6ème	Devoir Maison n°3

Présentation : écrire sur votre copie (double) le nom & prénom, la classe, la date et le titre.
On peut <u>ne traiter qu'une partie</u> (note maxi dans ce cas:17/20). Faire un cartouche pour les observations éventuelles et la note.
À rédiger proprement et clairement (phrases ayant un sens, sans abréviation, les résultats répétitifs présentés dans un tableau).

1. <u>Nombres figurés</u>

a) Les nombres triangulaires T_n sont fabriqués selon le procédé suivant :
$T_1=1$, $T_2=1+2$, $T_3=1+2+3$, $T_4=1+2+3+4$, etc.
Calculer les vingt premiers nombres triangulaires.

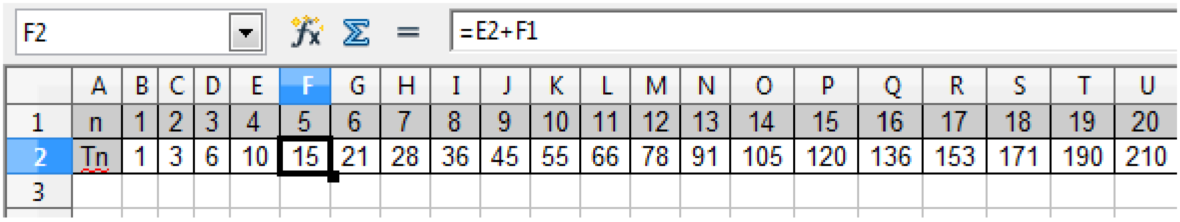
$T_1=1$, $T_2=1+2$, $T_3=1+2+3=6$, $T_4=1+2+3+4=10$, $T_5=1+2+3+4+5=T_4+5=10+5=15$,
$T_6=T_5+6=15+6=21$, $T_7=T_6+7=21+7=28$, $T_8==T_7+8=28+8=36$, $T_9=T_8+9=36+9=45$, $T_{10}==T_9+10=45+10=55$,
$T_{11}=T_{10}+11=55+11=66$, $T_{12}=T_{11}+12=66+12=78$, $T_{13}=T_{12}+13=78+13=91$, $T_{14}=T_{13}+14=91+14=105$,
$T_{15}=T_{14}+15=10+15=120$, $T_{16}=T_{15}+16=120+16=136$, $T_{17}=T_{16}+17=136+17=153$,
$T_{18}=T_{17}+18=153+18=171$, $T_{19}=T_{18}+19=171+19=190$, $T_{20}=T_{19}+20=190+20=210$, etc.

On aurait pu utiliser un tableur pour calculer ces nombres :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Tn	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253	276	300	325	351	378	406	435	465

L'avantage est que c'est très rapide à faire et sans erreur.

NB : Pour ceux qui voudrait s'essayer au tableur (nous utilisons *calc* de OpenOffice, libre et gratuit sur internet), voici notre copie d'écran qui montre la formule entrée dans la cellule F2 (pour le calcul de T_5). Une fois qu'on a entré une formule correcte, il suffit de saisir la poignée noire (le petit carré en bas à droite) et de tirer la formule vers la droite... En fait, on saisit la formule une seule fois : dans la cellule C2 (voir la question du DS3) on entre =B1+C2. C'est cette formule que l'on recopie avec la poignée noire (bien sûr, il faut avoir mis d'abord la suite des entiers dans la ligne 1, en écrivant 1 en A1 et puis en tirant sur la poignée noire).



F2 =E2+F1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	Tn	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210
3																					

b) Combien de nombres entre T_1 et T_{20} se terminent par 0 ?
Combien se terminent par 1 ? Combien se terminent par 2, etc. (jusqu'à 9).
L'affirmation « aucun nombre triangulaire ne se termine par 2, 4, 7 ou 9 » est-elle vérifiée, prouvée ?

Nous avons effectué ce décompte avec le tableur.

