CORRECTION

## 1. Nombres figurés

a) Les nombres triangulaires $T_n$ sont fabriqués selon le procédé suivant : $T_1=1$, $T_2=1+2$, $T_3=1+2+3$, $T_4=1+2+3+4$, etc.
Calculer les vingt premiers nombres triangulaires.

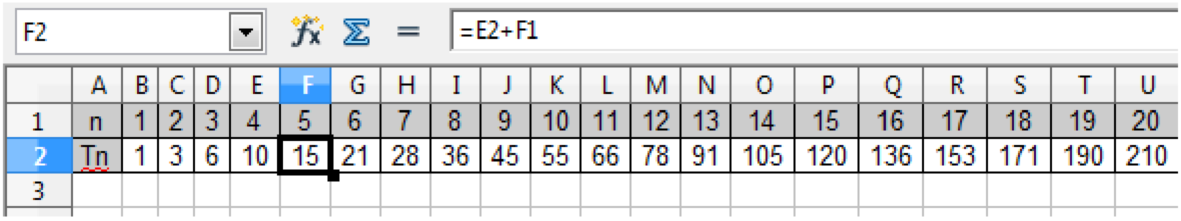
$T_1=1$,
$T_2=1+2$,
$T_3=1+2+3=6$,
$T_4=1+2+3+4=10$,
$T_5=1+2+3+4+5=15$ mais aussi $T_5=T_4+5=10+5=15$,
$T_6=T_5+6=15+6=21$,
$T_7=T_6+7=21+7=28$,
$T_8==T_7+8=28+8=36$,
$T_9=T_8+9=36+9=45$,
$T_{10}==T_9+10=45+10=55$,
$T_{11}=T_{10}+11=55+11=66$,
$T_{12}=T_{11}+12=66+12=78$,
$T_{13}=T_{12}+13=78+13=91$,
$T_{14}=T_{13}+14=91+14=105$,
$T_{15}=T_{14}+15=10+15=120$,
$T_{16}=T_{15}+16=120+16=136$,
$T_{17}=T_{16}+17=136+17=153$,
$T_{18}=T_{17}+18=153+18=171$,
$T_{19}=T_{18}+19=171+19=190$,
$T_{20}=T_{19}+20=190+20=210$.

On aurait pu utiliser un tableur pour calculer ces nombres :

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tn | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91 | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 | 190 | 210 | 231 | 253 | 276 | 300 | 325 | 351 | 378 | 406 | 435 | 465 |

L'avantage est que c'est très rapide à faire et sans erreur.

*NB : Pour ceux qui voudrait s'essayer au tableur (nous utilisons calc de OpenOffice, libre et gratuit sur internet), voici notre copie d'écran qui montre la formule entrée dans la cellule F2 (pour le calcul de $T_5$). Une fois qu'on a entré une formule correcte, il suffit de saisir la poignée noire (le petit carré en bas à droite) et de tirer la formule vers la droite... En fait, on saisit la formule une seule fois : dans la cellule C2 (voir la question du DS3) on entre =B1+C2. C'est cette formule que l'on recopie avec la poignée noire (bien sûr, il faut avoir mis d'abord la suite des entiers dans la ligne 1, en écrivant 1 en A1 et puis en tirant sur la poignée noire).*


F2 =E2+F1

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 2 | Tn | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91 | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 | 190 | 210 |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

b) Combien de nombres entre $T_1$ et $T_{20}$ se terminent par 0 ?
Combien se terminent par 1 ? Combien se terminent par 2, etc. (jusqu'à 9).
L'affirmation « aucun nombre triangulaire ne se termine par 2, 4, 7 ou 9 » est-elle vérifiée, prouvée ?

| | N<21 | N<201 | N<1001 |
|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 40 | 200 |
| 1 | 4 | 40 | 200 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 20 | 100 |
| 4 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 4 | 40 | 200 |
| 6 | 4 | 40 | 200 |
| 7 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 2 | 20 | 100 |
| 9 | 0 | 0 | 0 |
| | 20 | 200 | 1000 |

Nous avons effectué ce décompte avec le tableur.
Il y a 4 nombres triangulaires sur 20 (soit 1 pour 5) qui se terminent par 0, pareil pour ceux qui se terminent par 1, par 5 et par 6. Il y a 2 nombres triangulaires sur 20 (soit 1 sur 10) qui se terminent par 3, pareil pour ceux qui se terminent par 8. Il n'y a aucun nombres triangulaires qui se terminent « jamais » par 2, par 4, par 7 ou par 9.
*L'avantage du tableur est de pouvoir le prolonger facilement cette étude statistique jusqu'à n=200, ou même n=1000. Toujours est-il que il n'y a aucun nombre $T_n$ qui se termine par 2, par 4, par 7 et par 9. On peut augmenter le nombre n de nombres $T_n$, il y en a toujours la même proportion.*
Nous avons mis jamais entre guillemets, car même avec 1000 nombres triangulaires, nous n'avons pas vu tous les nombres triangulaires. Il y en a une infinité. Donc, on ne peut pas affirmer avec certitude que c'est toujours ainsi. Nous n'avons pas prouvé la propriété, nous l'avons juste vérifiée sur les quelques exemples examinés. Pour apporter une vraie preuve, il faut produire un raisonnement (une suite d'arguments logiques inattaquables).
Une idée de preuve vient de l'observation de ce qui se passe après 20 nombres triangulaires. On observe que les nombres triangulaires se termine toujours par la suite des vingt chiffres 1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0 observée entre $T_1$ et $T_{20}$. Comme $T_0$ et $T_{20}$ se terminent tous les deux par 0, on ajoute un nombre se terminant par 1 (1 pour $T_0$ et 21 pour $T_{20}$), donc ces deux nombres se terminent par 1, et ensuite,

