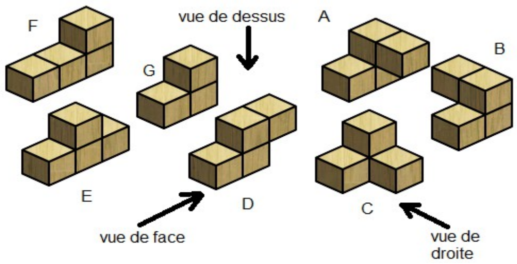
DM n°9 : Jeux avec des cubes

CORRECTION

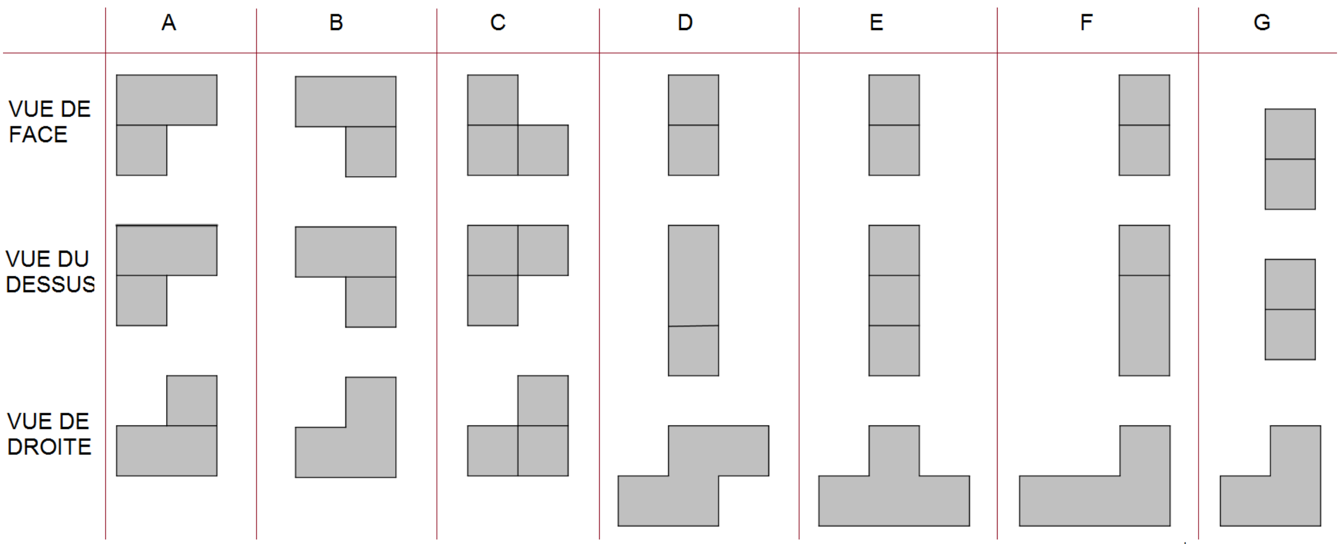
1) Polycubes



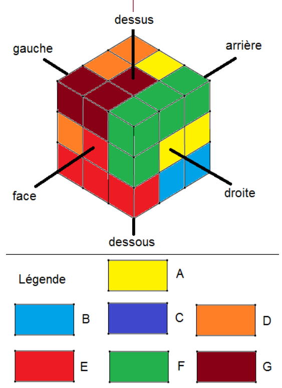
La figure de gauche représente sept solides différents, identifiés par une lettre-titre. Ces solides sont tous constitués de trois (*solide G*) ou quatre (*solides A, B, C, D, E, F*) petits cubes de côté 1.

a) Représenter ces solides avec leur lettre-titre :

- en vue de face (brun foncé)
- en vue de dessus (brun clair)
- en vue de droite (brun moyen)



b) Ces solides, totalisant un volume de 27 petits cubes, peuvent reconstituer un grand cube de côté 3. L'illustration à droite montre les faces du dessus, de face et de droite d'une solution. Tracer sur votre copie la perspective montrant les trois autres faces *(les faces arrière, de gauche et de dessus).* Respecter pour chaque pièce le code couleur indiqué dans la légende.



