Chapitre 4 Les angles

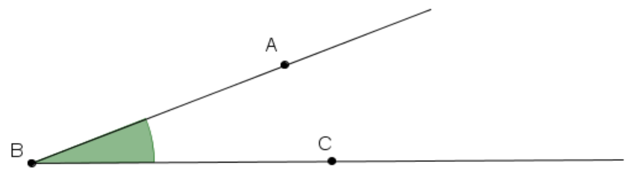
Dans ce 2ème chapitre de géométrie, nous abordons la notion d'angle. Un angle est un *objet* géométrique (comme les points, les droites, etc.) et c'est aussi une *mesure*, donc un nombre assorti d'une unité de mesure (comme les longueurs ou les aires).

1) Définition et notation

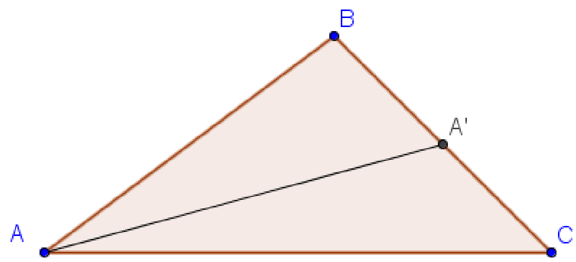
Définition: un angle est constitué de deux demi-droites de même origine. L'origine commune de ces demi-droites est le sommet de l'angle, les demi-droites sont les côtés de l'angle.

Notation: on utilise 3 points pour noter un angle, celui du milieu étant le sommet.

Exemple: Voici l'angle $\widehat{ABC}$.
Les côtés de cet angle sont [BA) et [BC).
Le sommet de cet angle est B.

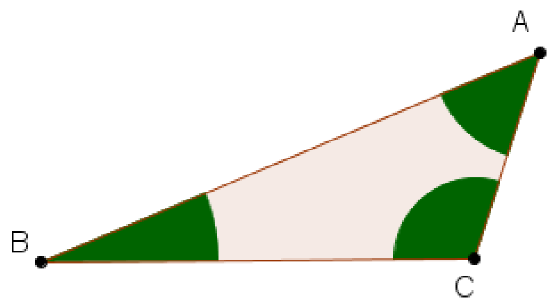


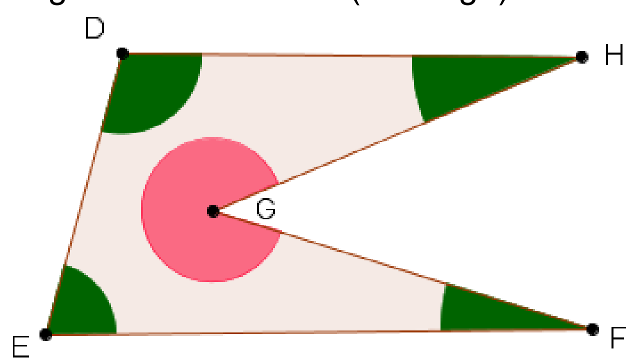
Remarque importante: il y a deux angles différents qui ont les côtés [BA) et [BC), celui qu'on note $\widehat{ABC}$ est l'angle saillant, c'est celui qui a été colorié sur la figure. L'autre est ce qui reste lorsqu'on enlève l'angle saillant, c'est l'angle rentrant.



Simplification: lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on peut simplifier le nom d'un angle en ne donnant que le sommet. Par exemple, on pourra noter $\widehat{B}$ l'angle $\widehat{ABC}$ si aucun autre angle n'a B pour sommet. Par contre, si on s'intéresse à la figure ci-contre: le triangle ABC et A' le milieu de [BC], on voit que l'on ne peut parler de l'angle $\widehat{A}$ sans risque de confusion, car 3 angles de cette figure ont A comme sommet (les angles $\widehat{BAC}, \widehat{BAA'}$ *et* $\widehat{CAA'}$). Dans ce genre de situation, on doit donc utiliser le nom complet de l'angle.

