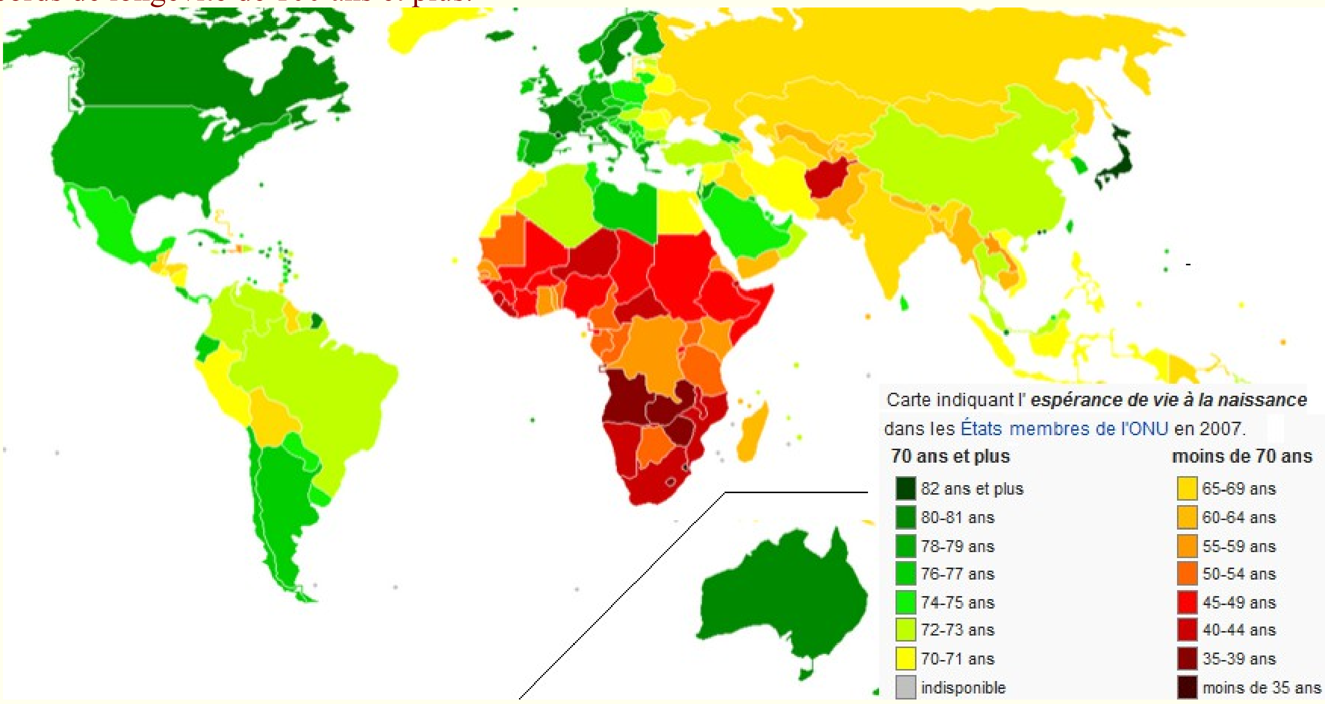
CORRECTION

I] Une question vague

Combien de fois bat un cœur humain ?

(*Expliquer votre raisonnement qui conduira vraissemblablement à un encadrement avec, éventuellement, des limitations d'usage telles que « pour les hommes », « pour les femmes », « dans la majorité des cas », etc.*)

Cette question doit, évidemment, être traitée d'une façon assez générale, en considérant un individus vivant une vie moyenne. Certains vivent très peu, d'autres très longtemps, la majorité des vivants vivent une vie moyenne qui s'établit en 2015, en France, pour les hommes, aux alentours de 80 ans et, pour les femmes, aux alentours de 85 ans. Je cite Wikipédia : « l'espérance de vie à 20 ans en 2012 est de 59 ans pour les hommes et 65,3 ans pour les femmes », cela signifie qu'un homme de 20 ans pouvait alors espérer vivre jusqu'à 79 ans, et une femme de 20 ans jusqu'à 85,3 ans. L'évolution des conditions de vie a tendance à entraîner une augmentation de la durée de vie humaine, avec un progressif rattrapage de la durée de vie des hommes sur celle des femmes. La carte du monde donne les espérances de vie à la naissance dans les différentes parties du monde. On y constate une très grande variation de la durée moyenne de la vie humaine : du simple au double ! *Nous retiendrons une durée de vie moyenne de 80 à 85 ans* avec quelques records de longévité de 100 ans et plus.



Il nous faut maintenant nous pencher sur le rythme cardiaque. On peut prendre son pouls : le mien bat à 60 pulsations par minute mais si je grimpe la côte menant au Lycée en courrant (parce que je suis en retard), il peut monter à 120 battements par minute (120 b/min). La pulsation d'un enfant de 5 ans est très rapide, supérieure à 100 b/min ! La vitesse de pulsation du cœur varie d'un instant à l'autre selon les activités et selon l'âge. Elle varie donc beaucoup au cours de toute une vie ! On doit, encore ici, prendre une durée moyenne. Wikipédia me renseigne sur le cœur moyen des êtres humains : 70 b/min.

