Cours de 6ème - Chapitre 5 : Multiplications et divisions de décimaux

1] Multiplication

a) Multiplications d'entiers (rappel)

Calcul posé : pour multiplier deux entiers, on doit connaître les « tables » de 2 à 9 et aussi comment multiplier par 10,100, 1000 etc. On utilise aussi une propriété de la multiplication qui décompose la multiplication en sommes.
Par exemple le produit 123x56 est décomposé en 123×6 + 123×50. Et même, pour calculer 123×6 on utilise la même propriété car 123×6 = 100×6 + 20×6 + 3×6.

Nous notons généralement ce calcul en colonne de la manière ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\underline{56} \\ 738 \\ \underline{615\mathbf{0}} \\ 6888 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ \times\underline{123} \\ 168 \\ 112\mathbf{0} \\ \underline{56\mathbf{00}} \\ 6888 \end{array}$$

Notons que la multiplication peut se faire dans les deux sens
123×56 = 56×123, on choisit le plus court en général.

Les zéros qui ont été mis en gras sont parfois notés avec un point.
Ce point évite de confondre les zéros qui viennent des calculs
et ceux qui viennent des décalages pour les dizaines, les centaines, etc.

Calcul mental : Les deux propriétés de la multiplication qui suivent resteront valables par la suite.
Elles sont utiles pour faire efficacement du calcul mental.

- On peut changer l'ordre des *facteurs* dans un produit. Par exemple, on l'a vu : 123×56 = 56×123. Cette propriété a pour nom « commutativité ».
- S'il y a plusieurs multiplications, on commence par celle qu'on veut. Exemple, pour calculer 25×12×4 on peut faire (25×12) × 4 ou 25× (12×4) ou même (25×4) ×12 ou encore 25× (4×12). Dans les deux derniers cas on a changé l'ordre des facteurs. Il suffit donc de choisir la plus simple si l'on effectue les calculs mentalement.

Calcul instrumenté : Lorsqu'on utilise une calculatrice pour calculer un « grand » produit on a parfois des surprises. Par exemple essayez de calculer 121212×343434. Qu'en pensez-vous ? La calculatrice affiche $4{,}1628322\times10^{10}$ ce qui signifie 41628322000, pourtant les 3 derniers chiffres ne sont pas 000 mais 008… La calculatrice tronque les nombres trop grands pour elle. Voyez le sujet du devoir pour effectuer ce calcul que la calculatrice ne sait pas faire.

b) Multiplication/division par 10, 100, 1000, etc.

Pour multiplier par 1**0** un nombre décimal on déplace la virgule de **1** rang vers la droite, au besoin on rajoute un zéro ou on enlève la virgule.	1234×10=12340 123,4×10=1234 12,34×10=123,4
Pour multiplier par 1**00** un nombre décimal on déplace la virgule de **2** rangs vers la droite, au besoin on rajoute un zéro ou on enlève la virgule.	1234×100=123400 12,34×100=1234 0,1234×100=12,34
Pour multiplier par 1**000** un nombre décimal on déplace la virgule de **3** rangs vers la droite, au besoin on rajoute un zéro ou on enlève la virgule.	12,34×1000=12340 0,1234×1000=123,4

Et ainsi de suite pour toutes les multiplications par un nombre qui s'écrit 100…0

1234×10 = 12340 mais 12340÷10=1234
Après avoir **multiplié** par 10 si on veut revenir au nombre de départ il faut **diviser** par 10. La division par 10 se fait donc en déplaçant la virgule de **1** rang **vers la gauche**. De même, on divise par 100 lorsqu'on déplace la virgule de **2** rangs vers la gauche, etc. Au besoin on peut supprimer des zéros inutiles ou rajouter le zéro des unités.

Par exemple : 12340÷10=1234 ; 123,4÷100=1,234 ; 12,34÷1000=0,01234 ; 1,234÷10000=0,00012340.