Angles d'un polygone: quand on parle des angles d'un polygone, on parle toujours des angles internes du polygone. Comme son nom l'indique, un triangle a 3 angles. Les angles internes d'un triangle sont toujours saillants. Par exemple, les angles du triangle ABC sont $\widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ *et* $\widehat{CAB}$. Un polygone ayant plus de 3 côtés peut être non-convexe et donc comporter des angles internes rentrants. Nous illustrons cette idée par les 2 figures ci-dessous, où le pentagone DEFGH possède un angle interne rentrant (en rouge).

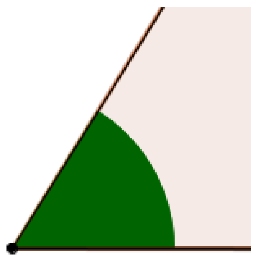




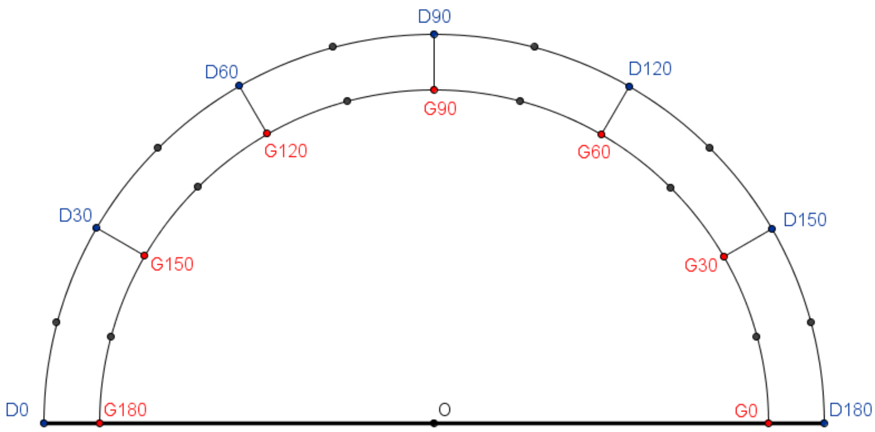
2) Mesure d'un angle

Unités de mesure: un angle peut être mesuré en degrés, en tours, en grades ou en radians. L'unité usuelle est le degré que nous définissons à partir de la mesure d'un angle droit: un angle droit mesure 90°. Le degré est donc la 90ème partie d'un angle droit. Voici un angle de 1°:

Un tour contient 4 angles droits, donc un tour mesure 360°. Le degré est donc vraissemblablement en relation avec l'usage babylonien de compter par soixantaine, et aussi au fait qu'il y a approximativement 360 jours dans une année... La tentative révolutionnaire d'introduire une unité décimale (base 10 au lieu de base 60) pour mesurer les angles a conduit au grade. Un angle droit mesure donc 100 grades. Le radian est une unité très utilisée dans les sciences (maths, physiques, etc.) et définie par la longueur de l'arc de cercle de rayon 1 centré sur le sommet de l'angle. Nous verons plus tard pourquoi l'angle droit mesure π/2 radians (soit environ 1,570796327 rad). L'angle tracé à droite mesure 1 radian (approximativement 57,29577951°).



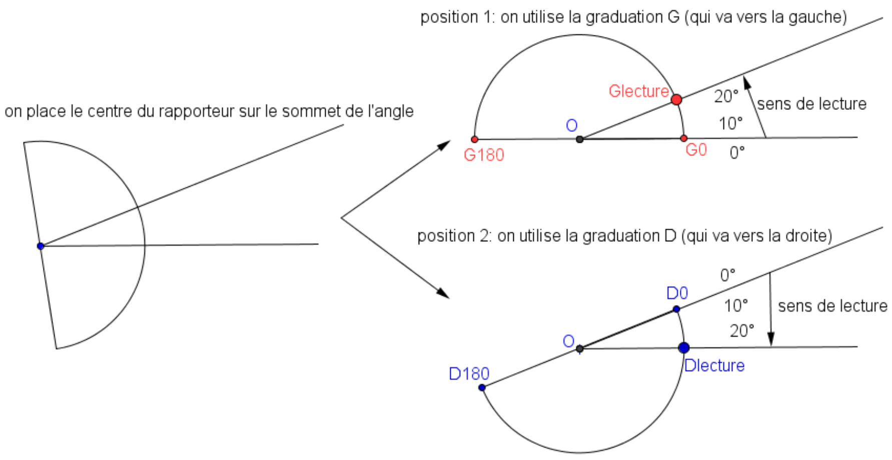
Instrument de mesure: le rapporteur. Cet instrument est constitué généralement d'un demi-cercle sur lequel figurent 2 graduations en sens inverse. Le diamètre du demi-cercle est le bord du rapporteur (un segment qui joint les graduations 0° et 180°), le centre du demi-cercle est le centre du rapporteur. Voici donc un rapporteur simplifié au maximum.