Je commence par remplir les zones où la pièce est évidente :

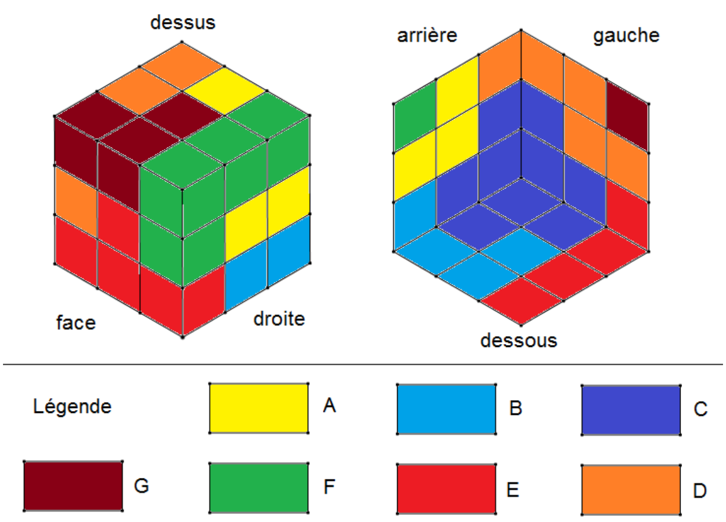
- La pièce E que l'on voit en entier
- La pièce F que l'on voit en entier

La pièce G n'est pas évidente, la pièce gris clair pourrait être une pièce à 4 cubes dont 1 est caché. Il me semble que seule la pièce B avec son 4ème cube au centre peut convenir. Je fais pourtant l'hypothèse que c'est G et continue.

La pièce D est presque évidente, car aucune autre ne peut se montrer comme cela, à deux endroits différents (emplacements quadrillés).

La pièce A est presque évidente aussi, car aucune autre ne peut se montrer comme cela, à deux endroits différents (emplacements en nids d'abeille). Ne pas la confondre avec la pièce B qui lui ressemble.

Il ne reste plus que les pièces B et C. Le plus difficile, à mon avis, est de colorier de façon cohérente ce qui est caché, sur la 2ème vue. Finir n'est pas trop difficile alors.



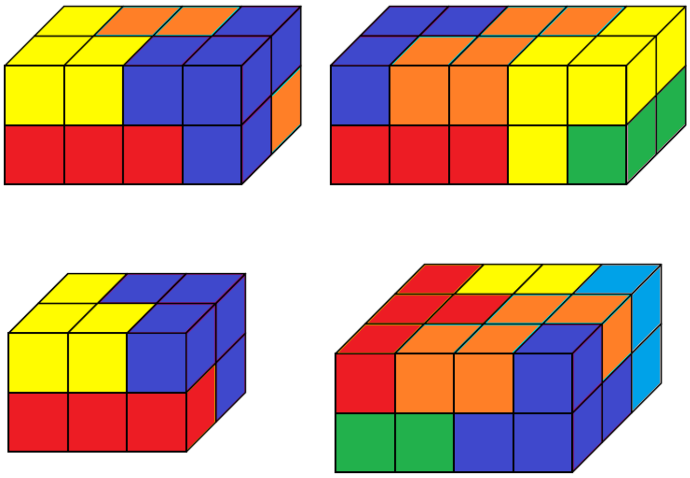
Y a t-il une autre façon de compléter la figure ? Essayons avec l'autre hypothèse (B à la place de G) : En fait, c'est possible. Il suffit d'inverser les deux pièces B et G (voir ci-contre).

Quelle est la pièce qui occupe le petit cube central ?

Dans les deux cas, c'est la pièce B qui a son 4ème cube au centre du grand cube.

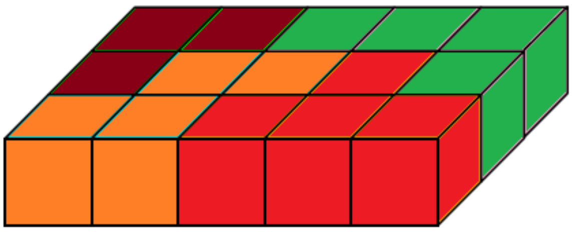
c) Avec l'ensemble des sept pièces, on peut reconstituer bien d'autres solides mais le cube 3×3×3 est le seul parallélépipède possible. Expliquer pourquoi.

