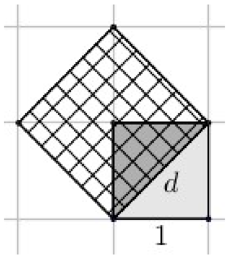
Travail à faire seul

1) Diagonale du carré

Si on coupe en deux un carré de côté 1 selon une de ses diagonales, on obtient un demi-carré de côté 1. L'aire d'un demi-carré de côté 1 peut se calculer de deux façons :

- en divisant par 2 l'aire du carré de côté 1 (en gris sur notre figure)
- en divisant par 4 l'aire du carré construit sur la diagonale (en quadrillé)



a) Déduire de cette remarque une égalité vérifiée par la longueur *d* de la diagonale.

L'aire du carré de côté 1 mesure 1. La moitié de cette aire est donc $\frac{1}{2}$.

L'aire du carré de côté *d* mesure $d \times d$, noté d^2. Le quart de cette aire est donc $\frac{d^2}{4}$.

Puisque la moitié de l'aire du carré de côté 1 est égale au quart de l'aire du carré de côté *d*, on en déduit que $\frac{d^2}{4}=\frac{1}{2}$. La longueur *d* doit vérifier l'égalité $d^2=2$.

b) En faisant des essais successifs à la calculatrice, déterminer un encadrement de la valeur de *d* par deux unités consécutives, puis par deux dixièmes consécutifs, puis deux centièmes, puis deux millièmes consécutifs. Prendre à chaque fois pour valeur approchée de *d* la moyenne des deux valeurs consécutives (la *moyenne* de *a* et *b* est le nombre $\frac{a+b}{2}$).

Essayons de remplacer *d* par 1 : $1 \times 1=1^2=1$, ce n'est pas assez.
Essayons de remplacer *d* par 2 : $2 \times 2=2^2=4$, c'est trop. Donc $1<d<2$.
Essayons de remplacer *d* par 1,5 : $1{,}5 \times 1{,}5=1{,}5^2=2{,}25$, c'est trop. Donc $1<d<1{,}5$.
Essayons de remplacer *d* par 1,4 : $1{,}4 \times 1{,}4=1{,}4^2=1{,}96$, c'est pas assez. Donc $1{,}4<d<1{,}5$.
Ainsi de suite, on peut s'approcher autant que l'on veut de la valeur véritable de *d*.
La valeur approchée de *d* au millième le plus proche que l'on puisse trouver est 1,414.

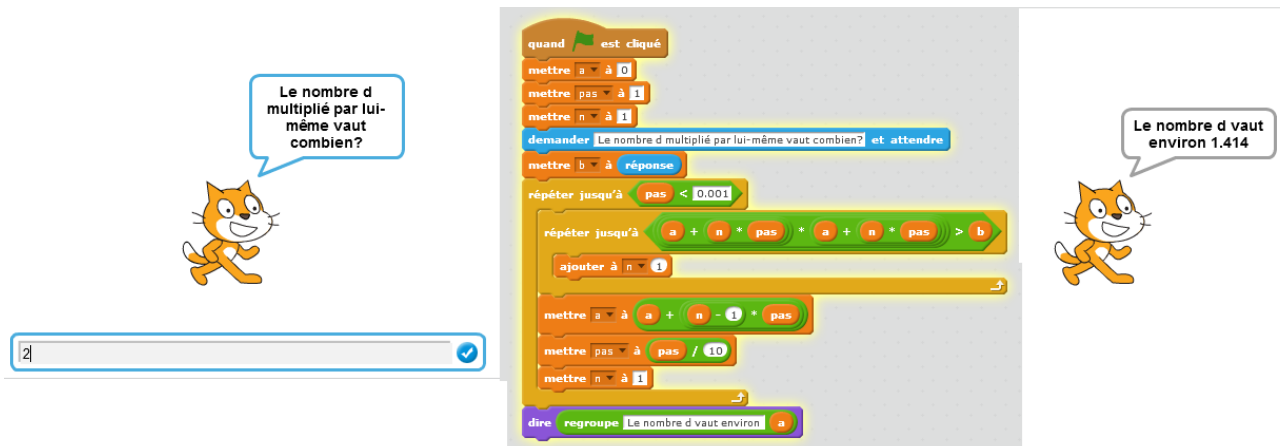
En fait, on a $1{,}414 \times 1{,}414=1{,}414^2=1{,}999396$ et $1{,}415 \times 1{,}415=1{,}415^2=2{,}002225$.
Donc $1{,}414<d<1{,}415$. Si on veut savoir laquelle est la plus proche de la vraie valeur il faut continuer pour savoir s'il faut arrondir par défaut ou par excès. On a $1{,}4142^2=1{,}99996164$; $1{,}4143^2=2{,}00024449$.
Donc la valeur approchée de *d* au millième le plus proche est bien 1,414.

