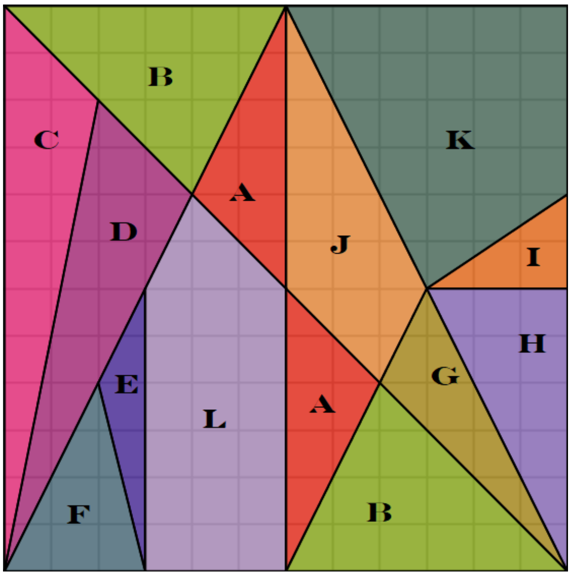
6$^{\text{ème}}$3 — DM n°4 : les angles — *décembre 2022*

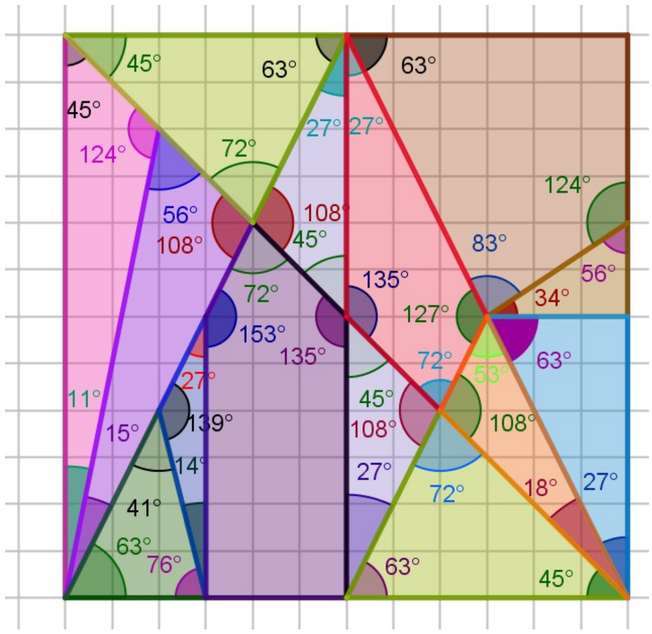
Correction

1) Loculus

*Loculus est un très ancien puzzle géométrique attribué à Archimède[1]. Il s'agit d'une dissection du carré en quatorze pièces polygonales dont deux sont en double (notées **A** et **B** dans la figure ci-contre qui montre un découpage du carré de côté douze avec les pièces du jeu).*

a) Tracer un Loculus de douze carreaux de côté sur votre copie (*utiliser le quadrillage*) en respectant bien le tracé (*tous les points sont sur un croisement du quadrillage*).
Mesurer les angles internes des douze différentes pièces de ce puzzle (*à 1° près*) ; écrire ces mesures directement dans la figure.
Lorsqu'on mesure les angles avec un rapporteur, les mesures sont effectuées au degré le plus proche.
J'ai donc arrondi les valeurs des mesures au degré près (figure ci-contre).





b) Reporter vos mesures dans un tableau de douze lignes, une par type de pièce, en ordonnant les pièces selon l'ordre décroissant de leur plus grand angle. En cas d'ex-æquo, si les plus grands angles sont égaux, le classement se fait dans l'ordre décroissant de leur 2$^{\text{ème}}$ plus grand angle. L'entête de chaque ligne est le nom de la pièce (**A**, **B**, **C**, …, **K**, **L**) ; les mesures des angles d'une pièce sont données dans l'ordre décroissant.