On ne peut pas reconstituer un parallélépipède de dimensions $a \times b \times c$ si un des nombres a, b ou c est pair. Car on aurait alors un nombre pair de petits cubes ce qui ne se peut pas car 27 est impair. Donc il faut nécessairement n'avoir que des côtés impairs. Pour trouver 27, on peut effectuer les produits 1×1×27 ou 1×3×9 ou 3×3×3. Le premier n'est pas réalisable de façon évidente car aucune pièce du jeu n'est un parallélépipède de dimensions $1 \times 1 \times n$. Le second n'est pas réalisable non plus, d'une façon presque aussi évidente, car trois pièces du jeu ne sont pas des prismes de hauteur 1. Il ne reste que le cube 3×3×3 qui est heureusement réalisable.

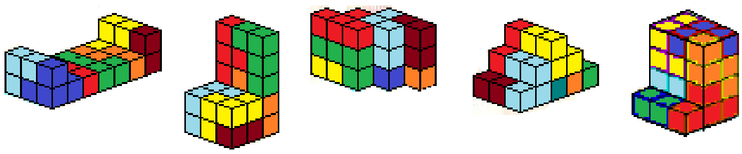


Le parallélépipède de dimensions 2×2×3 contient 12 cubes. Il faut donc nécessairement prendre 3 pièces de 4 cubes (la pièce G est éliminée). Il existe au moins une solution. Avec les pièces A, C et E c'est possible, mais il doit y avoir de nombreuses autres solutions.
Le parallélépipède de dimensions 2×2×4 contient 16 cubes. Il faut donc nécessairement prendre 4 pièces de 4 cubes. Avec les pièces A, C, D et E, on y arrive. De même, en ajoutant la pièce F, on arrive à reconstituer le parallélépipède de dimensions 2×2×5. En ajoutant la pièce B, on arrive à reconstituer le parallélépipède de dimensions 2×3×4, mais le parallélépipède de dimensions 2×2×6 n'est, semble t-il, pas possible à réaliser.
On peut réaliser d'autres parallélépipède, si on utilise la pièce G contenant 3 cubes, mais alors ce ne sont que des formes planes (des prismes de hauteur 1). On doit alors éliminer les trois pièces qui ne sont pas planes. Il reste D, E, F à associer avec G ou bien à associer entre elles.

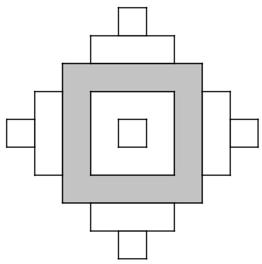
- Avec G : 4+3=7, impossible ; 4+4+3=11, impossible ; 4+4+4+3=15, possible en théorie car 3×5=15, et aussi possible avec les pièces (ci-contre).
- Sans G : 4+4=8=2×4 possible en théorie, mais impossible avec les pièces ; 4+4+4=12=3×4 possible en théorie, mais impossible avec les pièces sans en doubler certaines.



Remarque : On peut, avec ces pièces, réaliser plein d'autres formes, parmi lesquelles :

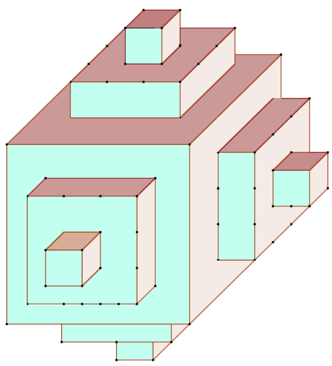


2) Cubes sur cube



a) Si on place sur les faces d'un grand cube de côté 5 (en gris sur la vue de face ci-contre) des petits cubes de côté 1 de manière à construire une pyramide sur chacune des faces du grand cube, combien faut-il de petits cubes ?
Dessiner en perspective les arêtes visibles du solide obtenu.

Le solide est un peu complexe mais le principe est simple :
Il y a six pyramides (une sur chaque face) et dans chacune d'elles on a une première couche de 3 cubes de côtés (donc 3×3=9 cubes) sur laquelle est posée un 10ème cube. Il y a donc, en tout, 60 cubes pour les six pyramides (10×6=60 cubes) et 5^3=5×5×5=125 cubes dans le cube central, ce qui fait un total de 60+125=185 cubes.