c) *Défi* : Déterminer une valeur approchée au millionième près de la valeur de *d*.

La véritable valeur de *d* est notée $\sqrt{2}$ (on dit « racine carrée » de 2) ; ce nombre est, par définition, celui qui, multiplié par lui-même, donne 2. Votre calculatrice donne cette valeur $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$. Comme le nombre π, ce nombre a une écriture décimale qui est illimitée et irrégulière contrairement à l'écriture décimale des fractions (illimitée et régulière, périodique). S'il ne peut pas s'écrire sous forme de fraction, on peut cependant l'approcher aussi près que l'on veut avec des fractions : $\frac{7}{5}=1{,}4$ ou $\frac{10}{7} \approx 1{,}429$ ou $\frac{99}{70} \approx 1{,}414286$.

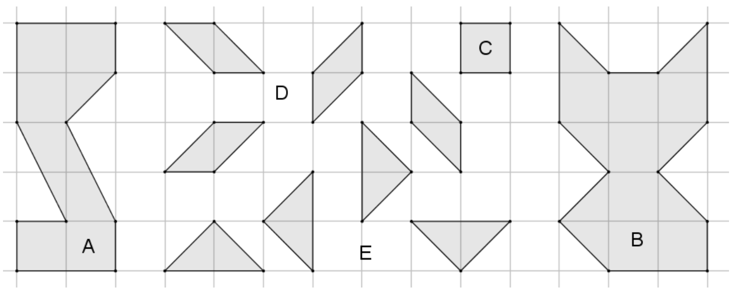
La méthode d'exploration employée pour déterminer cette valeur approchée s'appelle un algorithme.
Ce qu'on a fait : on essaie une valeur *d*,

- si $d^2>2$ alors on essaie avec une valeur qui est inférieure à *d* ;
- si $d^2<2$ alors on essaie avec une valeur qui est supérieure à *d*.



