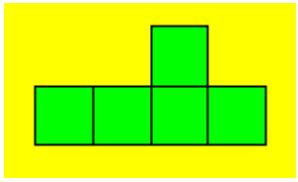
Chapitre 8 Mesures de Longueurs, d'Aires et de Volumes

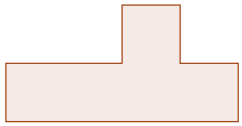
1.Longueurs

a) Périmètres

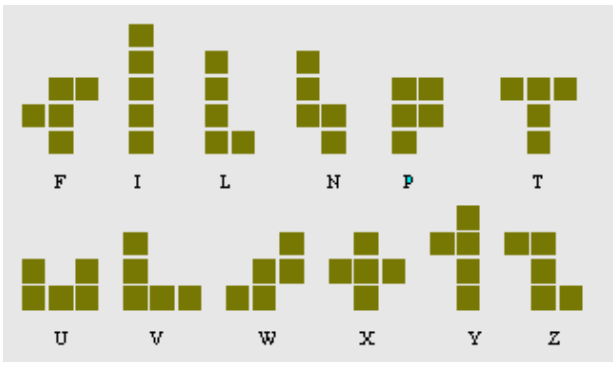
Les lignes dont on mesure la longueur peuvent être :

- des segments de droites, isolés ou consécutifs formant une ligne brisée (ouverte ou fermée). Si on mesure le tour d'un polygone (une ligne brisée fermée formée de segments consécutifs), on donne à cette mesure le nom de périmètre.
- des morceaux de lignes courbes (ouvertes ou fermées), segments de cercles ou de courbes plus complexes et irrégulières. Si nous mesurons un cercle entier, la longueur de son tour est appelé périmètre ou circonférence.





On appelle *périmètre* d'une figure, la longueur du tour de cette figure. La figure doit être fermée pour avoir un périmètre (polygone, cercle, oval, etc.). La figure ci-contre par exemple est un pentamino 'Y' (une figure réalisée avec 5 carrés ayant un côté en commun), son périmètre est la longueur de la ligne polygonale à 8 côtés qui l'entoure et qu'on a représenté à droite. Cette longueur est égale à 12 fois celle du côté du carré de base (4+1+1+1+1+1+2+1=12). Ce pentamino est donc un octogone de périmètre 12. Il n'y a pas d'unité de mesure ici car on s'est contenté d'utiliser la longueur du carré de base comme unité de longueur. Ceci est parfois suffisant, on peut noter p=12 u.l.(unités de longueurs) ou plus simplement p=12. Les autres pentaminos sont illustrés à droite : ils ont tous un périmètre égal à 12 sauf le pentamino 'P' qui a un périmètre égal à 10.



b) Unités de mesure

Nous utilisons le système métrique en France depuis la « révolution française » et ses scientifiques qui ont voulu unifier des pratiques régionales disparates. Ainsi la plupart de nos longueurs aujourd'hui sont dérivées du mètre (*m*). Il subsiste néanmoins d'autres unités de longueur : le mile nautique, le *mile* anglo-saxon, le pied et le pouce anglo-saxon, l'année-lumière des astronomes, l'angström des physiciens… bref, une quantité non négligeable d'unités de mesure qui ont leurs usages mais qui, toutes, peuvent être converties dans le système métrique.

Le tableau de conversion ci-contre, peut être prolongé vers la droite ou la gauche selon les besoins. On place la virgule après le chiffre des unités lu dans la colonne portant le nom de l'unité. Si des 0 sont nécessaires (à droite ou à gauche) on les ajoute à volonté.

Unités de longueurs du système métrique						
km	*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*
0	0,	1	2,	5	0	0
0,	1	5	0,	0	0,	0

Nous pouvons par exemple y placer les longueurs 12,5 *m* et 0,15 *km* et vérifier que l'on a :

12,5 *m* = 12500 *mm= 0,125 hm*

0,150 *km* = 15 *dam* = 150 *m* = 15 000 *cm*.

Le principe de ces unités repose sur la signification des préfixes :

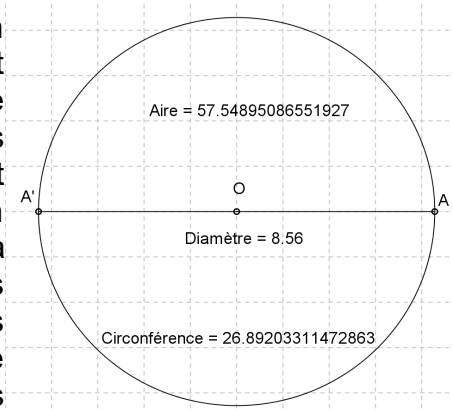
k pour **kilo-** (1 000), *h* pour **hecto-** (100), *da* pour **déca-** (10), *dm* pour **déci-** ($\frac{1}{10}=0,1$), *c* pour **centi-** ($\frac{1}{100}=0,01$) et *m* pour **milli-** ($\frac{1}{1000}=0,001$). Il existe d'autres préfixes, comme *M* pour **Méga-** (1 000 000), *G* pour **Giga-** (1 000 000 000) ou *T* pour **Téra-** (1 000 000 000 000) ou encore µ (*mu*, le m grec) pour **micro-** ($\frac{1}{1000000}=0,000001$) ou *n* pour **nano-** ($\frac{1}{1000000000}=0,000000001$) mais le principe reste le même, on ajoute 3 zéros à chaque nouveau préfixe.