Remarque : Ce n'est pas très satisfaisant comme perspective car certaines arêtes qui ne sont pas dans un même plan sont représentées dans le prolongement les unes des autres. Nous avons utilisé ici une perspective (45° ; 0,7) mais nous pourrions essayer une autre perspective.

L'image suivante est plus travaillée : nous avons mis les arêtes invisibles en pointillés, mais pas trop visibles. Nous avons caché les sommets et nous nous sommes arrangé pour que l'on voit 5 petits cubes, au moins partiellement.

b) Selon le même procédé, on construit des pyramides sur les faces d'un cube de côté 7. Combien faut-il ajouter de petits cubes *(donner le détail du calcul)* ? Quel est alors le volume du solide obtenu (*l'unité étant le volume d'un petit cube*) ?

Avec un cube de 7 de côté, il y a six pyramides (une sur chaque face) et dans chacune d'elles on a :

- une première couche de 5 cubes de côtés (donc 5×5=25 cubes) sur laquelle est posée
- une 2ème couche de 9 cubes de côtés (donc 3×3=9 cubes) sur laquelle est posée
- une 3ème couche de 1 cube

Il y a donc 25+9+1=35 cubes dans les 6 pyramides, soit <u>210 cubes</u> (35×6=210) et 7^3=7×7×7=<u>343 cubes</u> dans le cube central, ce qui fait un total de 210+343=<u>553 cubes</u>.

Mêmes questions si le grand cube initial a pour côté 9, 11, 13 et 15.

Pour 9 , on ajoute une couche de 7 de côtés donc 6 fois 7^2 cubes, soit 294 cubes aux 6 pyramides. Il y a donc 210+294=504 cubes dans les pyramides et 9^3=<u>729 cubes</u> dans le cube central, ce qui fait un total de 504+729=<u>1233 cubes</u>.

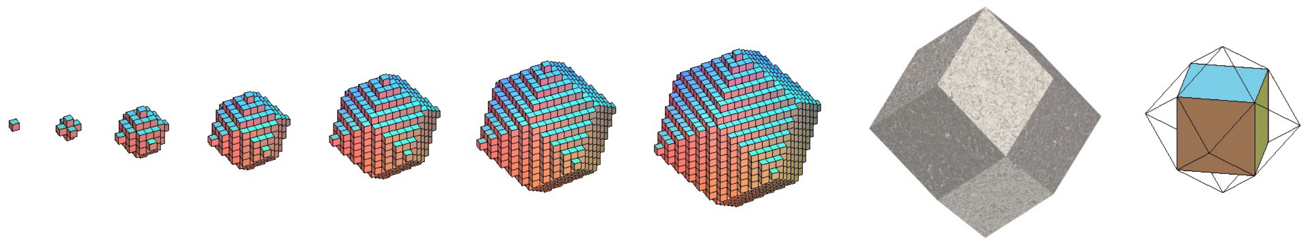
Pour 11 , on ajoute une couche de 9 de côtés donc 6 fois 9^2 cubes, soit 486 cubes aux 6 pyramides. Il y a donc 504+486=990 cubes dans les pyramides et 11^3=<u>1331 cubes</u> dans le cube central, ce qui fait un total de 990+1331=<u>2321 cubes</u>.

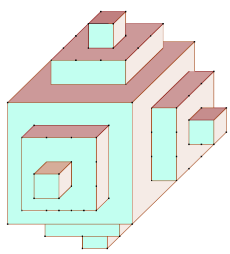
Pour 13 , on ajoute une couche de 11 de côtés donc 6 fois 11^2 cubes, soit 726 cubes aux 6 pyramides. Il y a donc 990+726=1716 cubes dans les pyramides et 13^3=<u>2197 cubes</u> dans le cube central, ce qui fait un total de 1716+2197=<u>3913 cubes</u>.