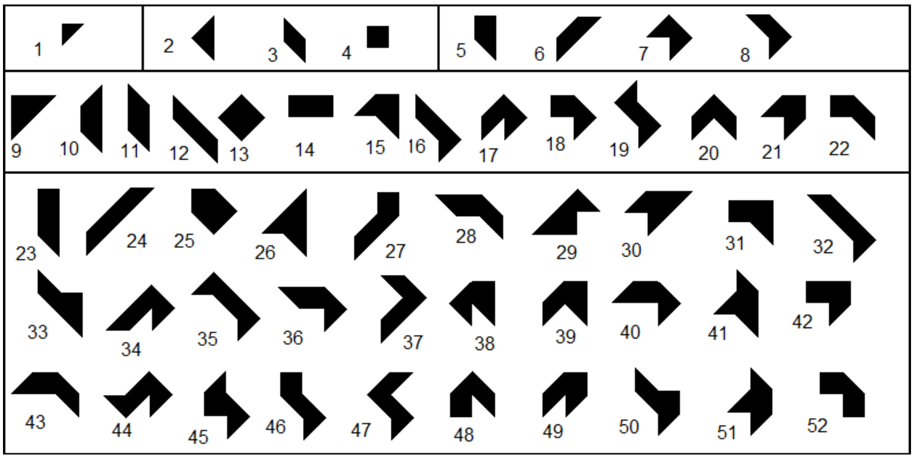
Pour déterminer les valeurs inférieures ou supérieures, il y a plusieurs méthodes. On peut passer en revue les différentes valeurs entières a jusqu'à en trouver une telle que $a < d < a+1$. Ensuite on passe en revue les différents nombres de dixièmes compris entre a et $a+1$; cela conduit à un nouvel encadrement par deux dixièmes consécutifs $\frac{a}{10} < d < \frac{a+1}{10}$ (ce n'est pas la même valeur de a). On poursuit avec les centièmes de la même façon, et puis les millièmes, etc. jusqu'à la précision souhaitée.
On peut le programmer sur Scratch pour déterminer des valeurs approchées aussi proche que l'on veut du nombre d tel que $d^2=2$, mais aussi $d^2=3$, ou n'importe quelle autre valeur.

2) <u>Polyabolos</u>



Les polyabolos sont des polygones constitués d'assemblages corrects de demi-carrés de côté 1. Pour assembler correctement deux demi-carrés, il faut faire coïncider des côtés de même longueur (de longueur 1 ou de longueur d).
Le polygone A dessiné ci-contre n'est pas un polyabolo à cause de la partie intermédiaire qui n'est pas décomposable en demi-carrés. Le polygone B, par contre, est un polyabolo constitué de 21 demi-carrés. Deux polyabolos qui peuvent être superposés exactement sont dits *identiques*, même si ils ne sont pas dessinés de la même façon. Les quatre parallélogrammes et les quatre triangles ci-dessus correspondent, chacun, à un seul polyabolo (noté D et E). Le carré C, D et E sont les trois seuls polyabolos d'aire 1.

a) Dessiner, en utilisant un quadrillage, les quatre polyabolos d'aire 1,5 et les quatorze polyabolos d'aire 2.
Les figures 5 à 8 ci-dessous sont les quatre polyabolos d'aire 1,5 (formées par l'assemblage correct de trois demi-carrés de côté 1). Les figures 9 à 22 sont les quatorze polyabolos d'aire 2 (formées par assemblage correct de quatre demi-carrés de côté 1).
Ce n'était pas demandé mais les figures 23 à 52 sont les trente polyabolos d'aire 2,5 (formées par l'assemblage correct de cinq demi-carrés de côté 1). Il y a ainsi, quand on augmente le nombre de demi-carrés qui les composent, un nombre croissant de polyabolos : la suite de ces nombres est 1, 3, 4, 14, 30, 107, 316, 1105, 3667, 12818, etc.



b) Compter les nombres de côtés N_c (*c=côté du carré*) de longueur 1 et N_d (*d=diagonale du carré*) de longueur d. Déterminer alors la valeur approchée arrondie au millième de ces périmètres en utilisant votre valeur approchée de d (question 1). Ranger les différentes valeurs de P par ordre croissant et, pour chacune de ces valeurs, dessiner les polyabolos ayant cette valeur pour périmètre.
Présentons notre réponse dans un tableau (ci-contre).

	aire	nombre de demi-carrés	nombre de côté 1	nombre de côtés d	périmètre
1	0,5	1	2	1	3,4142135624
2	1	2	2	2	4,8284271247
3	1	2	2	2	4,8284271247
4	1	2	4	0	4
5	1,5	3	4	1	5,4142135624
6	1,5	3	2	3	6,2426406871
7	1,5	3	2	3	6,2426406871
8	1,5	3	2	3	6,2426406871
9	2	4	4	2	6,828
10	2	4	4	2	6,828
11	2	4	4	2	6,828
12	2	4	2	4	7,657
13	2	4	0	4	5,657
14	2	4	6	0	6,000
15	2	4	4	2	6,828
16	2	4	2	4	7,657
17	2	4	2	4	7,657
18	2	4	4	2	6,828
19	2	4	2	4	7,657
20	2	4	2	4	7,657
21	2	4	4	2	6,828
22	2	4	4	2	6,828