Les graduations D et G sont en sens inverse. La somme des deux graduations est toujours 180° (30+150 ou 60+120, etc.). Certains rapporteurs n'ont qu'une seule graduation, il faudra par conséquent imaginer l'autre. Par contre, attention aux rapporteurs qui ont une graduation en grade (de 0 à 200 grad) car elle est source de confusion et d'erreurs!

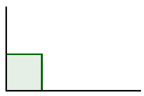
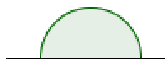
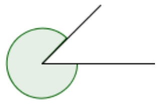
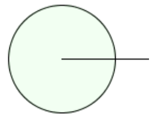
Utilisation du rapporteur:

1. on place le centre du rapporteur (le point O) sur le sommet de l'angle à mesurer.
2. on fait tourner le rapporteur jusqu'à faire coïncider le bord du rapporteur et un des côtés de l'angle, de manière à avoir les graduations à l'intérieur de l'angle (il y a 2 positions possibles).



3. on lit la mesure avec la graduation qui commence à 0° sur le bord du rapporteur, à l'endroit où celle-ci coupe le 2ème côté de l'angle. Attention aux mauvaises lectures qui ne tiennent pas compte de l'ordre des nombres! Pour éviter les erreurs, on pourra compter les angles de 10 en 10 jusqu'à la mesure (voir illustration).

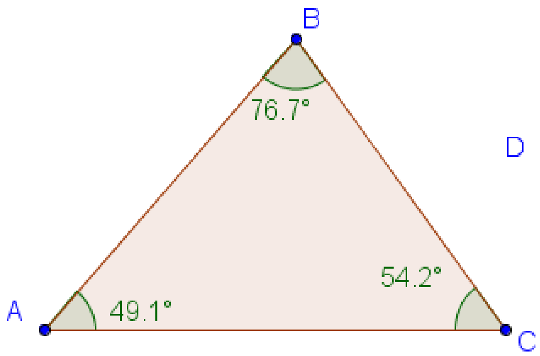
Les différentes sortes d'angles (classification des angles selon leur mesure):
Parmi les angles saillants, on distingue les **angles aigus** qui ont une mesure inférieure à 90° et les **angles obtus** qui ont une mesure comprise entre 90° et 180°. Un angle rentrant a une mesure comprise entre 180° et 360°. Un angle de mesure 0° est appelé angle *nul* tandis qu'un angle de mesure 180° est appelé angle *plat*.

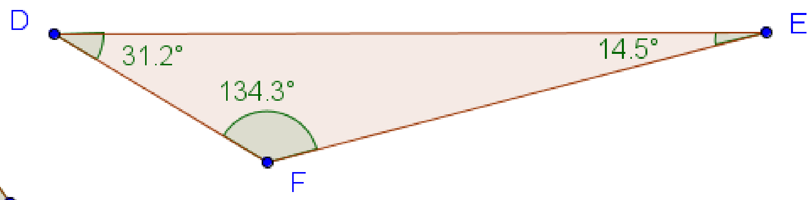
0°		90°		180°		360°
angle *nul*	angle *aigu*	angle *droit*	angle *obtus*	angle *plat*	angle *rentrant*	angle *plein*
						

Les différentes sortes de polygones (classification des polygones selon les mesures de leurs angles):
Pour les triangles, on distingue les **triangles acutangles** (qui n'ont que des angles aigus) et les **triangles obtusangles** (qui ont un angle obtus). Entre les deux se situe le **triangle rectangle** (qui a un angle droit).