Des unités spécialisées, historiques et locales, pour les longueurs :

- L'année-lumière (*a.l.*) est la distance parcourue par la lumière en 1 année (300 000 *km/s* et il y a 60×60×24×365=31 536 000 secondes par an), donc
  1*a.l.* = 300 000 × 31 536 000 × 1000 = 9 460 800 000 000 000 *m* = 9 460 *Tm*.
  On comprend qu'il est plus commode de dire que notre plus proche voisine, *Alpha* du Centaure, est à 2,5 *a.l.* ou 23 650 *Tm* plutôt qu'à 23 652 000 000 000 000 m.
- Les unités anglo-saxonnes, comme le pied (*foot*) qui vaut 12 pouces (*inch*) soit 30,48 *cm*, le pouce valant 25,4 *mm*. Les anglo-saxons utilisent aussi le *yard* (0,9144 *m* ou 3 *ft*), la brasse ou *fathom* (1,8288 *m* ou 2 *yd*), le *mile* (1609 *m*) et le *nautical mile* ou mille marin (1853,18 *m* ou 6080 *ft*) qui diffère du mille nautique international (1852 *m*).

Pour information, la définition du mètre est aujourd'hui rattachée (comme pour l'a.l.) à la vitesse de la lumière puisque depuis 1983 on appelle *mètre* la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant une durée de 1/299792458 secondes. Au départ, en 1791, le mètre était égal à la dix millionième partie du quart du méridien terrestre (mesuré du pôle Nord à l'équateur en passant par Paris). De 1889 jusqu'en 1960 cette longueur a été fixée par la distance entre 2 traits sur le prototype en platine iridié à 0°C placé au Pavillon de Breteuil à Sèvres. De 1960 à 1983 le mètre a été défini à partir d'une des radiations émises par une lampe à décharge contenant l'isotope 86 du krypton. On voit que cette unité qui nous est si familière n'est pas si simple à définir.

c) Périmètre d'un cercle

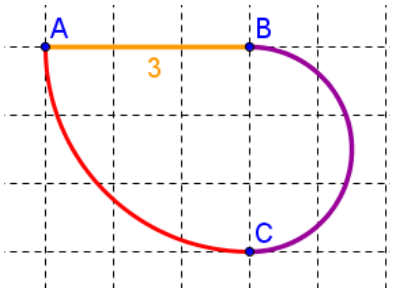


Il y a proportionnalité entre le diamètre d et le périmètre p d'un cercle. Ceci est connu depuis l'antiquité, les anciens estimant qu'un cercle mesuraient environ 3 fois le diamètre, 6 fois le rayon. On cite souvent la fraction 22/7 (≈3,1428) connue depuis plus de 4000 ans. En réalité le rapport p/d est légèrement supérieur à 3 car il vaut environ 3,1416. Ce nombre n'est pas un décimal, on le note avec la lettre grecque π (ce qui se lit *pi*, cela correspond à notre lettre p, comme périmètre). Les calculatrices donnent une valeur de 10 à 15 chiffres, les ordinateurs d'aujourd'hui calculent des milliards de décimales pour ce nombre grâce aux très importants travaux des mathématiciens sur ce sujet. Voici les premières décimales calculées par l'applet « Périmètre » du site Mathadomicile.fr :

Pi = 3.141 5926 5358 9793 2384 6264 3383 2795 0288 4197 1693 9937 5105 8209 7494 4592 3078 1640 6286 2089 9862 8034 8253 4211
7067 9821 4808 6513 2823 0664 7093 8446 0955 0582 2317 2535 9408 1284 8111 7450 2841 0270 1938 5211 0555 9644 6229 4895 4930
3819 6442 8810 9756 6593 3446 1284 7564 8233 7867 8316 5271 2019 0914 5648 5669 2346 0348 6104 5432 6648 2133 9360 7260 2491
4127 3724 5870 0660 6315 5881 7488 1520 9209 6282 9254 0917 1536 4367 8925 9036 0011 3305 3054 8820 4665 2138 4146 9519 4151
1609 4330 5727 0365 7595 9195 3092 1861 1738 1932 6117 9310 5118 5480 7446 2379 9627 4956 7351 8857 5272 4891 2279 3818 3011
9491 2983 3673 3624 4065 6643 0860 2139 4946 3952 2473 7190 7021 7986 0943 7027 7053 9217 1762 9317 6752 3846 7481 8467 6694
0513 2000 5681 2714 5263 5608 2778 5771 3427 5778 9609 1736 3717 8721 4684 4090 1224 9534 3014 6549 5853 7105 0792 2796 8925
8923 5420 1995 6112 1290 2196 0864 0344 1815 9813 6297 7477 1309 9605 1870 7211 3499 9999 8372 9780 4995 1059 7317 3281 6096
3185 9502 4459 4553 4690 8302 6425 2230 8253 3446 8503 5261 9311 8817 1010 0031 3783 8752 8865 8753 3208 3814 2061 7177 6691
4730 3598 2534 9042 8755 4687 3115 9562 8638 8235 3787 5937 5195 7781 8577 8053 2171 2268 0661 3001 9278 7661 1195 9092 1642