Au passage, j'ai lu que celui des baleines bat à 20 b/min tandis que les souris ont des pulsations de 500 à 600 b/min !
Les enfants de 1 à 2 ans ont des pulsations moyennes de 110 b/min (±40), les enfants de 6 à 12 ans ont des pulsations moyennes de 90 b/min (±30), les adultes ont des pulsations moyennes de 70 b/min (±10). Je constate que mon rythme est peu élevé par rapport aux autres adultes. Le rythme cardiaque est plus élevé chez les femmes. On peut aussi diminuer la fréquence de son rythme cardiaque par un entraînement adapté (épreuves d'endurance), ainsi un champion cycliste peut avoir un cœur qui bat à 30 b/min au repos !

Quoi qu'il en soit, *je retiens le rythme de 70 b/min qui semble une moyenne humaine* acceptable.

70 battements par minute, cela fait 70×60 battements par heure, $70\times60\times24$ battements par jour, $70\times60\times24\times365$ battements par an, et donc $70\times60\times24\times365\times83$ battements pour une vie moyenne de 83 ans. Calculons ce nombre, on trouve 3 053 736 000. Un peu plus de *trois milliards de battements en moyenne*.

Pour l'encadrement attendu, on fait le travail avec une durée de vie allant de 80 à 85 ans et une fréquence de 60 à 80 b/min. Le nombre de battements qui résulte de ces variations va donc de $60\times(60\times24\times365)\times80\approx2{,}5$ milliards à $80\times(60\times24\times365)\times85\approx3{,}5$ milliards. Bien sûr, je n'ai examiné que des valeurs moyennes ; si on s'intéresse aux valeurs extrèmes, cela va de 0 (cela arrive parfois malheureusement) à sans doute 4 ou 5 milliards mais le record est inconnu.

Par curiosité je suis allé chercher la longévité de la souris : 2 ans. Ainsi avec son rythme cardiaque de 550 b/min, le cœur d'une souris bat 550×60×24×365×2=578 160 000 battements. Ce n'est pas égal aux humains mais cela s'en rapproche (j'avais une hypothèse en tête : le cœur bat plus vite pour les espèces qui vivent moins longtemps... cela semble faux...). Pour les baleines, selon ma théorie, elle devrait vivre au moins trois fois plus vieilles que les hommes. Mais, d'après Wikipédia, il semblerait qu'elles aient une longévité voisine de celle des hommes...

II] Algorithme numérique

On fait le produit des chiffres d'un nombre, et on recommence avec le résultat, jusqu'à ce que celui-ci ne s'écrive plus qu'avec un seul chiffre.

- 45 conduit à 20 (car 4×5=20) qui conduit à 0 (car 2×0=0)
- 46 conduit à 24 (car 4×6=24) qui conduit à 8 (car 2×4=8)

On appelle *persistance*, le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre le but fixé (obtenir un seul chiffre). Ainsi, 45 et 46 sont des nombres de persistance 2.

a) Montrer que la persistance de 679 est 5 et déterminer celle du palindrome 987 187 187 121 781 781 789.

La persistance de 679 est 5 car il faut 5 étapes pour arriver sur le chiffre 6 :

Étape 1 : 6×7×9=378	Étape 2 : 3×7×8=168	Étape 3 : 1×6×8=48	Étape 4 : 4×8=32	Étape 5 : 3×2=6

La persistance du palindrome 987 187 187 121 781 781 789 est 11 car il faut 11 étapes pour arriver sur le chiffre 0 (ci-dessous, je n'écris pas les chiffres 1 qui n'apportent rien au produit) :

Étape 1 : 9×8×7×8×7×8×7×2×9×8×7×8×7×8×7= 1 580 544×3 161 088=4 996 238 671 872	Étape 2 : 4×9×9×6×2×3×8×6×7×8×7×2= 438 939 648	Étape 3 : 4×3×8×9×3×9×6×4×8= 4 478 976
Étape 4 : 4×4×7×8×9×7×6=338688	Étape 5 : 3×3×8×6×8×8=27 648	Étape 6 : 2×7×6×4×8=2688
Étape 7 : 2×6×8×8=768	Étape 8 : 7×6×8=336	Étape 9 : 3×3×6=54
Étape 10 : 5×4=20	Étape 11 : 2×0=0	

Remarque : à l'heure d'aujourd'hui on n'a pas trouvé de nombre de persistance supérieure à 11.

b) Trouver, si possible, un nombre de persistance 2 pour les dix valeurs possibles de *C*.