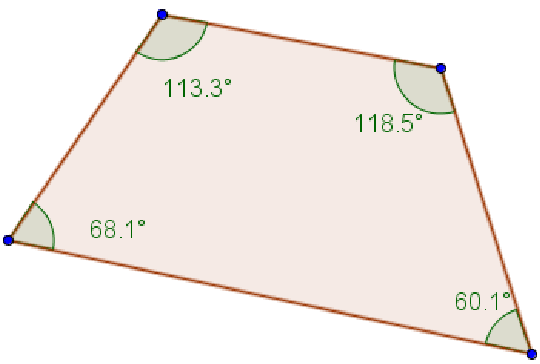
3) Applications

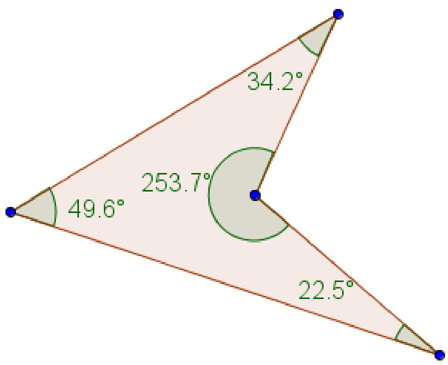
Mesure des angles d'un polygone: mesurons les angles d'un triangle et calculons la somme des 3 angles.
Pour notre triangle ABC, la somme des 3 angles est :49,1+76,7+54,2=180°.
Pour le triangle DEF, la somme des 3 angles est :31,2+14,5+134,3=180°.





Il semble que pour tout triangle la somme soit égale à 180°. Cette propriété sera étudiée en 5ème, n'en disons pas plus pour l'instant. Voyons si une propriété semblable se rencontre pour les quadrilatères:



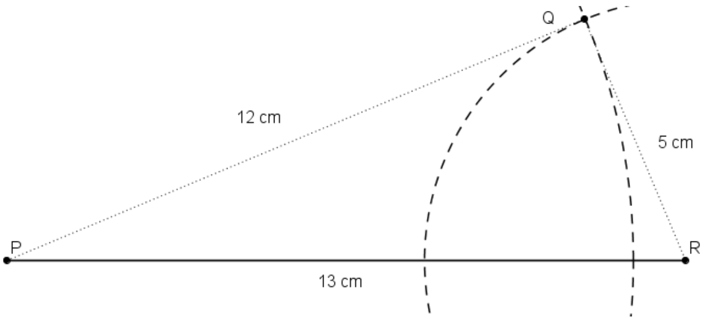


La somme des angles du quadrilatère convexe est:68,1+113,3+118,5+60,1=360°.
La somme de ceux du quadrilatère non-convexe est:49,6+34,2+253,7+22,5=360°.
Il semble bien qu'une propriété soit à l'oeuvre, et on peut sans doute s'attendre à une généralisation: 180° pour un triangle, 360° (2×180) pour un quadrilatère, il faudrait voir si

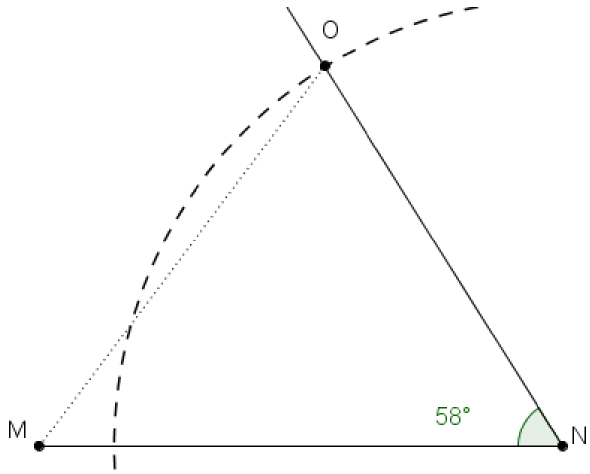
pour un pentagone la somme n'est pas de 540° (3×180) et pour un hexagone 720° (4×180)... et pour les polygones croisés?