on ajoute des nombres se terminant par 2, ce qui fait que $T_2$ et $T_{22}$ se terminent tous les deux par 3. Et ainsi, de façon identique, on continue jusqu'à obtenir $T_{40}$ qui se termine par 0, comme ensuite $T_{60}$, $T_{80}$, $T_{100}$, etc. On aurait aussi pu se douter d'une telle régularité quand on a constaté que les *statistiques* sur le dernier chiffre (combien se terminent par 0, combien par 1, etc.) pour 1000 nombres triangulaires sont identiques à celles pour 20 nombres.

c) Le grand mathématicien Gauss est connu pour avoir calculé, à l'âge de neuf ans (en 1786), la somme des cent premiers entiers ($T_{100}$) en quelques secondes. Pour cela, il utilisa une astuce de calcul que l'on peut facilement comprendre en examinant le tableau ci-dessous.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | … | 98 | 99 | 100 |
| +100 | +99 | +98 | … | +3 | +2 | +1 |
| =101 | =101 | =101 | … | =101 | =101 | =101 |

Expliquer comment calculer $T_{100}$ avec cette méthode.
Déterminez ensuite, avec la même méthode, le nombre triangulaire de l'année : $T_{2016}$.
Il y a toute la suite des nombres de 1 à 100 qui a été écrite deux fois : une fois dans le sens croissant, et une fois dans le sens décroissant. De cette manière, en dessous de 100 il y a 1 (la somme fait 101), en dessous de 99 il y a 2 (la somme fait encore 101), en dessous de 98 il y a 3 (la somme fait encore 101), etc. La somme de chaque colonne fait toujours 101. Il y a 100 colonnes, donc le total de tout le tableau fait 100×101, soit 10100. Comme on a compté deux fois chacun des nombres, il faut diviser par 2, on trouve 10100÷2=5050. Finalement, $T_{100}$=5050.
Il y a toute la suite des nombres de 1 à 2016 qui a été écrite deux fois : une fois dans le sens croissant, et une fois dans le sens décroissant. De cette manière, en dessous de 2016 il y a 1 (la somme fait 2017), en dessous de 2015 il y a 2 (la somme fait encore 2017), etc. La somme de chaque colonne fait toujours 2017. Il y a

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | … | 2015 | 2016 |
| 2016 | 2015 | … | 2 | 1 |
| 2017 | 2017 | … | 2017 | 2017 |

2016 colonnes, donc le total de tout le tableau fait 2016×2017, soit 4 066 272. Comme on a compté deux fois chacun des nombres, il faut diviser par 2, on trouve 4 066 272÷2=2 033 136.
Finalement, $T_{2016}$= 2 033 136, un nombre qui se termine par 6 comme 20% des nombres triangulaires. Le nombre triangulaire de l'année suivante se termine par 3 (2017×2018÷2=2 035 153),
Cette année 2018, on a le nombre $T_{2018}$= 2018×2019÷2 = 2 037 171 qui se termine par un 1, et puis ce sera 0, et encore 0, et puis à nouveau la succession 1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0... jusqu'à la fin des temps. Le prochain nombre triangulaire se terminant par un 6 sera dans 5 ans, en 2023.

$N = \Delta + \Delta + \Delta$

d) Gauss montra aussi, dix ans plus tard, un autre résultat concernant les nombres triangulaires : « Tout nombre entier est la somme d'au plus trois nombres triangulaires ». Par exemple 5=3+1+1 (1 et 3 sont des nombres triangulaires). Choisir une tranche de dix nombres entiers consécutifs supérieurs à 100 et montrer comment se décompose chacun de ces nombres en une somme d'au plus trois nombres triangulaires.
Commençons à 150 et décomposons 10 nombres entiers consécutifs comme une somme d'au plus trois nombres triangulaires :
$150 = 105 + 45 = T_{14} + T_9$
$151 = 136 + 15 = T_{16} + T_5$
$152 = 136 + 15 + 1 = T_{16} + T_5 + T_1$
$153 = T_{17} = 66 + 66 + 21 = T_{11} + T_{11} + T_6$
$154 = 153 + 1 = T_{17} + T_1$
$155 = 153 + 1 + 1 = T_{17} + T_1 + T_1$
$156 = 153 + 3 = T_{17} + T_2$
$157 = 153 + 3 + 1 = T_{17} + T_2 + T_1$
$158 = 136 + 21 + 1 = T_{16} + T_6 + T_1$
$159 = 153 + 6 = T_{17} + T_3$
Nous avons effectué le travail demandé sans vraiment chercher à comprendre. Mais on n'est pas censé tout comprendre et encore moins tout expliquer... La propriété démontrée par Gauss semble vraie sur ces 10 exemples, mais nous sommes loin de l'avoir démontrée. Nous pourrions recommencer sur une autre tranche de dix nombres consécutifs, à partir de 50 par exemple. Cela permet de se rendre compte qu'il n'y a pas vraiment de transposition possible, excepté le fait qu'on peut faire suivre un nombre triangulaire de $T_1$ pour avoir le suivant, de $T_1 + T_1$ ensuite, puis de $T_3$, etc.