	N<21	N<201	N<1001
0	4	40	200
1	4	40	200
2	0	0	0
3	2	20	100
4	0	0	0
5	4	40	200
6	4	40	200
7	0	0	0
8	2	20	100
9	0	0	0
	20	200	1000

Il y a 4 nombres triangulaires sur 20 (soit 1 pour 5) qui se terminent par 0, pareil pour ceux qui se terminent par 1, par 5 et par 6. Il y a 2 nombres triangulaires sur 20 (soit 1 sur 10) qui se terminent par 3, pareil pour ceux qui se terminent par 8. Il n'y a aucun nombres triangulaires qui se terminent « jamais » par 2, par 4, par 7 ou par 9.
L'avantage du tableur est de pouvoir le prolonger facilement cette étude statistique jusqu'à $n=200$, ou même $n=1000$. Toujours est-il que il n'y a aucun nombre T_n qui se termine par 2, par 4, par 7 et par 9. On peut augmenter le nombre n de nombres T_n, il y en a toujours la même proportion.
Nous avons mis <u>jamais</u> entre guillemets, car même avec <u>1000</u> nombres triangulaires, nous n'avons pas vu <u>tous</u> les nombres triangulaires. Il y en a une infinité. Donc, on ne peut pas affirmer avec <u>certitude</u> que c'est <u>toujours</u> ainsi. Nous n'avons <u>pas prouvé</u> la propriété, nous l'avons <u>juste vérifiée</u> sur les quelques exemples examinés. Pour apporter une vraie preuve, il faut produire un raisonnement (une suite d'arguments logiques inattaquables).
Une idée de preuve vient de l'observation de ce qui se passe après 20 nombres triangulaires. On observe que les nombres triangulaires se termine <u>toujours</u> par la suite des vingt chiffres 1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0 observée entre T_1 et T_{20}. Comme T_0 et T_{20} se terminent tous les deux par 0, on ajoute un nombre se terminant par 1 (1 pour T_0 et 21 pour T_{20}), donc ces deux nombres se terminent par 1, et ensuite, on ajoute des nombres se terminant par 2, ce qui fait que T_2 et T_{22} se terminent tous les deux par 3. Et ainsi, de façon identique, on continue jusqu'à obtenir T_{40} qui se termine par 0, comme ensuite T_{60}, T_{80}, T_{100}, etc. On aurait aussi pu se douter d'une telle régularité quand on a constaté que les *statistiques* sur le dernier chiffre (combien se terminent par 0, combien par 1, etc.) pour 1000 nombres triangulaires sont identiques à celles pour 20 nombres.

c) Le grand mathématicien Gauss est connu pour avoir calculé, à l'âge de neuf ans (en 1786), la somme des cent premiers entiers (T_{100}) en quelques secondes. Pour cela, il utilisa une astuce de calcul que l'on peut facilement comprendre en examinant le tableau ci-dessous.

1	2	3	…	98	99	100
+100	+99	+98	…	+3	+2	+1
=101	=101	=101	…	=101	=101	=101

Expliquer comment calculer T_{100} avec cette méthode.
Déterminez ensuite, avec la même méthode, le nombre triangulaire de l'année : T_{2016}.
Il y a toute la suite des nombres de 1 à 100 qui a été écrite deux fois : une fois dans le sens croissant, et une fois dans le sens décroissant. De cette manière, en dessous de 100 il y a 1 (la somme fait 101), en dessous de 99 il y a 2 (la somme fait encore 101), en dessous de 98 il y a 3 (la somme fait encore 101), etc. La somme de chaque colonne fait toujours 101. Il y a 100 colonnes, donc le total de tout le tableau fait 100×101, soit 10100. Comme on a compté deux fois chacun des nombres, il faut diviser par 2, on trouve 10100÷2=5050. Finalement, T_{100}=5050.
Il y a toute la suite des nombres de 1 à 2016 qui a été écrite deux fois : une fois dans le sens croissant, et une fois dans le sens décroissant. De cette manière, en dessous de 2016 il y a 1 (la somme fait 2017), en dessous de 2015 il y a 2 (la somme fait encore 2017), etc. La somme de chaque colonne fait toujours 2017. Il y a

1	2	…	2015	2016
2016	2015	…	2	1
2017	2017	…	2017	2017

2016 colonnes, donc le total de tout le tableau fait 2016×2017, soit 4 066 272. Comme on a compté deux fois chacun des nombres, il faut diviser par 2, on trouve 4 066 272÷2=2 033 136.
Finalement, T_{2016}= 2 033 136, un nombre qui se termine par 6 comme 20% des nombres triangulaires. Le nombre triangulaire de l'an prochain se terminera par 3 (2017×2018÷2=2 035 153), ensuite ce sera un 1, puis 0, et encore 0, et puis à nouveau la succession 1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0... jusqu'à la fin des temps. Le prochain nombre triangulaire se terminant par un 6 sera dans 7 ans, en 2023.

