$
- ♦ du côté 4 au côté 5, ils ont été multipliés par $\frac{48978}{727} \approx 67$

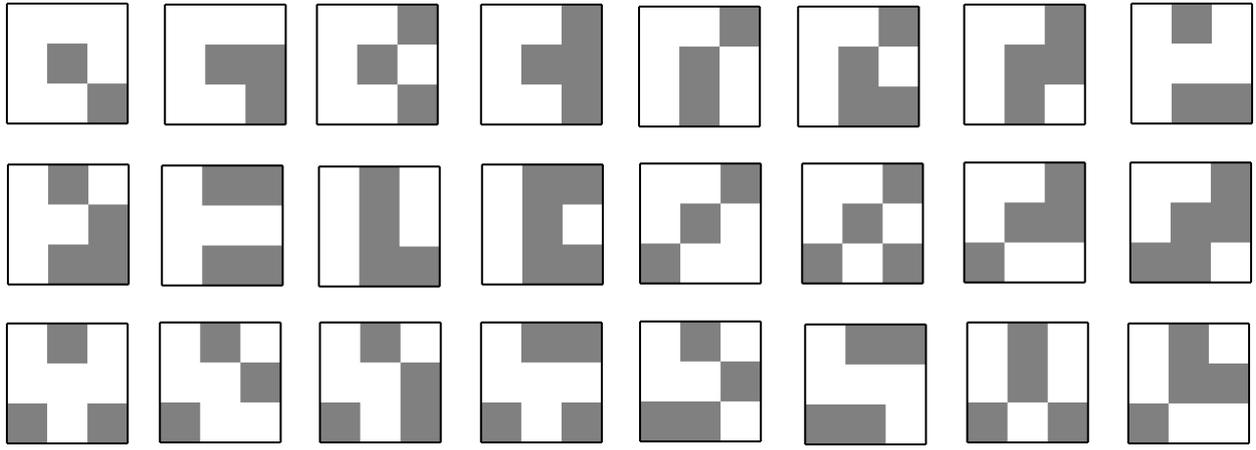


FIGURE 2.7 – Les vingt-quatre colorations sans structure différentes du carré de côté 3.

Naïvement je relance mon programme pour qu'il détermine la liste des colorations sans structure du carré de côté 6. Le traitement est très long, près de cinq heures pour en venir à bout. Le nombre des formes trouvées atteint 3 647 964 ce qui est à peu près 75 fois plus que pour le côté 5, la durée du traitement étant, quant à elle, multipliée par plus de cent ! Je comprends que cette méthode de recherche exhaustive n'a aucune chance d'aller plus loin en l'état : pour le côté 7 il me faudrait attendre trois semaines... Il y a certainement des optimisations à tenter ; le volume des données peut considérablement être diminué. Au lieu de noter une coloration avec les caractères 0 et 1, je peux convertir en entier décimal ou hexadécimal ces longues chaînes de caractères assimilables à des nombres binaires. La coloration suivante d'un carré de côté 10, notée sur 100 caractères :

0000111101101100101110010110001100010111101011010001011001101100101011011000100101010101110011011010,

convertie en entier ne contient que 29 caractères (76379433625145514451474406618) et en hexadécimal elle en contient 24(F6CB96317AD166CAD8955CDA). Fort de cette amélioration, je viens à bout des colorations sans structure du carré de côté 6, mais cette optimisation n'est pas suffisante.

Une autre tactique me vient à l'esprit. Je peux générer différents successeurs d'une coloration sans structure faisant croître celle-ci autour de ce noyau : en puisant au hasard un des carrés sans structure de la liste complète des carrés de côté 6, je teste tous les carrés de côté 7 qu'on peut lui associer en le plaçant sur un des coins au hasard. Je conserve uniquement ceux qui n'ont jamais été générés. Pour cela j'enregistre les nouveaux carrés de côté 7 dans un fichier qui est complété progressivement. Ensuite, je recommence à partir de ce carré sans structure de côté 7 et en testant tous les carrés de côté 8 qu'on peut lui associer, etc. Le processus se répète en augmentant à chaque étape le côté des carrés sans structure générés jusqu'à ce qu'aucun carré sans structure ne puisse se trouver. Je recommence alors avec un nouveau carré sans structure de côté 6.

Avec cette nouvelle tactique, j'obtiens de très nombreuses colorations de côtés 7, 8, 9 et quelques-unes de côté 10 dont celle que j'ai mentionné juste quelques lignes plus tôt. Je laisse du temps (quelques jours) à cette tactique pour qu'elle produise ses effets jusqu'à obtenir 500 carrés sans structure de côté 10, mais pas un seul carré de côté 11 n'apparaît. Serait-ce la taille maximum du désordre pour ce type de structure ? La valeur du paramètre N cherché serait-il égal à 11 ? Je communique dès ce stade au journal La Recherche mes meilleures trouvailles mais réfléchis encore à un autre angle d'attaque de ce défi, décidément pas si facile.

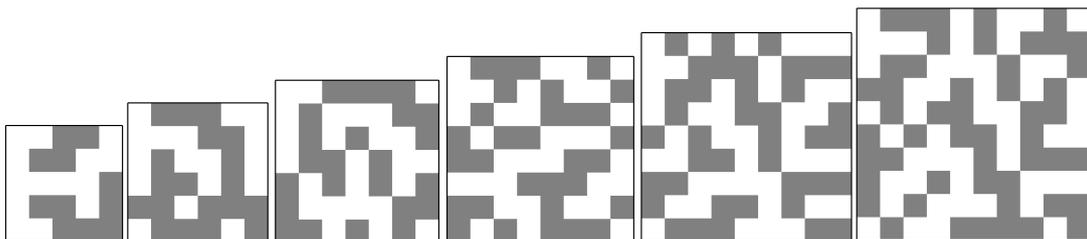


FIGURE 2.8 – Un exemplaire de carré sans structure monochromatique de côté 5 à 10.

Je m'apercevais qu'avec cette méthode, il serait difficile d'aller beaucoup plus loin que la dimension 10. Même si je trouvais ainsi, par hasard, un carré sans structure de côté 11, je serai certainement dans l'impossibilité d'aller au-delà. Pour cette grande dimension, la probabilité de tomber sur un carré sans structure semble infime, apparemment, en comparaison avec celle d'en trouver un qui contient la structure. Comme je ne peux pas attendre suffisamment longtemps pour compenser cette trop faible probabilité, je dois essayer une autre voie.

J'ai remarqué que certaines colorations sans structure avaient un élément de symétrie (axe ou centre). Je commençais à m'intéresser à ce genre de coloration juste par curiosité. Comme sous-produit de la détermination de la forme canonique d'une coloration, je pouvais déterminer le type de symétrie d'une coloration. J'adaptais alors mon interface de visualisation pour qu'elle ne m'affiche que les formes symétriques. J'en trouvais alors de nombreuses qui parfois avaient un axe parallèle au quadrillage ou parallèle à ses diagonales, mais qui, le plus souvent avaient un centre de symétrie.

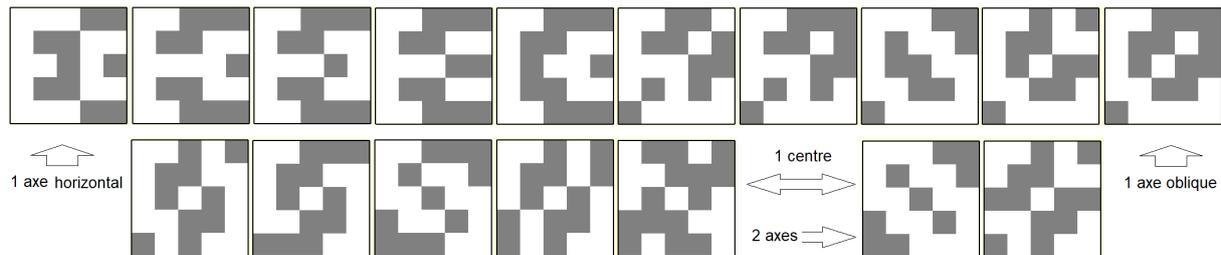


FIGURE 2.9 – Carrés sans structure monochromatique de côté 5 présentant un élément de symétrie : un axe de symétrie horizontal ou oblique ou deux axes perpendiculaires (implique nécessairement un centre), ou bien un unique centre de symétrie.

Je sélectionnais alors parmi les carrés sans structure de côté 10 obtenus précédemment les quelques colorations symétriques que cette collection recélait. J'observe, parmi ces colorations, que certains paraissent constituer des pavages du carré : un certain motif de couleurs se répète par une série de translation, remplissant tout le carré. Parfois le pavage n'est que partiel, se vérifiant presque partout mais contrarié par certains détails sur les bords. Le premier carré, en haut à gauche de la sélection ci-dessous est de ce type. Cependant, sur les huit colorations choisies pour cette image, deux semblent être de parfaits spécimens de pavage. Je cherche à circonscrire un motif périodique qui prouverait cette affirmation. Le résultat est montré à la figure suivante (fig.2.11). Mes deux colorations sont bien des pavages, le premier a un motif périodique de vingt-cinq points alors que le motif du second en contient treize.

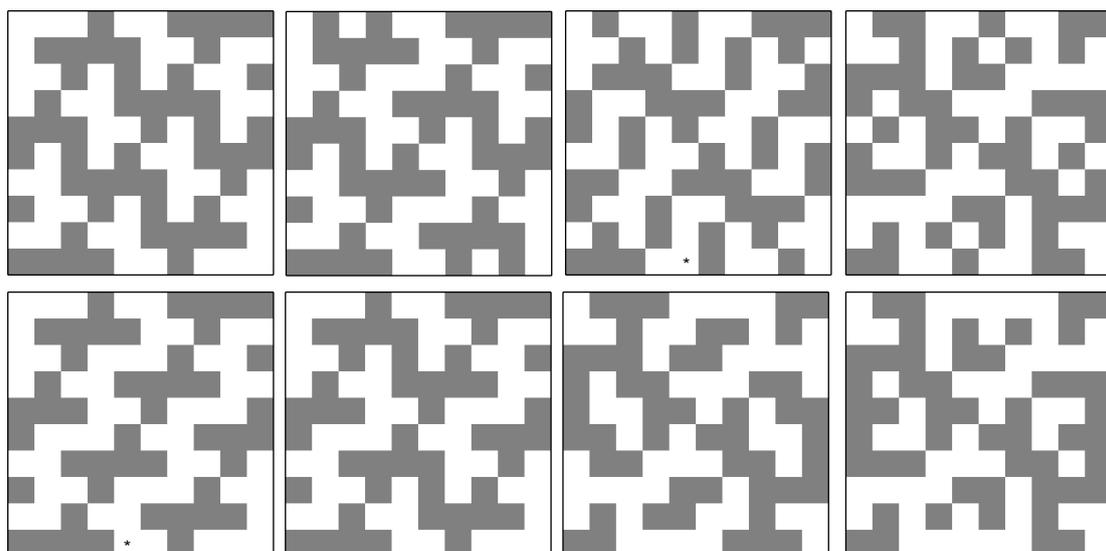


FIGURE 2.10 – Carrés sans structure monochromatique de côté 10 présentant un élément de symétrie. Les carrés marqués d'un astérisque sont des pavages.