Retenons donc la formule donnant p (le périmètre) lorsqu'on connaît d (le diamètre) : p = π× d.
On peut inverser cette formule et calculer d à partir de p : d = p ÷ π. On peut aussi remplacer d par r (le rayon du cercle, moitié du diamètre) : p = π× r × 2 et r = p ÷ (π × 2) = p ÷ π ÷ 2.

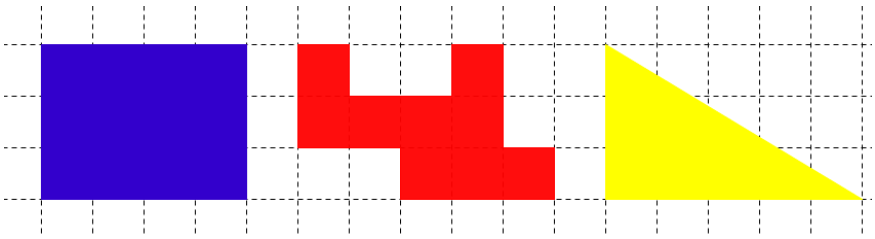
Exemples : Un cercle de 5 *cm* de rayon a un périmètre égal à 10π *cm* (π×5×2 = 10π) soit environ 31,4 *cm*. Le cercle de diamètre 8,56 de notre illustration a pour circonférence (un autre terme pour périmètre du cercle) 26,89203311472863 comme l'affiche GeoGebra avec ses 15 décimales (en réalité 8,56π). Un cercle de 10 *km* de périmètre a un diamètre de $\frac{10}{\pi}$ *km* soit environ 3183 *m*.



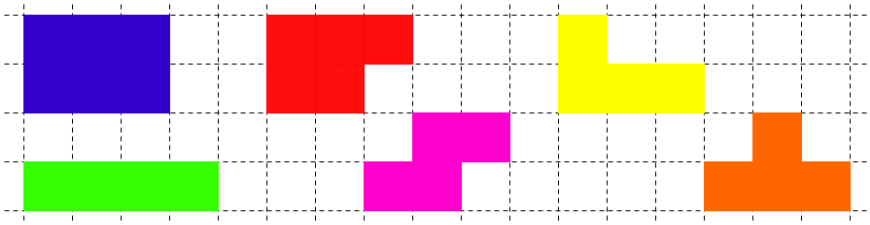
Calculons le périmètre d'une figure composée de segments de droites et de segments de cercle : le demi-cœur ABC ci-contre a un périmètre égal à 3+(π×3÷2)+(π×6÷4)=3+π×3=3×(π+1)≈12,424778.

2.Aires

a) Surfaces



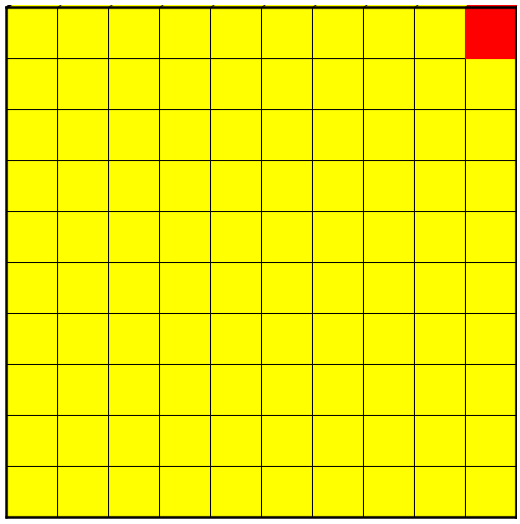
La deuxième grandeur mesurée ici concerne les surfaces. Il est facile, dans certains cas, d'évaluer l'aire d'une surface en comptant les unités d'aire : le rectangle bleu est formé de 12 u.a. (u.a. est l'abréviation d'unité d'aire, ici ce sont des carreaux du quadrillage). Le polygone rouge a une aire égale à 9 u.a. Pour le triangle jaune, le comptage direct est difficile, par contre on peut imaginer un rectangle 3×5 qui, partagé en deux selon une diagonale, donne ce triangle. L'aire du triangle sera donc la moitié de celle du rectangle, donc $\frac{15}{2}$ ou 7,5 u.a.