N = Δ + Δ + Δ

d) Gauss montra aussi, dix ans plus tard, un autre résultat concernant les nombres triangulaires : « Tout nombre entier est la somme d'au plus trois nombres triangulaires ». Par exemple 5=3+1+1 (1 et 3 sont des nombres triangulaires). Choisir une tranche de dix nombres entiers consécutifs supérieurs à 100 et montrer comment se décompose chacun de ces nombres en une somme d'au plus trois nombres triangulaires.
Commençons à 150 et décomposons 10 nombres entiers consécutifs comme une somme d'au plus trois nombres triangulaires :
$150 = 105 + 45 = T_{14} + T_9$
$151 = 136 + 15 = T_{16} + T_5$
$152 = 136 + 15 + 1 = T_{16} + T_5 + T_1$
$153 = T_{17} = 66 + 66 + 21 = T_{11} + T_{11} + T_6$
$154 = 153 + 1 = T_{17} + T_1$
$155 = 153 + 1 + 1 = T_{17} + T_1 + T_1$
$156 = 153 + 3 = T_{17} + T_2$
$157 = 153 + 3 + 1 = T_{17} + T_2 + T_1$
$158 = 136 + 21 + 1 = T_{16} + T_6 + T_1$
$159 = 153 + 6 = T_{17} + T_3$
Nous avons effectué le travail demandé sans vraiment chercher à comprendre. Mais on n'est pas censé tout comprendre et encore moins tout expliquer... La propriété démontrée par Gauss semble vraie sur ces 10 exemples, mais nous sommes loin de l'avoir démontrée. Nous pourrions recommencer sur une autre tranche de dix nombres consécutifs, à partir de 50 par exemple. Cela permet de se rendre compte qu'il n'y a pas vraiment de transposition possible, excepté le fait qu'on peut faire suivre un nombre triangulaire de T_1 pour avoir le suivant, de $T_1 + T_1$ ensuite, puis de T_3, etc.
$50 = 28 + 21 + 1 = T_7 + T_6 + T_1$
$51 = 45 + 6 = T_9 + T_3$ mais aussi $51 = 36 + 15 = T_8 + T_5$
$52 = 45 + 6 + 1 = T_9 + T_3 + T_1$
$53 = 28 + 15 + 10 = T_7 + T_5 + T_4$
$54 = 45 + 6 + 3 = T_9 + T_3 + T_2$
$55 = 45 + 10 = T_9 + T_4$ mais aussi $55 = T_{10}$

$56 = 45 + 10 + 1 = T_9 + T_4 + T_1$
$57 = 36 + 21 = T_8 + T_6$
$58 = 36 + 21 + 1 = T_8 + T_6 + T_1$
$59 = 55 + 3 + 1 = T_{10} + T_2 + T_1$

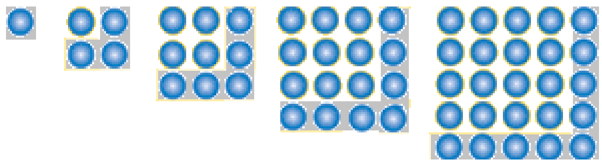
e) Calculer les dix premières sommes de deux nombres triangulaires consécutifs T_1+T_2, T_2+T_3, … ,$T_{10}+T_{11}$. Écrire, à côté, la liste des nombres carrés C_n : $C_2=2\times2$, $C_3=3\times3$,… ,$C_{11}=11\times11$ et comparer les deux listes. Conjecturer* alors la relation entre T_{n-1}, T_n et C_n.
**conjecturer* : énoncer une propriété supposée vraie mais non prouvée.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tn	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190
Tn-1	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171
Tn+Tn-1	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
Cn=nxn	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361

On remarque sur les deux lignes du bas (celles qui sont grisées) que les listes de nombres sont identiques : $C_2=T_1+T_2$, $C_3=T_2+T_3$, $C_4=T_3+T_4$, etc.
Pour dire les choses autrement, les nombres carrés sont obtenus en ajoutant au nombre triangulaire de même rang celui de rang juste inférieur. Il s'agit d'une conjecture car nous ne l'avons pas vérifiée pour tous les nombres *n* (il y en a une infinité), juste pour quelques-uns. Cela ne constitue pas une preuve, seulement une forte présomption.