$50 = 28 + 21 + 1 = T_7 + T_6 + T_1$
$51 = 45 + 6 = T_9 + T_3$ mais aussi $51 = 36 + 15 = T_8 + T_5$
$52 = 45 + 6 + 1 = T_9 + T_3 + T_1$
$53 = 28 + 15 + 10 = T_7 + T_5 + T_4$
$54 = 45 + 6 + 3 = T_9 + T_3 + T_2$
$55 = 45 + 10 = T_9 + T_4$ mais aussi $55 = T_{10}$
$56 = 45 + 10 + 1 = T_9 + T_4 + T_1$
$57 = 36 + 21 = T_8 + T_6$
$58 = 36 + 21 + 1 = T_8 + T_6 + T_1$
$59 = 55 + 3 + 1 = T_{10} + T_2 + T_1$

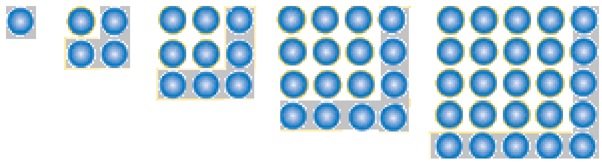
e) Calculer les dix premières sommes de deux nombres triangulaires consécutifs $T_1+T_2$, $T_2+T_3$, … ,$T_{10}+T_{11}$. Écrire, à côté, la liste des nombres carrés $C_n$ : $C_2=2\times2$, $C_3=3\times3$,… ,$C_{11}=11\times11$ et comparer les deux listes. Conjecturer* alors la relation entre $T_{n-1}$, $T_n$ et $C_n$.
**conjecturer* : énoncer une propriété supposée vraie mais non prouvée.

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tn | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91 | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 | 190 |
| Tn-1 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91 | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 |
| Tn+Tn-1 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| Cn=nxn | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |

On remarque sur les deux lignes du bas (celles qui sont grisées) que les listes de nombres sont identiques : $C_2=T_1+T_2$, $C_3=T_2+T_3$, $C_4=T_3+T_4$, etc.
Pour dire les choses autrement, les nombres carrés sont obtenus en ajoutant au nombre triangulaire de même rang celui de rang juste inférieur. Il s'agit d'une conjecture car nous ne l'avons pas vérifiée pour tous les nombres $n$ (il y en a une infinité), juste pour quelques-uns. Cela ne constitue pas une preuve, seulement une forte présomption.

NB : en classe de 4ème, vous aurez tous les éléments pour apporter la preuve de cette propriété :
On sait que $C_n=n\times n$ et on peut montrer (voir la question c) que $T_n=n\times(n+1)\div2$ et donc que $T_{n-1}=(n-1)\times n\div2$.
On a donc $T_n+T_{n-1}=n\times(n+1)\div2+(n-1)\times n\div2=n\div2\times[(n+1)+(n-1)]=n\div2\times[2n]=n\div2\times2\times n=n\times n=C_n$.
Et donc, pour tout entier $n$, on a $T_n+T_{n-1}=C_n$ .

f) La figure ci-contre montre les premiers nombres carrés $C_n$ et leur relation avec les nombres impairs qui sont figurés sur fond gris. Par exemple $C_2=C_1+3$, $C_3=C_2+5$, etc.
Montrer que les nombres carrés s'obtiennent en additionnant les premiers nombres impairs. Pour cela, décomposer les nombres $C_2$ à $C_{10}$ en une somme de nombres impairs consécutifs.



D'après l'illustration, on peut écrire :
$C_1=1$.
$C_2=C_1+3=1+3=4$.
$C_3=C_2+5=1+3+5=9$.
$C_4=C_3+7=1+3+5+7=16$.
$C_5=C_4+9=1+3+5+7+9=25$.
$C_6=C_5+11=1+3+5+7+9+11=36$.
$C_7=C_6+13=1+3+5+7+9+11+13=49$.
$C_8=C_7+15=1+3+5+7+9+11+13+15=64$.
$C_9=C_8+17=1+3+5+7+9+11+13+15+17=81$.
$C_{10}=C_9+19=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$.
On remarque que pour calculer $C_n$ il faut additionner les $n$ premiers nombres impairs (c'est encore une conjecture). Si on part de $C_n$, le côté du carré contient $n$ unités. On doit lui ajouter une ligne et une colonne de $n$ unités, et une unité supplémentaire pour compléter le carré suivant, qui contiendra $n+1$ unités sur chaque côté. On obtient donc la relation suivante : $C_n + n + n + 1 = C_{n+1}$. Mais, $n+n+1=2n+1$ est un nombre impair ($2n$ est pair car divisible par 2, mais pas 2n+1 qui le suit). Il faut donc ajouter un nombre impair à $C_n$ pour obtenir $C_{n+1}$. Le nombre impair que l'on ajoute est le $n^{ème}$ nombre impair. Comme $C_1$ est le 1er nombre impair, $C_2$ est obtenu en ajoutant le 2ème nombre impair au premier (4=1+3), et ainsi de suite. On peut estimer maintenant que la propriété est prouvée. Ce n'est plus une conjecture.