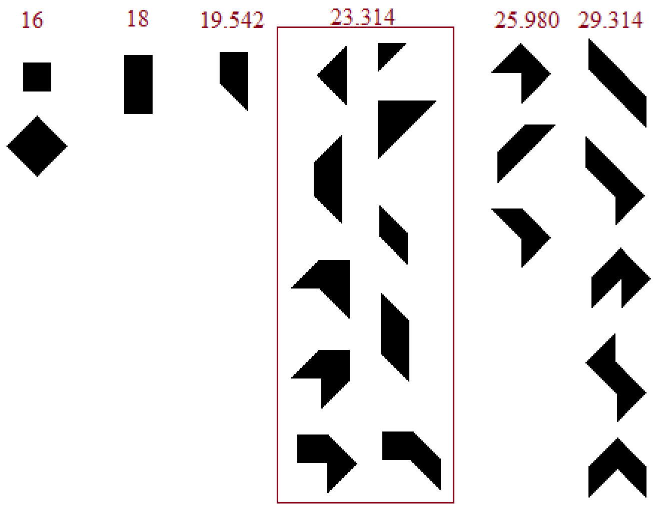
Pour calculer le périmètre P de chacun des polyabolos d'aire inférieure ou égale à 2, il faut multiplier N_d par d et lui ajouter N_c. La formule utilisée est donc $P=N_c+d\times N_d$.
On constate que certains polyabolos ont le même périmètre :

- les n°2 et 3 ($P=2+d\times 2\approx 4{,}828$)
- les n° 6, 7 et 8 ($P=2+d\times 3\approx 6{,}243$).
- les n° 9, 10, 11, 15, 18, 21 et 22 ($P=4+d\times 2\approx 6{,}828$).
- les n° 12, 16, 17, 19 et 20 ($P=2+d\times 4\approx 7{,}657$).

Les neuf différentes valeurs de d rangées par ordre croissant avec un représentant de chacune de ces valeurs sont données ci-contre.

c) On dit d'une forme qu'elle est *compacte* lorsque le nombre $I_{Compac}=\frac{P\times P}{A}$, noté $\frac{P^2}{A}$ (quotient du carré de son périmètre P et de son aire A) est petit. Déterminer les différentes valeurs prises par I_{Compac} pour les polyabolos d'aire inférieure ou égale à 2. Ranger les différentes valeurs de I_{Compac} par ordre croissant et, pour chacune de ces valeurs, dessiner les polyabolos ayant cette valeur de I_{Compac} .

Il suffit d'ajouter une colonne dans notre tableau. On constate alors que, pour les polyabolos d'aire inférieure ou égale à 2, le rapport $I_{Compac}=\frac{P^2}{A}$ prend sept différentes valeurs, comprises entre 16 et 29,542 environ. La forme la plus compacte est le carré avec un rapport égal à 16 (les deux carrés ont la même valeur). Les formes les moins compactes sont les polyabolos d'aire 2 ayant les plus grands périmètres : avec un rapport I_{Compac} égal environ à 29,314, les cinq polyabolos n°12, 16, 17, 19 et 20 dépassent en non-compacité (expression convenable, faute de mieux, pour exprimer le contraire de la compacité) tous les autres de cette collection provisoire.