Ces propriétés sont utiles pour comprendre la multiplication des décimaux entre eux. On peut aussi ajouter les multiplications et divisions par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; etc. Car c'est le même problème : 0,1 c'est 1 dixième (voir chap.1) et donc multiplier par 0,1 c'est compter les dixièmes et cela revient à diviser par 10 :

56 × 0,1 = 56 dixièmes = 5,6 unités

12,3 × 0,1 = 12,3 dixièmes = 1,23 unités.

Milliers	Centaines	Dizaines	*Unités*	,	dixièmes	centièmes	millièmes
0	0	0	5	,	6	0	0
0	0	0	1	,	2	3	0

De la même façon multiplier par 0,01 c'est diviser par 100, multiplier par 0,001 c'est diviser par 1000.
Et dans l'autre sens c'est pareil ! multiplier par 10 c'est diviser par 0,01…
Ces remarques ne sont pas dénuées d'intérêt si l'on veut multiplier des nombres décimaux entre eux.

c) Multiplication des décimaux

On va se ramener dans tous les cas, à une multiplication entre entiers. Par exemple pour multiplier 12,3 par 0,56 on va se ramener au produit 123 × 56. On a multiplié 12,3 par 10 et 0,56 par 100, donc on a multiplié par 10×100 c'est-à-dire par 1000, il faudra donc diviser ensuite par 1000 :

12,3 × 0,56 × 1000 = (12,3 × 10) × (0,56 × 100) = 123 × 56 = 6888
donc 12,3 × 0,56 = 6888 ÷ 1000 = 6,888

Ce qu'on dit, pour simplifier tout cela, c'est qu'il faut compter le nombre de chiffres après la virgule dans les deux facteurs du produit. Il faudra autant de chiffres après la virgule dans le produit (le résultat de la multiplication).

Dans le produit 12,3 × 0,56 il y a 3 chiffres après la virgule, il y aura donc 3 chiffres après la virgule dans le résultat, et comme 123 × 56 = 6888 on aura donc 12,3 × 0,56 = 6,888.

Conséquence : si vous savez que 123×56 = 6888, alors vous pouvez obtenir sans calcul les résultats des opérations suivantes : 12,3×56 ; 1,23×56 ; 12,3×5,6 ; 1,23×5,6 ; 1,23×56 ; 1,23×0,56 ; 12,3×0,56 ; 0,123×0,56 ; 12,3×560 ; 1,23×5600 ; 12,3×0,00056 ; 123000×0,0056 ; etc.

On retiendra la règle : Pour effectuer le produit de 2 nombres décimaux, on ne se préoccupe pas des virgules (on effectue le produit de 2 entiers) puis, on place la virgule dans le résultat obtenu de manière à avoir autant de chiffres après la virgule qu'au départ.

Exemple : Calculons le produit 57,3 x 1,87. Pour cela calculons 573 × 187, puis plaçons la virgule.

573	
X187	
4011	573 × 187 = 107 151
4584**0**	Il y a 1 + 2 = 3 chiffres après la virgule dans le produit 57,3 × 1,87
573**00**	Il doit donc y avoir 3 chiffres après la virgule dans le résultat
107151	Donc 57,3 × 1,87 = 107,151

Certains calculs peuvent ainsi se faire directement, sans être posés (on dit qu'ils sont faits « en ligne »), par exemple : 0,0056 × 0,007 = 0,0000392 (on effectue 56 × 7 = 392, puis on place la virgule, en ajoutant les zéros. Il y a 7 chiffres après la virgule dans les 2 facteurs du produit donc 7 chiffres après la virgule dans le résultat).

2] Division

a) Division euclidienne

Définition : une division euclidienne* est une division où le dividende, le diviseur, le quotient et le reste sont entiers. On rappelle que le reste est toujours inférieur au diviseur.

Exemple : nous avons 56 euros à partager en 3, on pose la division :

56 3 26 24 2	3 18	Donc 56 = 3 x 18 + 2 56 ÷ 3 = 18, reste 2. Le dividende est ici 56, le diviseur 3, le quotient 18 et le reste 2.

L'adjectif *euclidien* vient de Euclide qui est un mathématicien grec de l'antiquité. A cette époque on s'intéressait beaucoup aux entiers. On inventa l'arithmétique (mathématique des entiers)..