## 2. Exploration numérique

Programme :

1. Prendre un nombre de trois chiffres *abc*, appelé nombre *graine*
2. Additionner le chiffre des unités et celui des centaines : *a+c=de*
3. Recommencer l'instruction n°2 avec *bce* sauf le nombre *graine* a été obtenu

a) Montrer que si on prend 178 comme nombre *graine*, on obtient 789 à l'étape 1, puis 896 à l'étape 2. Qu'obtient-on à l'étape 3 ? Qu'obtient-on à l'étape à l'étape 10 ?

On part de 178 (a=1, b=7, c=8) et on calcule a+c=1+8=9 (d=0, e=9) d'où le nombre suivant : 789 (=bce).
On repart de 789 (a=7, b=8, c=9) et on calcule a+c=7+9=16 (d=1, e=6) d'où le nombre suivant : 896.

⇨On obtient bien 789 et 896 aux deux premières étapes

On repart de 896 (a=8, b=9, c=6) et on calcule a+c=8+6=14 (d=1, e=4) d'où le nombre suivant : 964.

⇨On obtient donc 964 à l'étape n°3

Pour la suite, 964 donne 643 (car 9+4=13) qui donne 439 (car 6+3=9) qui donne 393, qui donne 936, qui donne 365, qui donne 658, qui donne 584.

⇨On obtient donc 584 à l'étape n°10.

J'ai mis dans la feuille de tableur ci-dessous les 100 premières étapes qui suivent 178. On constate que le procédé ne s'arrête pas rapidement (il faut attendre l'étape n°217 pour retrouver 178)