	A=aire	P=périmètre	P^2/A
1	0,5	3,414	23,314
2	1	4,828	23,314
3	1	4,828	23,314
4	1	4	16
5	1,5	5,414	19,542
6	1,5	6,243	25,980
7	1,5	6,243	25,980
8	1,5	6,243	25,980
9	2	6,828	23,314
10	2	6,828	23,314
11	2	6,828	23,314

	A=aire	P=périmètre	P^2/A
12	2	7,657	29,314
13	2	5,657	16
14	2	6	18
15	2	6,828	23,314
16	2	7,657	29,314
17	2	7,657	29,314
18	2	6,828	23,314
19	2	7,657	29,314
20	2	7,657	29,314
21	2	6,828	23,314
22	2	6,828	23,314

J'ai mis, sur l'image ci-dessus, les sept valeurs de la compacités rencontrées, rangées par ordre croissant, avec tous les représentants de chaque valeur. On peut remarquer que la répartition n'es pas régulière : une catégorie contient à elle seule près de la moitié des formes ; sa compacité (valeur du rapport $\frac{P^2}{A}$) est environ 23,314, soit la moyenne entre le minimum (16) et le maximum (29,314).

	A=aire	P=périmètre	P^2/A
P1	5	8,83	15,594
P2	8	11,66	16,994
P3	6	9,66	15,553
P4	2,5	6,24	15,575
H1	4	7,66	14,669
H2	3	6,83	15,550
H3	8	10,83	14,661
H4	12	13,31	14,763

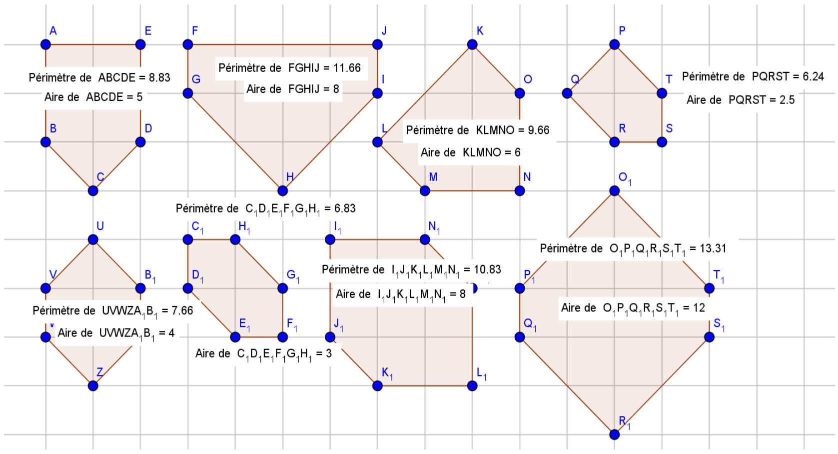
d) *Défi* : En augmentant le nombre de demi-carrés constituant les polyabolos, on peut en trouver qui sont plus compacts que ceux qui ont déjà été obtenus. En déterminer un, en précisant son périmètre P, son aire A et son nombre I_{Compac}. Déterminer également un polyabolo moins compact que tous ceux déjà obtenus.

Pour explorer la famille des polyabolos sous l'angle de la compacité, on peut tracer les candidats les plus compacts et les moins compacts, jusqu'à en trouver un qui réponde vraiment à une des questions.

Formes compactes :

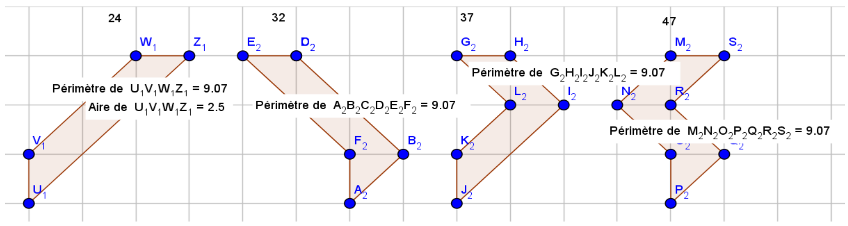
On a déjà tous les carrés : il en existe de différentes tailles, jusqu'à l'infini, mais tous les carrés ont la même valeur du rapport $\frac{P^2}{A}$ qui est 16. Il nous en faut de plus compact. Les polyabolos en forme de triangle ont tous la même forme et la même valeur du rapport qui est 23,314 environ.