Le tableau ci-dessous calcule et récapitule les résultats : sur les deux lignes vertes, on lit les nombres de cubes dans les grands cubes (ligne supérieure) ou dans les six pyramides (ligne inférieure).

arête	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
cube	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197	2744	3375
base pyramide	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 couche	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
2 couches			10	20	34	52	74	100	130	164	202	244	290
3 couches					35	56	83	116	155	200	251	308	371
4 couches							84	120	164	216	276	344	420
5 couches									165	220	285	360	445
6 couches											286	364	454
7 couches													455
Total 6 pyramides	6		60		210		504		990		1716		2730

L'image ci-dessous donne une idée de ce qu'on obtient en poursuivant le processus à l'infini.





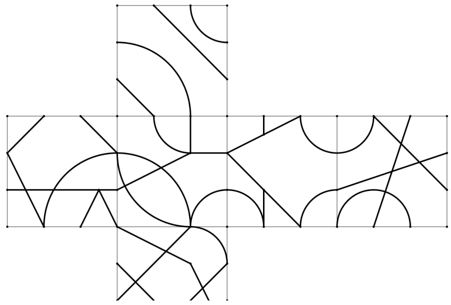
c) Dénombrer les faces, les sommets et les arêtes du solide obtenu à la question a) puis examiner si ce solide vérifie la relation de Euler : F+S=A+2 où F est le nombre de Faces, S le nombre de Sommets et A le nombre d'Arêtes.

- Faces : pour les pyramides il y a 4 faces latérales et 1 carré troué sur la couche inférieure et 4 faces latérales et 1 carré sur le cube supérieur inférieure, ce qui fait un total de 10 faces pour chaque pyramide donc 60 faces pour les pyramides ; on doit ajouter les 6 faces carrées trouées du cube. Il y a donc 66 faces.

- Sommets : il y a 8 sommets saillants sur chaque pyramide et 8 sommets rentrants (en creux), soit 16 sommets par pyramide et donc 96 sommets pour l'ensemble des pyramides ; on doit ajouter les 8 sommets du cube. Il y a donc 104 sommets.
- Arêtes : il y a 12 arêtes sur la couche inférieure et 12 arêtes sur le cube supérieur, soit 24 arêtes sur chaque pyramide et donc 144 arrêtes pour l'ensemble des pyramides ; on doit ajouter les 12 arêtes du cube. Il y a donc 156 arrêtes.

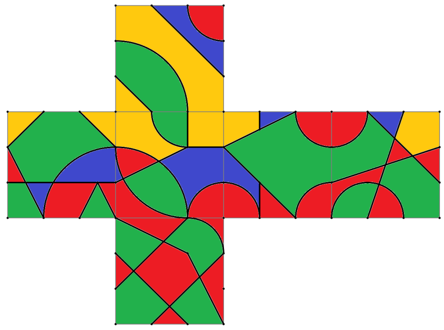
La relation d'Euler est-elle vérifiée ? F+S=66+106=172 alors que A+2=156+2=158. F+S n'est donc pas égal à A+2 pour ce solide. La relation d'Euler n'est pas vérifiée pour ce solide.

Les parallélépipèdes rectangles vérifient-ils la relation de Euler ? Oui, car dans ce cas F+S=6+8=14 alors que A+2=12+2=14. En fait la relation d'Euler est vraie pour les polyèdres (solides limités par des faces polygonales) convexes (sans creux) et quelques autres non convexes, mais pas des polyèdres comme ceux qu'on fabrique là.



3) <u>Coloriages</u>

a) Colorier le patron de cube ci-contre avec trois couleurs seulement de manière à ce que les zones de même couleur se prolongent correctement sur chaque face et que les zones ayant une frontière commune (pas juste un point) reçoivent toujours deux couleurs distinctes.



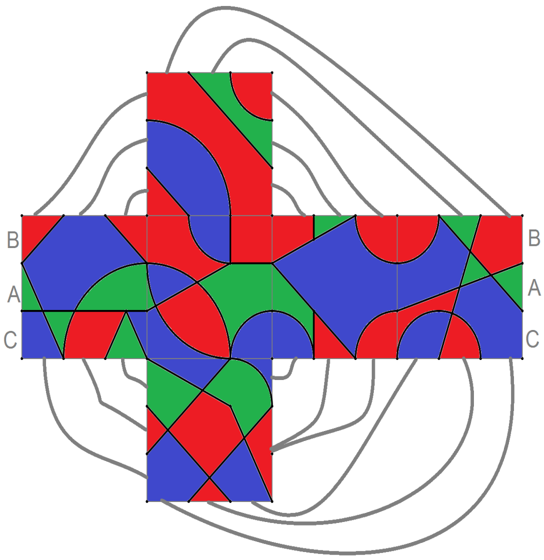
Nous proposons ci-contre une solution mais il doit y en avoir de très nombreuses.

