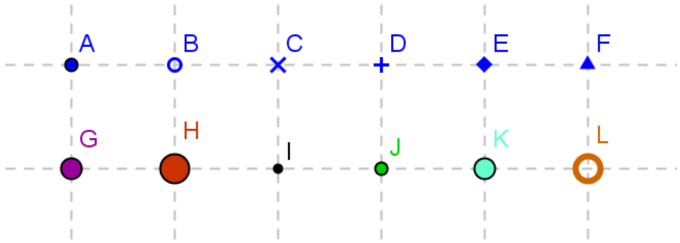
Chapitre 2 Les éléments de la géométrie

Les premiers éléments de la géométrie sont **les points**, des objets sans dimension dont le nom est généralement une lettre majuscule : A, B, C, M, M', M'', P_0, P_1, P_2, Ω, etc. Comme ils sont par nature invisibles, on les visualise en les représentant par un dessin : un disque colorié, plus ou moins gros, ou une croix (voir l'illustration). L'idée est qu'il faut pouvoir *localiser exactement* le point. Le nom du point est la plupart du temps mis *à côté* du point (pas dessus).



Deux points sont généralement *distincts* (ils occupent deux endroits différents) mais ils peuvent être *confondus* (ils sont au même endroit, l'un sur l'autre).

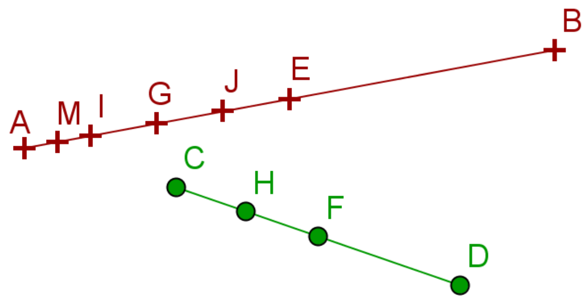
1) Les ensembles de points alignés

Avec une règle on trace un trait droit. Mais qu'est-ce qu'une droite ?
Par deux points passe une seule droite. Mais qu'est-ce qu'une droite ?
Le chemin le plus court est la ligne droite. Mais qu'est-ce qu'une droite ?
Un segment de droite est un morceau de droite. Mais qu'est-ce qu'une droite ?
Des points alignés sont situés sur une même droite. Mais qu'est-ce qu'une droite ?
Si deux points sont sur une droite, alors le **milieu** de ces points est aussi sur cette même droite.
Mais qu'est-ce qu'une droite ?

C'est difficile de donner une définition de la droite. Généralement, on se contente de définir d'abord un segment de droite et puis ce que sont des points alignés, et enfin, ce qu'est une droite :

Un **segment** de droite est l'ensemble des points qui compose le plus court chemin pour aller d'un point à un autre. Si *A* et *B* sont des points, on note [*AB*] ou [*BA*] le segment de droite qui joint les points *A* et *B*.

Exemples : En tendant une corde entre deux piquets, on matérialise une ligne *tirée au cordeau* qui a la forme d'un segment de droite. Le fil à plomb matérialise un segment d'une droite verticale. Dans ces deux cas, le segment est matérialisé par un fil tendu dont on néglige l'épaisseur. Un rayon de lumière (par exemple un faisceau laser, un rayon de soleil) emprunte le chemin le plus court allant de la source au point qu'elle éclaire : la lumière se propage en ligne droite. Lorsqu'on dit qu'*à vol d'oiseau* il n'y a que 100 m entre les deux rives d'un fleuve, on parle d'une distance en ligne droite, qui peut être très différente de la distance à parcourir si on emprunte la route...