Essayons avec les hexagones ou des pentagones. J'ouvre une page GeoGebra et je trace des pentagones et des hexagones qui sont des polyabolos (c'est facile en utilisant le quadrillage). Je fais ensuite afficher la longueur et l'aire des formes et j'entre ces valeurs dans un tableur (voir le tableau page précédente). Le calcul du rapport $\frac{P^2}{A}$ pour ces formes me montre qu'elles sont toutes, ou presque, plus compactes que le carré (seul le 2ème pentagone, noté P2, est moins compact que le carré). Le premier polyabolo plus compact que le carré est celui qui a la plus petite aire : c'est le polyabolo d'aire 2,5 qui est formé de cinq demi-carrés qui l'emporte. Dans notre première image, où nous avions donné les trente polyabolos d'aire 2,5 celui-ci porte le n°25.



Formes les moins compactes :

La méthode est la même ici. On essaie de dessiner des formes étendues, allongée ou tarabiscotées (au contour dentelé) pour augmenter le périmètre sans augmenter l'aire. Essayons déjà les polyabolos d'aire 2,5. J'en trouve quatre qui ont un périmètre assez grand pour leur aire : avec une valeur de 9,07 pour le périmètre et une aire de 2,5, le rapport $\frac{P^2}{A}$ est égale environ à 32,906. Cette valeur étant supérieure à 29,314 ces candidats sont moins compactes que toutes les formes précédentes. Ces formes trouvées portent sur notre image du début, les numéros 24, 32, 37 et 47.

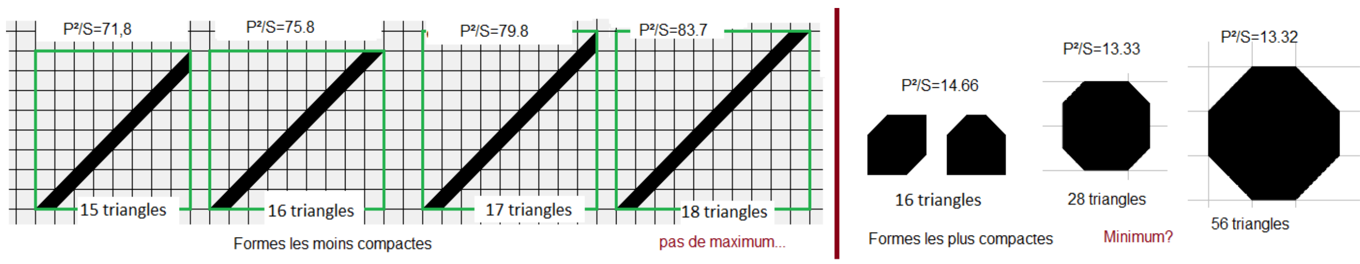


On peut remarquer que les polyabolos les moins compacts ont des formes de serpent où les demi-carrés sont assemblés par les côtés de longueur 1. Ils mettent sur le bord leurs côtés de longueurs d, allongeant ainsi le périmètre sans modifier l'aire.

Le tableau ci-dessous résume nos trouvailles :

	A=aire	nombre de demi-carrés	nombre de côté 1	nombre de côtés d	P=périmètre	P^2/A
25	2,5	5	2	3	6,243	15,588
22, 32, 37, 47	2,5	5	2	5	9,071	32,914

Peut-on faire mieux ? Oui, pour diminuer la compacité, on y arrive toujours : en prenant des serpents de plus en plus longs). La figure ci-dessous montre des polyabolos de compacité de plus en plus faible (presque 84 pour 18 triangles assemblés). Pour augmenter la compacité des polyabolos, c'est bien plus difficile et plus limité : on trouve des formes de compacité inférieure au polyabolo 25, mais cela va-t-il en-