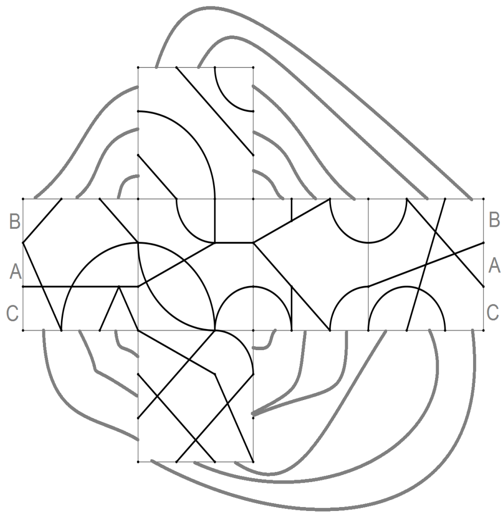
Personnellement, j'ai commencé à un endroit, en essayant de faire comme un damier avec deux couleurs. Arrivé à un point, j'ai dû utiliser une 3ème couleur. J'ai continué à compléter en revenant aux deux couleurs du damier, et puis il m'a fallu utiliser une 4ème couleur.

Ce qui est certain est qu'on peut toujours arriver à colorier ce genre de motif, quel qu'il soit, avec quatre couleurs. C'est une propriété qui a été démontrée mathématiquement, avec l'aide de l'ordinateur car il est difficile d'envisager tous les cas.

Pour aider au coloriage, on peut ajouter quelques indications pour les zones qui se prolongent de part et d'autre des bords du patron. C'est ce que propose la figure ci-dessous.

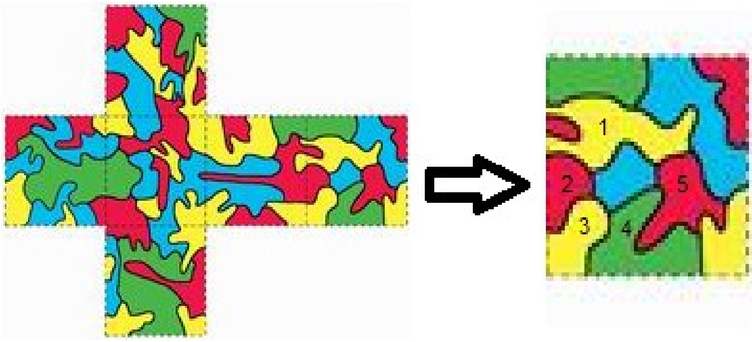
Fort de ce nouvel outil, je recommence un coloriage en essayant de mieux répartir les trois couleurs pour ne pas être obligé d'en mettre une 4ème. Sauf erreur de ma part, je trouve alors une solution à trois couleurs (ci-dessous).





b) Déterminer des zones sur le patron d'un cube de manière à ce que quatre couleurs soient indispensables pour en colorier les zones ayant une frontière commune. Tracer, colorier, découper et plier ce patron puis le glisser dans une enveloppe collée sur la copie.

Sur internet, on trouve cette solution qui nécessite 4 couleurs minimum car dans le carré de droite, la zone bleue qui est au centre est entourée de 5 zones différentes : il faut donc 3 couleurs pour les colorier, en plus du bleu.



Si on veut créer son propre coloriage nécessitant 4 couleurs, on peut utiliser cette astuce.
Je vais alors modifier la face de droite de mon coloriage initial pour répondre à cette question.
Sur cette face je crée une zone entourée de 5 zones qui ont une frontière non réduite à un point. On est obligé d'utiliser une 4ème couleur pour colorier cette face, pour le reste je vous laisse compléter le coloriage.