Pièce	Angle 1 (+ grand)	Angle 2	Angle 3	Angle 4	Angle 5
L (pentagone)	153	135	90	90	72
E (Triangle n°1)	139	27	14		
J (Quadrilatère n°1)	135	127	72	27	
K (Quadrilatère n°2)	124	90	83	63	
C (Triangle n°2)	124	45	11		
D (Triangle n°3)	108	56	15	les angles 1 étant égaux, on range ces pièces selon les angles 2	
G (Triangle n°4)	108	53	18		
A (Triangles n°5) *en double*	108	45	27		
H (Triangle n°6)	90	63	27	Idem ici	
I (Triangle n°7)	90	56	34		
F (Triangle n°8)	76	63	41		
B (Triangle n°9) *en double*	72	63	45		

1 Archimède est un mathématicien ingénieur grec (Syracuse, 287 – 212 avant J.-C.)

La question n'était pas posée, mais combien de variété d'angles a t-on et combien de chaque sorte? Répondre à cette question peut être utile pour la suite : il y en a 21 sortes (détail dans le tableau suivant), les 4 plus fréquents sont l'angle droit, l'angle d'environ 63° que fait la diagonale d'un rectangle de 2 sur 1, le demi angle droit (45°) et l'angle de 27° (5 occurrences chacun).

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Angle (°)	153	139	135	127	124	108	90	83	76	72	63
Nbr (Pièces)	1 (L)	1 (E)	2 (L, J)	1 (J)	2 (K, C)	4 (D, G, A^2)	5 (L^2, K, H, I)	1 (K)	1 (F)	4 (L, J, B^2)	5 (K, H, F, B^2)

N°	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Angle (°)	56	53	45	41	34	27	18	15	14	11
Nbr (Pièces)	2 (D, I)	1 (G)	5 (C, A^2, B^2)	1 (F)	1 (I)	5 (E, J, A^2, H)	1 (G)	1 (D)	1 (E)	1 (C)

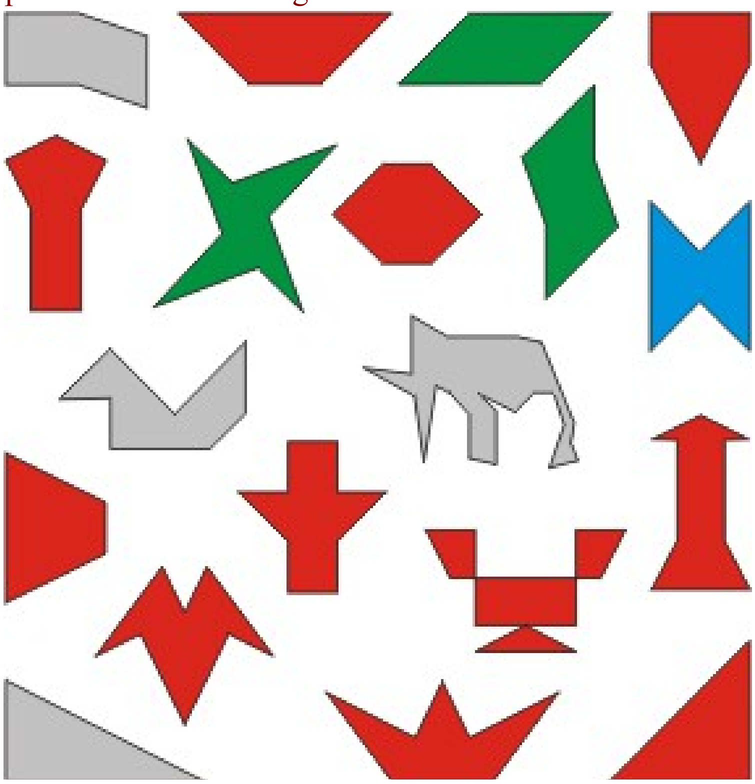
Une autre question qui pouvait être utile de se poser pour réaliser des figures avec ces pièces de puzzle : quels angles peuvent s'associer pour en faire un autre? Difficile de répondre pour tous les angles.
Pour faire un angle plat, par exemple, on a 7 possibilités :

- associer les angles n°1 et 17,
- associer les angles n°2 et 15,
- associer les angles n°3 et 14,
- associer les angles n°4 et 13,
- associer les angles n°5 et 12,
- associer les angles n°6 et 10,
- associer deux angles n°7 (2 angles droits).