Les 6 polygones ci-contre ont tous un périmètre égal à 10 mais leur aire varie entre 4 (la plupart) à 6 u.a. (le rectangle). La seule figure ayant une aire de 5 u.a. est le pentamino rouge.

b) Unités de mesure

Les unités d'aire les plus usitées sont celles dérivées du système métrique. Le carré de 1 *m* de côté a une aire égale à 1 m² (ce qui signifie 1m×1m), le carré de 1 dm de côté a une aire de 1 *dm*². On peut compter le nombre de *dm*² qu'il y a dans 1 *m*² en utilisant la figure ci-contre où le petit carré rouge a une aire de 1 *dm*² et le grand carré jaune une aire de 1 *m*². Vous constatez qu'il y a 100 *dm*² dans 1 *m*². De même, il y a 100 *cm*² dans 1 *dm*², ou encore 100 *m*² dans 1 *dam*². Ceci explique que le tableau de conversion nécessite 2 chiffres par colonne.



Le tableau de conversion des unités d'aire du système métrique utilise le même principe que celui des unités de longueur, mais on y met **2 chiffres par colonnes** :

Conversion des aires						
km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²
00	00	01,	00,	00	00	00,
00,	01	25	0			

Ainsi on a 100 000 000 *mm*² = 100 *m*² = 1 *dam*² ou encore, que 125 *dam*² = 12500 *m*² = 0,0125 *km*². Les seuls chiffres immuables dans ce tableau sont les chiffres non nuls, ou les 0 entre des chiffres non nuls (comme dans 1025); les zéros inutiles sont pour cette raison mis en pointillés ou en gris clair ici...

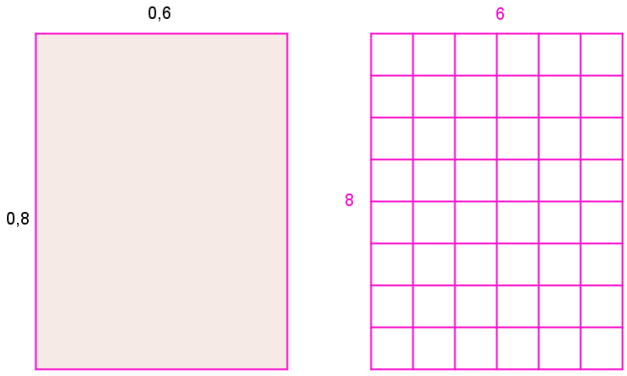
Unités spécifiques pour les aires, en dehors de celles, internationnalles, du système métrique :

- Une unité encore très utilisée dans le monde agricole, où pour mesurer les terrains et habitations: l'**are** (*a*) et ses dérivés l'**hectare** (1 *ha* = 100 *a*) et le **centiare** (1 *ca* = $\frac{1}{100}=0{,}01$ *a*). L'are correspond au *dam*² (un carré de 10 *m* sur 10 *m*); c'était, à l'origine, la surface que pouvait cultiver un homme en un jour (en latin, *are* signifie « cultiver »). L'hectare correspond à l'*hm*² puisque 1 *ha* = 100 *a* = 100 *dam*² = 1 *hm*² et le centiare correspond au *m*² puisque 1 *ca* = 0,01 *a* = 0,01 *dam*² = 1 *m*².
- Les unités anglosaxonnes de mesure d'aire sont le *square foot* ou pied carré (1 *sq ft* ≈ 0,1 *m*²), le *square mile* ou mille carré (1 *mi*² ≈ 2,6 *km*²), l'*acre* qui vaut 66×660 = 43 560 *pieds carrés* soit environ 4050 *m*²… Parmi les très nombreuses autres unités étrangères, citons le tatami japonais ou *jō* (畳) qui mesure 91 *cm* × 182 *cm* soit environ 1,6 *m*² ou le *feddan* égyptien qui mesure environ 4200 *m*².

- D'autres unités spécifiques existent comme le barn qui est utilisé en physique des particules (1 *b* = 0,00000000000000000000000000001 m^2). Mais bien sûr on peut toujours utiliser des sous-multiples du m^2 en utilisant les préfixes standards : milli-, micro-, nano-, pico-, femto-, atto-, zepto- (*z*), yocto- (*y*). Ainsi, 1 *b* = 0,0001 ym^2, c'est plus simple non ? En quoi mesurer la surface de notre galaxie qui est assimilée à un disque de 100 000 *a.l.* de diamètre ? Il faut, sans doute, utiliser les préfixes standard pour les multiples du m^2 : kilo-, méga-, giga-, téra-, peta-, exa-, zetta- (*Z*), yotta- (*Y*). Ainsi notre galaxie, qui ressemble à une grande crêpe, a une aire $\pi\times(50000)^2$ $a.l.^2$, soit, en bonnes vieilles unités du système métrique, de $\pi\times(50000\times9460)^2=\pi\times(473\times1000000)^2\approx703\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ Tm^2$, soit 703 000 Ym^2.