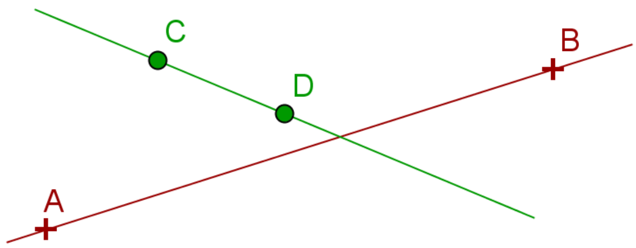
Sur l'illustration ci-contre, on voit deux segments [*AB*] et [*CD*], sur lesquels sont placés quelques points : *M* par exemple, appartient au segment [*AB*]. On note cela $M \in [AB]$. *M* n'appartient pas au segment [*CD*]. On note cela $M \notin [CD]$.

Trois points sont **alignés** lorsque l'un de ces trois points appartient au segment déterminé par les deux autres.

Autrement dit : A, B et C sont alignés si $C \in [AB]$ ou $A \in [BC]$ ou encore $B \in [CA]$.

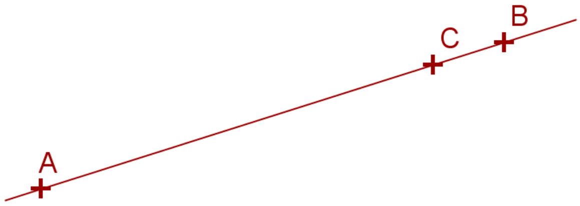
On appelle **droite** définie par deux points *A* et *B*, l'ensemble des points alignés avec *A* et *B*, y compris ces points *A* et *B*. On note une telle droite (*AB*) ou (*BA*).

Remarque : Il est impossible de tracer une droite en entier, car une droite n'a pas d'extrémités. En fait, on n'en trace toujours qu'une partie, c'est-à-dire qu'on trace un segment qui passe par ces deux points. Pour distinguer la représentation de la droite (AB) de celle du segment [AB], on prolonge généralement le segment des 2 côtés.



Sur l'illustration ci-contre, on voit deux droites (*AB*) et (*CD*) qui se coupent. Si l'on ne considère que les segments [*AB*] et [*CD*], ceux-ci ne se coupent pas.

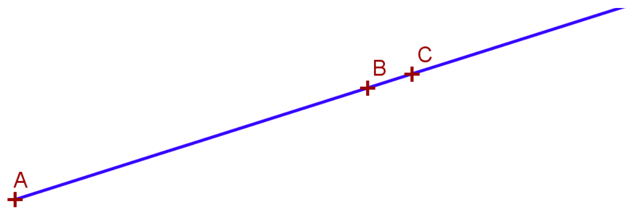
Remarques : On peut maintenant définir plus simplement l'alignement de trois points : lorsque l'un appartient à la droite définie par les deux autres. Par exemple, si $A \in (BC)$ alors A, B et C sont alignés, même si on ne sait pas lequel des 3 points appartient au segment défini par les deux autres. Sur l'illustration ci-contre, on a par exemple $C \in [AB]$. La droite passant par les points *A, B* et *C* peut être nommée de 6 façons différentes : (*AB*), (*AC*), (*BC*), (*BA*),(*CB*) et (*CA*).



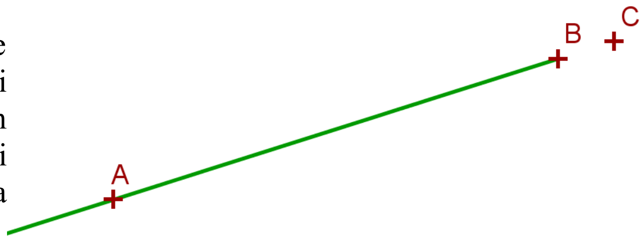
On donne aussi parfois un nom à une droite, *indépendamment* des points qui s'y trouvent. On nommera par exemple une droite *d* ou (*d*) ou encore avec la lettre *d* grecque δ ou le *D* majuscule grec Δ. D'autres notations sont parfois utilisées comme (*xx'*), où *x* et *x*' ne sont pas des points de la droite, mais plutôt des directions.

Une **demi-droite** est l'ensemble des points alignés avec deux points donnés dont l'un est une *extrémité* qu'on appelle *origine* et l'autre marque la direction dans laquelle la demi-droite est illimitée. On note [*AB*) la demi-droite d'origine *A* passant par *B*.