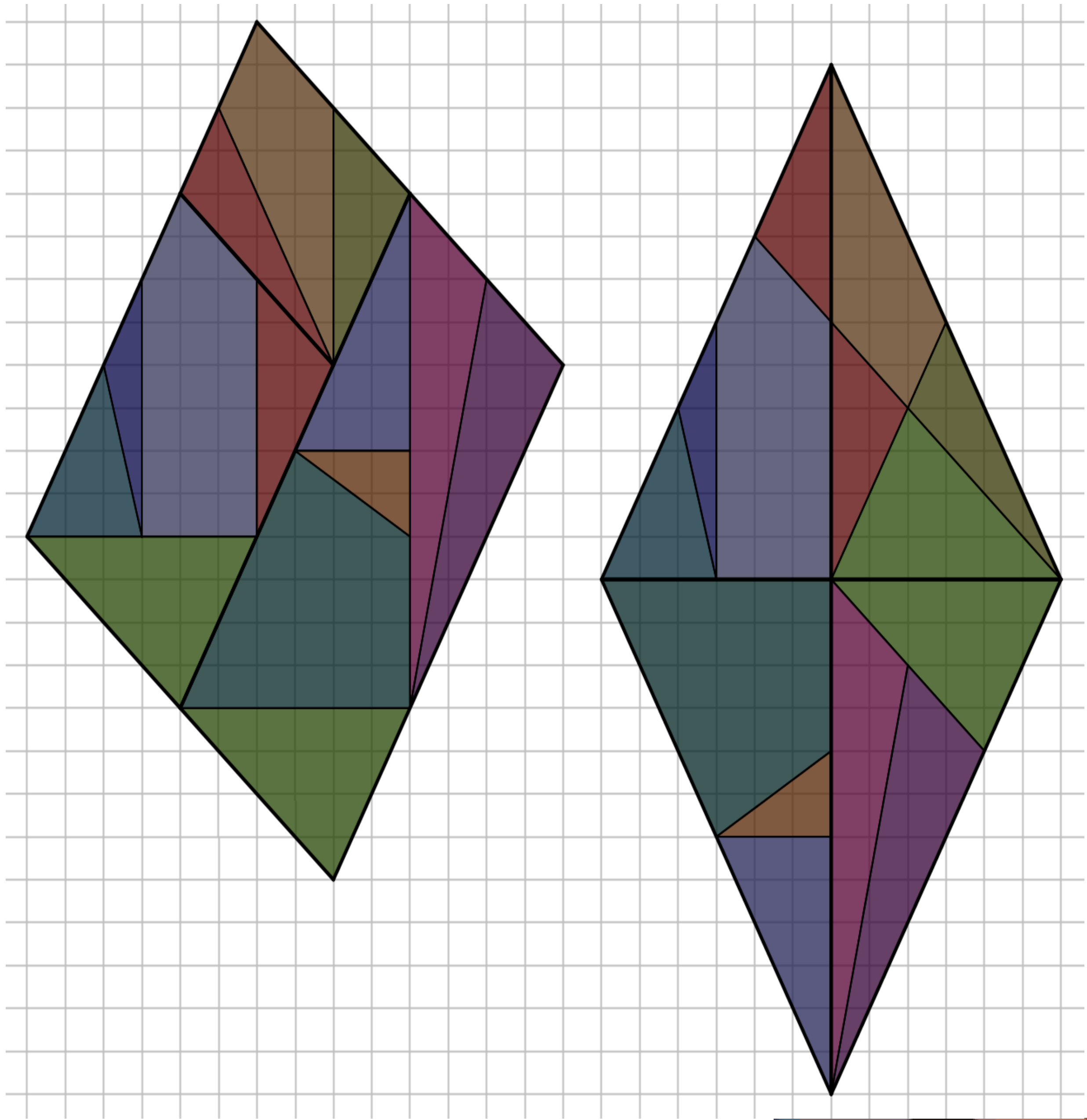
On peut aussi associer trois angles pour faire un angle plat, ou quatre...
Je n'ai pas voulu vous surcharger, mais ce puzzle permet de composer d'autres formes que le carré.
Ci-dessous sont quelques réalisations possibles avec les quatorze pièces.
Les couleurs indiquent la symétrie des formes :

rouge : un axe de symétrie
bleu : 2 axes
vert : un centre
gris : pas de symétrie

On pense qu'Archimède avait recherché le nombre de combinaisons différentes de pièces qui donnaient le grand carré. On a découvert le texte original d'Archimède sur l'Ostomachion en 1906, dans les traces effacées d'un parchemin liturgique grec. Ce palimpseste, qui fut vendu 2 000 000 $ en 1998, contient quelques éléments descriptifs concernant les angles de la dissection.