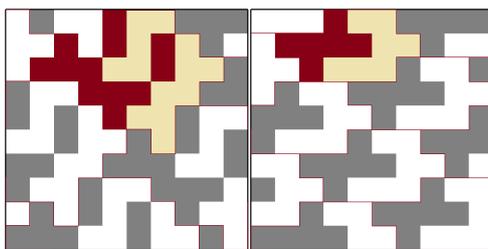


FIGURE 2.11 – Carrés de côté 10 présentant un coloriage pavant. Un des motifs bicolores de ces pavages est colorié et, partout ailleurs, les répliques sont entourées en brun.

Instinctivement j’imagine ces pavages se prolongeant à l’infini en conservant cette propriété d’être sans la structure monochromatique. Si cela se pouvait, cela contredirait le théorème mentionné plus haut qui stipule que la structure recherchée doit nécessairement apparaître tôt ou tard. Je prolonge alors mes deux pavages pour constater l’apparition inévitable de la structure : sur le premier pavage, celle-ci apparaît tout de suite avec quatre coins noirs aux sommets d’un carré de côté 11 (marqués d’un astérisque, ci-dessous à gauche). Sur le deuxième pavage, cette structure n’apparaît qu’aux coins blancs du carré de côté 14 (à droite). J’en conclus qu’il s’agit de la meilleure solution trouvée jusque là et je communique aussitôt ma trouvaille du carré de côté 13 sans structure au journal. D’après ce coloriage, le nombre N cherché pour ce système de carré colorié avec deux couleurs est supérieur ou égal à 14.

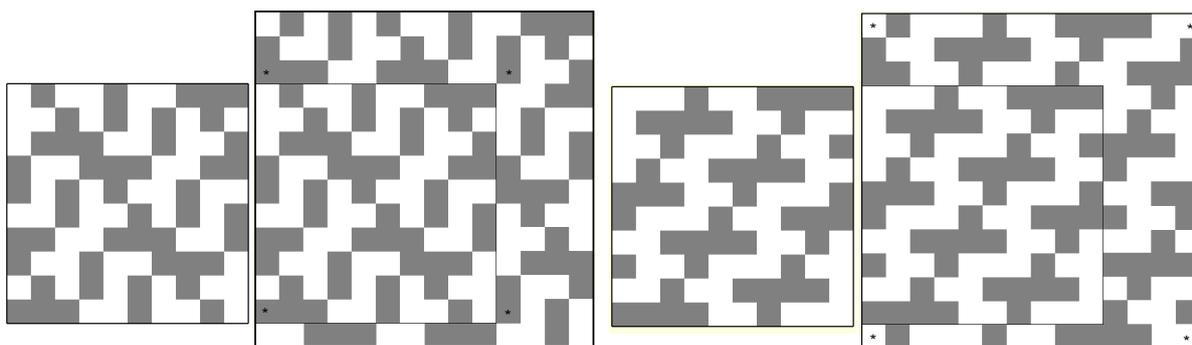


FIGURE 2.12 – Carrés de côté 10 présentant un coloriage pavant, prolongés d’après ce pavage jusqu’à l’obtention de la structure monochromatique (marquée d’astérisques).

Ma recherche de l’époque s’arrêtera là car, début août, le directeur du journal m’appelle pour m’annoncer que j’ai gagné, personne n’ayant trouvé mieux que mon carré de côté 13. Il me communique par ailleurs le lien vers un article des mathématiciens [1] R. Bascher et S. Eliahou de 2010 qui donne la solution pour ce système : $N = 15!$ Dans cet article, les objets manipulés sont des matrices Ericksoniennes, mais les algébristes accompagnent heureusement leur résultat d’une illustration, exhibant un carré sans structure de côté 14. Je remarque alors que ce coloriage contient une portion non négligeable du pavage que j’avais exploité.

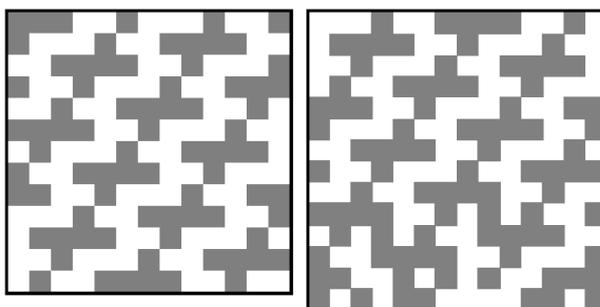


FIGURE 2.13 – Ma meilleure proposition au défi de l’été (à gauche) et le carré de côté 14 sans structure monochromatique donné dans l’article de Bascher et Eliahou (à droite).

2. Systèmes désordonnés

Les différents coloriages de carrés avec deux couleurs sans la structure monochromatique cherchée sont en nombre fini. La collection complète peut être étudiée d'un point de vue statistique : quelle est la proportion de ces carrés qui sont symétriques ? Mais d'autres caractéristiques que la symétrie peuvent être notées concernant ces carrés. Alors que je me demandais comment prolonger certains coloriages afin d'en produire de plus grands avec les mêmes propriétés, tout en exploitant les coloriages symétriques, je pensais rechercher ceux dont la présence relative des deux couleurs était la plus équilibrée. Par exemple, dans un carré de côté 10, je dénombrais les coloriages trouvés contenant 50 cases blanches et 50 noires. Dans le même ordre d'idée, j'essayais de déterminer la valeur maximale du déséquilibre entre les effectifs des deux couleurs.

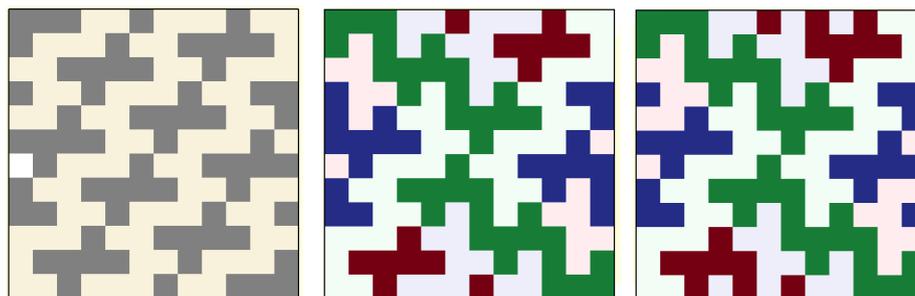


FIGURE 2.14 – Carrés sans structure de côté 12 montrant, à gauche, le plus grand écart rencontré entre l'effectif des cases blanches (78) et celui des cases noires (66) et, à droite, un équilibre complet entre les deux couleurs, les deux spécimen montrés ayant de plus un centre de symétrie quart-de-tour lorsqu'on échange les deux couleurs pendant ce quart-de-tour.

Une autre caractéristique de ces carrés m'a bien occupé : je voulais déterminer le nombre maximum de petits carrés qui pouvait être connectés dans un coloriage sans structure. La visualisation adoptée de ces coloriages faisait particulièrement ressortir de tels agrégats connectés : ils ressemblent à des nœuds de vipères ou plus prosaïquement aux rues interconnectées d'une ville. J'usais alors de l'anglicisme « big clusters ». Pourquoi m'intéresser à ce type de coloriage ? Aucune raison sérieuse, juste la curiosité : je me demandais s'il était possible de trouver un coloriage sans structure dont une des couleurs constitue à elle seule un unique « big cluster ». Je n'en ai pas trouvé alors et cette digression n'a finalement abouti à rien de particulier. Durant le délai limité du défi, ma situation familiale me laissant peu de temps pour m'y consacrer, cette idée n'a fait que nourrir ma réflexion. Mais avec un recul de quatre années, j'ai voulu la réinvestir, ne serait-ce que pour mieux l'abandonner.

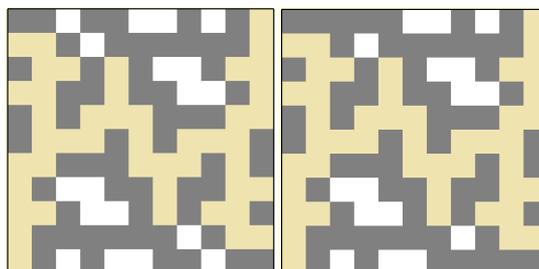


FIGURE 2.15 – Le plus gros big cluster (ensemble monochrome et connecté) trouvé dans deux carrés sans structure symétrique de côté 11 contient 45 éléments blancs connectés (colorié en beige).

Dans ma solution finale au défi de l'été, le plus grand cluster est de couleur blanche. Il contient 30 cases connectées. Mais j'ai trouvé des carrés de dimension inférieure qui contenaient des clusters plus importants : dans des carrés de côtés 11, obtenus par prolongation de carrés symétriques, j'ai trouvé des clusters contenant 45 cases connectées. Seules 18 cases blanches ne sont pas connectées à ce gros cluster.

Je ne renonce pas à en trouver qui contiennent l'ensemble des cases coloriées d'une même couleur, mais pour cela il me faut repartir de zéro. Je dois me constituer des fichiers de tels carrés en commençant par la dimension la plus petite, les carrés de côtés 2. Pour cette dimension, il n'y a plus que 2 carrés sans structure sur les 3 marqués d'un astérisque dans la figure 2.3. J'adapte mon programme de génération pour ne conserver que ceux qui ont une couleur complètement interconnectée.