c) <u>Aires d'un triangle rectangle</u>

Nous savons déjà calculer l'aire d'un rectangle n'est-ce-pas ? Ses côtés ayant pour longueur des nombres entiers ou décimaux, on se ramène toujours à une figure formée de petits carrés comme la figure ci-contre. Pour représenter un rectangle dont les côtés mesurent 0,6 *m* et 0,8 *m* on peut utiliser le *dm* comme unité de mesure et compter les dm^2. Ici on voit qu'il y a $6\times8 = 48\ dm^2$ soit 0,48 m^2. On aurait pu trouver le même résultat en multipliant directement les longueurs en *m* : $0,6\times0,8 = 0,48\ m^2$.

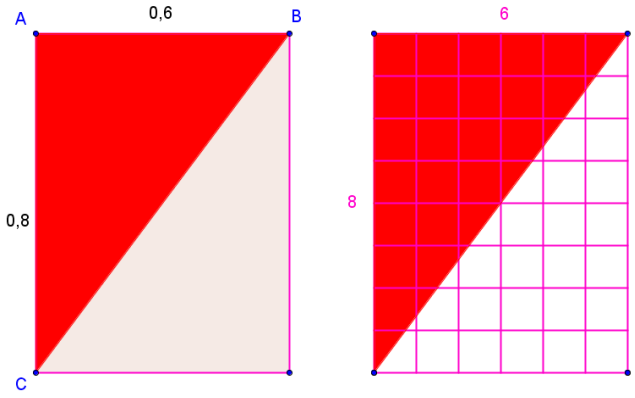


D'une manière générale :

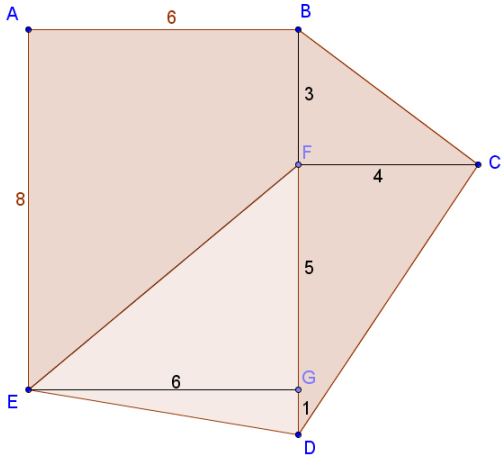
L'aire $\mathcal{A}$ d'un rectangle de longueur *L* et de largeur ℓ est donnée par la formule $\mathcal{A} = L\times\ell$.

Attention à toujours utiliser des longueurs dans la même unité ! Ainsi, un rectangle de 3,5 *m* sur 4 *cm* a une aire égale à $350\times4 = 1400\ cm^2$, soit 14 dm^2 ou encore 0,14 m^2 (on aurait pu calculer directement en m^2 : $3,5\times0,04 = 0,14\ m^2$).

Les triangles rectangles, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, peuvent toujours être vus comme la moitié d'un rectangle (on divise le rectangle en suivant une de ses diagonales). Les côtés du rectangle sont égaux aux *cathètes* du triangle (les petits côtés du triangle rectangle ou côtés de l'angle droit). Ainsi, le triangle *ABC* rouge ci-contre peut être vu comme la moitié du rectangle d'aire 0,14 m^2. L'aire de ce triangle sera donc égale à $0,14\div2=0,07\ m^2$ ou 7 dm^2.



D'une manière générale, si L et ℓ sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, alors l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle est donnée par la formule $\mathcal{A} = L\times\ell\div2$.



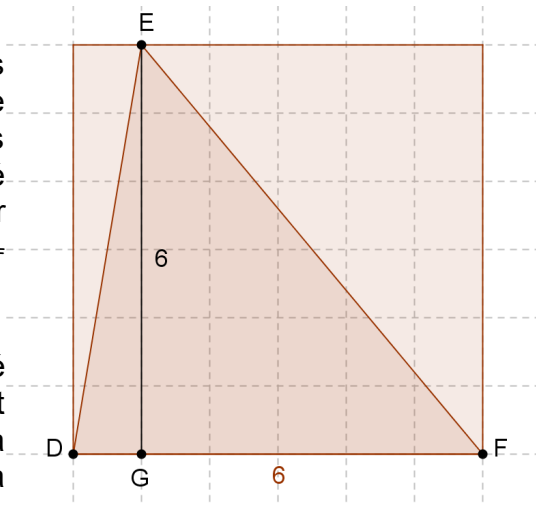
On peut utiliser cette formule pour calculer l'aire d'autres polygones, par découpages en triangles rectangles ou rectangles comme dans les exemples suivants :

- Le pentagone *ABCDE* peut être découpé en 1 rectangle d'aire 48 et de 3 triangles rectangles d'aires 6 (pour *BCF*), 12 (pour *CFD*) et 3 (pour *EGD*). Son aire sera donc égale à 48 + 6 + 12 + 3 = 69.