La demi-droite [*BA*) n'est pas confondue avec la demi-droite [*AB*). Ces deux demi-droites ont en commun le segment [*AB*]. Il est impossible de mesurer une demi-droite et de la représenter en entier (on la *représente par un segment dont une des extrémités est l'origine*). Une demi-droite n'a pas de milieu.

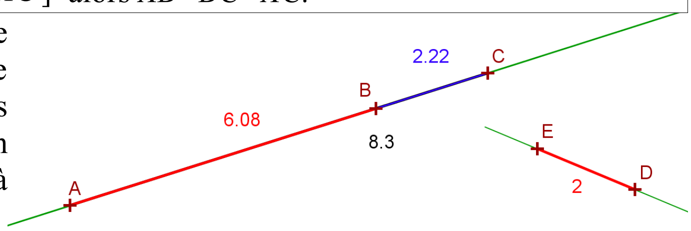


Sur l'illustration du haut ci-contre, on a une demi-droite [*AB*) coloriée en bleu. Cette demi-droite pourrait aussi bien être nommée [*AC*) car $C \in [AB)$. Sur l'illustration du bas, nous avons tracé en vert la demi-droite [*BA*) qui ne contient pas le point C, et qui a en commun avec la demi-droite [*AB*) le segment [*AB*].



Propriétés : Le **segment** est le seul ensemble de points alignés que l'on peut *mesurer* (on mesure sa *longueur*). On note *AB* ou *BA* la longueur du segment [*AB*]. Si $B \in [AC]$ alors $AB+BC=AC$.

Sur l'illustration ci-contre, on a un segment [*DE*] de longueur *DE*=2 (l'unité de longueur n'a pas d'importance ici). Mesurés dans la même unité de longueur, les segments [*AB*] et [*BC*] mesurent *AB*=6,08 et *BC*=2,22. On remarque que la longueur *AC* du segment [AC] est égale à la somme *AB*+*BC* (6,08+2,22=8,3) car $B \in [AC]$.

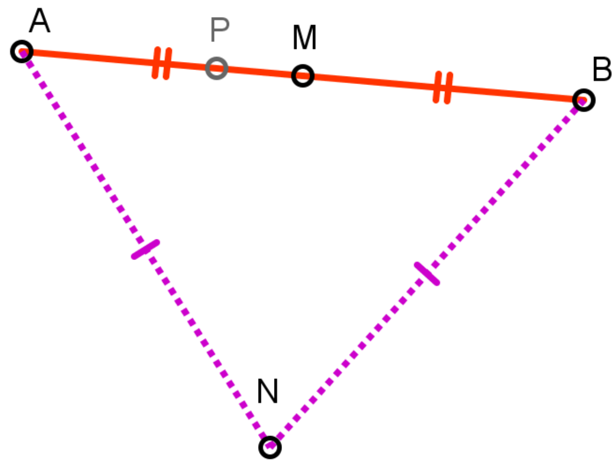


Propriété : Le **segment** est le seul ensemble de points alignés qui possède un *milieu*. Le milieu du segment [*AB*] est le seul point du segment situé à égale distance des extrémités *A* et *B*.

Remarques sur cette définition du milieu d'un segment : Si *M* est le milieu de [*AB*] alors $M \in [AB]$ et $MA=MB$. Réciproquement, si $M \in [AB]$ et $MA=MB$ alors *M* est le milieu de [*AB*]. D'après ce qu'on a vu dans la propriété précédente, si $AM+MB=AB$ et $MA=MB$ alors *M* est le milieu de [*AB*], et on a aussi $AM=AB \div 2$.

Mais si $NA=NB$ *seulement,* alors on ne peut affirmer que « *N* est le milieu de [*AB*] », car il pourrait être en dehors du segment comme sur l'illustration.