Applications de la division euclidienne à des problèmes de conversion, de partage :
Exemple 1 : On veut convertir 1250 secondes en minutes. Sachant qu'il y a 60 secondes par minutes, on divise 1250 par 60 :

1250 120 50	60 20	Donc 1250 = 60 x 20 + 50 1250 ÷ 60 = 20, reste 50. Le dividende est ici 1250, le diviseur 60, le quotient 20 et le reste 50. Il y a donc 20 minutes et 50 secondes dans 1250 secondes.

Exemple 2 : On veut répartir 333 œufs dans des boîtes de 12. Combien faut-il de boîtes ?

333 24 93 -84 9	12 27	Donc 333 = 12 x 27 + 9 333 ÷ 12 = 27, reste 9. Le dividende est ici 333, le diviseur 12, le quotient 27 et le reste 9. Il y a donc 27 boîtes pleines et 9 œufs dans une 28ème boîte. Il faut 28 boîtes.

Utilisation de la calculatrice (touche de division avec reste) : Les calculatrices de collège, généralement, savent effectuer une division euclidienne. Sur certains modèles, la touche ÷R est utilisée pour cela. Sinon il faut « bricoler » en prenant les parties entières des divisions décimales :
333 ÷ 12 = 27,75 ; on garde le 27 puis on effectue 333 – 27 x 12 = 9 pour trouver le reste.

b) Division décimale

Lorsque cela a un sens, on peut continuer à diviser le reste de la division euclidienne. Dans notre premier exemple on avait 56 = 3 x 18 + 2.

56 54 20 - 18 2	3 18,6..	Le reste est 2 unités, cela représente 20 dixièmes que l'on peut diviser en 3 pour trouver 6 dixièmes et un nouveau reste de 2 dixièmes, qui font 20 centièmes que l'on divise à nouveau en 3, etc. La division ici ne s'arrête jamais, on trouve que 56÷3 = 18,6666666666… (des 6 jusqu'à l'infini). On peut écrire « en ligne » le résultat à chaque étape : 56 = 3 x 18,6 + 0,2 ; 56 = 3 x 18,66 + 0,02 ...etc.

La division ne tombe pas juste. Il ne peut y avoir d'écriture décimale à ce quotient de 56 par 3. Dans ce cas il faut se résoudre à donner une valeur approchée de celui-ci. Généralement, on donne un **arrondi**, c'est-à-dire la valeur ayant un certain nombre de chiffres après la virgule, la plus proche du quotient considéré. On peut arrondir à l'entier le plus proche, au dixième le plus proche, au centième (le plus proche), etc.

Pour être plus clair donnons des exemples : 18,666666… est compris entre 2 entiers : 18 et 19, mais il est plus proche de 19 (car 66 est plus proche de 100 que de 0) donc 19 est l'arrondi de ce nombre (le quotient de 56 par 3) à l'entier le plus proche. De la même manière on comprendra que 19,7 est l'arrondi au dixième le plus proche de ce nombre, que 19,67 en est l'arrondi au centième. La calculatrice donne un arrondi aussi quand elle affiche 19,666667 (le 7 provient de l'arrondi). Pour en revenir au problème : partager 56 euros en 3 part égales, si on prend 19 ce n'est pas juste car 19 x 3 = 57 (il manque un euro), si on prend 18,7 ou 18,67 ce n'est pas juste non plus mais plus précis (18,7 x 3 = 56,1 et 18,67 x 3 = 56,01). Il n'y a pas de solution qui donne un résultat exact et continuer au-delà des centimes n'aurait guère de sens, donc arrêtons nous là.

On peut aussi donner des **troncatures** (on coupe alors la suite des décimales), ce qui est plus simple mais c'est toujours une **valeur approchée par défaut** (inférieure à la valeur exacte) alors que l'arrondi est équitablement supérieur (on dit alors **valeur approchée par excès**) ou inférieur à la valeur exacte.

c) <u>Division de deux décimaux</u>

> Propriété : On obtient des quotients égaux lorsqu'on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre. Par exemple 1÷2 = 0,5 mais aussi 10÷20 ou 2÷4 ou 5÷10 etc.