L'exécution est accélérée du fait qu'il y a beaucoup moins de coloriage obéissant à cette double contrainte : être sans structure et avoir un big cluster mobilisant toutes les cases d'une même couleur. Je trouve rapidement que pour les coloriages de carrés de côtés 3, 4 et 5, il y en a respectivement 12, 79 et 797 qui respectent cette double contrainte. En examinant les coloriages trouvés, je suis frappé par leur côté graphique. On y trouve parfois des dessins stylisés de personnages ou d'animaux. Six des 797 coloriages de côté 5 possèdent, de plus, un élément de symétrie (ci-dessous, ligne du bas). L'autre couleur, celle qui n'est pas complètement interconnectée, apparaît dans de plus petits clusters dont le nombre varie, pour les carrés de côté 5, entre 2 et 7. Il n'y a pas, du moins pour cette dimension, de coloriage présentant simultanément une interconnexion des deux couleurs ; cette disposition existe pour les carrés de côtés de 2 et 3 mais déjà est absente des carrés de côté 4.

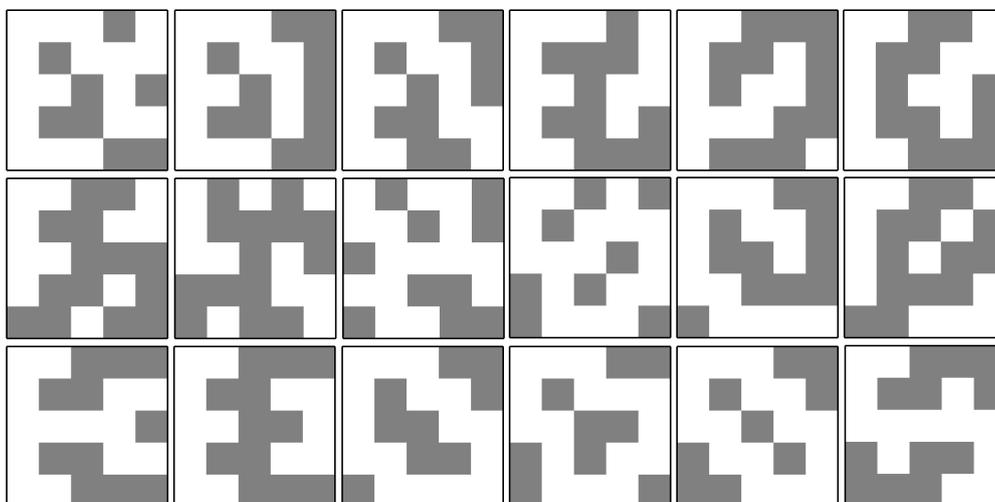


FIGURE 2.16 – Neuf carrés sans structure de côté 5 pour lesquels une des couleurs est totalement interconnectée.

Contrairement à ma tentative avortée d'obtenir tous les carrés sans structure de côté 7, l'exécution du programme ne sélectionnant que les carrés dont une couleur est entièrement connectée aboutit, même si celle-ci prend un certain temps. J'en trouve 6 862 pour les carrés de côté 6 et 33 052 pour le côté 7. Mais alors que je lance le programme pour le côté 8, je réalise que celui-ci se base sur une idée fautive, ou du moins, si elle n'est pas fautive, une idée qui a quelques défauts.

Ma procédure part de l'ensemble des carrés sans structure de côté n dont une couleur est complètement interconnectée pour construire les carrés de côté $n + 1$ qui auraient les mêmes propriétés en ajoutant sur un des coins un gnomon contenant $2n + 1$ nouveaux points. Mais pour qu'un carré de côté $n + 1$ ait une couleur complètement interconnectée, je réalise qu'il n'est sans doute pas nécessaire qu'un sous-carré de côté n possède également cette propriété. Considérons le premier carré dans l'ordre lexicographique de côté 5 qui respecte la double contrainte (ci-dessus, en haut et à gauche). Si je lui enlève le gnomon qui chapeaute le coin inférieur gauche, j'obtiens le carré A ci-dessous qui respecte la double contrainte. C'est d'ailleurs en partant de ce carré A que le programme a trouvé le carré de côté 5. Car si on enlève à ce même carré un des trois autres gnomons, par exemple celui qui coiffe le coin supérieur gauche, on obtient le carré B qui, certes, n'a pas de structure, mais qui ne respecte pas la deuxième contrainte, puisque l'interconnexion de la couleur blanche était justement réalisée par ce gnomon. Bien sûr, j'ai raisonné ici sur un carré dont un des quatre sous-carrés possédait la double contrainte, mais rien n'empêcherai à priori, un carré respectant la double contrainte de n'avoir aucun sous-carré qui la respecte.

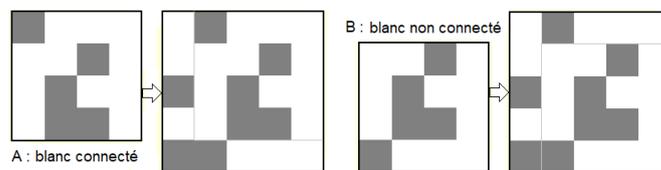


FIGURE 2.17 – Génération du même carré sans structure de côté 5 dont la couleur blanche est complètement interconnectée à partir de (à gauche) A : un carré de côté 4 respectant cette double contrainte et (à droite) B : un carré de côté 4 ne respectant pas l'interconnexion de la couleur blanche.

Fort de cette nouvelle idée, je suis bien obligé de reconsidérer ma procédure : je vais partir de l'ensemble des carrés sans structure de côté n pour générer l'ensemble des carrés de côté $n + 1$ qui respecteraient la double contrainte. Comme je n'ai pas réussi à générer l'ensemble des carrés sans structure de côté 7, je ne pourrai pas obtenir l'ensemble des carrés respectant la double contrainte de côté 8. Mais je peux essayer, au moins de vérifier qu'il en existe, les observer, et jusqu'au côté 7, les dénombrer.

Commençons par le commencement. Je modifie mon programme pour tenir compte de la remarque précédente et génère l'ensemble des carrés de côté 3 respectant la double contrainte : je pars pour cela de l'ensemble des trois carrés sans structure de côté 2 (et non des deux qui respectent la double contrainte). Le résultat n'est pas modifié : il y a 12 coloriages de côté 3 respectant la double contrainte. En continuant la procédure, j'obtiens également 79 coloriages de côté 4 respectant la double contrainte. Par contre, en partant des carrés sans structure de côté 4, j'obtiens 843 coloriages de côté 5 respectant la double contrainte au lieu des 797 obtenus précédemment en partant des 79 coloriages de côté 4 respectant la double contrainte.

Parmi ces 843 coloriages de carrés de côté 5, il y en a donc 46 qui n'ont aucun sous-carré de côté 4 respectant la double contrainte. La figure ci-dessous montre l'un de ces carrés et les quatre sous-carrés d'où il peut provenir : aucun ne possède une couleur entièrement connectée alors que cette interconnexion se produit à l'étape suivante. Ainsi donc, si je veux obtenir tous les carrés respectant la double contrainte, je dois partir de la collection complète des carrés sans structure obtenue à l'étape précédente. J'ai choisi, parmi les 46 nouveaux coloriages, le seul qui possède un élément de symétrie. Au passage, je note que, pour cette étape, les coloriages symétriques respectant la double contrainte sont au nombre de 7 (et non de 6 comme noté précédemment).

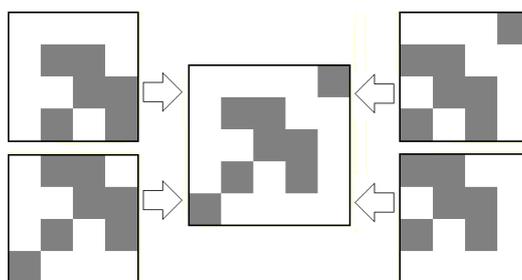


FIGURE 2.18 – Carré de côté 5 respectant la double contrainte et les quatre sous-carrés de côté 4 dont il peut provenir qui ne respectent pas l'interconnexion d'une couleur.

Les coloriages de côté 6 respectant la double contrainte sont finalement 9 008 dont 5 ont un élément de symétrie. Parmi ces derniers, heureuse surprise, j'en trouve un dont les deux couleurs sont entièrement connectées.

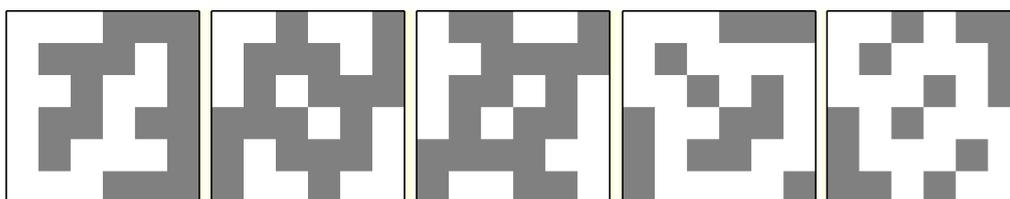


FIGURE 2.19 – Carrés de côté 6 symétriques respectant la double contrainte ; à gauche, les deux couleurs sont chacune interconnectées.

Puisque je parle de symétrie, je dois faire état d'une curieuse incohérence entre mes résultats et ceux des algébristes Bascher et Eliahou. Ils étudient tout d'abord les coloriage sans structure ayant une des caractéristiques suivantes : symétrie, première ligne d'une même couleur et coloriages inversés (*skew binary matrices*, d'un côté et de l'autre d'une diagonale les couleurs y sont inversés). Pour ces dernières, ils montrent que les couleurs présentes sur la diagonale n'ont pas d'importance : si le coloriage n'a pas de structure, changer les couleurs sur la diagonale conservera cette propriété. Ils en tirent une optimisation pour ce type de coloriage (mettre la diagonale à 0) et déterminent qu'il n'existe pas de tels coloriage pour $n > 11$. Pour ce qui est des coloriages symétriques – n'oublions pas que les algébristes parlent de matrices – ils prouvent qu'il n'en existe pas de taille supérieure à 8 ! Cela paraît contredire l'existence des coloriages symétriques de taille 10 que j'ai trouvé et ses différentes extensions, dont ma réponse au défi de taille 13, toutes aussi symétriques.