On peut arriver sur tous les chiffres *C* en une étape, et il y a, à chaque fois, une infinité de possibilités :

Étape 1	10, 20,	11, 111,	12, 21,	13, 31,	14, 22,	15,51,	16, 23,	17, 71,	18,24	13,33
C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

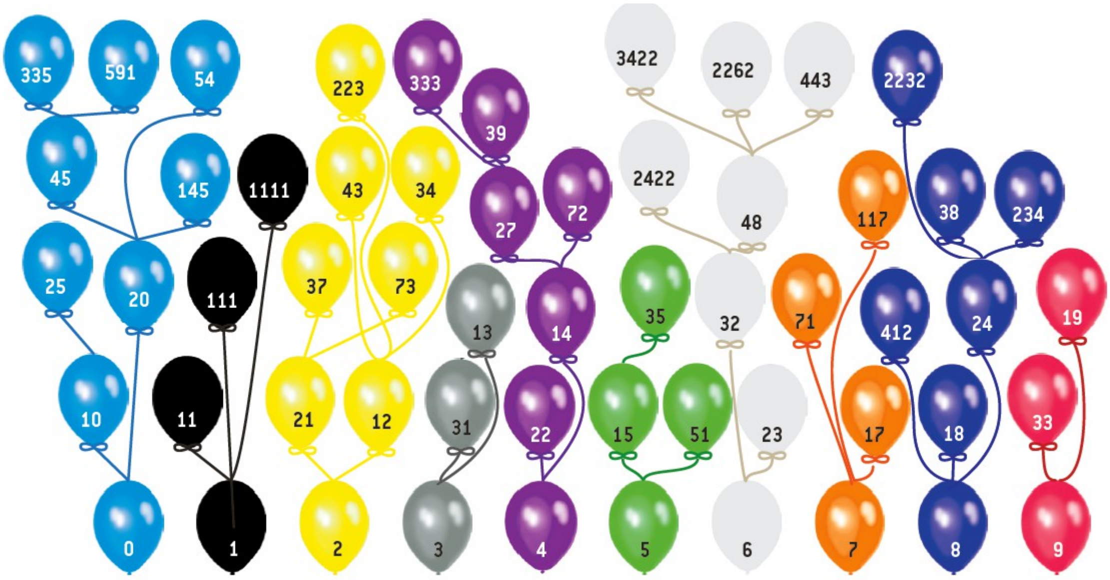
Pour arriver sur un chiffre en deux étapes c'est moins évident.

Étape 2	25		34		27	35	23		36	
Étape 1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Pour obtenir 11, 13, 17 et 19, on ne parvient pas à trouver un nombre *n* qui conduisent à ces valeurs en une étape. L'explication est que ces nombres sont *premiers* : ils ne sont obtenus par aucun produit, excepté des produits comme 1×13=13.

La recherche ne s'arrête pas là. Pour arriver sur 3, on peut passer, à l'étape 1, par 13 qui n'a pas d'antécédent comme on vient de le dire, mais aussi par 31 qui n'en a pas non plus pour la même raison, et encore par des nombres tels que 113, 131, 3111, etc. parmi ceux-ci, on peut imaginer qu'il y en a au moins un qui se décompose en un produit des deux nombres supérieurs à 1... Par exemple 3111 n'est pas premier car il est divisible par 3, le quotient étant 1037 qui s'écrit sous la forme du produit 17×61. Finalement 3111=3×17×61 et on ne peut obtenir ce nombre en multipliant seulement des chiffres entre eux.

La recherche de solutions éventuelle ne paraît pas simple et n'est pas tellement prometteuse (plus les nombres sont grands, moins ils ont de chance de se décomposer comme un produit de chiffres seul), donc nous en resterons là. L'image ci-dessous avec les ballons illustre cette question, sans donner d'explication. Elle est extraite d'un article de J.-P. De Lahaye qui écrit régulièrement des articles sur ce genre de sujet dans le magazine Pour La Science (n°430 d'août 2013. Attention, pour des raisons de commodité certaines branches ne sont pas à la bonne hauteur : l'arbre de ballons ayant pour racine « 1 » n'a sans doute pas de branche de hauteur 3 ; de même, d'autres arbres ne montent pas très haut...)



c) Quel est le plus petit nombre de persistance 4 ? (*Expliquer votre raisonnement*)

Cette question est plus facile que la précédente. La méthode de recherche est simple : j'essaie tous les nombres à deux chiffres, en écrivant les produits des deux chiffres dans un tableau.

Voici le tableau obtenu :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
30	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
40	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
50	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
60	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
70	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
80	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
90	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

J'ai mis des couleurs aux nombres selon leur persistance :