NB : en classe de 4ème, vous aurez tous les éléments pour apporter la preuve de cette propriété :
On sait que $C_n=n\times n$ et on peut montrer (voir la question c) que $T_n=n\times(n+1)\div2$ et donc que $T_{n-1}=(n-1)\times n\div2$.
On a donc $T_n+T_{n-1}=n\times(n+1)\div2+(n-1)\times n\div2=n\div2\times[(n+1)+(n-1)]=n\div2\times[2n]=n\div2\times2\times n=n\times n=C_n$.
Et donc, pour tout entier *n*, on a $T_n+T_{n-1}=C_n$.

f) La figure ci-contre montre les premiers nombres carrés C_n et leur relation avec les nombres impairs qui sont figurés sur fond gris. Par exemple $C_2=C_1+3$, $C_3=C_2+5$, etc.
Montrer que les nombres carrés s'obtiennent en additionnant les premiers nombres impairs. Pour cela, décomposer les nombres C_2 à C_{10} en une somme de nombres impairs consécutifs.



D'après l'illustration, on peut écrire :
$C_1=1$.
$C_2=C_1+3=1+3=4$.
$C_3=C_2+5=1+3+5=9$.
$C_4=C_3+7=1+3+5+7=16$.
$C_5=C_4+9=1+3+5+7+9=25$.
$C_6=C_5+11=1+3+5+7+9+11=36$.
$C_7=C_6+13=1+3+5+7+9+11+13=49$.
$C_8=C_7+15=1+3+5+7+9+11+13+15=64$.
$C_9=C_8+17=1+3+5+7+9+11+13+15+17=81$.
$C_{10}=C_9+19=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$.
On remarque que pour calculer C_n il faut additionner les *n* premiers nombres impairs (c'est encore une conjecture). Si on part de C_n, le côté du carré contient *n* unités. On doit lui ajouter une ligne et une colonne de *n* unités, et une unité supplémentaire pour compléter le carré suivant, qui contiendra $n+1$ unités sur chaque côté. On obtient donc la relation suivante : $C_n + n + n + 1 = C_{n+1}$. Mais, $n+n+1=2n+1$ est un nombre impair ($2n$ est pair car divisible par 2, mais pas 2n+1 qui le suit). Il faut donc ajouter un nombre impair à C_n pour obtenir C_{n+1}. Le nombre impair que l'on ajoute est le $n^{ème}$ nombre impair. Comme C_1 est le 1er nombre impair, C_2 est obtenu en ajoutant le 2ème nombre impair au premier (4=1+3), et ainsi de suite. On peut estimer maintenant que la propriété est prouvée. Ce n'est plus une conjecture.

2. Exploration numérique

Programme :

1. Prendre un nombre entier.
2. Effectuer l'addition du nombre et de son nombre inversé*.
3. Recommencer l'étape 2 avec le résultat jusqu'à obtenir un palindrome numérique**

**Nombre inversé* : inverser les chiffres d'un nombre entier. Exemple : 1234 est inversé en 4321.
***Palindrome numérique* : nombre qui se lit pareil dans les deux sens. Le nombre 1221 est un palindrome.

a) Essayer le programme sur tous les nombres de deux chiffres.
Donner les résultats dans un tableau (nombre de départ, palindrome final, nombre d'étapes).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	11	33	44	55	66	77	88	99	121
20	22	33	22	55	66	77	88	99	121	121
30	33	44	55	33	77	88	99	121	121	363
40	44	55	66	77	44	99	121	121	363	484
50	55	66	77	88	99	55	121	363	484	1111
60	66	77	88	99	121	121	66	484	1111	4884
70	77	88	99	121	121	363	484	77	4884	44044
80	88	99	121	121	363	484	1111	4884	88	8813200023188
90	99	121	121	363	484	1111	4884	44044	8813200023188	99

Notre tableau donne le palindrome final pour les nombres à deux chiffres (le chiffre des dizaine est donné par la colonne 1, le chiffre des unités est donné par la ligne 1). La couleur du fond indique le nombre d'étapes : sur fond gris clair 0 étape, sur fond blanc 1 étape, sur fond gris foncé 2 étapes, sur fond jaune 3 étapes, sur fond vert 4 étapes, sur fond vert caca d'oie 6 étapes, sur fond marron 24 étapes.