c) En utilisant les 14 pièces du jeu on peut reconstituer quelques polygones convexes (*n'ayant que des angles internes saillants*) dont un parallélogramme n'étant ni un losange, ni un rectangle, dont les angles internes sont 72° et 108°. Dessiner ce parallélogramme avec l'emplacement des 14 pièces à la même échelle que le carré de la question *a* (*ici aussi, utiliser le quadrillage*).
J'ai tracé ci-dessous deux parallélogrammes.
Celui de gauche est celui qui répond à la demande : il a des angles de 108° et 72° et n'est pas un losange.
Celui de droite est un losange ; ses angles internes sont 127° et 53°.
Je n'ai pas tracé le rectangle (c'est aussi un parallélogramme) ni le carré (aussi parallélogramme, losange et rectangle) qui ne répondaient, de toutes les façons, pas à la question. Ceci dit, en passant, il y a 3 sortes de rectangles possibles (le carré qui est un rectangle 1 sur 1, un rectangle 1 sur 2 et un rectangle 1 sur 4)

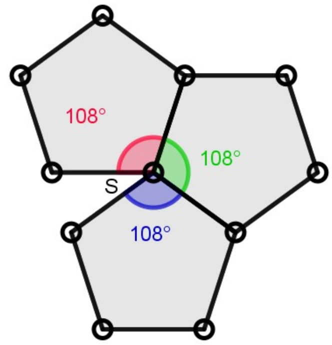


2) Polygones paveurs

Paver le plan avec un polygone signifie recouvrir complètement le plan avec des copies de la même taille de ce polygone, sans aucun espace vide et sans recouvrement.

a) On ne peut pas paver le plan avec le pentagone régulier car les angles intérieurs du pentagone régulier mesurent 108°. Expliquer cette impossibilité en traçant trois pentagones réguliers ayant un sommet en commun.

À chaque sommet du pavage, il y a un certain nombre de polygones qui se joignent et la somme des angles doit y faire 360° pour que la règle du pavage « remplir sans aucun espace vide » soit respectée.
Lorsqu'on dispose trois pentagones réguliers ayant un sommet en commun, on ne remplit pas complètement l'angle plein puisque $3\times108=324°$. La figure montre que S ne peut pas être le sommet d'un pavage avec des pentagones réguliers. Dans l'espace non couvert par les trois pentagone, on ne peut glisser un 4[ème] pentagone.

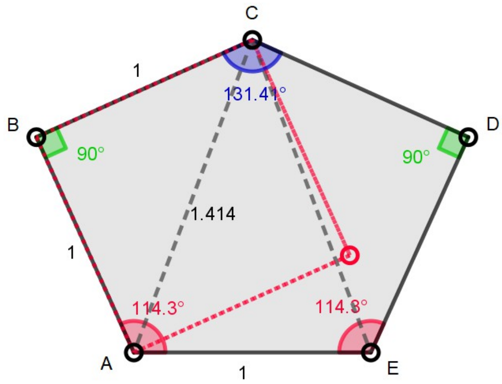


b) Il existe des pentagones pavant le plan comme celui qui est utilisé dans le « pavage du Caire » ci-contre. Le pentagone utilisé est équilatéral (*ces cinq côtés sont égaux*) mais ces cinq angles ne sont pas tous égaux. Mesurer les angles de ce pentagone puis tracer un motif élémentaire de ce pavage (*ensemble de quatre pentagones adjacents formant un hexagone*) en prenant 5 *cm* pour chacun des côtés.

Sur la figure, on observe qu'il y a deux types de sommets :

- des sommets où se rejoignent quatre pentagones. Les quatre angles semblant égaux, ce sont des angles droits (leur mesure vaut 90°).
- des sommets où se joignent trois pentagones. Les trois angles semblant égaux, estimons ces angles à $360\div3=120°$.