- sur fond blanc, les nombres de persistance 1 (ils donnent un seul chiffre à la première étape) comme 14 car 1×4=4 ou 23 car 2×3=6.
- Sur fond cyan, les nombres de persistance 2 : ils donneront un seul chiffre à l'étape suivante (ce n'est pas difficile à reconnaître, on les connaît déjà). Il y a, par exemple, 63 car 6×3=18 et 1×8=8. J'ai écrit 18 pour le produit : c'est 18 qui est colorié en cyan, mais c'est 63 le nombre de persistance 2 qui a conduit à 18 (qui donnera finalement *C*=8).
- Parmi les nombres qui restent, on a colorié ceux qui correspondent à des nombres de persistance 3 en bleu marine : pour cela, on examine ce qu'ils donnent à l'étape suivante, si c'est un nombre sur fond de couleur cyan, c'est qu'il y a une persistance de 3, sinon la persistance est supérieure. Par exemple, 28 est en bleu marine car, après, on aura 2×8=16 qui se trouve parmi les nombres sur fond cyan. Les nombres 74 ou 47 ainsi identifiés ont une persistance de 3.
- il ne reste qu'un nombre qui n'a pas été colorié : c'est 49 qui correspond au premier résultat de 77. Quand on calcule 4×9=36, on tombe sur un nombre qui a été colorié en bleu foncé, donc on met 49 d'une autre couleur, en violet, et le nombre auquel il correspond, 77, est ainsi identifié comme le premier nombre de persistance 4, donc le premier nombre consistant.

Pour le deuxième nombre consistant, on cherche un nombre à trois chiffres. Les plus petits commencent par le chiffre 1. Il y a évidemment 177 qui conduira à 49, puis à 36, 18 et 8. C'est un nombre consistant et c'est le second, ceux qui sont avant se comportent forcément comme les nombres à deux chiffres situés avant 77.

III] Carrés magiques de produits

Dans un carré magique de produits, on doit obtenir le même produit pour les huit lignes de trois nombres.

a) Expliquer pourquoi, A étant un nombre non nul, le carré n°1 est magique. Expliquer que, en plus d'être magique, ce carré est latin*. En prenant un nombre B≠A et en retournant la disposition du carré n°1, on obtient le

A	1	A×A
A×A	A	1
1	A×A	A

carré n°1

B×B	1	B
1	B	B×B
B	B×B	1

carré n°2

carré n°2. Effectuer le produit des deux carrés, case par case, et expliquer pourquoi le carré obtenu (noté n°3) est magique. Ce carré est-il latin ?

Le carré n°1 est magique car le produit de chaque ligne, chaque colonne et des deux diagonales est égal à 1×A×(A×A)=A×A×A (un nombre que l'on note aussi A^3, le cube de A).

Dans chaque ligne et dans chaque colonne, on retrouve les trois nombres, 1, A et A×A (un nombre que l'on note aussi A^2, le carré de A). Ce carré magique est donc aussi un carré latin.

Ce carré n'est pas très intéressant pour lui-même (car il ne contient que 3 nombres différents) mais, combiné avec un carré du même genre mais retourné (le carré n°2), il conduit au carré suivant (le carré n°3 ci-dessous) qui est magique aussi et beaucoup plus intéressant puisqu'il contient généralement 9 nombres différents. Le produit de chaque ligne, colonne ou diagonale est égal à A×A×A×B×B×B que l'on peut noter $A^3 \times B^3$ ou bien aussi $(A\times B)^3$.

A	1	A×A
A×A	A	1
1	A×A	A

carré n°1

×

B×B	1	B
1	B	B×B
B	B×B	1

carré n°2

=

A×B×B	1	A×A×B
A×A	A×B	B×B
B	A×A×B×B	A

carré n°3

Dans ce carré n°3, le nombre 1 est au centre de la ligne du haut, mais on peut imaginer que ce carré soit retourné à son tour, dans un sens ou dans l'autre, cela ne lui enlèvera pas son côté magique.

b) Voici trois carrés magiques de produits à compléter en utilisant le procédé qui a conduit au carré n°3.

J'ai suivi le même procédé, en remplaçant A et B, donnés dans l'énoncé pour les carrés n°1 et 2 : ce sont les mêmes mais retourné ! Pour le carré n°3, il y avait une erreur dans l'énoncé : avec 121=11×11 au lieu de 101 qui est premier, on complète sans difficulté ce carré.

	N°1		216
2	9	12	216
36	6	1	216
3	4	18	216
216	216	216	216

	N°2		216
12	1	18	216
9	6	4	216
2	36	3	216
216	216	216	216

	N°3		166375
5	121	275	166375
3025	55	1	166375
11	25	605	166375
166375	166375	166375	166375

c) Après avoir remarqué que 1 367 631 est le produit de deux cubes, trouver un carré magique de produits dont le produit magique est 1 367 631.

1 367 631=111×111×111 et 111=3×37, d'où le carré magique suivant :

	N°4		1367631
4107	1	333	1367631
9	111	1369	1367631
37	12321	3	1367631
1367631	1367631	1367631	1367631

*carré latin : carré où sont mis les mêmes symboles, une fois et une seule, dans chaque ligne et dans chaque colonne.

IV] Combinaisons des neufs chiffres

a) Avec juste les règles S et E, montrer que le plus grand résultat possible est N=362 881. Si l'on emploie rien que des additions, on obtient N=45. Montrer qu'avec seulement S et E, on peut obtenir moins de 45. Trouver une des quatre combinaisons possibles qui donnent N=100 avec seulement S et E.

Liste des règles supplémentaires

S : Les seuls *symboles* acceptés sont +, × et ÷. **Pas de soustraction** donc avec la règle S.