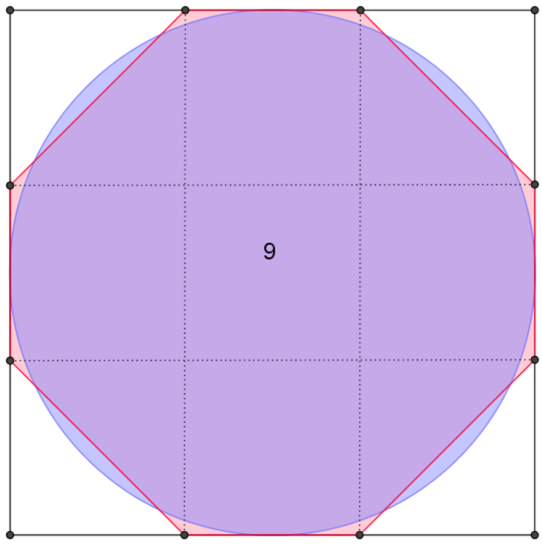


deçà de 13,322 (le polyabolo formé par 56 triangles ci-dessous a une forme octogonale qui paraît indépassable, mais cela est peut-être faux ? Qui veut s'attaquer au problème, de trouver un polyabolo encore plus compact, s'il en existe ou de prouver qu'il n'en existe pas de plus compact).
Une indication pour ceux qui voudraient relever le défi : il faut chercher parmi les octogones à quatre axes de symétrie, comme nos deux derniers exemples. On peut augmenter l'aire de manière à se rapprocher au mieux d'un cercle...

3) <u>Cercle et carré</u>
Le cercle est la forme la plus compacte que l'on puisse trouver.
a) Combien vaut le rapport $I_{Compacité}=\frac{P^2}{A}$ pour un cercle ?
Un cercle de diamètre 9 a une aire égale à : $\pi\times(\frac{D}{2})^2=\pi\times(\frac{9}{2})^2=\pi\times\frac{81}{4}=20{,}25\times\pi\approx 63{,}61725124$.
Son périmètre vaut alors $\pi\times D=9\pi\approx 28{,}274333$
Le rapport $I_{Compacité}=\frac{P^2}{A}=\frac{(9\times\pi)^2}{20{,}25\times\pi}=\frac{81\times\pi}{20{,}25}\approx 12{,}566$.

b) Pour évaluer le nombre π, les égyptiens avaient obtenu ce résultat :
« Un cercle de diamètre 9 a quasiment même aire qu'un carré de côté 8 »
Cette affirmation conduit à donner quelle valeur approchée à π ?
Que pensez-vous de la précision de cette estimation ?

Un carré de côté 8 a une aire égale à $8^2=64$.
Prendre l'un pour l'autre revient à confondre 64 et $\pi\times\frac{81}{4}$, donc à considérer comme vraie l'égalité $\pi\times\frac{81}{4}=64$.
Cela conduit à la valeur approchée de π : $\frac{4}{81}\times 64=\frac{256}{81}\approx 3{,}160493827$.
La différence entre cette valeur approchée et la vraie valeur de π est égale à $\frac{256}{81}-\pi\approx 0{,}0189011735$.
L'erreur commise est d'un peu moins de deux centièmes ce qui n'est pas très grand et montre que les mathématiques de cette époque étaient déjà bien avancées.
Il faudra attendre Archimède, 250 ans environ avant J.-C., soit plus de 1250 ans après le scribe Ahmès, pour trouver une meilleure valeur approchée de π . En effet, le savant grec montra que ce rapport (on ne l'appelait pas encore π à cette époque) était compris entre $\frac{223}{71}\approx 3{,}1408$ et $\frac{22}{7}\approx 3{,}1428$.