| | a | c | d | a+d | u |
|---|---|---|---|---|---|
| N= | 1 | 7 | 8 | 9 | 9 |
| 1 | 7 | 8 | 9 | 16 | 6 |
| 2 | 8 | 9 | 6 | 14 | 4 |
| 3 | 9 | 6 | 4 | 13 | 3 |
| 4 | 6 | 4 | 3 | 9 | 9 |
| 5 | 4 | 3 | 9 | 13 | 3 |
| 6 | 3 | 9 | 3 | 6 | 6 |
| 7 | 9 | 3 | 6 | 15 | 5 |
| 8 | 3 | 6 | 5 | 8 | 8 |
| 9 | 6 | 5 | 8 | 14 | 4 |
| 10 | 5 | 8 | 4 | 9 | 9 |
| 11 | 8 | 4 | 9 | 17 | 7 |
| 12 | 4 | 9 | 7 | 11 | 1 |
| 13 | 9 | 7 | 1 | 10 | 0 |
| 14 | 7 | 1 | 0 | 7 | 7 |
| 15 | 1 | 0 | 7 | 8 | 8 |
| 16 | 0 | 7 | 8 | 8 | 8 |
| 17 | 7 | 8 | 8 | 15 | 5 |
| 18 | 8 | 8 | 5 | 13 | 3 |
| 19 | 8 | 5 | 3 | 11 | 1 |
| 20 | 5 | 3 | 1 | 6 | 6 |
| 21 | 3 | 1 | 6 | 9 | 9 |
| 22 | 1 | 6 | 9 | 10 | 0 |
| 23 | 6 | 9 | 0 | 6 | 6 |
| 24 | 9 | 0 | 6 | 15 | 5 |
| 25 | 0 | 6 | 5 | 5 | 5 |
| 26 | 6 | 5 | 5 | 11 | 1 |
| 27 | 5 | 5 | 1 | 6 | 6 |
| 28 | 5 | 1 | 6 | 11 | 1 |
| 29 | 1 | 6 | 1 | 2 | 2 |
| 30 | 6 | 1 | 2 | 8 | 8 |
| 31 | 1 | 2 | 8 | 9 | 9 |
| 32 | 2 | 8 | 9 | 11 | 1 |
| 33 | 8 | 9 | 1 | 9 | 9 |
| 34 | 9 | 1 | 9 | 18 | 8 |
| 35 | 1 | 9 | 8 | 9 | 9 |
| 36 | 9 | 8 | 9 | 18 | 8 |
| 37 | 8 | 9 | 8 | 16 | 6 |
| 38 | 9 | 8 | 6 | 15 | 5 |
| 39 | 8 | 6 | 5 | 13 | 3 |
| 40 | 6 | 5 | 3 | 9 | 9 |
| 41 | 5 | 3 | 9 | 14 | 4 |
| 42 | 3 | 9 | 4 | 7 | 7 |
| 43 | 9 | 4 | 7 | 16 | 6 |
| 44 | 4 | 7 | 6 | 10 | 0 |
| 45 | 7 | 6 | 0 | 7 | 7 |
| 46 | 6 | 0 | 7 | 13 | 3 |
| 47 | 0 | 7 | 3 | 3 | 3 |
| 48 | 7 | 3 | 3 | 10 | 0 |
| 49 | 3 | 3 | 0 | 3 | 3 |
| 50 | 3 | 0 | 3 | 6 | 6 |
| 51 | 0 | 3 | 6 | 6 | 6 |
| 52 | 3 | 6 | 6 | 9 | 9 |
| 53 | 6 | 6 | 9 | 15 | 5 |
| 54 | 6 | 9 | 5 | 11 | 1 |
| 55 | 9 | 5 | 1 | 10 | 0 |
| 56 | 5 | 1 | 0 | 5 | 5 |
| 57 | 1 | 0 | 5 | 6 | 6 |
| 58 | 0 | 5 | 6 | 6 | 6 |
| 59 | 5 | 6 | 6 | 11 | 1 |
| 60 | 6 | 6 | 1 | 7 | 7 |
| 61 | 6 | 1 | 7 | 13 | 3 |
| 62 | 1 | 7 | 3 | 4 | 4 |
| 63 | 7 | 3 | 4 | 11 | 1 |
| 64 | 3 | 4 | 1 | 4 | 4 |
| 65 | 4 | 1 | 4 | 8 | 8 |
| 66 | 1 | 4 | 8 | 9 | 9 |
| 67 | 4 | 8 | 9 | 13 | 3 |
| 68 | 8 | 9 | 3 | 11 | 1 |
| 69 | 9 | 3 | 1 | 10 | 0 |
| 70 | 3 | 1 | 0 | 3 | 3 |
| 71 | 1 | 0 | 3 | 4 | 4 |
| 72 | 0 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 73 | 3 | 4 | 4 | 7 | 7 |
| 74 | 4 | 4 | 7 | 11 | 1 |
| 75 | 4 | 7 | 1 | 5 | 5 |
| 76 | 7 | 1 | 5 | 12 | 2 |
| 77 | 1 | 5 | 2 | 3 | 3 |
| 78 | 5 | 2 | 3 | 8 | 8 |
| 79 | 2 | 3 | 8 | 10 | 0 |
| 80 | 3 | 8 | 0 | 3 | 3 |
| 81 | 8 | 0 | 3 | 11 | 1 |
| 82 | 0 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 83 | 3 | 1 | 1 | 4 | 4 |
| 84 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 |
| 85 | 1 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 86 | 4 | 5 | 6 | 10 | 0 |
| 87 | 5 | 6 | 0 | 5 | 5 |
| 88 | 6 | 0 | 5 | 11 | 1 |
| 89 | 0 | 5 | 1 | 1 | 1 |
| 90 | 5 | 1 | 1 | 6 | 6 |
| 91 | 1 | 1 | 6 | 7 | 7 |
| 92 | 1 | 6 | 7 | 8 | 8 |
| 93 | 6 | 7 | 8 | 14 | 4 |
| 94 | 7 | 8 | 4 | 11 | 1 |
| 95 | 8 | 4 | 1 | 9 | 9 |
| 96 | 4 | 1 | 9 | 13 | 3 |
| 97 | 1 | 9 | 3 | 4 | 4 |
| 98 | 9 | 3 | 4 | 13 | 3 |
| 99 | 3 | 4 | 3 | 6 | 6 |
| 100 | 4 | 3 | 6 | 10 | 0 |

b) Montrer qu'en prenant 555 comme nombre *graine*, le programme s'achève en moins de dix étapes.

En partant de 555, on trouve 550 à l'étape 1, 505 à l'étape 2, 050 à l'étape 3, 500 à l'étape 4, 005 à l'étape 5, 055 à l'étape 6 et puis 555 à l'étape 7. Il ne faut donc pas plus de 7 étapes pour achever le programme.

c) Supposons qu'on prenne un nombre *graine* non nul formé de trois chiffres pairs.

- Combien y a t-il de tels nombres (formés de trois chiffres pairs, éventuellement nuls) ?

Les chiffres pairs sont au nombre de 5 (il y a 0, 2, 4, 6 et 8).
On peut choisir chacun des 3 chiffres parmi ces 5 chiffres pairs.
Il y a donc 5×5×5=125 nombres formés de trois chiffres pairs.
On ne va pas les citer tous, mais il y a 000, 002, 006, 008, 020, 022, 024, …, 688, 880, 882, 884, 886 et 888.

- Montrer que les nombres obtenus successivement ne s'écrivent qu'avec des chiffres pairs.

En partant d'un nombre abc formé de trois chiffres pairs. Le suivant contient les chiffres b et c qui sont pairs.
Le chiffre des unités qui s'ajoute est le chiffre des unités de a+c.
La somme de deux chiffres pairs est paire (car a = 2×m et c = 2×n donc a+c = 2×m+2×n = 2×(m+n)).
On peut s'en convaincre en écrivant les 25 sommes possibles :

| + | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 4 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 6 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 8 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |

Par conséquent le 3$^{ème}$ chiffre (e, le chiffre des unités de la somme a+c) est pair aussi.
Conclusion : en partant d'une *graine* formée de trois chiffres pairs, on obtient toujours un nombre formé de trois chiffres pairs, jusqu'à ce que s'achève le programme.