E : Le résultat N **doit** être un *entier* et tous les résultats intermédiaires aussi **doivent** être entiers.

P : Un couple au moins de *parenthèses* **utiles**, comme dans 1+2×3×4×(5+6×7+8+9), est obligatoirement présent.

O : L'*ordre* des chiffres **doit** être modifié. On peut par exemple écrire 9+8×7+1+2×3×6×5÷4.

C : Une *concaténation* des chiffres est **nécessaire**. On doit regrouper des chiffres, par exemple écrire 123+45+6789.

La décomposition 362 880=1×2×3×4×5×6×7×8×9 n'est pas la plus grande.

Multiplier par 1 ne change pas le produit 2×3×4×5×6×7×8×9, alors qu'ajouter 1 l'augmente.

Le plus grand nombre possible avec ces règles est donc 362 881=1+2×3×4×5×6×7×8×9.

On a 1+2+3+4+5+6+7+8+9=T_9=10×9÷2=45.

Pour trouver le plus petit nombre possible, c'est plus difficile sans un programme informatique qui explore toutes les possibilités. J'ai écrit un tel programme pour vous donner la réponse, mais j'attendais de votre part une certaine réflexion pour parvenir à abaisser au maximum le résultat final.

La seule opération qui fasse diminuer un résultat est la division, il faut donc en employer au moins une, sauf pour le résultat 1×2+3+4+5+6+7+8+9=44 qui exploite la particularité de la multiplication par 1.
D'après les résultats de mon programme, il y a quatre résultats possibles inférieurs à 45 : 36, 37, 38 et 44.

```
Solution 1 : 1x2+3x4x5:6+7+8+9 = 36

Solution 1 : 1+2+3x4x5:6+7+8+9 = 37
Solution 2 : 1x2+3x4x5x6x7:8:9 = 37

Solution 1 : 1+2+3x4x5x6x7:8:9 = 38

Solution 1 : 1x2+3+4+5+6+7+8+9 = 44
Solution 2 : 1x2x3x4x5:6+7+8+9 = 44
```

Voici les quatre combinaisons possibles qui donnent *N*=100 avec seulement S et E. Encore une fois, ma méthode a consisté en une exploration systématique avec un programme informatique. De votre part, j'attendais un peu de réflexion sur ce sujet.

```
Solution 1 : 1+2+3+4+5+6+7+8x9 = 100
Solution 2 : 1+2x3x4x5:6+7+8x9 = 100
Solution 3 : 1x2x3+4+5+6+7+8x9 = 100
Solution 4 : 1x2x3x4+5+6+7x8+9 = 100
```

On peut partir de la constatation que la somme 1+2+3+4+5+6+7+8+9=T_9=10×9÷2=45. Il manque 100–45=55, ce qui n'est pas rien. Pour augmenter le résultat, on voit qu'avec un seul produit, il faut utiliser des grands nombres : essayons avec 8×9=72. Si on retire 8+9=17 et qu'on le remplace par 8×9=72, on gagne 72–17=55. C'est la première solution : 1+2+3+4+5+6+7+8×9=100.
Une deuxième solution vient de la remarque que 1+2+3=1×2×3 (le nombre triangulaire T_3=1+2+3 est le seul à être égal à la factorielle correspondante 3!=1×2×3). On peut donc remplacer le début de notre solution pour en donner une seconde : 1×2×3+4+5+6+7+8×9=100.
Peut-être est-il moins évident de trouver les autres combinaisons par la réflexion. Le remplacement de 7+8=15 par 7×8=56 fait gagner 56–15=41. Il manque donc encore 55–41=14. Quelle substitution d'un + par un ×, s'il en existe une, fait gagner 14 à la somme ? 1×2×3+4=10 alors que 1×2×3×4=24, voilà nos 14 de différence ! Et ils n'étaient pas cachés bien loin : 1×2×3×4+5+6+7×8+9=100.
On peut encore tenter notre chance avec le remplacement de 6+7=13 par 6×7=42 qui fait gagner 42–13=29. Il manque donc encore 55–29=26. Quelle substitution d'un + par un ×, s'il en existe une, fait gagner 26 à la somme ? 1×2×3×4+5=29 alors que 1×2×3×4×5=120, trop grand. 1×2+3×4×5=62, encore trop grand. Cette voie n'apporte rien de plus. Il faut essayer un autre stratagème : la division permet de diminuer un produit, et si on veut avoir une division qui donne un quotient entier, il faut partir d'un multiple du diviseur. Avec 2 et 3 on ne peut fabriquer le produit 6 et donc 2×3×5=30 est un multiple de 6 qu'on peut diviser par 6. Reste à savoir si l'une des deux combinaisons : 1×2×3×4×5÷6=120÷6=20 ou 1+2×3×4×5÷6=1+120÷6=21, apporte quelque chose d'intéressant. À la place de 1+2+3+4+5+6=21, la première donne 1 de moins, alors que la seconde ne change rien ! Voilà notre quatrième et dernière solution : 1+2×3×4×5÷6+7+8×9=100.

b) Trouver une combinaison qui donne *N*=100 avec seulement S, E et P.
Trouver une combinaison qui donne *N*=100 avec seulement S, E et O.
Trouver une combinaison qui donne *N*=100 avec seulement S, E et C.