L'explication de cet apparent paradoxe vient des définitions différentes de la symétrie : en algèbre, une matrice est symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si sa diagonale principale (celle qui va d'en haut à gauche vers le bas à droite) est un axe de symétrie. Pour moi qui considère les éléments de symétrie d'un point de vue purement géométrique, l'axe de symétrie d'un coloriage carré peut être horizontal, vertical ou suivre la seconde diagonale et il peut se présenter également un centre de symétrie. Les coloriages symétriques que j'ai trouvé de taille 10 ont tous un centre de symétrie ; aucun n'a la diagonale principale comme axe de symétrie. Il n'y a donc finalement pas de contradiction entre nos deux résultats.

Le langage de l'algèbre est extrêmement abstrait et puissant, il repose sur des définitions strictes pour lesquelles pas un mot ne peut être changé. Quand je dénombre les 16 colorations équivalentes d'un carré sans élément de symétrie (voir fig.2.6), les algébristes parlent de l'ordre du groupe d'automorphisme des matrices ericksonniennes G isomorphe au produit $D_4 \times C_2$ où D_4 est le groupe diédral d'ordre 8 (noté parfois D_8 , il préserve le carré) et C_2 le groupe cyclique d'ordre 2 inversant les entrées (ici les 0 et les 1). L'ensemble des coloriages considérés comme équivalents par rotation, inversion ou retournement constitue une orbite. Ainsi je comprends mieux les effectifs donnés par ces auteurs pour résumer leurs résultats : les 7 carrés sans structure de côté 2 sont ceux de ma figure 2.5, les 138 carrés sans structure de côté 3 correspondent à mes 24 solutions différentes car, parmi elles :

- ♦ 11 n'ont aucun élément de symétrie et apparaissent de 8 façons différentes
- ♦ 11 ont un unique axe de symétrie et apparaissent de 4 façons différentes
- ♦ 1 ont un unique centre de symétrie et apparaissent de 4 façons différentes
- ♦ 1 ont deux axes de symétrie perpendiculaires et apparaissent de 2 façons différentes

Ainsi, il y a en tout $11 \times 8 + 11 \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 2 = 88 + 44 + 4 + 2 = 138$ variantes de ces 24 coloriages, sans compter les inversions de couleur qui doublent systématiquement ces nombres. Les auteurs ont donc choisi de donner les effectifs confondus de toutes les variantes qui commencent par un zéro, sans tenir compte de l'inversion des couleurs qui double ces chiffres.

Côté du carré	Nombre de coloriages
2	7
3	138
4	5 490
5	390 856
6	29 169 574
7	1 533 415 720
8	29 085 496 072
9	156 515 895 928
10	54 978 562 276
11	2 510 360 996
12	1 990 028
13	570 132
14	116 114
15	0

Toujours d'après ce même article, les carrés sans structure de côté 14 se subdivisent en quatre familles : la famille A_1 contient 16 variables et conduit à 114 688 variantes (nombre doublé par inversion des couleurs), les familles A_2 , A_3 et A_4 contiennent respectivement 7, 5 et 8 variables et conduisent à 1 024, 256 et 146 variantes.

Cette dernière famille A_4 a peu de variantes et il est indiqué que, selon les valeurs données aux variables, ses membres ont des orbites de longueur 4, 8 ou 16. Sans les inversions de couleur, les orbites sont 2, 4 et 8. Ainsi il existe des solutions de côté 14 qui sont symétriques, il en existe 5. Certaines ont seulement un centre mais d'autres, ayant une orbite de 2, possèdent un élément de symétrie supplémentaire. À vous de les trouver à partir du schéma général des couleurs ci-dessous et des contraintes pesant sur les 8 variables :

- ♦ $(x_1, x_3, x_6, x_8) \neq (0, 0, 0, 0), (x_1, x_3, x_6, x_8) \neq (1, 1, 1, 1)$
- ♦ $(x_1, x_2) \neq (1, 1), (x_7, x_8) \neq (1, 1), (x_3, x_5) \neq (0, 0), (x_4, x_6) \neq (0, 0)$

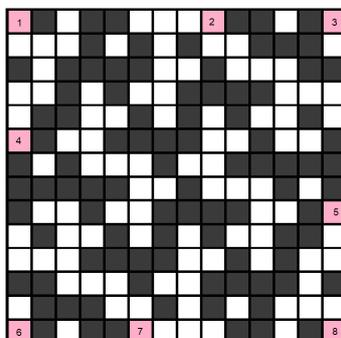


FIGURE 2.20 – Carré sans structure de côté 14 de la famille A_4 . La couleur des cases roses (les variables) peut être librement choisies en respectant les contraintes du texte. Faire les choix qui s'imposent pour donner à ce carré un centre de symétrie et, si possible, un autre élément de symétrie (solutions en annexe).

La famille A_1 des solutions est la plus riche avec ses 16 variables. C'est elle qui contient la solution exhibée par les auteurs (fig. 2.13, à droite). Elle contient également 128 variantes symétriques, au sens géométrique du terme : il s'agit toujours d'un centre de symétrie avec, parfois cet élément de symétrie supplémentaire dont il était question plus haut. Les coloriages de cette famille ne sont pas loin du pavage que j'avais déterminé pour les carré de côté 10 et que j'avais prolongé jusqu'au côté 13 pour donner ma solution. Mais je réalise, en visionnant toutes ces solutions symétriques que la première (en haut à gauche) exhibe sans autre modification ce pavage. L'échantillon de taille 14 de ce pavage infini est seulement pris à un autre endroit que je l'avais fait. Dans la précipitation du défi, je n'avais pas pensé à faire glisser ma fenêtre sur ce pavage !

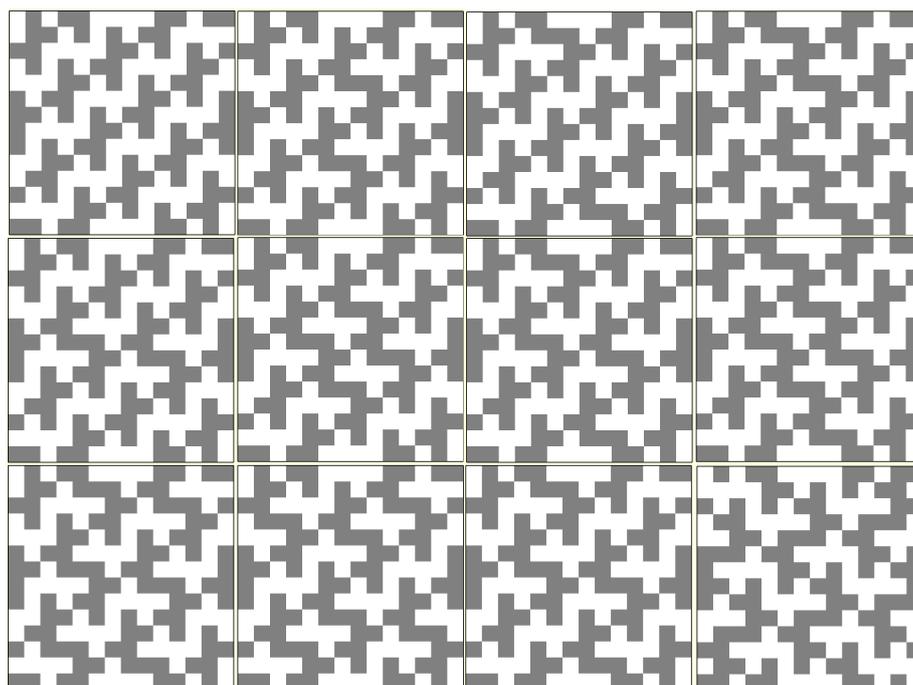


FIGURE 2.21 – Neuf carrés de côté 14 sans structure et symétriques, de la famille A_1 .

3. Le jeu des carrés imparfaits

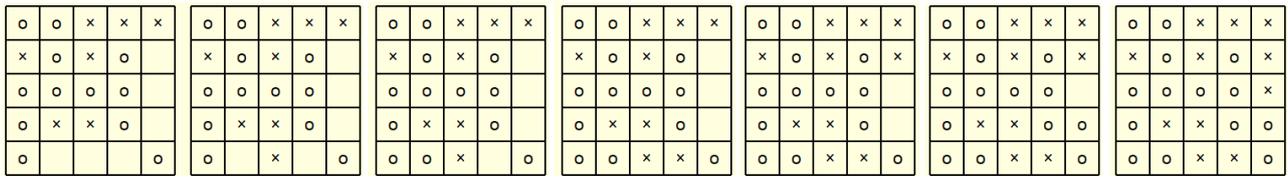


FIGURE 2.22 – Le carré de côté 5 à compléter (à gauche) donné dans [1] et sa reconstitution progressive (vers la droite) par la règle du « constant elbow ».

Ce jeu est suggéré dans l'article des deux algébristes : quand ils expliquent, très brièvement, leur algorithme qui détermine tous les carrés sans structure, ils font état de l'astuce qu'ils utilisent pour compléter plus ou moins complètement un carré dont certaines cases sont remplies. Ils décrivent cette astuce en trois mots, « completing constant elbows », ce qui signifie que dès lors que trois sommets d'un carré de côté n forment un coude monochrome (*elbows*=coude), on est certain que le quatrième sommet de ce carré sera de la couleur opposée (sinon il y aurait constitution de la structure). Pour illustrer ce point, ils donnent un exemple avec un carré de côté 5 partiellement rempli : sur les 25 cases, seules 6 cases restent à remplir, ce qui est facile disent-ils. En effet, on peut parfois rester un bon moment à chercher un carré au coude constant, surtout quand son côté est assez grand. Mais si la grille de départ est bien construite, on y arrive toujours par cette seule technique.