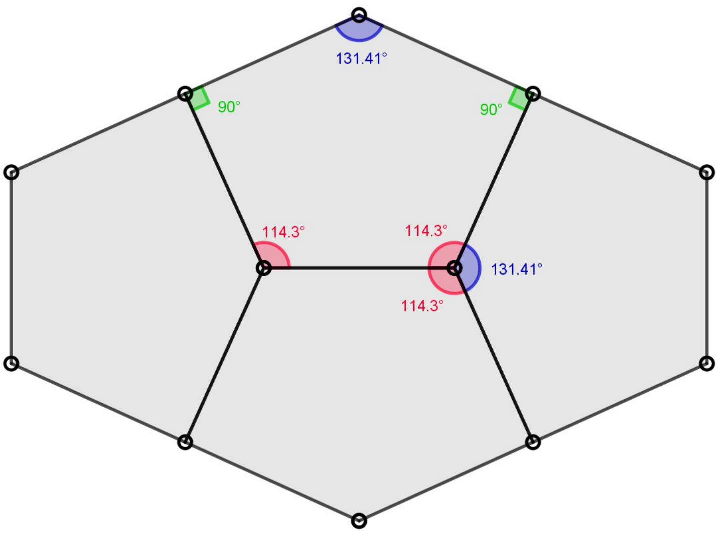
Si le pentagone qui est la base de ce pavage du Caire a des angles égaux à 90°, 120°, 90°, 120° et 120°, on ne peut pas faire en sorte que les cinq côtés soient égaux. Puisqu'il faut respecter cette condition (le pentagone est équilatéral), il faut que les angles soient égaux à 90°, 131°, 90°, 114° et 114° (valeurs arrondies à l'entier le plus proche). Pour construire ce pentagone, j'ai cherché la longueur *AC* d'une diagonale du carré de côtés [*AB*] et [*BC*]. J'ai alors construit le triangle *AEC*, isocèle en *C*, tel que *AE*=*AB*=*BC* et *AC*=*EC*. Sur ce triangle, j'ai posé les demi-carrés *ABC* et *ECD*. J'ai ensuite mesuré les angles du pentagone *ABCDE*.

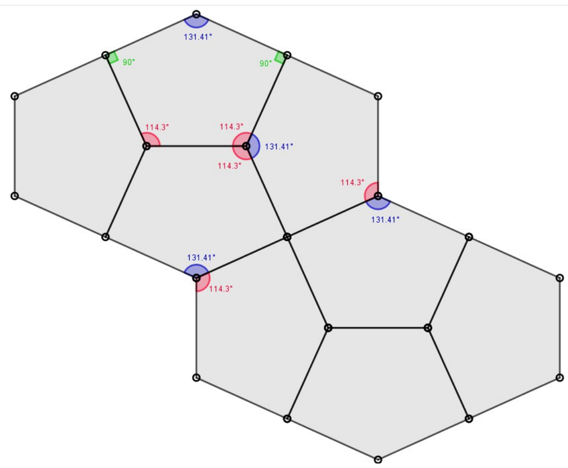


Traçons maintenant les quatre exemplaires de ce pentagone qui forment le motif élémentaire du pavage. On s'aperçoit alors que les angles se complètent pour former un angle plein :

$$114{,}3+114{,}3+131{,}4=360$$

L'arrondi de ces mesures n'est pas une cause d'erreur. La somme de ces trois angles est exactement égale à 360°. Les sommets où se joignent les angles droits respectent aussi, de façon plus évidente encore, les règles du pavage.

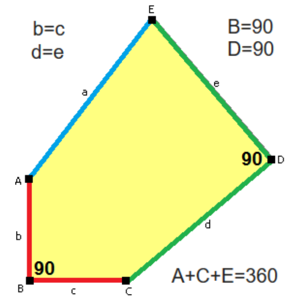




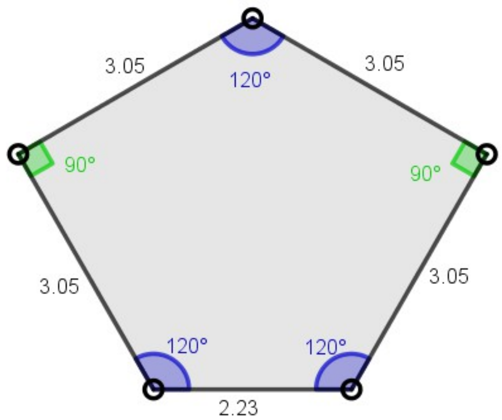
L'hexagone ainsi construit pave le plan d'une façon très simple. Les sommets s'assemblent selon les deux types déjà mis en évidence :