Si on autorise et oblige une paire de parenthèses utiles en plus des règles *S* et *E*, pour trouver *N*=100 j'ai trouvé dix solutions. Ce n'est pas si facile de les trouver par un simple raisonnement : il faut avoir un sixième sens mathématique !

```
 Solution 1 : (1+2+3)x4+5+6+7x8+9 = 100
 Solution 2 : 1+2x(3+4+5x6+7):8x9 = 100
 Solution 3 : (1+2)x3+4x5+6+7x8+9 = 100
 Solution 4 : (1+2)x3x4+5+6x7+8+9 = 100
 Solution 5 : (1+2x3x4x5x6+7):8+9 = 100
 Solution 6 : (1+2):3+4+5x6+7x8+9 = 100
 Solution 7 : (1x2+3x4)x5+6+7+8+9 = 100
 Solution 8 : 1x(2+3x4)x5+6+7+8+9 = 100
 Solution 9 : 1x2x(3+4+5):6x7+8x9 = 100
Solution 10 : 1x2x(3+4)x5+6+7+8+9 = 100
```

Si on autorise et oblige un changement de l'ordre des chiffres en plus des règles *S* et *E*, pour trouver *N*=100 il y a de très nombreuses solutions. Ci-dessous je donne les sept solutions dans l'ordre inverse (à gauche), l'ordre qui donne le plus de solutions : 23 solutions pour l'ordre 5 1 6 4 2 3 9 8 7 (à droite). J'ai ajouté également d'autres solutions trouvées au cours de ma recherche de l'ordre qui avait le plus de solutions (au centre) : en commençant par l'ordre croissant qui a 4 solutions (je n'en écrit qu'une à chaque fois), je trouve l'ordre 1 2 3 4 6 5 7 8 9 qui a 6 solutions, puis l'ordre 1 2 3 6 4 5 9 8 7 qui a 7 solutions, etc. jusqu'à l'ordre 5 1 6 4 2 3 9 8 7 qui en a 23.

Ordre décroissant

```
Solution 1 : 9+8x7+6+5+4x3x2x1 = 100
Solution 2 : 9+8x7+6+5+4x3x2:1 = 100
Solution 3 : 9x8+7+6+5+4+3+2+1 = 100
Solution 4 : 9x8+7+6+5+4+3x2x1 = 100
Solution 5 : 9x8+7+6+5+4+3x2:1 = 100
Solution 6 : 9x8+7+6x5x4:3:2+1 = 100
Solution 7 : 9x8x7:6+5+4+3x2+1 = 100
```

Recherche du meilleur ordre

```
4 : 1x2x3x4+5+6+7x8+9 = 100
5 : 1x2x3+4x6+5+7x8+9 = 100
6 : 1x2x3x4+6+5+7x8+9 = 100
7 : 1x2x3:6+4x5+9x8+7 = 100
8 : 1x2x7x5+4x9:6+3x8 = 100
9 : 1x4x5+6:3:2+7+9x8 = 100
10 : 1x5x2x7+4x9:6+3x8 = 100
11 : 1x5x4+6:2:3+7+8x9 = 100
12 : 1x5x4+6:2:3+9x8+7 = 100
13 : 1x7x9+8+6:2x3+4x5 = 100
14 : 1x7x9+8x6:2:3x4+5 = 100
15 : 2:1x9x7:6x3+5+8x4 = 100
16 : 2x9:1x7:6x3+5+8x4 = 100
17 : 2x9x7:6x3+5:1+8x4 = 100
18 : 3:1x9x6:2+8x7:4+5 = 100
19 : 3x9x6:2x1+8x7:4+5 = 100
20 : 3x9x6:2:1+8x7:4+5 = 100
21 : 5:1x4+6x2+3+9+8x7 = 100
22 : 5:1x4+6:2:3+9x8+7 = 100
23 : 5:1x6+4:2+3+9+8x7 = 100
```

Ordre ayant le plus de solutions

```
1 : 5+1+6+4+2+3+9x8+7 = 100
2 : 5+1+6x4+2+3+9+8x7 = 100
3 : 5+1+6x4:2+3+9x8+7 = 100
4 : 5+1x6+4+2+3x9+8x7 = 100
5 : 5+1x6+4+2x3+9x8+7 = 100
6 : 5+1x6+4x2x3+9+8x7 = 100
7 : 5+1x6x4+2x3+9+8x7 = 100
8 : 5+1x6x4x2:3+9x8+7 = 100
9 : 5+1x6x4:2+3+9x8x7 = 100
10 : 5x1+6+4+2+3x9+8x7 = 100
11 : 5x1+6+4+2x3+9x8+7 = 100
12 : 5x1+6+4x2x3+9+8x7 = 100
13 : 5x1+6x4+2x3+9+8x7 = 100
14 : 5x1+6x4x2:3+9x8+7 = 100
15 : 5x1+6x4:2+3x9+8x7 = 100
16 : 5x1x6+4:2+3+9+8x7 = 100
17 : 5:1+6+4+2+3x9+8x7 = 100
18 : 5:1+6+4+2x3+9x8+7 = 100
19 : 5:1+6+4x2x3+9+8x7 = 100
20 : 5:1+6x4+2x3+9+8x7 = 100
21 : 5:1+6x4x2:3+9x8+7 = 100
22 : 5:1+6x4:2+3x9+8x7 = 100
23 : 5:1x6+4:2+3+9+8x7 = 100
```