Nous allons utiliser cette propriété des quotients pour transformer un quotient de décimaux en un quotient d'entiers. Il suffit de multiplier le diviseur et le dividende du quotient par 10, 100, 1000, etc. jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chiffres derrière la virgule.

Exemple : 2,51÷ 0,2 = 25,1÷ 2 (on a multiplié par 10 le dividende et le diviseur)
= 251÷ 20 (on a multiplié par 100 le dividende et le diviseur)

Ainsi pour effectuer 2,51÷ 0,2 il suffit d'effectuer 251÷ 20, et cela, nous savons le faire.

Bien évidemment tout ce que nous venons de dire est surtout utile pour effectuer les opérations à la main (calcul posé). Car si nous disposons d'une calculatrice, elle effectue directement la division des décimaux.

d) <u>Sens de la division</u>

Il est bon de connaître le lien entre division et multiplication.

> Généralement on définit le quotient de *a* par *b* comme étant le nombre qui, multiplié par *b* donne *a*. Autrement dit, lorsqu'on cherche quel nombre *x* vérifie l'égalité $b \times x = a$, le nombre *x* cherché est le quotient de *a* par *b*. On le note $\dfrac{a}{b}$ et on le calcule en effectuant $a \div b$.

$$\begin{array}{l|l} 1{,}0 & \underline{\ 8\ \ \ \ \ } \\ \underline{-8} & 0{,}125 \\ \ \ 20 & \\ \ -\underline{16} & \\ \ \ \ 40 & \\ \ -\underline{40} & \\ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Lorsque nous effectuons la division décimale de 1 par 8, nous trouvons le quotient de 1 par 8 : 1 ÷ 8 = 0,125 ; cela signifie que ce nombre, multiplié par 8 donne 1. En effet, 8 × 0,125 = 1, cette égalité est à rapprocher de l'écriture « en ligne » de la division euclidienne, celle qui permet d'écrire le reste de la division. Ici le reste est nul, mais on aurait pu écrire : 1 = 8 × 0,125 + 0

Dans un problème si on dit par exemple que l'on vide un tonneau de 30 litres en remplissant des bouteilles contenant chacune 0,75 litres, en notant *x* le nombre de bouteilles, cela s'écrit $0{,}75 \times x = 30$. Le nombre *x* que l'on cherche est égal à $\dfrac{30}{0{,}75}$ qui est égal, d'après ce que nous avons dit dans la partie c), à $\dfrac{3000}{75}$ ou 3000 ÷ 75 ce qui vaut exactement 40.

Un autre exemple avec des vitesses : Si j'effectue un trajet de 250 Km à une vitesse de 90 Km/h quelle est la durée du trajet ? Si j'augmente ou si je diminue ma vitesse de 10 Km/h gagnerai-je ou perdrai-je le même temps sur ce trajet ?

Vous savez que vitesse × temps = distance, donc 90 × temps = 250 et donc temps = 250 ÷ 90 soit 25 ÷ 9 ou encore 2,777…h ou encore 2 heures et 47 minutes environ.

Quel temps gagnerai-je à parcourir la même distance à une vitesse de 100 Km/h ? Ici le temps sera de 250÷100 soit 2,5h ou encore 2 heures et 30 minutes. Je gagnerai donc 17 minutes environ.

Quel temps perdrai-je à parcourir la même distance à une vitesse de 80 Km/h ? Ici le temps sera de 250÷80 soit 25÷8 = 3,125h ou encore 3 heures et 7 minutes et 30 secondes. Je perdrai donc 20 minutes et 30 secondes environ.

<u>Calcul de la moyenne</u> : pour calculer une moyenne de différentes valeurs, on calcule la somme de toutes les valeurs et on divise par le nombre de valeurs. Si, par exemple, mes notes ce trimestre ont été 9,5 – 11 et 13. La moyenne de ces 3 notes sera (9,5 + 11 + 13) ÷3 soit 33,5÷3 ce qui donne un nombre non décimal 11,333… qui sera peut-être arrondi à 11,5.