- Montrer qu'on obtient alors un cycle de longueur 32 (il faut 31 étapes pour obtenir la graine de départ). Les graines 002 et 004 appartiennent-elles au même cycle ?

Si on part de 002, on obtient le cycle de 31 étapes suivant :
022, 222, 224, 246, 468, 682, 828, 286, 868, 686, 862, 620, 206, 068, 688,
884, 842, 420, 204, 046, 466, 660, 606, 062, 622, 228, 280, 802, 020, 200 et 002.

| | a | c | d |
|---|---|---|---|
| N= | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |

| | a | c | d |
|---|---|---|---|
| N= | 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 4 |
| 4 | 2 | 4 | 6 |
| 5 | 4 | 6 | 8 |
| 6 | 6 | 8 | 2 |
| 7 | 8 | 2 | 8 |
| 8 | 2 | 8 | 6 |
| 9 | 8 | 6 | 8 |
| 10 | 6 | 8 | 6 |
| 11 | 8 | 6 | 2 |
| 12 | 6 | 2 | 0 |
| 13 | 2 | 0 | 6 |
| 14 | 0 | 6 | 8 |
| 15 | 6 | 8 | 8 |
| 16 | 8 | 8 | 4 |
| 17 | 8 | 4 | 2 |
| 18 | 4 | 2 | 0 |
| 19 | 2 | 0 | 4 |
| 20 | 0 | 4 | 6 |
| 21 | 4 | 6 | 6 |
| 22 | 6 | 6 | 0 |
| 23 | 6 | 0 | 6 |
| 24 | 0 | 6 | 2 |
| 25 | 6 | 2 | 2 |
| 26 | 2 | 2 | 8 |
| 27 | 2 | 8 | 0 |
| 28 | 8 | 0 | 2 |
| 29 | 0 | 2 | 0 |
| 30 | 2 | 0 | 0 |
| 31 | 0 | 0 | 2 |

| | a | c | d |
|---|---|---|---|
| N= | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 0 | 4 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 4 | 4 | 8 |
| 4 | 4 | 8 | 2 |
| 5 | 8 | 2 | 6 |
| 6 | 2 | 6 | 4 |
| 7 | 6 | 4 | 6 |
| 8 | 4 | 6 | 2 |
| 9 | 6 | 2 | 6 |
| 10 | 2 | 6 | 2 |
| 11 | 6 | 2 | 4 |
| 12 | 2 | 4 | 0 |
| 13 | 4 | 0 | 2 |
| 14 | 0 | 2 | 6 |
| 15 | 2 | 6 | 6 |
| 16 | 6 | 6 | 8 |
| 17 | 6 | 8 | 4 |
| 18 | 8 | 4 | 0 |
| 19 | 4 | 0 | 8 |
| 20 | 0 | 8 | 2 |
| 21 | 8 | 2 | 2 |
| 22 | 2 | 2 | 0 |
| 23 | 2 | 0 | 2 |
| 24 | 0 | 2 | 4 |
| 25 | 2 | 4 | 4 |
| 26 | 4 | 4 | 6 |
| 27 | 4 | 6 | 0 |
| 28 | 6 | 0 | 4 |
| 29 | 0 | 4 | 0 |
| 30 | 4 | 0 | 0 |
| 31 | 0 | 0 | 4 |

| | a | c | d |
|---|---|---|---|
| N= | 0 | 0 | 6 |
| 1 | 0 | 6 | 6 |
| 2 | 6 | 6 | 6 |
| 3 | 6 | 6 | 2 |
| 4 | 6 | 2 | 8 |
| 5 | 2 | 8 | 4 |
| 6 | 8 | 4 | 6 |
| 7 | 4 | 6 | 4 |
| 8 | 6 | 4 | 8 |
| 9 | 4 | 8 | 4 |
| 10 | 8 | 4 | 8 |
| 11 | 4 | 8 | 6 |
| 12 | 8 | 6 | 0 |
| 13 | 6 | 0 | 8 |
| 14 | 0 | 8 | 4 |
| 15 | 8 | 4 | 4 |
| 16 | 4 | 4 | 2 |
| 17 | 4 | 2 | 6 |
| 18 | 2 | 6 | 0 |
| 19 | 6 | 0 | 2 |
| 20 | 0 | 2 | 8 |
| 21 | 2 | 8 | 8 |
| 22 | 8 | 8 | 0 |
| 23 | 8 | 0 | 8 |
| 24 | 0 | 8 | 6 |
| 25 | 8 | 6 | 6 |
| 26 | 6 | 6 | 4 |
| 27 | 6 | 4 | 0 |
| 28 | 4 | 0 | 6 |
| 29 | 0 | 6 | 0 |
| 30 | 6 | 0 | 0 |
| 31 | 0 | 0 | 6 |