Si on autorise et oblige une concaténation des chiffres en plus des règles *S* et *E*, pour trouver *N*=100 je vous propose ces trois solutions. Y en a t-il d'autres ? C'est tout ce que mon programme a trouvé : une concaténation de 1 et 2 pour faire 12, une autre de 3 et 4 pour faire 34 et une dernière de 6 et 7 pour faire 67. Bien sûr il n'était pas interdit de faire plus d'une concaténation. Mon exemple d'ailleurs comportait plusieurs concaténations. Le nombre 123 est issu de 2 concaténations (en notant © la concaténation, 123=1©2©3), et il y en a encore quatre autres (45=4©5 et 6789=6© 7©8©9). Le calcul 123+45+6789 contient donc 6 concaténations en tout, alors qu'une seule était nécessaire.

Juste avec une concaténation

```
Solution 1 : 12+3x4+5+6+7x8+9 = 100
Solution 2 : 1+2x3+4+5+67+8+9 = 100
Solution 3 : 1x2+34+5+6x7+8+9 = 100
```

c) Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur de *N* que l'on peut obtenir en respectant les cinq règles ?

Si on respecte absolument les cinq règles, il faut une concaténation, une paire de parenthèses utiles et un ordre modifié... Cela fait beaucoup de contraintes ! Je dois chercher s'il est possible d'obtenir 1, le plus petit nombre imaginable, avec des divisions seulement pour diminuer la valeur finale. Après une courte recherche, je trouve une solution qui ne convient pas puisqu'il n'y a pas de concaténation : $9\times8\div6\div4\div3\div2\div1\times(5+2)\div7=1$.

```
Solution  1 : 12x(3x4+5x6):7:8:9 = 1
Solution  2 : (1x2+3+4+56+7):8:9 = 1
Solution  3 : 1x(2+3+4+56+7):8:9 = 1
Solution  4 : (1x2+3+4+56+7):8:9 = 1
Solution  5 : 1x(2+3+4+56+7):8:9 = 1
Solution  6 : (1x2+3+4+56+7):8:9 = 1
Solution  7 : 1x(2+3+4+56+7):8:9 = 1
Solution  8 : (1x2+3+4)x56:7:8:9 = 1
Solution  9 : (1x2+3+4x56:7:8):9 = 1
Solution 10 : 1x(2+3+4)x56:7:8:9 = 1
Solution 11 : 1x(2+3+4x56:7:8):9 = 1
Solution 12 : (1x2+3+4)x56:7:8:9 = 1
Solution 13 : (1x2+3+4x56:7:8):9 = 1
Solution 14 : 1x(2+3+4)x56:7:8:9 = 1
Solution 15 : 1x(2+3+4x56:7:8):9 = 1
Solution 16 : (1x2+3+4)x56:7:8:9 = 1
Solution 17 : (1x2+3+4x56:7:8):9 = 1
Solution 18 : 1x(2+3+4)x56:7:8:9 = 1
Solution 19 : 1x(2+3+4x56:7:8):9 = 1
Solution 20 : 1x2x3x(4+56:7):8:9 = 1
Solution 21 : 12x(3x4+5x6):7:8:9 = 1
Solution 22 : 1x2x3x(4+56:7):8:9 = 1
Solution 23 : 1x2x3x(4+56:7):8:9 = 1
Solution 24 : 12x(3x4+5x6):7:8:9 = 1
```

Comme le problème est complexe, je le programme. Ce programme est très long à s'exécuter en entier car je lui demande d'essayer tous les ordres possibles, toutes les concaténations possibles (en se limitant à 2 chiffres concaténés à chaque fois), tous les emplacements possibles pour les parenthèses et, bien sûr aussi, tous les symboles possibles entre deux nombres (il n'y en a que 3 mais tout de même, cela triple le temps de calcul). Bref, je lance ce programme et il me donne d'abord les 24 solutions ci-dessus : elles correspondent à l'ordre croissant des chiffres, l'ordre naturel ... celui de l'énoncé. Cet ordre ne respecte pas la contrainte O puisque l'ordre naturel n'est pas modifié. Je dois donc éliminer ces solutions.