- L'hexagone *ABCDFE* est le pentagone *ABCDE* auquel on a enlevé 2 triangles rectangles d'aires 15 (pour *EGF*) et 3 (pour *EGD*). Son aire sera donc égale à 69 − 15 − 3 = 51.

d) Aires d'un triangle quelconque

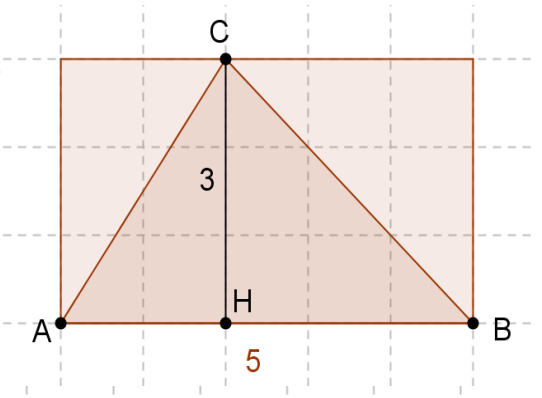
Les triangles peuvent se découper en 2 triangles rectangles. Il suffit de suivre une hauteur (une droite passant par un sommet et perpendiculaire à un des côtés ou 'base' du triangle). Le triangle *EFD* précédent a ainsi été divisé en 2 triangles rectangles *EGF* et *EGD* de hauteur commune (EG). On a ainsi pu calculer $\mathcal{A}_{EFD} = \mathcal{A}_{EGF} + \mathcal{A}_{EGD} = 5\times6\div2 + 1\times6\div2 = (5+1)\times6\div2 = 6\times6\div2 = 36\div2 = 18$.



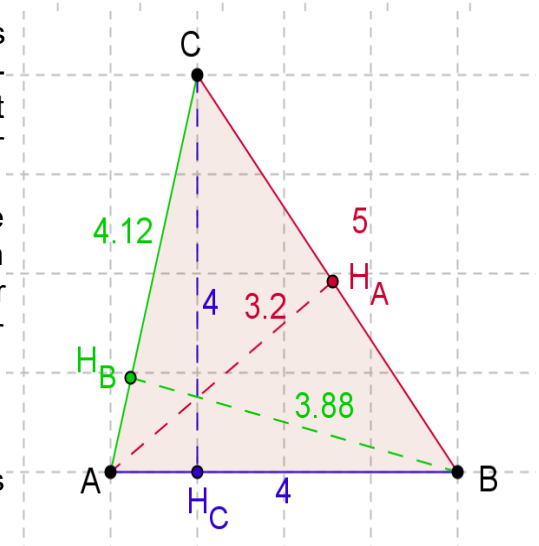
Dans ce calcul, 5×6÷2 + 1×6÷2 = (5+1)×6÷2, on a effectué une factorisation. En écrivant que, finalement, l'aire est égale à (5+1)×6÷2, on constate qu'il suffit de multiplier la 'base' *FD* par la hauteur *EG*, et de diviser le tout par 2. Cela se généralise avec la formule suivante :

L'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle de base *B* et de hauteur h est égal à $\mathcal{A} = B \times h \div 2$.

Ainsi le triangle *ABC* (quelconque) ci-contre a pour aire 5×3÷2 = 15÷2 = 7,5. Car *CH*=3 est la hauteur relative à la base *AB*=5, et il suffit de multiplier ces 2 mesures pour trouver l'aire du rectangle (voir la figure) qui a une aire double de celle du triangle.



Remarque : il y a 3 façons de calculer l'aire d'un triangle, car il y a 3 bases possibles (les 3 côtés). À chaque fois, il faut, bien entendu, utiliser la hauteur qui convient (celle qui est perpendiculaire à la base choisie). Par exemple, on peut calculer l'aire du triangle *ABC* par les 3 méthodes suivantes : $AB\times CH_C\div2 = BC\times AH_A\div2 = CA\times BH_B\div2$. Vous pouvez vérifier cela avec les mesures approximatives ci-contre, mais ces résultats ne seront qu'approximativement égaux (car certaines mesures ont été arrondies par GeoGebra).



Cette remarque peut être utilisée pour déterminer une longueur quand on connait les 3 autres, par exemple ici on a $\mathcal{A}_{ABC} = AB\times CH_C\div2 = 4\times4\div2 = 8$ et comme on doit avoir aussi $\mathcal{A}_{ABC} = BC\times AH_A\div2 = 5\times AH_A\div2 = 8$, c'est que la hauteur relative à BC vaut $AH_A = 8\times2\div5 = 16\div5 = 3{,}2$.