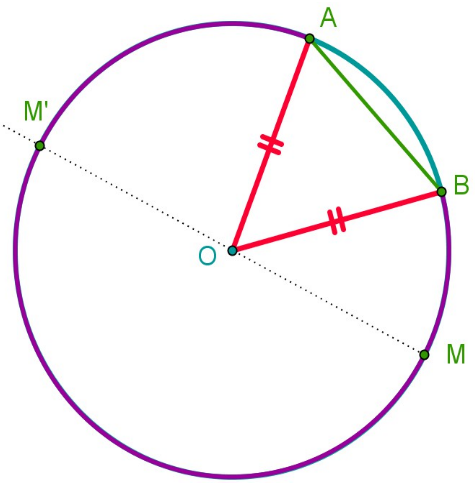
De même, si $AP+PB=AB$ alors on ne peut affirmer que « *P* est le milieu de [*AB*] », car l'égalité $AP+PB=AB$ signifie *seulement* que $P \in [AB]$.



2) Le cercle

Définition 1 : Le cercle de centre *O* passant par *M* est l'ensemble des points situés à la distance *r=OM* du point *O*, cette distance *r* est appelée « rayon » du cercle et on peut noter ce cercle $\mathcal{C}(O, r)$.

Attention : [*OM*] est un *segment* qui joint le centre du cercle et un point du cercle, c'est donc un rayon du cercle. *OM* est la longueur de [*OM*], donc la distance entre *O* et *M*, ce *nombre* est aussi appelé rayon du cercle. Un rayon de cercle c'est un segment mais c'est aussi un nombre (la longueur de ce segment). Normalement, on devrait éviter cet abus de langage qui confond un objet et sa mesure mais vous verrez que cette pratique est courante (rayon, diamètre, angle, etc.)



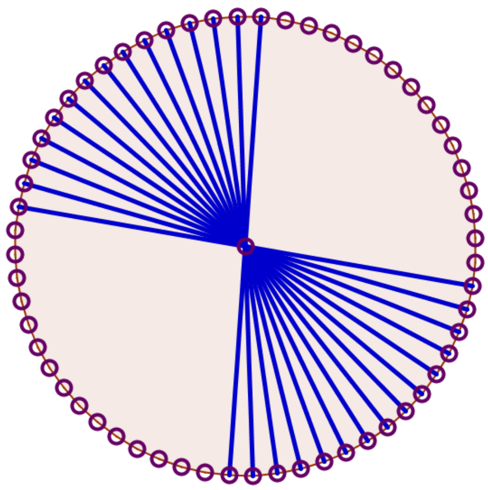
Un cercle c'est l'ensemble des points *équidistants* (situés à une même distance) d'un point donné. Par conséquent, si un point *P* appartient au cercle de centre *O* passant par *M* alors *OM=OP*.

Le cercle $\mathcal{C}$ de notre illustration a pour centre O.
Comme $M \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}$, on a *OM=OA=OB*.

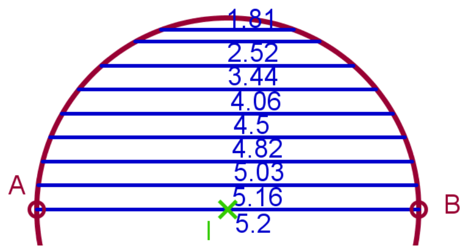
Définition 2 : Le segment [*AB*] qui rejoint deux points *A* et *B* d'un même cercle est appelé **corde** du cercle. La portion du cercle comprise entre *A* et *B* s'appelle l'**arc** de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

Remarque : il y a deux arcs de cercle $\overset{\frown}{AB}$: le petit et le grand. Sur la figure, on a tracé en vert la corde [*AB*], en bleu le petit arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et en violet le grand arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

Définition 3 : Un **diamètre** d'un cercle est une corde qui passe par le centre du cercle.
Pour un cercle de centre *O* passant par *M*, la demi-droite [*MO*) recoupe le cercle en un point *M'* qu'on dit « diamétralement opposé » à *M* sur le cercle. Le segment [*MM'*] est un *diamètre* du cercle. La longueur *MM'* est aussi appelée diamètre du cercle (c'est dans ce cas un nombre).