Voici, avec la précision des tracés de GeoGebra, un cercle de diamètre 9 et un octogone d'aire 63. Cette figure est souvent prise par erreur (me semble-t-il) pour expliquer l'approximation que l'on trouve dans le papyrus Rhind. Le texte en question parle d'un carré dont le côté mesure $\frac{1}{9}$ de moins que le diamètre du cercle. Ce carré a donc un côté de 8 et une aire de 64 (et non 63).
En confondant 63 et $\pi\times\frac{81}{4}$, on arriverait à la valeur approchée de π : $\frac{4}{81}\times 63=\frac{28}{9}\approx 3{,}111111...$ qui est bien moins bonne que la précédente.
Pour info, le jour de π est le 14 mars (en anglais 3.14) !
On s'intéresse toujours aujourd'hui à ce nombre qui, à lui-seul, représente les mathématiques tout entières.
L'usage de la lettre grecque π, première lettre de « περίμετρος » – périmètre en grec – n'est apparu qu'au 18^e^ siècle (utilisé la 1^ère^ fois par William Jones en 1706, puis adopté définitivement par Euler en 1736).

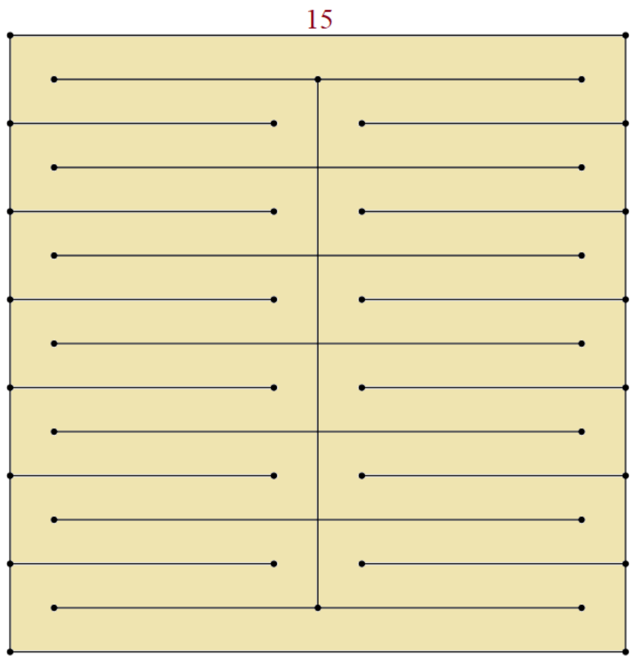
c) *Défi* : Comment peut-on découper un carré de papier mesurant 15*cm* de côté, afin de créer un trou suffisamment grand pour y passer la tête ? Faire le plan du découpage proposé et donner, pour ce plan de découpe, une estimation du périmètre de la forme développée qui est supposée laisser passer la tête. Comparer ce périmètre avec le périmètre de votre tête.

Une petite vidéo de Mickaël Launay permet de réfléchir à la question posée.

Il faut découper une forme qui se déroule dont le périmètre est suffisant pour y faire passer la tête.

Ma tête mesurant environ 60 *cm* de périmètre, bosse des maths comprise ;-)

Je vais tenter de découper mon carré de papier de manière à créer un périmètre largement supérieur à ce périmètre, afin que la tête passe sans déchirer le papier.



Avec cette découpe, j'obtiens deux fois 12 morceaux d'environ 5 *cm*, soit 120 *cm*. En y ajoutant les deux bords d'environ 13 *cm* chacun (il ne faut pas compter les extrémités car elles vont être utilisées dans les boucles de la forme dépliée), cela devrait permettre de disposer d'un périmètre de presque 146 *cm*, le double de ce qui est nécessaire pour y faire passer la tête. Le but n'était pas d'être au plus juste mais voici un plan de découpe plus adapté au problème, avec un pliage prélable pour les amateurs d'origami.

Le périmètre obtenu est juste suffisant.