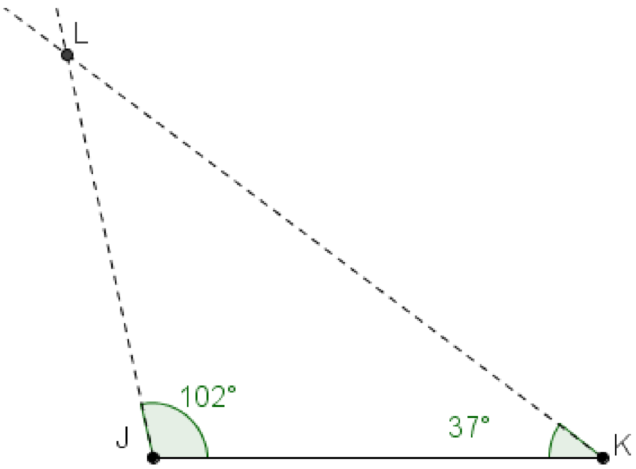
Construction d'un polygone: on peut construire un triangle si on nous donne 3 informations: 3 longueurs, ou 2 longueurs et un angle, ou 1 longueur et 2 angles. Si on nous donne 3 angles c'est insuffisant car on connaît la forme mais pas la taille du triangle, la donnée du 3ème angle est d'ailleurs inutile car elle peut toujours être calculée avec la propriété vue ci-dessus (somme=180°).

Exemple 1: construisons le triangle PQR tel que: PQ=12cm, QR=5cm et RP=13 cm. Avec 3 longueurs il faut utiliser le compas et la règle graduée. La construction commence par un côté. On trace ensuite les 2 arcs de cercle correspondant aux 2 autres côtés. Il y a 2 solutions qui se trouvent aux points d'intersection des cercles.



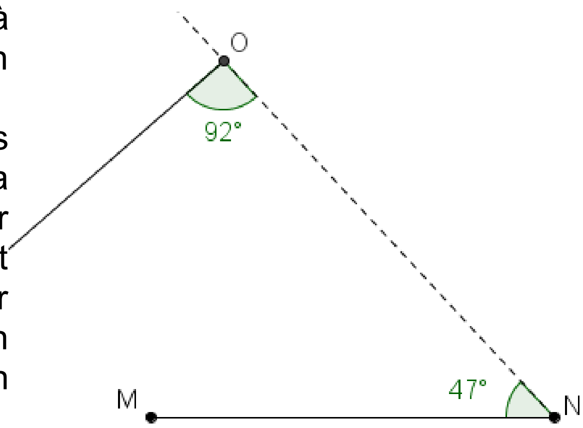
Exemple 2: construisons le triangle MNO tel que: MN=7cm, NO=6cm et $\widehat{MNO}$ =58°. La construction peut commencer aussi par un côté, traçons [MN]. On utilise ensuite le rapporteur pour tracer la demi-droite [NO) avec un angle de 58°. Il ne reste plus qu'à reporter la longueur de [NO] pour placer O.





Exemple 3: construisons le triangle LJK tel que: JK=5cm, $\widehat{LJK}$ =37° et $\widehat{LKJ}$ =102°. Ici, c'est très simple, il suffit de tracer les 2 demi-droites [JL) et [KL) avec les bons angles. Le point L se trouvent à leur intersection.

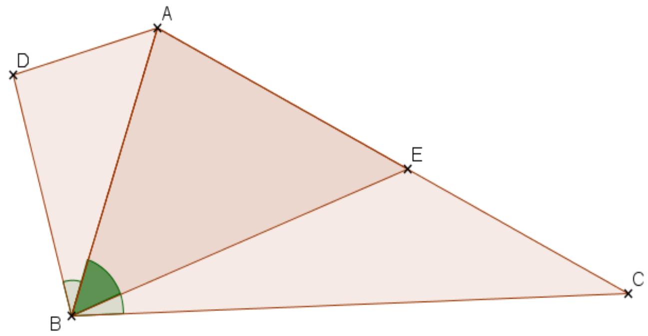
Pour des polygones de plus de 3 côtés, il faut évidemment davantage d'information. Pour un quadrilatère, 4 informations suffisent-elles à votre avis? Par exemple, pouvons-nous tracer un quadrilatère MNOP tel que MN=5cm, $\widehat{MNO}$ =47°,NO=6cm et $\widehat{NOP}$ =92°? Réponse: non, les informations sont insuffisantes. On peut voir sur la figure ci-contre qu'il manque une information pour placer le point P sur la demi-droite [OP). On peut nous donner la longueur OP, ou bien la longueur MP, ou bien encore l'angle $\widehat{NMP}$. Il faut donc, en général, 5 informations pour tracer un quadrilatère.