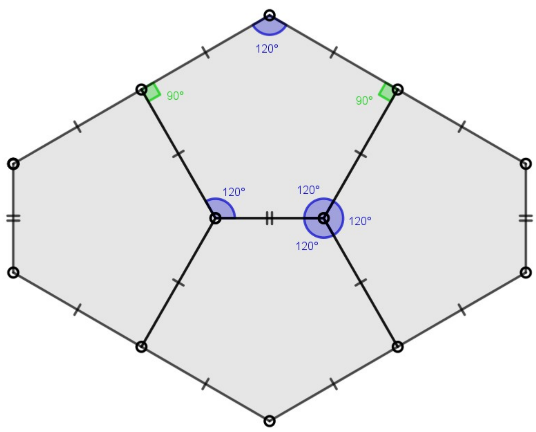
- quatre angles droits
- trois angles mesurant 114,3°, 114,3° et 131,4°

c) Le pentagone du pavage du Caire appartient à une catégorie de pentagones paveurs caractérisée par les quatre conditions suivantes :
$AB=BC$, $CD=DE$, $\widehat{B}=\widehat{D}=90°$ et $\widehat{A}+\widehat{C}+\widehat{E}=360°$
Montrer que c'est bien le cas.
Le pentagone du pavage du Caire est équilatéral.
Il vérifie donc les deux premières conditions portant sur les longueurs des côtés :
$AB=BC$ et $CD=DE$
Les deux angles droits existent bien et sont bien disposés de façon opposée.
La somme des trois angles restants fait bien 360° comme on l'a vu plus haut. Cette condition est nécessaire pour constituer les sommets liants trois pentagones.

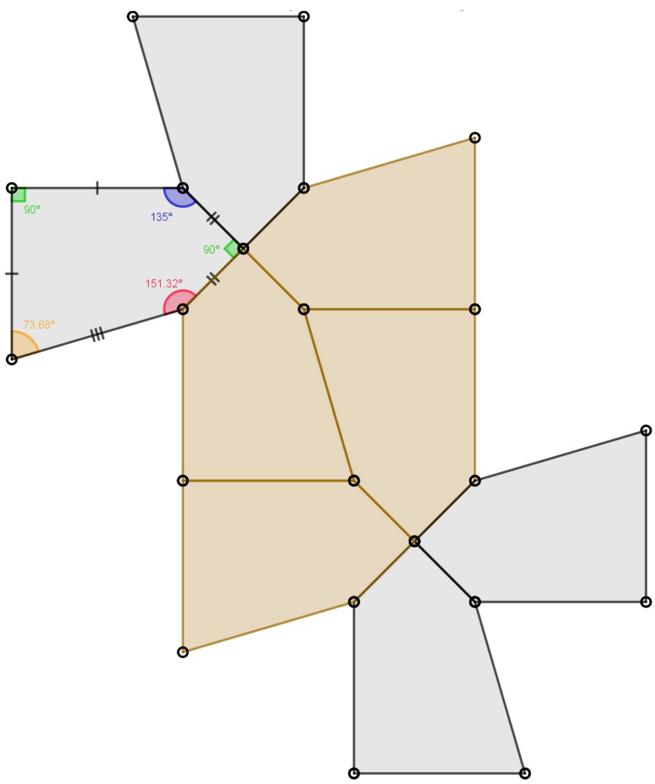


Déterminer ensuite les caractéristiques d'un autre pentagone de cette catégorie (*choisir les côtés et les angles en respectant les conditions*) pour lequel vous tracerez le motif élémentaire (*pas forcément hexagonal*).
On va choisir (ce n'était pas obligatoire) $AB=BC=CD=DE$ et, pour les angles, on va prendre $\widehat{B}=\widehat{D}=90°$ et $\widehat{A}=\widehat{C}=\widehat{E}=120°$. On ne s'impose donc pas d'avoir les cinq côtés égaux (pas d'équilatéralité) mais on s'impose d'avoir les trois angles obtus égaux.
Dans ce cas, il n'y a qu'un côté qui sera différent (il reste en effet à définir le côté *AE),* plus court que les autres. L'assemblage des quatre pentagones est encore un hexagone paveur qui ressemble au précédent.
Il peut être confondu avec le pavage du Caire précédent ainsi que quelques autres variantes intéressantes. Jetez un œil, si cela vous intéresse, sur cet article.