	0 étape	1 étape	2 étapes	3 étapes	4 étapes	…	6 étapes	…	24 étapes

On aurait pu choisir les couleurs mieux que ça, ou présenter un peu différemment. On peut surtout donner les résultats complets, en donnant les étapes intermédiaires (mais ce n'était pas demandé).

0 étape	1 étape	2 étapes	3 étapes	4 étapes	5 étapes	6 étapes	7 étapes	8 étapes	9 étapes	10 étapes	11 étapes	12 étapes	13 étapes	14 étapes	15 étapes	16 étapes	17 étapes	18 étapes	19 étapes	20 étapes	21 étapes	22 étapes	23 étapes	24 étapes
10	11																							
11																								
12	33																							
13	44																							
14	55																							
15	66																							
16	77																							
17	88																							
18	99																							
19	110	121																						
20	22																							
21	33																							
22																								
23	55																							
24	66																							
25	77																							
26	88																							
27	99																							
28	110	121																						
29	121																							
30	33																							
31	44																							
32	55																							
33																								
34	77																							
35	88																							
36	99																							
37	110	121																						
38	121																							
39	132	363																						
40	44																							
41	55																							
42	66																							
43	77																							
44																								
45	99																							
46	110	121																						
47	121																							
48	132	363																						
49	143	484																						
50	55																							
51	66																							
52	77																							
53	88																							
54	99																							
55																								
56	121																							
57	132	363																						
58	143	484																						
59	154	605	1111																					
60	66																							
61	77																							
62	88																							
63	99																							
64	110	121																						
65	121																							
66																								
67	143	484																						
68	154	605	1111																					
69	165	726	1353	4884																				
70	77																							
71	88																							
72	99																							
73	110	121																						
74	121																							
75	132	363																						
76	143	484																						
77																								
78	165	726	1353	4884																				
79	176	847	1595	7546	14003	44044																		
80	88																							
81	99																							
82	110	121																						
83	121																							
84	132	363																						
85	143	484																						
86	154	605	1111																					
87	165	726	1353	4884																				
88																								
89	187	968	1837	9218	17347	91718	173437	907808	1716517	8872688	17735476	85189247	159487405	664272356	1317544822	3602001953	7193004016	13297007933	47267087164	93445163438	176881317877	955594506548	1801200002107	8813200023188
90	99																							
91	110	121																						
92	121																							
93	132	363																						
94	143	484																						
95	154	605	1111																					
96	165	726	1353	4884																				
97	176	847	1595	7546	14003	44044																		
98	187	968	1837	9218	17347	91718	173437	907808	1716517	8872688	17735476	85189247	159487405	664272356	1317544822	3602001953	7193004016	13297007933	47267087164	93445163438	176881317877	955594506548	1801200002107	8813200023188

b) Répondre aux questions suivantes :
Quels nombres de deux chiffres aboutissent à un palindrome à deux chiffres ?
→Ranger cette liste selon le palindrome obtenu, en indiquant le nombre d'étapes.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	11	33	44	55	66	77	88	99	
20	22	33	22	55	66	77	88	99		
30	33	44	55	33	77	88	99			
40	44	55	66	77	44	99				
50	55	66	77	88	99	55				
60	66	77	88	99			66			
70	77	88	99					77		
80	88	99							88	
90	99									99

En ne gardant que cette partie du tableau initial, les nombres qui aboutissent en 1 étape sont sur fond blanc, les autres (qui sont des palindromes naturels et qui aboutissent en 0 étape) sont sur fond gris.
Le tableau qu'il fallait faire est le suivant :

	0 étape	1 étape
11	11	10
22	22	20
33	33	30, 21, 12
44	44	40, 31, 13
55	55	50, 41, 32, 23, 14
66	66	60, 51, 42, 24, 15
77	77	70, 61, 52, 43, 34, 25, 16
88	88	80, 71, 62, 53, 35, 26, 17
99	99	90, 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 18