| | a | c | d |
|---|---|---|---|
| N= | 0 | 0 | 8 |
| 1 | 0 | 8 | 8 |
| 2 | 8 | 8 | 8 |
| 3 | 8 | 8 | 6 |
| 4 | 8 | 6 | 4 |
| 5 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 4 | 2 | 8 |
| 7 | 2 | 8 | 2 |
| 8 | 8 | 2 | 4 |
| 9 | 2 | 4 | 2 |
| 10 | 4 | 2 | 4 |
| 11 | 2 | 4 | 8 |
| 12 | 4 | 8 | 0 |
| 13 | 8 | 0 | 4 |
| 14 | 0 | 4 | 2 |
| 15 | 4 | 2 | 2 |
| 16 | 2 | 2 | 6 |
| 17 | 2 | 6 | 8 |
| 18 | 6 | 8 | 0 |
| 19 | 8 | 0 | 6 |
| 20 | 0 | 6 | 4 |
| 21 | 6 | 4 | 4 |
| 22 | 4 | 4 | 0 |
| 23 | 4 | 0 | 4 |
| 24 | 0 | 4 | 8 |
| 25 | 4 | 8 | 8 |
| 26 | 8 | 8 | 2 |
| 27 | 8 | 2 | 0 |
| 28 | 2 | 0 | 8 |
| 29 | 0 | 8 | 0 |
| 30 | 8 | 0 | 0 |
| 31 | 0 | 0 | 8 |

Ce cycle associé à 002 ne contient pas 004 qui conduit à un autre cycle de 31 nombres. Il y a encore deux autres cycles de 31 nombres (associés à 006 et 008). Cela fait donc 31×4=124 nombres dans ces cycles. Il y a enfin le cas du cycle de 000 qui ne contient que lui-même (le 125$^{\text{ème}}$ nombre formé de trois chiffres pairs).

Pour ceux qui ont réalisé une feuille de calcul (avec un tableur), ils ont pu se rendre compte que les 1000 nombres de 3 chiffres (de 000 à 999) se répartissent en :

- 1 cycle de longueur 1 (le cycle de 000),
- 1 cycle de longueur 7 (le cycle de 005),
- 4 cycles de longueur 31 (les cycles de 002, 004, 006 et 008),
- 4 cycles de longueur 217 (les cycles de 001, 003, 007 et 009).

Cela fait bien le compte : 1+1×7+4×31+4×217 = 1+7+124+868 = 1000

Pour montrer cela d'une autre façon, voici le début des neuf suites associées aux nombres 00c (c étant un chiffre non nul). Je les ai présentées sous la forme de ribambelles. Pour retrouver les nombres, il suffit de prendre les chiffres trois par trois.

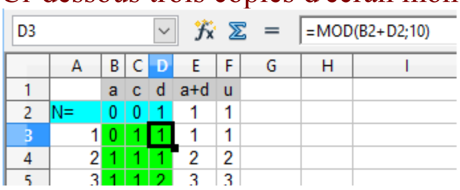
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 3 | 9 | 8 | 1 | 0 | 8 | 9 | 9 | 7 | 6 | 5 | 2 | 8 | 3 | 5 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 2 | 8 | 6 | 8 | 6 | 2 | 0 | 6 | 8 | 8 | 4 | 2 | 0 | 4 | 6 | 6 | 0 | 6 | 2 | 2 | 8 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 6 | 9 | 2 | 8 | 7 | 9 | 7 | 4 | 3 | 0 | 4 | 7 | 7 | 1 | 8 | 5 | 6 | 4 | 9 | 5 | 9 | 8 | 3 | 2 | 0 | 3 |
| 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 8 | 2 | 6 | 4 | 6 | 2 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 6 | 6 | 8 | 4 | 0 | 8 | 2 | 2 | 0 | 2 | 4 | 4 | 6 | 0 | 4 |
| 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 |
| 0 | 0 | 6 | 6 | 6 | 2 | 8 | 4 | 6 | 4 | 8 | 4 | 8 | 6 | 0 | 8 | 4 | 4 | 2 | 6 | 0 | 2 | 8 | 8 | 0 | 8 | 6 | 6 | 4 | 0 | 6 |
| 0 | 0 | 7 | 7 | 7 | 4 | 1 | 8 | 2 | 3 | 1 | 3 | 6 | 7 | 0 | 6 | 3 | 3 | 9 | 2 | 5 | 4 | 6 | 1 | 5 | 1 | 2 | 7 | 8 | 0 | 7 |
| 0 | 0 | 8 | 8 | 8 | 6 | 4 | 2 | 8 | 2 | 4 | 2 | 4 | 8 | 0 | 4 | 2 | 2 | 6 | 8 | 0 | 6 | 4 | 4 | 0 | 4 | 8 | 8 | 2 | 0 | 8 |
| 0 | 0 | 9 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 4 | 1 | 7 | 1 | 2 | 9 | 0 | 2 | 1 | 1 | 3 | 4 | 5 | 8 | 2 | 7 | 5 | 7 | 4 | 9 | 6 | 0 | 9 |