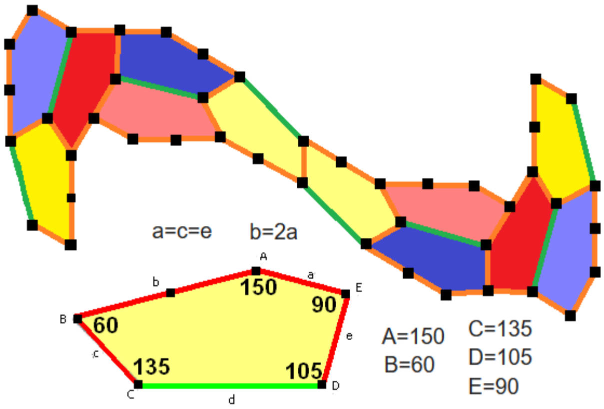




Il y a bien d'autres solutions à la question posée. Envisageons le cas le plus général :
$AB=BC\neq CD=DE$, $\widehat{B}=\widehat{D}=90°$ et $\widehat{A}+\widehat{C}+\widehat{E}=360°$
avec $\widehat{A}\neq\widehat{C}\neq\widehat{E}$.
Traçons un tel pentagone et examinons le motif élémentaire, construit comme les autres à partir de l'assemblage de quatre exemplaires de ce pentagone. J'ai pris $\widehat{C}=135°$ (l'angle entre les deux angles droits) et j'ai pris $CD=AB\div 2$.
Avec ce simple choix et le respect des conditions, le pentagone est déterminé. Un premier exemplaire est montré avec les valeurs des angles qui découlent de ces choix. J'ai ensuite reproduit ce pentagone en lui faisant faire un quart de tour autour d'un de ses angles droits (on peut voir que c'est ce qui se passe pour le pavage du Caire).

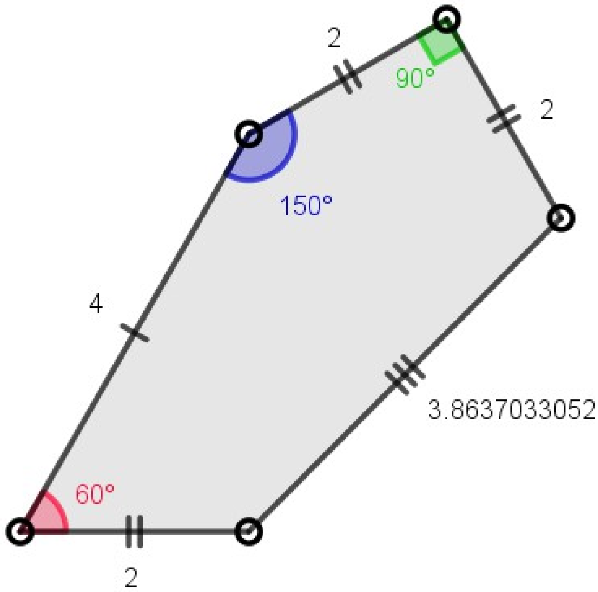


d) En 2015, la dernière forme convexe de pentagone paveur a été découverte par Casey Mann (Washington). Le motif élémentaire de ce pavage nécessite douze pentagones. L'année suivante, Michaël Rao (Lyon) a montré qu'il n'en existe pas d'autres. Tracer un exemplaire de ce dernier polygone paveur en prenant $AE=BC$=ED=5 *cm* et AB=10 *cm*. Mesurer sur votre figure la longueur *DC*.



Tracer un exemplaire du pentagone de C. Mann est chose aisée puisque les angles sont donnés ainsi que les longueurs. En fait, certaines informations sont inutiles : les angles $\widehat{C}=135°$ et $\widehat{D}=105°$ ne peuvent avoir d'autres valeurs pour que le pentagone ferme et pour que ses côtés respectent les conditions fixées : *BC=AE=ED* et *AB*=2*BC*.

En prenant *BC*=2, je trouve ainsi $DC \approx 3{,}8637033052$. Bien sûr, ce résultat sera connu avec moins de précision si on fait la construction à la main ! La valeur exacte s'écrit avec des « racines carrées » (la touche « racine carrée » de la calculatrice est √), il s'agit de $BC\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