Quels nombres de deux chiffres aboutissent au palindrome 121 ?
→Faire deux parties : ceux qui aboutissent en une étape et ceux qui aboutissent en deux étapes.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10										121
20									121	121
30								121	121	
40							121	121		
50							121			
60					121	121				
70				121	121					
80			121	121						
90		121	121							

La classe du palindrome 121 se subdivise en deux sous-classes d'effectif 8 :
Les nombres qui aboutissent en 1 étape : 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92 (sur fond blanc).
Les nombres qui aboutissent en 2 étapes : 19, 28, 37, 46, 64, 73, 82, 91 (sur fond gris foncé).
La somme des chiffres est 11 ou 10, selon que l'on aboutit en 1 ou 2 étapes.

Quels sont les autres palindromes obtenus avec les nombres de deux chiffres ?
→Donner pour chacun des palindromes, la liste des nombres à deux chiffres et le nombre d'étapes.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10										
20										
30										363
40									363	484
50								363	484	1111
60								484	1111	4884
70						363	484		4884	44044
80					363	484	1111	4884		8813200023188
90				363	484	1111	4884	44044	8813200023188	

Il reste 363, 484, 1111, 4884, 44044 et 8813200023188. Pour les grands nombres de cette liste, nous n'avons pas mis le séparateur des milliers (un espace) car c'est disgracieux, cela gâche la belle symétrie. Mais écrire 44 044 et 8 813 200 023 188 permet de mieux lire la valeur de ces nombres.
Le tableau qu'il fallait faire est le suivant :

	0 étape	1 étape	2 étapes	3 étapes	4 étapes	5 étapes	6 étapes	.....	24 étapes
363			39, 48, 57, 75, 84, 93						
484			49, 58, 67, 76, 85, 94						
1111				59, 68, 86, 95					
4884					69, 78, 86, 95				
44044							79,97		
8813200023188									89,98

Quelles sont les étapes pour les deux *outsiders* à deux chiffres que sont 89 et 98 ?
→Donner une seule liste et montrer que l'autre s'y ramène.

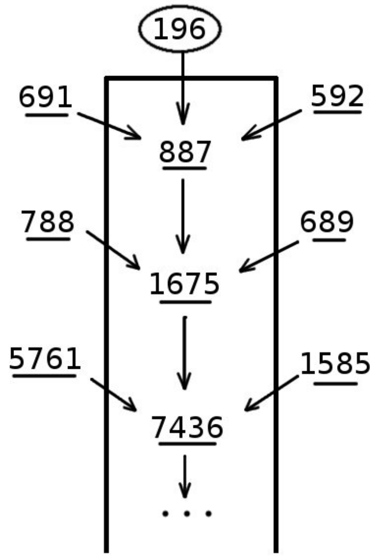
89	187	968	1837	9218	17347	91718	173437	907808	1716517	8872688	17735476	85189247
85189247	159487405	664272356	1317544822	3602001953	7193004016	13297007933	47267087164	93445163438	176881317877	955594506548	1801200002107	8813200023188

Bien sûr les listes de 89 et 98 sont identiques car 89+98=98+89 (commutativité de l'addition), et donc, à l'étape 1 pour les deux nombres, on aura la même valeur 187. La suite sera, *à fortiori*, la même.

Conclusion générale :
Pour les nombres à deux chiffres, il peut y avoir au maximum 24 étapes. C'est le cas pour 89 et 98 qui donnent tous les deux la même suite qui s'achève sur le palindrome à 13 chiffres 8 813 200 023 188. Viennent ensuite les nombres 79 et 97 qui aboutissent au palindrome 44044 au bout de 6 étapes seulement. Après, les nombres 69, 78, 87 et 96 aboutissent tous les quatre sur le palindrome 4884 au bout de 4 étapes. Les autres issues palindromiques pour les nombres à deux chiffres sont 1111 (4 nombres pour 3 étapes), 484