Je laisse encore le programme tourner en arrière-plan de mon ordinateur et, progressivement, d'autres solutions arrivent. Voici les 48 premières qui respectent bien toutes les consignes :

```
Solution 25 : 12x3x4:(7+5)x6:9:8 = 1
Solution 26 : (12:3:4x7+5)x6:9:8 = 1
Solution 27 : 12:3:4x(7+5)x6:9:8 = 1
Solution 28 : 1x(2x3x4:8+9x6):57 = 1
Solution 29 : (1x2x3x4:8+9x6):57 = 1
Solution 30 : 1x(2x3x4:8+9x6):57 = 1
Solution 31 : 12x3x4:8:9x6:(5+7) = 1
Solution 32 : 12:3x4:8x9:(6+5+7) = 1
Solution 33 : 12:3:4x8x9:6:(5+7) = 1
Solution 34 : 12x3x4:8:9x6:(5+7) = 1
Solution 35 : 12:3x4:8x9:(6+5+7) = 1
Solution 36 : 12:3:4x8x9:6:(5+7) = 1
Solution 37 : 12x4:(7+5)x3x6:9:8 = 1
Solution 38 : 12:4x(7+5):3x6:9:8 = 1
Solution 39 : 12:4x7:(5+3x6:9x8) = 1
Solution 40 : 1x(2x5+4):7x36:9:8 = 1
Solution 41 : (1x2x5+4):7x36:9:8 = 1
Solution 42 : 1x(2x5+4):7x36:9:8 = 1
Solution 43 : (1x25+4+7):3x6:9:8 = 1
Solution 44 : 1x(25+4+7):3x6:9:8 = 1
Solution 45 : 12:(5+4x7x3x6:9:8) = 1
Solution 46 : (12+5x4x7x3):6:9:8 = 1
Solution 47 : 12x(5+4x7+3):6:9:8 = 1
Solution 48 : 12:(5+4x7x3x6:9:8) = 1
Solution 49 : (1x27:9+6+3+8):4:5 = 1
Solution 50 : 1x(27:9+6+3+8):4:5 = 1
Solution 51 : 12x7:(9x6+3x8:4x5) = 1
Solution 52 : (15x4+2x6x9):3:7:8 = 1
Solution 53 : 15x4x2x6:9:(3+7):8 = 1
Solution 54 : 15x4:2:6x9:3:(7+8) = 1
Solution 55 : 15x6:(3+9x2x4+8+7) = 1
Solution 56 : 15x6:3:(9+2+4+8+7) = 1
Solution 57 : 15:(6x3:9x2:4x8+7) = 1
Solution 58 : 18x4:(2+6x3+7+9x5) = 1
Solution 59 : 18x4:(2+6x3x7:9x5) = 1
Solution 60 : 18x4:(2+6:3+7x9+5) = 1
Solution 61 : (18x4:2+6:3+7):9:5 = 1
Solution 62 : 18x4:(2x6:3+7x9+5) = 1
Solution 63 : 18x4:2:6:3x7:(9+5) = 1
Solution 64 : (24:6x7+9+3):1:5:8 = 1
Solution 65 : (24:6x7+9+3:1):5:8 = 1
Solution 66 : 24:6x(7+9:3)x1:5:8 = 1
Solution 67 : 24:6x(7+9:3x1):5:8 = 1
Solution 68 : 24:6x(7+9:3):1:5:8 = 1
Solution 69 : 24:6x(7+9:3:1):5:8 = 1
Solution 70 : 28:(4+5+6:3+1+9+7) = 1
Solution 71 : 28:4x5x6:3:(1+9):7 = 1
Solution 72 : 28:4x5:(6x3+1+9+7) = 1
```

Certaines de ces solutions ne paraissent pas très différentes, comme

$1\times(2\times3\times4\div8+9\times6)\div57 = 1$ (solution n°28) et $(1\times2\times3\times4\div8+9\times6)\div57 = 1$ (solution n°29)

La seule différence tient à la parenthèse ouvrante : devant ou derrière la multiplication par 1. C'est peu mais c'est différent. Il fallait y penser à la division par 57, je ne crois pas qu'on peut tomber sur ce genre de solution par hasard.

Quelques autres solutions trouvées par des élèves à ces questions :

$56\div7\div8\times(1+9+2)\div3\div4 = 1$

$8\times9\div(1\times2+3+4+56+7)= 1$

$(14\div2+3+5+6\times8)\div9\div7= 1$

$12\div3\div4\times(5+7)\times6\div8\div9= 1$ (très proche de ma solution n°27)

Quelques presque-solutions (une règle est légèrement outrepassée) :

$((4+5+6+8)\div23+7+1)\div9= 1$ (2 parenthèses)

$(18+2)\div(7+6+4+3)\div5\div1= 1$ (2 parenthèses)

$(5+7)\div96\times48\div2\div3\div1= 1$ (2 concaténations)

$35\div7\div(9\times8\div12\div6+4)= 1$ (2 concaténations)

$(5+6+3)\div14\times9\times8\div72= 1$ (2 concaténations)

$(3\times5+1+2+4+67)\div89= 1$ (2 concaténations)

$12\div(9\div3)\div4\times56\div8\div7= 1$ (2 concaténations)