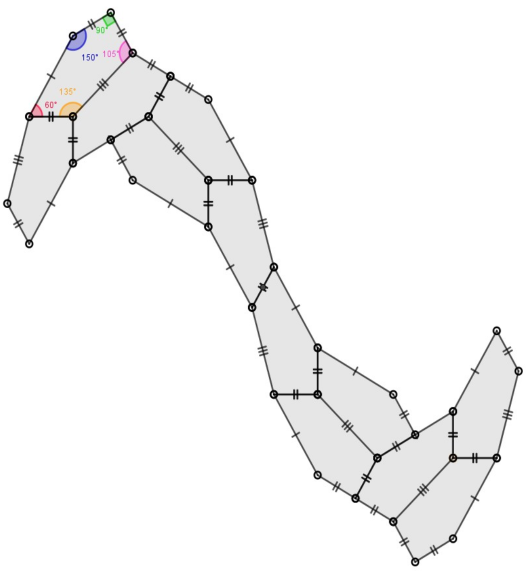


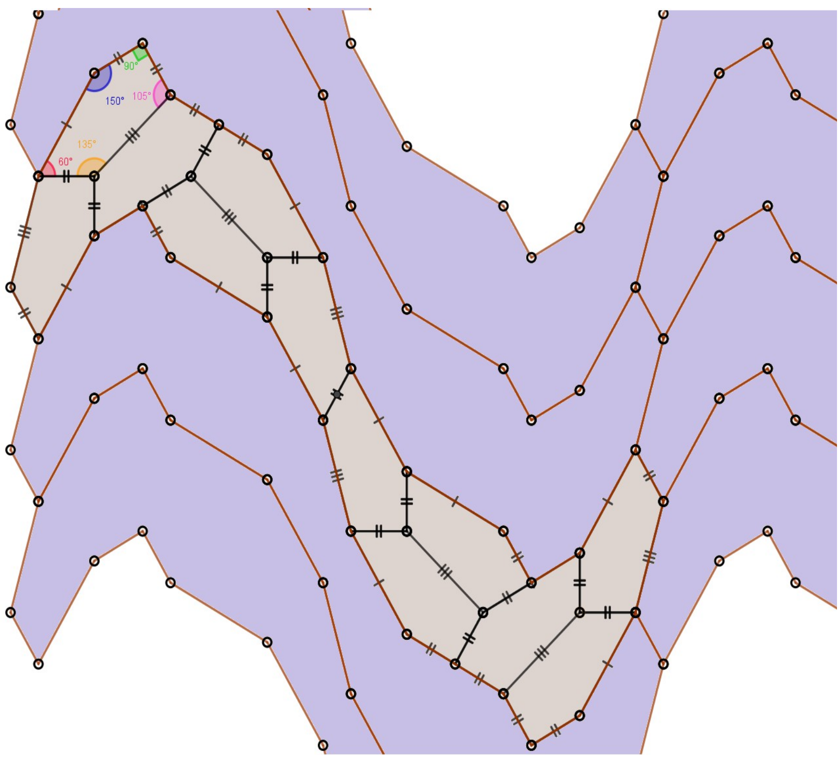
Avec BC=2 cm, il faut taper 2× √ (2+ √ 3).
On obtient alors la valeur approchée que nous avions trouvée avec Geogebra. Une valeur approchée un peu plus précise peut être donnée :

$DC \approx BC\times 1{,}931851652578136573499486399457794735267809678016809100804686152620846427959$
$\approx 3{,}8637033051562731469989727989155894705356193560336182016093723052416928559194220653$

Avec *BC*=5 *cm*, on a tape 5× √ (2+ √ 3) et on obtient $DC \approx 9{,}65925826289$ *cm*.

Ce n'était pas demandé puisque l'image le donnait, mais par curiosité, j'ai reproduit le motif élémentaire de douze pentagones de Mann. Une partie en contient six et l'autre est obtenue par un simple demi-tour. Ce motif élémentaire a vingt-six sommets !





Pour la petite histoire, le résultat de Rao clôt une aventure mathématique qui dura un siècle. Les cinq premiers types de pavages avec un pentagone convexe ont été trouvés par Karl Reinhardt en 1918. Quand ce mathématicien allemand écrivit [son article](#) Über die Zerlegung der Ebene in Polygone, on pensa que l'énumération était complète. Ce n'est qu'en 1968 que trois autres formes furent trouvées, puis une autre en 1975 et quatre autres la même année, et encore quatre en 1984 et une en 1985. À chaque fois, on a pensé que l'énumération était complète. Ce n'est qu'avec la démonstration de Michaël Rao, en 2016, que cette question a trouvé sa réponse définitive. Voici donc les quinze catégories de pentagones qui pavent le plan, selon l'article de J.-P. Delahaye (Pour La Science, n°482 de décembre 2017). Dans cet article, les angles y sont exprimés en radians (rappel : π rad=180°). En voyant la grande richesse du sujet, vous apprécierez mieux l'extrême dépouillement de mes questions dans ce DM qui ne mentionnent que les pavages de type 4 (pavages du Caire) et 15 (pavage de Casey Mann).