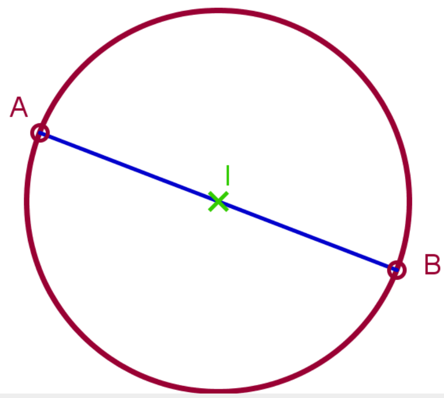


Remarques : Les diamètres d'un cercle sont les plus longues cordes possibles du cercle. Ils sont en nombre infini. Chacun des diamètres partage le cercle en deux arcs de même longueur qu'on appelle des **demi-cercles**. Le *milieu* d'un diamètre est le *centre* du cercle.



Construction du cercle de diamètre [*AB*] :
Le segment [*AB*] étant donné, il suffit de trouver son milieu, notons le *I*. Ensuite, on trace le cercle $\mathcal{C}(I,\ AB\div 2)$, c'est-à-dire le cercle de centre *I* et de rayon *AB*÷2 (facile, il passe par *A* et par *B*).

Pour trouver le milieu d'un segment, on peut diviser sa longueur par 2. On peut aussi utiliser la construction de la médiatrice (voir plus loin) qui n'utilise pas les graduations de la règle.



Propriété : La longueur d'un cercle est proportionnelle au diamètre du cercle (on verra cela dans le chapitre concernant les mesures de longueurs, aires et volumes). Plus précisément, cette longueur (aussi appelée circonférence ou périmètre du cercle) vaut exactement π×diamètre. *π* est un nombre sans dimension qui vaut un peu plus de 3 unités. Les 100 premières décimales de π sont données ci-dessous :

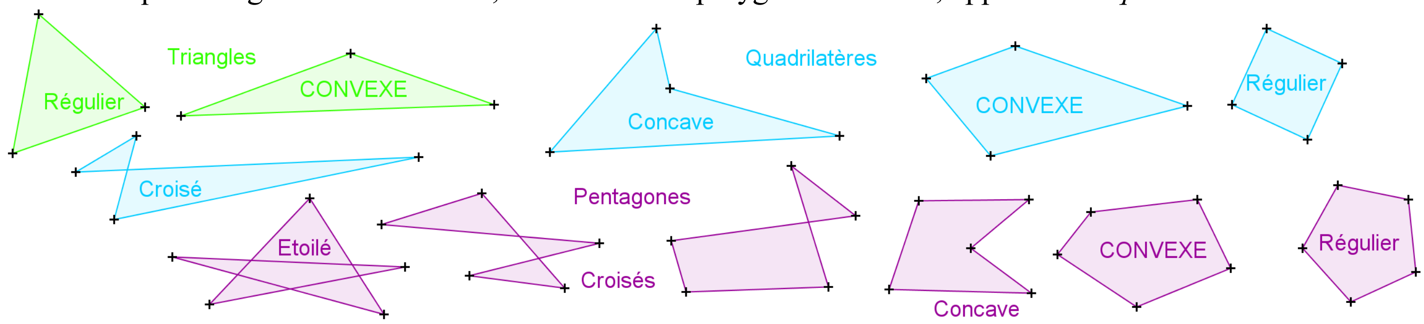
3.141 5926 5358 9793 2384 6264 3383 2795 0288 4197 1693 9937 5105 8209 7494 4592 3078 1640 6286 2089 9862 8034 8253 4211 7067

Par exemple, un cercle de 10 *cm* de diamètre (5 *cm* de rayon) a une circonférence de 31,4 cm environ.