4) Angles adjacents - bissectrice d'un angle

Angles adjacents: deux angles sont dits adjacents (du latin *à côté*) si ils ont un côté en commun et si ils sont de part et d'autre de ce côté commun.

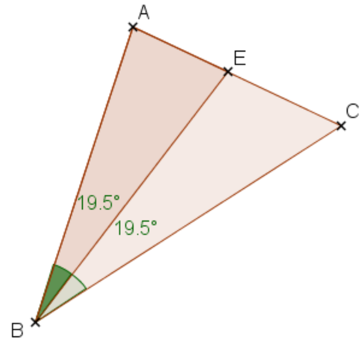
Exemple : sur la figure ci-contre, les angles $A\hat{B}C$ et $A\hat{B}D$ sont adjacents, leur côté commun étant [BA). Les angles $A\hat{B}C$ et $A\hat{B}E$ ne sont pas adjacents même si ils ont un côté [BA) en commun, car les autres côtés [BC) et [BE) sont du même côté de [BA), par contre $E\hat{B}C$ et $A\hat{B}E$ sont adjacents .



Remarque : L'intérêt de savoir que 2 angles $A\hat{B}C$ et $A\hat{B}D$ sont adjacents est qu'on peut additionner leur mesure pour trouver la mesure de l'angle composé. Par exemple, $A\hat{B}C$ + $A\hat{B}D$ = $C\hat{B}D$ ou $E\hat{B}C$ + $A\hat{B}E$ = $A\hat{B}C$ et donc $E\hat{B}C$ = $A\hat{B}C$ - $A\hat{B}E$.

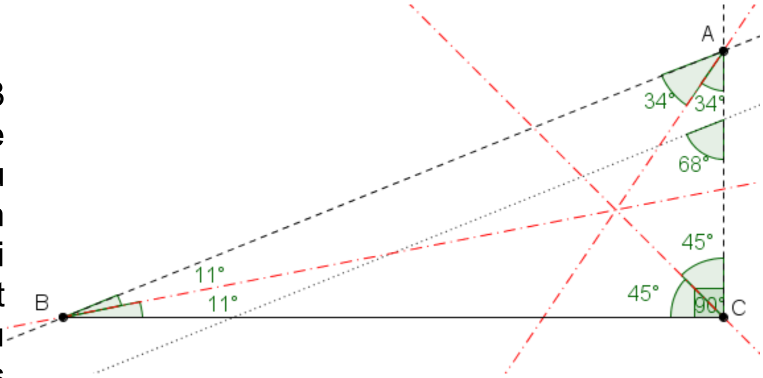
Bissectrice: La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui sépare un angle en deux angles adjacents de même mesure.

Exemple : La bissectrice de l'angle $A\hat{B}C$ est la demi-droite [BE) si les angles $A\hat{B}E$ et $E\hat{B}C$ sont adjacents et égaux. Sur la figure ci-contre, cela semble le cas, si l'on se fie aux mesures effectuées.



Pour tracer la bissectrice d'un angle, il suffit donc de mesurer cet angle et de diviser la mesure par 2.

A titre d'exemple, construisons les 3 bissectrices du triangle ABC, rectangle en C, tel que BC=10cm et $B\hat{A}C$ =68°. Au passage, nous voyons la construction un peu complexe de ce triangle qui nécessite de tracer un angle de 68° et puis une parallèle au côté obtenu passant par A. La construction des bissectrices ne pose aucun problème. Si elle est faite avec soin et précision, on s'aperçoit alors que les 3 bissectrices se coupent en un seul point. On dit qu'elles sont concourantes.



Remarque: certains élèves connaissent déjà une autre méthode pour construire la bissectrice d'un angle. Ils utilisent le compas pour tracer 3 arcs de cercle de même rayon: pour la bissectrice de $B\hat{A}C$ ils commencent par un arc de centre A (le sommet de l'angle). Cet arc coupe les côtés en 2 points B' et C'. Ils tracent alors les arcs de centre B' et C'. Ces derniers se coupent en A' qui est tel que [AA') est la bissectrice cherchée. Cette méthode utilise une propriété des losanges qui sera étudiée plus tard. Elle a le mérite de ne nécessiter aucune mesure.