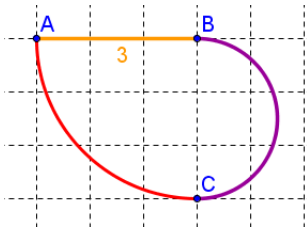
e) Aires d'un disque

Les disques sont les surfaces limitées par un cercle (les surfaces contenues à l'intérieur d'un cercle).

Un disque de rayon *R* a une aire égale à $\pi\times R^2 = \pi\times R\times R$. Si on veut utiliser le diamètre *D*=2×*R* (donc *R*=*D*÷2), on peut écrire l'égalité $\mathcal{A}_{\text{cercle de rayon } R} = \pi\times(D\div2)^2 = \pi\times D^2\div4$. On note souvent ces formules avec l'écriture fractionnaire $\mathcal{A}_{\text{cercle de rayon } R} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}$.

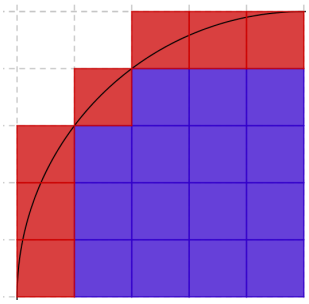
Exemples : Un cercle de 5 *cm* de rayon a une aire égal à 25π *cm* ($\pi\times5\times5 = 25\pi$) soit environ 78,5 *cm²*. Le cercle de diamètre 8,56 de notre illustration (plus haut) a pour aire 57,54895 environ (la valeur exacte serait $\pi\,8{,}56^2 = 73{,}2736\,\pi$). Un cercle de 10 *km²* d'aire a un rayon au carré (R²) égal à $\frac{10}{\pi}$ *km²* soit environ 3183 *m²* ; pour trouver son rayon, il faut utiliser la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice : $\sqrt{3183} \approx 56{,}418$. Vérifions cela : 56,418 ²=56,418×56,418≈3183,00.

Calculons l'aire du demi-cœur *ABC* ci-contre (la figure limitée par le segment [AB], le quart de cercle *AC* et le demi-cercle *BC*) :



$$\frac{1}{4}\times(\pi\times 3^2)+\frac{1}{2}\times\frac{\pi\times 3^2}{4}=\frac{9\pi}{4}+\frac{9\pi}{8}=9\pi\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{8})=\frac{27\pi}{8}\approx 10{,}603\ .$$

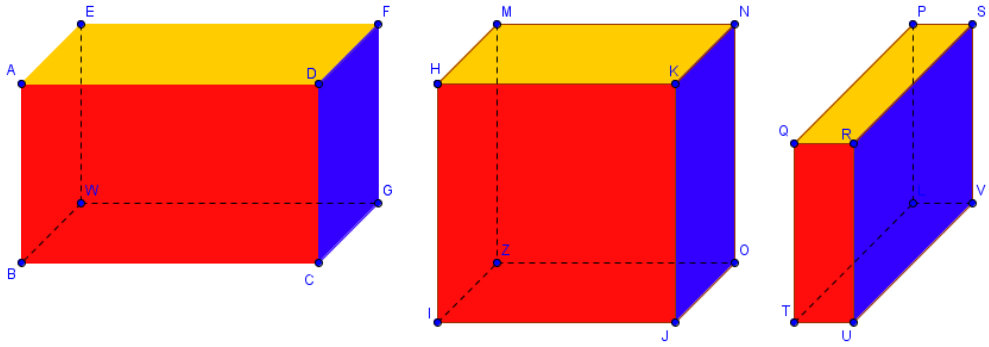
Remarque : on pourrait estimer l'aire d'un disque sans la formule, à l'aide d'un comptage de carrés. Par exemple le quart de disque ci-contre, de rayon 5 contient 15 carrés entièrement compris à l'intérieur du cercle, mais ce quart de disque est contenue à l'intérieur d'un polygone qui contient les carrés rouges (il y en a 7) et bleus (il y en a 15), donc à l'intérieur d'un polygone d'aire 7+15=22 carrés. On peut conclure que l'aire du quart de disque est comprise entre 15 et 22. Cela nous amène à conclure qu'un disque de rayon 5 aura une aire comprise entre 60 (15×4=60) et 88 (22×4=88), soit une moyenne de 74. En effet, la formule donne $\pi\times 5^2=25\pi\approx 78{,}5$ carrés et on a bien $60 < 78{,}5 < 88$. Cette méthode approximative peut être affinée en prenant des carrés plus petits.