3) Polygones

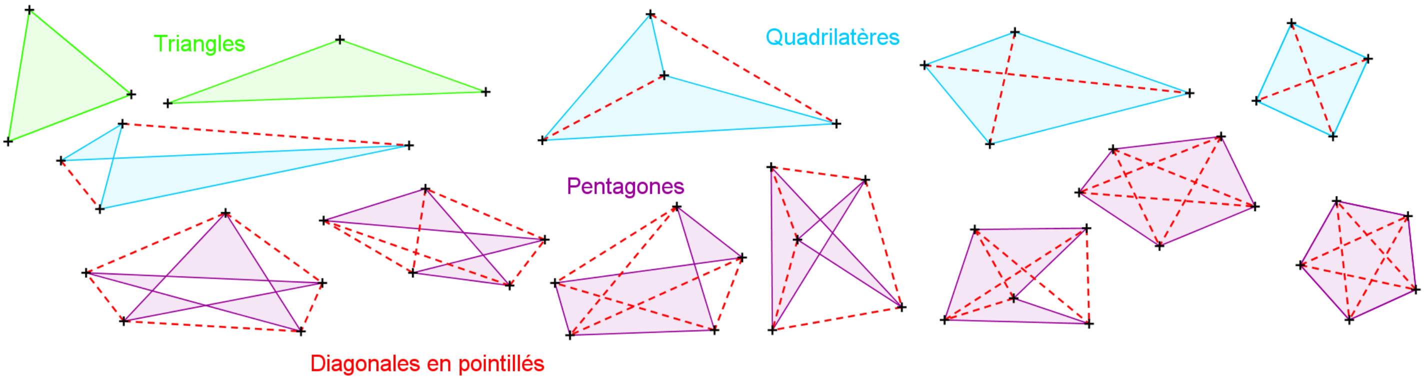
Définition 1 : Un **polygone** est une figure plane fermée, formée de segments consécutifs mis bout à bouts. Ces segments sont appelés les *côtés* du polygone et les extrémités des *côtés* sont appelées les *sommets* du polygone.

Exemples : Si l'on a trois points *A, B* et *C* et qu'on trace les segments [*AB*], [*BC*] et [*CA*], on obtient une figure fermée formée de trois segments consécutifs, c'est-à-dire un polygone à 3 côtés, appelé aussi *triangle*. Si l'on a quatre points *A, B, C* et *D* et qu'on trace les segments [*AB*], [*BC*], [*CD*], et [*DA*], on obtient une figure fermée formée de quatre segments consécutifs, c'est-à-dire un polygone à 4 côtés, appelé aussi *quadrilatère*.



Définition 2 : Une *diagonale* est un segment joignant deux sommets et qui ne soit pas un côté.

Remarques : Un triangle n'a pas de diagonale (car les trois côtés joignent les trois sommets, et il n'y a pas d'autre possibilité pour joindre les sommets) et un quadrilatère en a deux. Lorsque les diagonales d'un quadrilatère sont à l'intérieur du quadrilatère, ce quadrilatère est dit *convexe*. S'il n'est pas convexe, le quadrilatère peut être *concave* (avec un creux) ou *croisé* (deux de ses côtés se coupent). À partir de cinq côtés, un polygone peut être *étoilé* (les côtés se coupent d'un maximum de façons différentes).

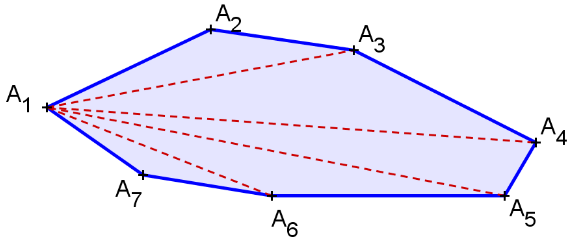


Selon le nombre de sommets, on distingue :

Nom du polygone	*Nombre de côtés*	*Nombre de diagonales*	*Cas particuliers*
Triangle	3	0	isocèle, équilatéral, rectangle
Quadrilatère	4	2	rectangle, losange, carré, cerf-volant, parallélogramme, trapèze, concave, croisé
Pentagone	5	5	régulier, convexe, croisé, étoilé
Hexagone	6	9	régulier, convexe, croisé
(Heptagone)	7	14	régulier, convexe, 2 étoilés différents
Octogone	8	20	régulier, convexe, croisé
(Ennéagone)	9	27	régulier, convexe, 2 étoilés
Décagone	10	35	régulier, convexe, étoilé
(Hendécagone)	11	44	régulier; convexe, 4 étoilés différents
Dodécagone	12	54	régulier, convexe, étoilé
(n-gone)	n	$n\times(n-3)/2$	