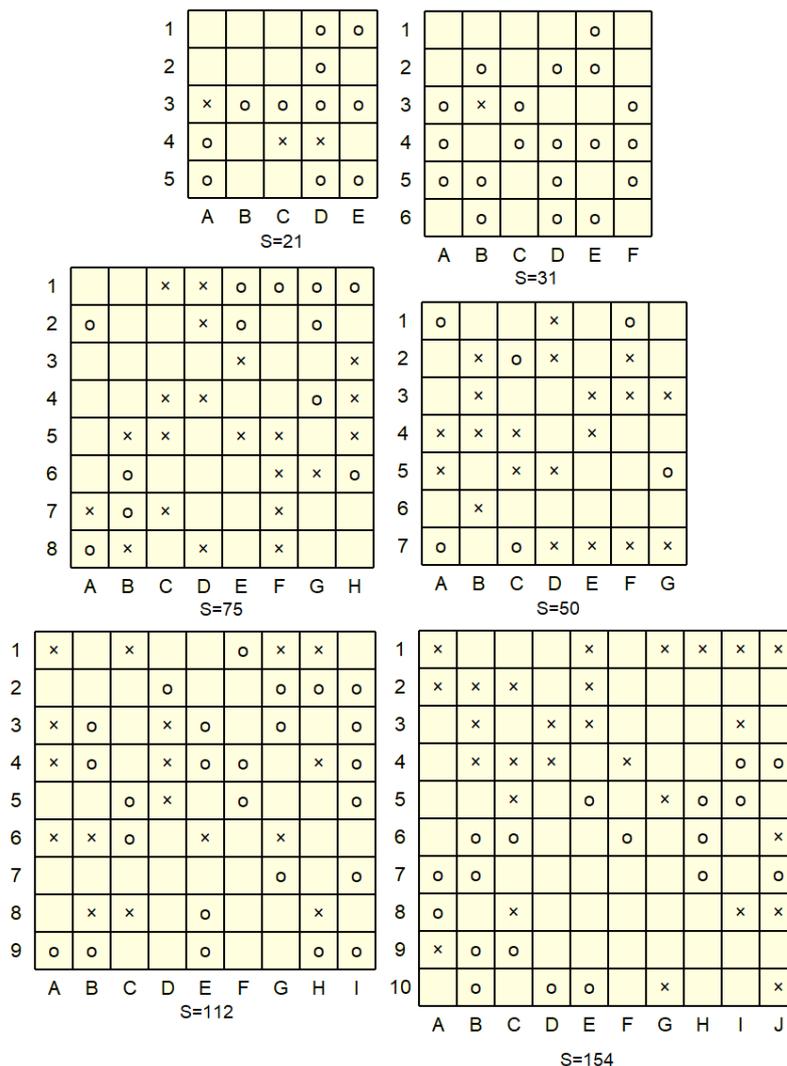


FIGURE 2.23 – Six carrés imparfaits de côté 5 à 10 à compléter de manière à reconstituer des carrés sans structure (solutions en annexe).

J'ai repris une des variantes de l'exemple des algébristes (ci-dessus à gauche) en gommant des cases au hasard de manière à ce que le carré puisse être complété sans former la structure monochrome. Pour développer l'idée de ce jeu, j'ai choisi d'autres carrés sans structure, de côtés 6 à 10, auxquels j'ai progressivement gommé certaines cases lorsqu'elles laissaient, en disparaissant, des « constant elbows » qu'il s'agit de retrouver et de compléter pour reconstituer le carré sans structure duquel je suis parti. Le jeu ressemble un peu à un *sudoku*, du fait qu'une grille doit être remplie avec des symboles qui n'ont pas de valeur numérique ; mais l'activité mentale qu'on y déploie est très différente puisqu'il s'agit de *voir* les carrés aux coins desquels se trouvent trois fois la même couleur. Pour faciliter le jeu sur papier, je n'ai pas voulu mettre des couleurs (difficile à effacer) et j'ai remplacé les chiffres 0 et 1 par les symboles neutres o et x qui ont, par ailleurs, l'avantage d'être très symétriques. Y aura t-il des adeptes pour ce jeu ? En le testant, mon frère en suggère un nom en français (je pensais à quelque chose plus japonisant comme *binoku*) : le jeu des « carrés imparfaits » ce qui convient bien. Compléter ces grilles est très facile, sauf quand les côtés des carrés impliqués dans les « constant elbows » sont grands. Du coup, j'ai évalué la difficulté d'une grille en faisant la somme des côtés de ces carrés et en retenant de cette somme le nombre de dizaines. Le premier carré par exemple est reconstitué par la succession des coups suivants :

C1 : x(2) - C2 : x(1) - E2 : x(1) - E4 : o(2) - C5 : x(2) - B1 : x(2) - B2 : o(1) - B5 : x(2) - A2 : x(3) - A1 : x(4) - B4 : o(1)

Il faut comprendre ici que l'on peut commencer par mettre une croix (x) dans la case C1, ce coup étant lié à un « constant elbows » de côté 2, on met 2 dans la somme *S*. Au 2^e coup, la croix en C2 augmente *S* de 1, etc. jusqu'au 11^e et dernier coup. La somme obtenue pour cette grille est alors $S = 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 1 = 21$, ce que je traduis par une difficulté de 2. Ce résultat semble raisonnable du fait de l'existence de deux coups pas forcément évidents (pour les cases A2 et A1). La même grille avec les six trous proposés par les algébristes a une solution qui s'écrirait C5 : x(2) - C2 : o(1) - C4 : x(2) - E2 : x(3) - E4 : o(2) - E3 : x(1) d'où la somme $S = 2 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 11$ et une difficulté de 1.

1	x		x	o	o	x	x	x	x	o	o			x
2	x	x	x		x	o		o			o			
3	o							x				x	o	
4				x		x				o	o			x
5				x	x		x							x
6	o	o	x	x										o
7	o				x	x		x		o				
8		o					x		x	x	x		x	
9	o					x	o		o					
10		o				x	o	x			x			
11			x		o			x					x	x
12	o	o					x			o		o	x	
13			o	o		x	o			x		x		x
14	o	o		o	o	x				o			o	o
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N

S=381

FIGURE 2.24 – Carré imparfait de côté 14 à compléter par la règle du « constant elbow » de manière à reconstituer le carré d'origine (solution en annexe).

Juste pour voir jusqu'où on peut aller dans la difficulté avec ces carrés imparfaits, je ne résiste pas au plaisir de générer une grille de côté 14 (le maximum, si vous avez bien suivi). Mon évaluation de la difficulté de cette grille est alors de 38 ce qui me paraît un peu excessif en comparaison aux standards du sudoku où la difficulté ne dépasse pas 7 ou 8. Peut-être faudrait-il diviser la somme *S* par 50. Cela

donnerait à la grille de côté 5 ci-dessus une difficulté de 0 ($21 \div 50 \approx 0,42$ s'arrondit à 0)... En prenant l'arrondi entier par excès du quotient par 50 de la somme S , on obtient des difficultés allant de 1 à 8 ce qui semble conforme aux standards.

Voici les coups qui permettent de reconstituer ce grand carré imparfait de force 8 :

C9: *H6: oM1: oK3: *D7: *B7: *D9: oL7: oI10: oD12: *M4: *L14: *N7: oG7: oJ5: oA13: *L2: oI12: oM5: oJ9: oD10: *D3: oB3: *F11: oF12: oJ2: *B11: *C14: *E6: oM6: *G3: *K7: oM10: oA5: *B4: *E12: *H9: oH13: *E13: *F3: oH5: oI14: *G4: *G6: oC5: oC7: oL1: *N3: oG11: oK11: *H8: oL11: oE3: oJ10: *N9: oC3: oC8: oJ11: oM13: *L5: *H14: *D2: oG2: *K9: *E10: oM2: oK6: oC4: oF6: oI13: oB13: oE9: *A8: oI3: oI4: oA11: *N12: oA10: *J6: *L6: *C10: *G14: *B1: oK5: *B5: oK12: oB9: *I6: *I5: *A4: *E4: oI2: *I7: *J3: *E8: oF5: oH12: *I11: *M7: oH4: oL9: *D8: oN8: oC12: *M9: oF8: *L4: *K14: oN2: *N10: *L8: oK13: oD11: oL10: o.

Même sous cette forme condensée, la correction est bien longue à écrire puisqu'il y a 114 coups à réaliser. Quelqu'un qui voudrait se corriger ne peut guère utiliser cette proposition, finalement inutile. Mieux vaut se reporter à la grille complétée qui se trouve à la fin du chapitre. Mais même devant la grille corrigée, il est bien difficile de repérer une erreur ponctuelle. L'aide d'un programme à ce stade paraît indispensable et cela condamne ce jeu à n'exister que sur des plateformes informatisées. Existe-t-il d'autres techniques pour solutionner un carré imparfait, autre que la complétion des coudes monochromes ? Je ne crois pas. S'il en existait, cela donnerait au jeu un plus grand intérêt puisqu'on pourrait diminuer le nombre de cases connues et, surtout, on augmenterait la difficulté par un autre moyen que l'augmentation de la taille de la grille. Il y a la possibilité d'émettre une hypothèse pour tenter d'avancer sans contradiction vers la solution. Il s'agit plus d'une opération risquée que d'une technique car elle oblige, lorsqu'on a suivi une fausse piste, à un retour en arrière périlleux. La technique classique de complétion des coudes monochromes, si elle ne permet pas à elle seule de finir la grille, laisse celle-ci dans un état semi-fini – un état de blocage – qu'il convient d'identifier. Dans la conception d'une telle grille pour laquelle une hypothèse doit obligatoirement être émise, il faut s'assurer qu'une grille semi-finie, complétée avec une hypothèse fautive ne puisse pas conduire à une solution valide. Le principe général qui s'impose est calqué sur la règle du sudoku : une grille de jeu ne doit avoir qu'une seule solution. On ne peut se contenter d'enlever au hasard un des symboles d'une grille valide.