(6 nombres pour 2 étapes), 363 (6 nombres pour 2 étapes), 121 (16 nombres pour 1 ou 2 étapes), 99 (10 nombres pour 0 ou 1 étape), 88 (8 nombres pour 0 ou 1 étape), 77 (8 nombres pour 0 ou 1 étape), 66 (6 nombres pour 0 ou 1 étape), 55 (6 nombres pour 0 ou 1 étape), 44 (4 nombres pour 0 ou 1 étape), 33 (4 nombres pour 0 ou 1 étape), 22 (2 nombres pour 0 ou 1 étape) et 11 (2 nombres pour 0 ou 1 étape).
Le compte y est-il ?
Oui, car 2+2+4+4+6+6+16+10+8+8+6+6+4+4+2+2=90 et il y a 90 nombres à deux chiffres.
Nous n'avons pas compté les nombres à un chiffre qui sont des palindromes naturels.
Certains palindromes sont-ils plus fréquents que d'autres ?
Notre décompte pour les nombres à deux chiffres montre clairement que certains palindromes sont très représentés : 121 a une fréquence de 16/90, soit près de 18% des nombres à deux chiffres. Viennent ensuite 99 qui a une fréquence d'un peu moins de 11% ; 88 et 77 qui représentent chacun près de 9% ; 484, 363, 66 et 55 qui représentent chacun près de 7% ; 4884, 1111, 44 et 33 qui représentent chacun près de 4% ; 8 813 200 023 188, 44044, 22 et 11 qui représentent chacun près de 2% et c'est tout.
On remarque une sorte de symétrie pour ce qui est des fréquences (considérer la somme ci-dessus). Cette symétrie serait parfaite si l'on subdivise la classe de 121 en deux classes d'effectifs 8 chacune : elles seraient les pendants symétriques des classes de 88 et 77 qui ont chacune un effectif de 8. Ce qui est amusant, c'est que, justement la classe de 121 se subdivise vraiment en 2 sous-classes d'effectif 8 : celle qui aboutit en 1 étape (nombres 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92) et celle qui aboutit en 2 étapes (nombres 19, 28, 37, 46, 64, 73, 82, 91). Cette parfaite symétrie implique très certainement des relations sous-jacentes qui la justifie.

Remarques sur cette capacité plus ou moins grande à aboutir rapidement sur un palindrome :
Même s'il advient que parfois, la suite palindromique s'allonge tout d'un coup d'une manière abondante, pour ne pas dire disproportionnée (par exemple, on a vu que pour 89 et 98 il fallait 24 étapes, et cela recommence un peu plus loin avec 187 qui demande 23 étapes, mais sur les 195 premiers entiers on ne dépasse 10 étapes que 5 fois, les deux autres fois étant pour 167 et 177), ce qui se passe lorsqu'on arrive à 196 ressemble à une chute dans le vide : tout d'un coup le sol se dérobe sous nos pas, le palindrome ne vient pas. Que se passe t-il dans cette configuration : pourquoi cette règle de constitution palindromique qui semblait pourtant aboutir toujours, ne produit-elle rien ? Je crois qu'aucun mathématicien n'a encore donné de réponse à cette question. On appelle les nombres qui, comme 196, n'aboutissent pas à un palindrome (on n'a pas trouvé de fin à la suite des nombres, même avec un ordinateur qui a cherché très très longtemps), des nombres de Lychrel. Le nom Lychrel a été inventé par Wade VanLandingham : il s'agit d'une quasi-anagramme du nom de sa fiancée, Cheryl. Les autres candidats pour être des nombres de Lychrel sont 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, **879**, 887, 978, 986, 1495, 1497, 1585, 1587, 1675, 1677, 1765, 1767, 1855, 1857, 1945, 1947, **1997**, etc. On comprend que si 196 n'a pas de fin (si 196 est un nombre de Lychrel), alors ceux qui le suivent (887, 1675, 7436, etc.) en sont aussi. De même, ceux qui ont dans leur suite un nombre de la suite de 196, comme 295, 394, 493, 592, 691 et 790 qui aboutissent sur 887 (voir la figure ci-contre qui vient de Wikipédia), sont aussi des nombres de Lychrel. Les véritables racines des suites infinies se réduisent alors à quelques graines, dont les premières sont 196, 879, 1997.



Le nombre connu pour donner le plus d'étapes est 1 186 060 307 891 929 990 : il nécessite 261 étapes pour constituer un palindrome à 119 chiffres... Mais c'est probable, on en trouvera bientôt un plus grand qui aboutira à un palindrome encore plus grand.