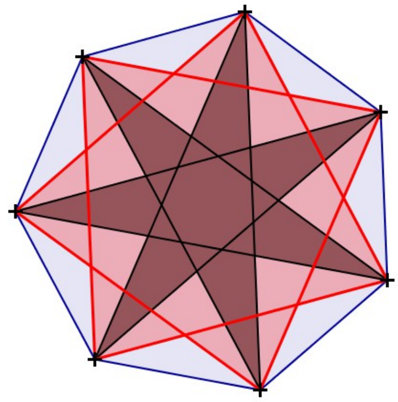
On s'arrête là car les autres noms sont sans intérêt et inusités : à triskaidécagone (13 côtés), on préférera « polygone à 13 côtés » ou 13-gone. On pourrait citer l'icosagone (20 côtés) ou l'hectogone (100 côtés) car les racines « icosa- » et « hecto- » se retrouvent ailleurs (icosaèdre, hectolitre, hectare, ...) .

Remarque pour dénombrer le nombre de diagonales : on peut multiplier le nombre de diagonales partant de chaque sommet (n sommets différents du sommet considéré, deux sommets consécutifs donc $n-3$ diagonales par sommet) par le nombre de sommets. Mais en faisant cela on compte chaque diagonale deux fois, donc il faut ensuite diviser par 2. D'où la formule de la dernière ligne du tableau ci-dessus. On peut voir sur l'illustration ci-dessus, un heptagone convexe pour lequel 4 diagonales ont été tracées : celles qui partent d'un sommet. Il faudrait faire cela pour les 7 sommets, mais le produit 7×4 = 28 donne le double du nombre de diagonales (car chacune a été compté deux fois), il n'y en a donc que 14.



<u>Définition 3</u> : Un polygone est dit *convexe*, si toutes les diagonales sont à l'intérieur du polygone. Autrement dit, s'il n'y a aucun « creux » et aucun côté qui croise un autre côté.
Dans le cas contraire, si le polygone n'est pas convexe, on le dit généralement non-convexe.

Dans l'illustration du haut, les polygones convexes sont à droite. Pour les polygones non-convexes, on distingue ceux qui sont simplement non-convexes (on dit aussi *concave*) et ceux qui sont *croisés*. On voit que pour les pentagones, il y a les croisés simples, doubles, triples et les *étoilés* (tous les côtés s'entrecroisent).



Certaines diagonales des polygones non convexes sortent, en partie au moins de l'intérieur du polygone. Voyez comment pour le pentagone étoilé, les diagonales forment un pentagone convexe. Pour l'heptagone étoilé gris ci-contre, la moitié des diagonales forment un heptagone convexe (en bleu), tandis que l'autre moitié des diagonales forment une autre forme d'étoile (en rouge). C'est beau, c'est logique, c'est mathématique !

<u>Définition 4</u> : Un polygone est dit *régulier*, si tous ses côtés ont la même longueur et si tous les sommets sont disposés sur un même cercle. Un polygone régulier peut être convexe ou étoilé.

Dans l'illustration ci-dessous nous avons mis toutes les sortes de polygones réguliers ayant entre 3 et 12 côtés. On voit que le pentagone est le premier polygone étoilé, l'heptagone est le premier à avoir 2 formes étoilées, l'hendécagone est celui qui possède le plus de formes étoilées différentes (en se limitant à 12 côtés). Pourquoi l'hexagone, par exemple, n'a pas de forme étoilée ? Si on joint les sommets d'un hexagone convexe en sautant un sommet sur 2, on obtient 2 triangles. Et oui ! 6 est divisible par 2. Par contre 11 n'est divisible ni par 2, ni, par 3, ni par 4, ni par 5, d'où les 4 formes étoilées…