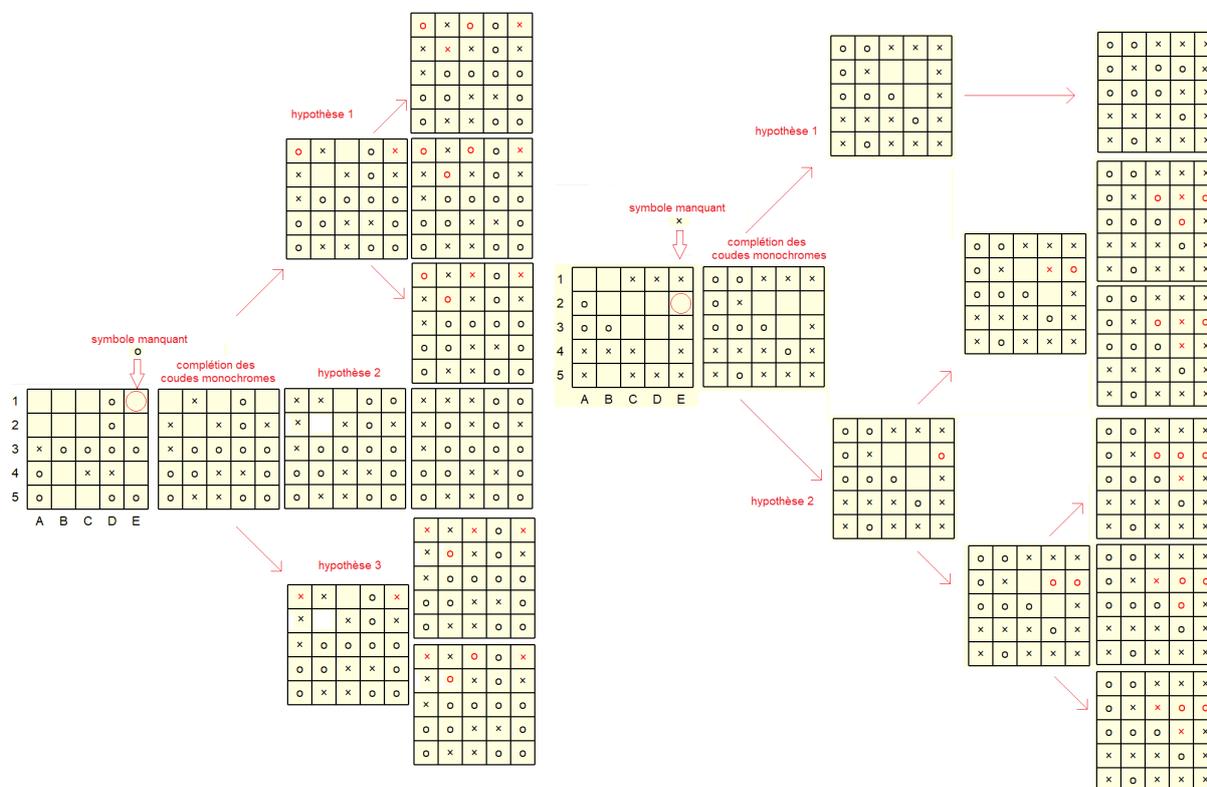


FIGURE 2.25 – Deux carrés imparfaits de côté 5 pour lesquels un symbole au hasard a été enlevé d'une grille valide. Selon les hypothèses, on retrouve la solution originale (en noir) mais aussi d'autres solutions indésirables.

Pour les grilles de côté 5, j'ai obtenu le fichier de l'ensemble des 48 978 grilles valides, trié dans l'ordre croissant. Celui-ci commence par 334373 (0000001010001101000100101) et se termine par 10377838 (0100111100101101001101110). Le fait qu'il soit trié me suggère une méthode pour générer une grille semi-finie contenant un certain nombre de lacunes, avec la certitude de ne pas produire de grilles qui aurait plusieurs solutions : il me suffit de déterminer un motif, c'est-à-dire un ensemble de p positions, et de choisir une grille pour laquelle ce motif est complété de façon unique, parmi toutes les grilles qui ont tous les autres codes égaux (en dehors de ceux du motif). Comme cela n'est sans doute pas très explicite, voyons l'exemple simple ci-dessous d'un motif de trois cases consécutives situé juste avant la dernière case. En examinant juste le début de mon fichier, je trouve une grille qui contient un motif ayant une caractéristique unique : elle est la seule à contenir un zéro au centre. Du coup, si j'enlève les deux chiffres de part et d'autre de ce zéro, il ne peut y avoir qu'une seule grille qui la complète. Celle-ci est représentée à droite. Malheureusement, les deux trous ainsi créés se complètent facilement avec les deux coudes monochromes qui les entourent.

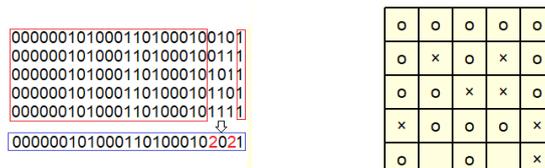


FIGURE 2.26 – Trouver, dans un motif particulier, une grille ayant une caractéristique unique permet de supprimer les chiffres du motif qui ne font pas partie de cette caractéristique.

Cette méthode serait à perfectionner, en utilisant la liste de toutes les grilles où tous les codes pouvant être complétés par des coudes monochromes auraient été remplacés par le code des trous (2 sur mon exemple ci-dessus). Ensuite seulement, si on veut corser la difficulté, on pourra procéder à l'extraction d'un ou deux codes supplémentaires. Si ces codes ne peuvent pas être trouvés par la technique de complétion classique et obligent le joueur à faire des hypothèses, ne risque-t-on pas d'obtenir une grille ayant plusieurs solutions ? En effet, si le blocage lié aux trous additionnels se présente avant la fin, c'est l'ensemble de tous les trous restants qu'il faudrait inclure dans le motif examiné...

Finalement, j'opte pour la méthode suivante : je prends une grille valide pour laquelle je détermine les codes « stables » (ceux qui ne peuvent être enlevés lors de la phase d'élimination des codes liés à un coude monochrome) ; je procède ensuite à cette élimination progressive et forcément partielle des codes (par soustraction aux coudes monochromes) ; j'enlève ensuite, de la grille obtenue, un des codes stables et détermine à quelle étape il sera bloquant, il reste alors t trous à compléter. J'essaie alors les 2^t possibilités de complétion de ces trous et compte les solutions valides obtenues. S'il ne se présente qu'une seule solution valide, je compte enregistrer la grille qui l'a produite avec l'étape bloquante (cela servira à l'évaluation de la difficulté).

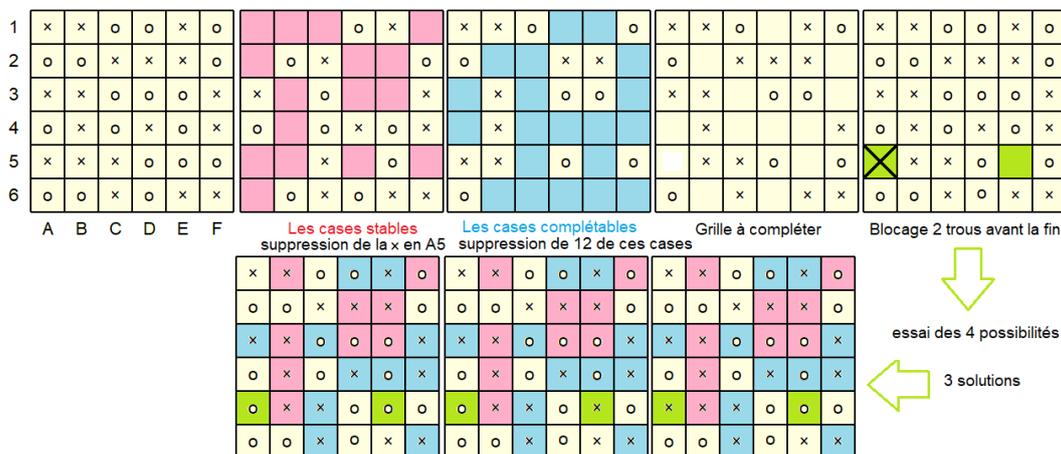


FIGURE 2.27 – Une grille valide de côté 6 pour laquelle, en plus de 12 cases complétables, une case stable a été enlevée. Le jeu obtenu ne peut être retenu car il conduit à 3 solutions distinctes.

La mise au point de cet algorithme n'a pas été sans peine, mais je finis par réaliser que, pour toutes les grilles d'une certaine dimension, quelque soit le code stable que j'enlève, on se retrouve toujours avec un nombre de solutions supérieur ou égal à 2! Cela me fait douter de mon programme car je m'attends à trouver des grilles n'ayant qu'une solution. Mais non, aucune n'a été trouvée sur les quelques 60 000 grilles de taille 6 et l'ensemble des 48 978 grilles de taille 5 que j'ai testées. J'en conclus (peut-être un peu hâtivement) que cela n'est pas possible de procéder ainsi. Je ne peux espérer obtenir une grille avec une solution unique si j'enlève une des cases stables. Puis-je obtenir alors ce résultat en enlevant une des cases non-stables (complétables n'est pas très joli) qui n'ont pas encore été retirées?

J'adapte le programme précédent à cette nouvelle stratégie et découvre rapidement de nombreuses propositions de grilles ayant une solution unique. Pour les grilles de côté 5, j'en trouve près de deux mille, neuf d'entre elles sont données ci-dessous. J'ai indiqué en dessous de chaque grille le rang de la case enlevée (numérotée de gauche à droite, en commençant par la ligne du haut avec le numéro 0) suivi du nombre t de trous restant quand l'hypothèse doit être faite. Ainsi, par exemple pour la première grille ci-dessous, l'indication 19-3 signifie que dans la 19^e case de la grille, c'est-à-dire dans la case E4, un chiffre non-stable a été retiré qu'il suffit de deviner, alors qu'il ne reste plus qu'à compléter 3 trous dans la grille, pour finir avec la technique classique.