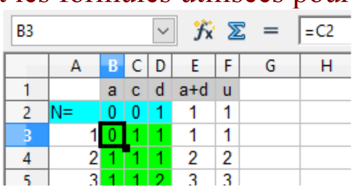
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 6 | 1 | 6 | 2 | 3 | 9 | 1 | 4 | 3 | 4 | 8 | 1 | 5 | 3 | 4 | 9 | 2 | 6 | 5 | 7 | 3 | 8 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 5 | 6 |
| 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 2 | 8 | 6 | 8 | 6 | 2 | 0 | 6 | 8 | 8 | 4 | 2 | 0 | 4 | 6 | 6 | 0 | 6 | 2 | 2 | 8 | 0 | 2 |
| 5 | 5 | 8 | 3 | 8 | 6 | 9 | 7 | 3 | 2 | 9 | 2 | 4 | 3 | 5 | 9 | 2 | 7 | 6 | 8 | 5 | 1 | 9 | 4 | 5 | 4 | 8 | 3 | 7 | 5 | 8 |
| 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 8 | 2 | 6 | 4 | 6 | 2 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 6 | 6 | 8 | 4 | 0 | 8 | 2 | 2 | 0 | 2 | 4 | 4 | 6 | 0 | 4 |
| 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 0 | 0 | 6 | 6 | 6 | 2 | 8 | 4 | 6 | 4 | 8 | 4 | 8 | 6 | 0 | 8 | 4 | 4 | 2 | 6 | 0 | 2 | 8 | 8 | 0 | 8 | 6 | 6 | 4 | 0 | 6 |
| 5 | 5 | 2 | 7 | 2 | 4 | 1 | 3 | 7 | 8 | 1 | 8 | 6 | 7 | 5 | 1 | 8 | 3 | 4 | 2 | 5 | 9 | 1 | 6 | 5 | 6 | 2 | 7 | 3 | 5 | 2 |
| 0 | 0 | 8 | 8 | 8 | 6 | 4 | 2 | 8 | 2 | 4 | 2 | 4 | 8 | 0 | 4 | 2 | 2 | 6 | 8 | 0 | 6 | 4 | 4 | 0 | 4 | 8 | 8 | 2 | 0 | 8 |
| 5 | 5 | 4 | 9 | 4 | 8 | 7 | 1 | 9 | 6 | 7 | 6 | 2 | 9 | 5 | 7 | 6 | 1 | 8 | 4 | 5 | 3 | 7 | 2 | 5 | 2 | 4 | 9 | 1 | 5 | 4 |

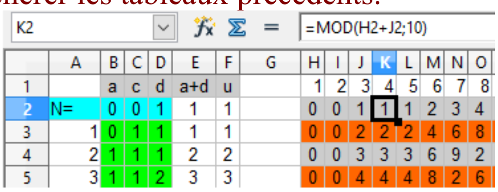
Pour cette question, on peut s'aider d'un programme en Scratch ou d'une feuille de tableur (mais ce n'est absolument pas obligatoire). On peut alors imprimer une copie d'écran, ce qui évite de fastidieux recopiages.

J'ai utilisé le tableur pour répondre à mes questions, mais on peut aussi s'amuser à écrire un programme en Scratch (pour ceux qui ne connaissent pas, nous ferons un TD au 2$^{\text{ème}}$ trimestre pour une initiation).

Ci-dessous trois copies d'écran montrant les formules utilisées pour générer les tableaux précédents.



*Facultatif* : Faire la même exploration numérique avec les nombres à deux chiffres : séparer les 99 nombres de cette famille en différents cycles.

Les nombres à deux chiffres se répartissent en six cycles de la façon suivante :

- 1 cycle de longueur 1 (le cycle de 00),
- 1 cycle de longueur 3 (le cycle 05-55-50),
- 1 cycle de longueur 4 (le cycle 26-68-84-42),
- 1 cycle de longueur 12 (le cycle 13-34-47-71-18-89-97-76-63-39-92-21),
- 1 cycle de longueur 20 contenant les nombres 02, 04, 06 et 08 et tous ceux formés de 2 chiffres pairs (exceptés 00 et ceux du cycle de 26),
- 1 cycle de longueur 60 contenant les nombres 01, 03, 07 et 09.

Cela fait bien le compte : 1+1×3+1×4+1×12+1×20+1×60 = 1+3+4+12+20+60 = 100

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 3 | 1 | 4 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 0 | 7 | 7 | 4 | 1 | 5 | 6 | 1 | 7 | 8 | 5 | 3 | 8 | 1 | 9 |
| 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 0 | 6 | 6 | 2 | 8 | 0 | 8 | 8 | 6 | 4 | 0 | 4 | 4 | 8 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 0 | 6 | 6 | 2 | 8 |
| 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 |
| 1 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 9 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 9 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 |
| 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 |

| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9 | 9 | 8 | 7 | 5 | 2 | 7 | 9 | 6 | 5 | 1 | 6 | 7 | 3 | 0 | 3 | 3 | 6 | 9 | 5 | 4 | 9 | 3 | 2 | 5 | 7 | 2 | 9 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 8 | 8 | 6 | 4 | 0 | 4 | 4 | 8 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 0 | 6 | 6 | 2 | 8 | 0 | 8 | 8 | 6 | 4 | 0 | 4 | 4 | 8 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 |
| 9 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 9 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 9 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 |