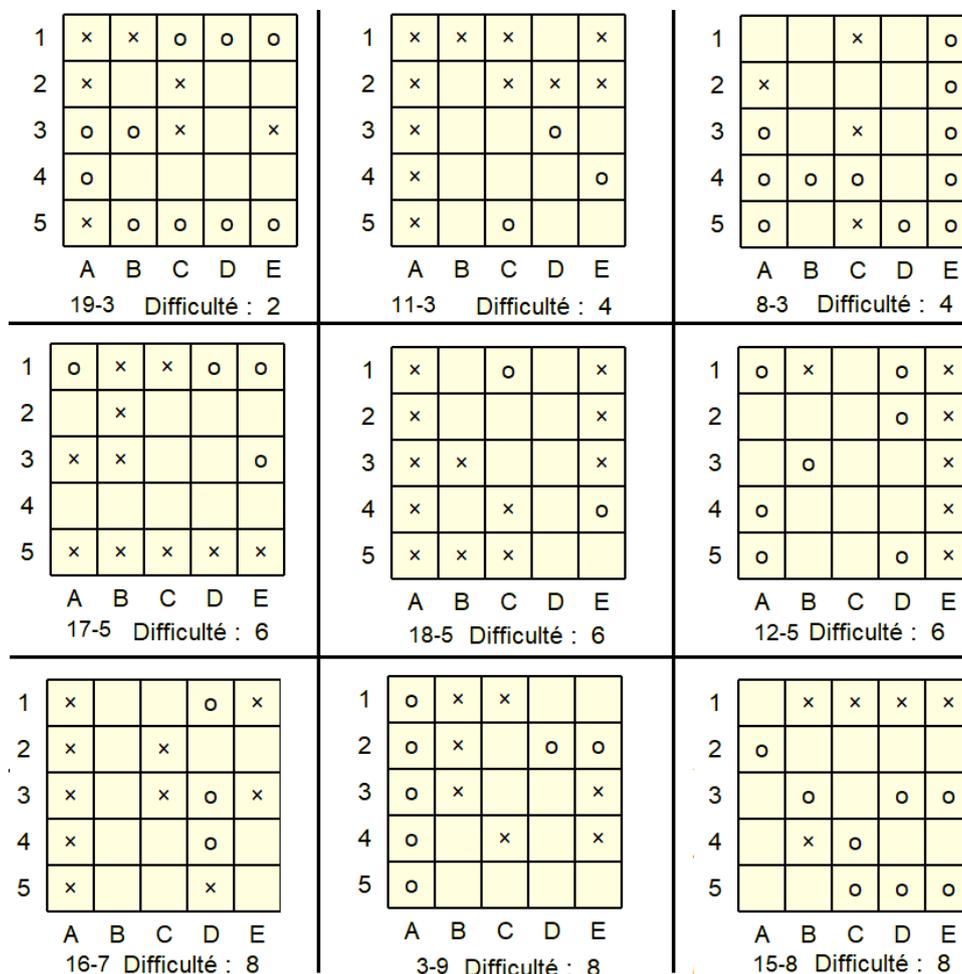


FIGURE 2.28 – neuf grilles de côté 5 pour lesquelles une hypothèse doit être faite au cours de la résolution (solutions en fin de chapitre). Les deux nombres précédents la difficulté sont des aides (voir le texte).

L'évaluation de la difficulté qui est inscrite également en dessous des grilles a été calculée en arrondissant la formule $\frac{S+t \times 2}{5}$ à l'entier supérieur. Il va sans dire que cette formule ne donne pas vraiment satisfaction, d'abord parce qu'elle conduit à des valeurs trop grandes et ensuite, parce qu'elle attribue des coefficients de pondérations assez arbitraires entre les deux grandeurs qu'elle moyenne. Par ailleurs, une grille avec ou sans indications portées, n'a pas la même difficulté. La normalisation du calcul de la difficulté peut attendre qu'un public la réclame.

En travaillant sur un support papier, il apparait judicieux de marquer les symboles dont on est sûr (complétés par coude monochrome) au stylo, puis d'utiliser un crayon. Certains y arriveront plus facilement que d'autres, mais il subsistera toujours une incertitude sur la solution car on ne repère pas forcément un quatuor de coins monochromes à l'œil. Il est sans doute suffisant de donner, en guise de correction, les symboles des cases ne pouvant être complétées sans faire d'hypothèse. J'ai choisi, pour les solutions données en annexe, de porter ces derniers symboles en rouge.

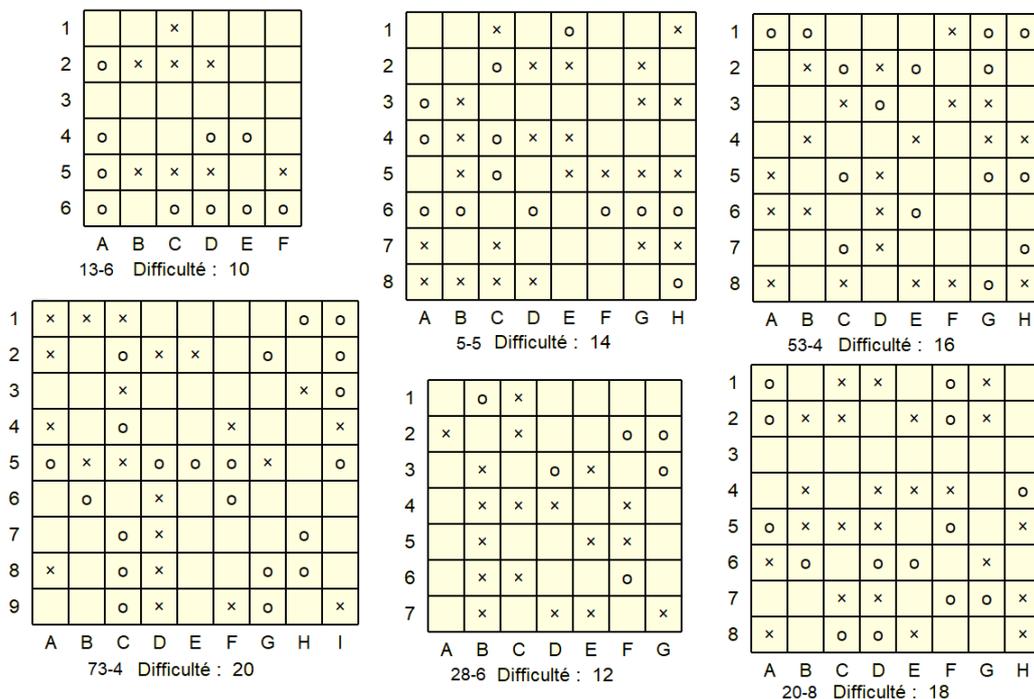


FIGURE 2.29 – Six grilles de côté 6 à 9 avec les aides pour l'hypothèse (solutions en fin de chapitre).

Pour suppléer à la difficulté de corriger une grille remplie sur papier, j'ai réalisé une application¹ en HTML/JAVASCRIPT qui propose de compléter des grilles de jeu. On peut utiliser des aides ou les désactiver, mais dans tous les cas, l'application nous informe que la grille a été correctement complétée ou bien qu'il y a des erreurs. Un score est calculé qui tient compte de la difficulté, des aides activées et du nombre de grilles réussies.

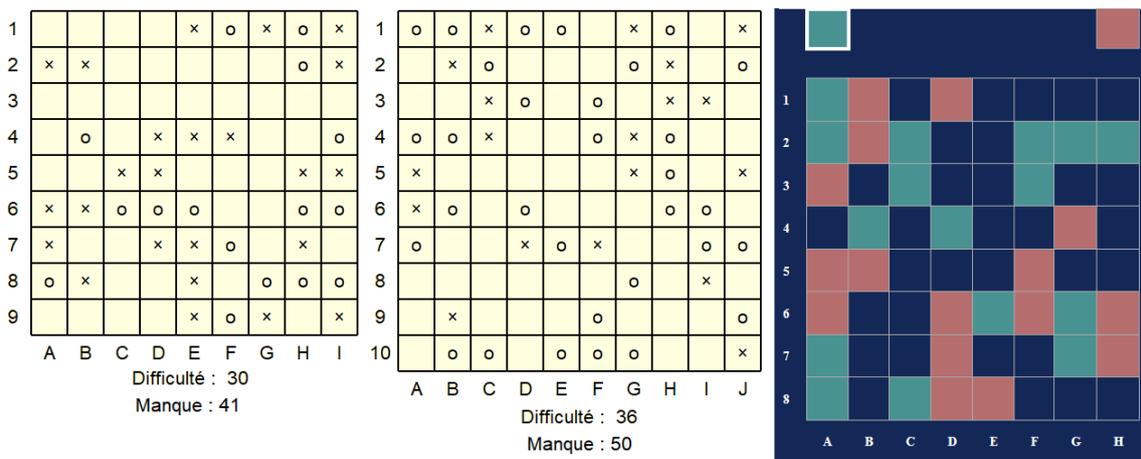


FIGURE 2.30 – Trois grilles de côté 8 (à droite, extraite du jeu sur internet), 9 et 10 sans les aides (solutions en fin de chapitre).

1. Ce jeu se trouve sur le site [mathadomicile.fr](http://ph.moutou.free.fr/CI/carresImparfaits.html) à l'adresse <http://ph.moutou.free.fr/CI/carresImparfaits.html>

4. Solutions

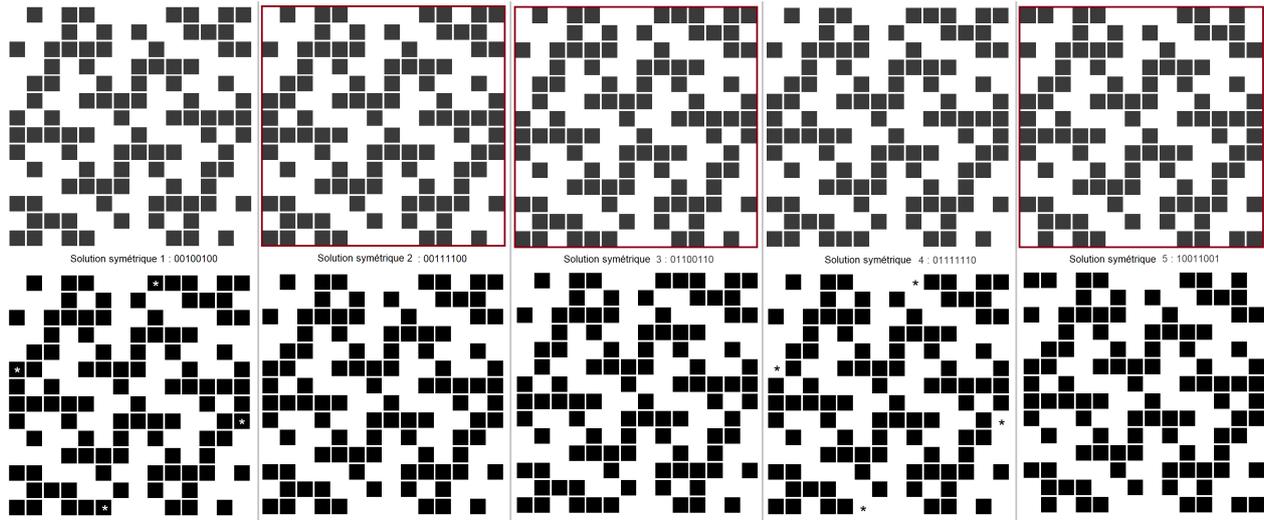


FIGURE 2.31 – Carrés sans structure de côté 14 de la famille A_4 ayant un centre de symétrie. Les trois carrés encadrés en brun possèdent un élément de symétrie supplémentaire quand on les tourne de 90° en inversant les couleurs (la ligne du bas montre cette rotation suivie d'une inversion, les cases marquées d'un astérisque sont différentes dans l'original).

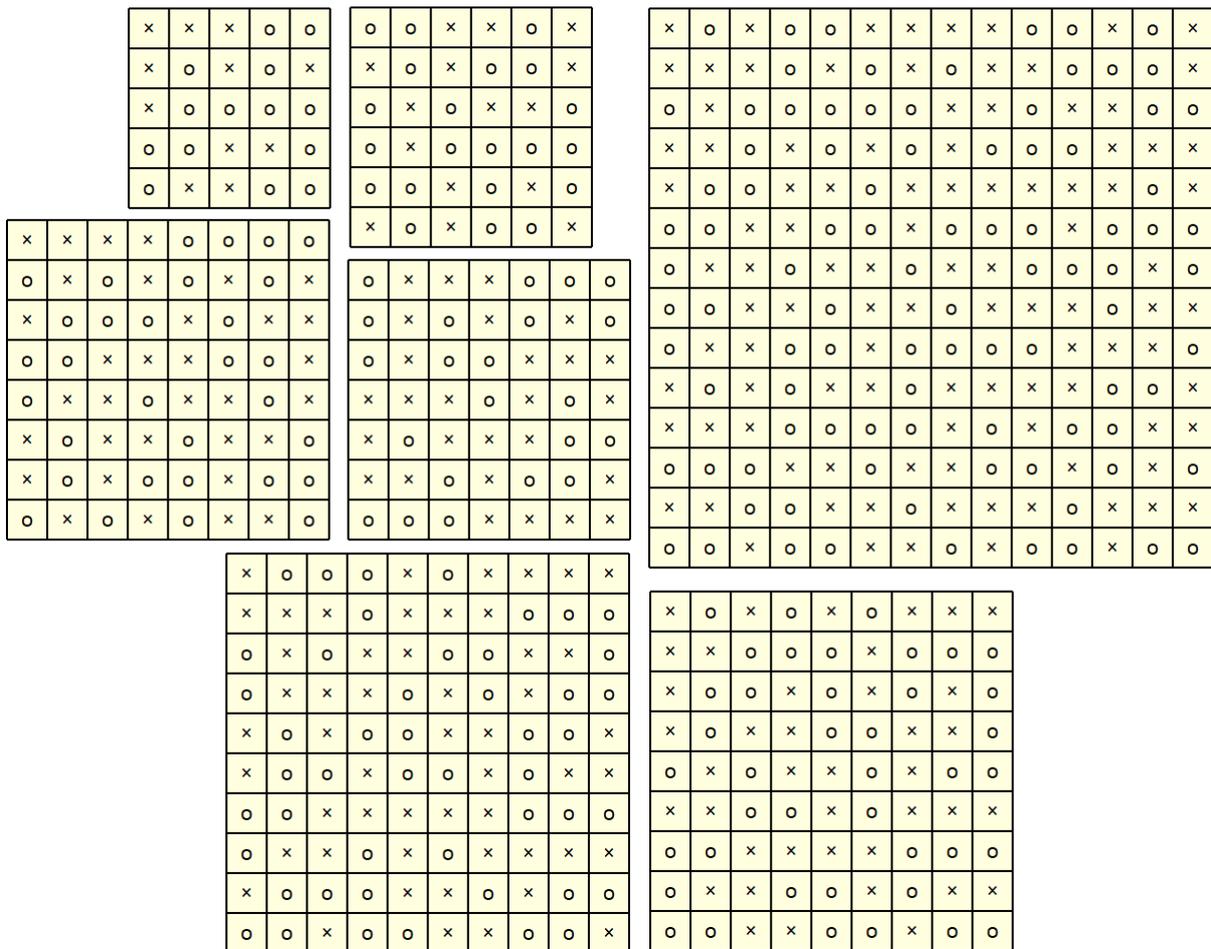


FIGURE 2.32 – Sept carrés imparfaits de côté 5 à 10 complétés par la règle du « constant elbow ».

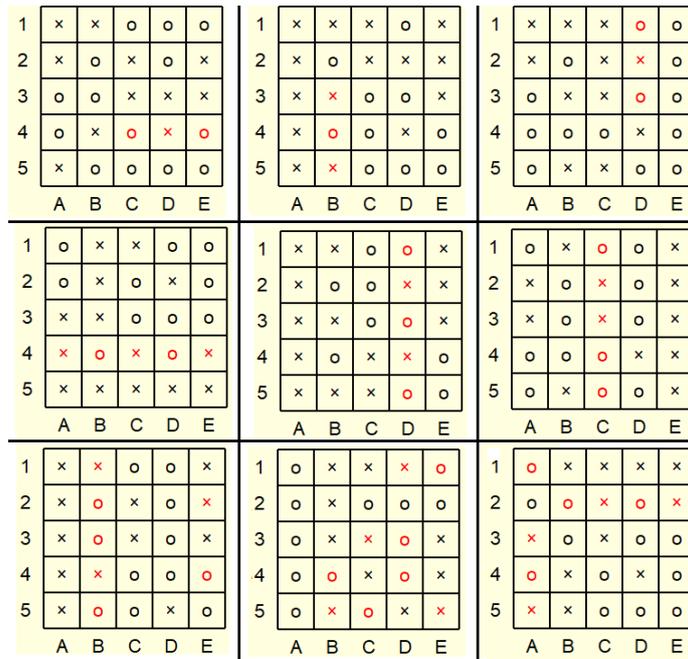


FIGURE 2.33 – Neuf grilles de côté 5 nécessitant une hypothèse.

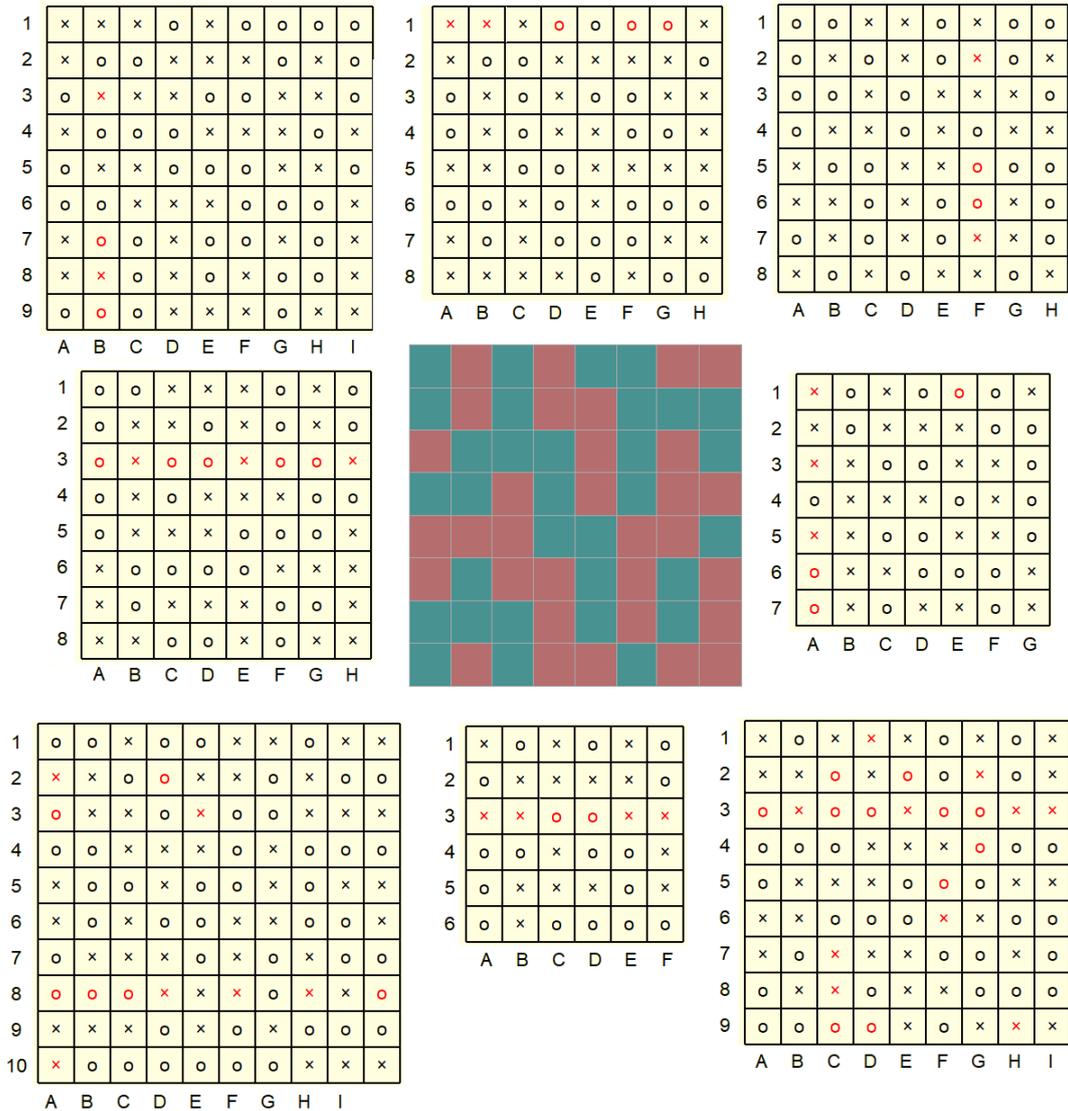


FIGURE 2.34 – Neuf grilles de côté 6 à 10 nécessitant une hypothèse.

Bibliographie

- [1] BASCHER Roland et Eliahou Shalom, *Extremal binary matrices without constant 2-squares*, The Electronic Journal of Combinatorics, Open Journal Systems, vol.1(1), pp.77-100, 2010.
- [2] FURSTENBERG Harry et Weiss Benjamin, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, Journal d'Analyse Mathématique, vol.34(1), pp.61-85, 1978.
- [3] MANSUY Roger, *La taille maximale du désordre*, La Recherche, pp.109-110, Juillet-Août 2018.
- [4] VAN DER WAERDEN Bartel Leendert, *Beweis einer Baudet'schen Vermutung*, Nieuw Archief voor Wiskunde, vol.15, pp.212-216, 1927.