3.Volumes

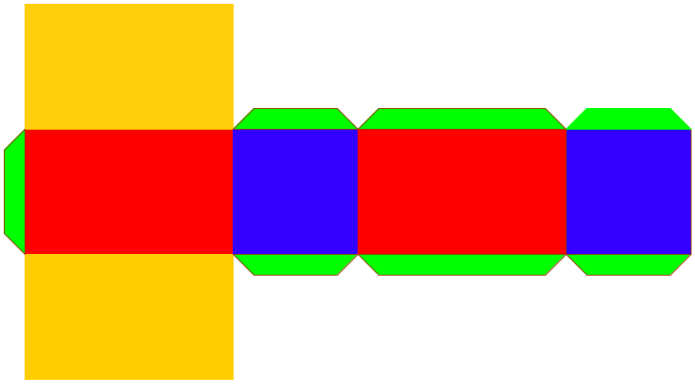
a) Solides

La troisième grandeur mesurée ici concerne les formes ou « solides » de l'espace à trois dimensions. C'est l'espace géométrique qui nous est le plus familier. Nous allons envisager de mesurer des formes simples de cet espace : les *parallélépipèdes rectangles*, aussi appelés *pavés droits*, ou plus simplement *pavés*. Parmi ces pavés, vous connaissez certainement les cubes, qui sont des pavés ayant leurs trois dimensions égales.



Voici des exemples de pavés droits, celui du milieu étant un cube. Ils sont dessinés en 2D selon les règles de la perspective cavalière[1], mais il faut les imaginer en 3D.
La face du devant et celle de derrière sont en « vraies grandeurs » (les angles droits sont dessinés droits, les longueurs sont respectées), les autres sont déformées par la perspective. Ainsi l'arête [*HM*] du cube a la même longueur que l'arête [*HK*] malgré les apparences, et ces arêtes sont perpendiculaires dans la réalité alors qu'elles semblent former un angle aigu dans notre représentation.

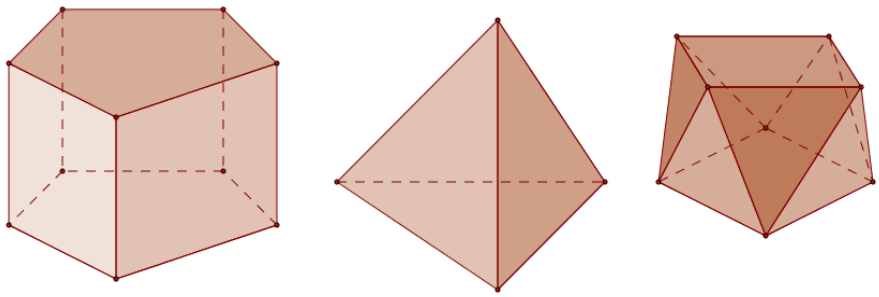
Nous pouvons nous faire une idée de ce qu'est un parallélépipède rectangle en traçant le développement à plat des six faces, toutes en vraies grandeurs cette fois. Le patron du parallélépipède rectangle réalisé, on assemble les faces entre elles après avoir plié selon les arêtes. Voici par exemple un patron pour réaliser le pavé *ABCDEWGF*. Nous constatons que les faces sont des rectangles qui s'apparient deux à deux (faces opposées de même couleur).



1 En perspective cavalière (voir à la fin), les droites parallèles sont toujours représentées parallèles. Le plan de face est le seul représenté en vraie grandeur. Sur les droites perpendiculaires au plan de face, les longueurs sont multipliées par un coefficient de réduction (< 1). Ces droites forment un angle (par ex : 45°) avec les droites horizontales du plan de face.

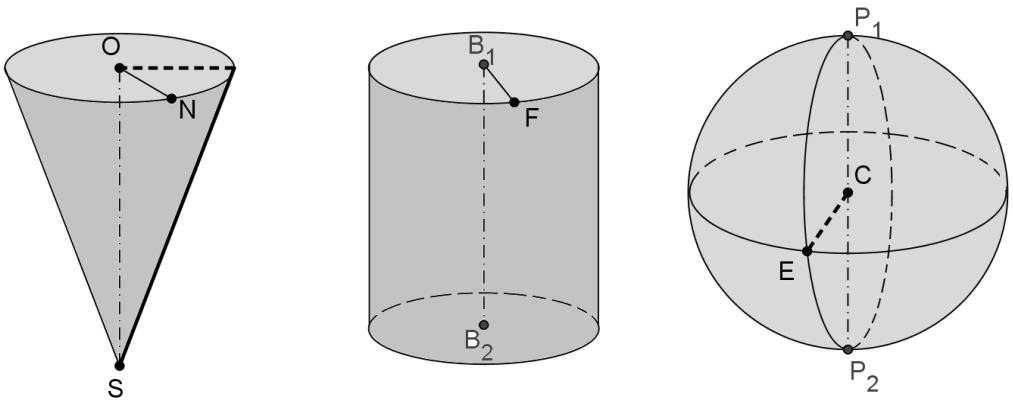
Les douze arêtes (bords des faces) du parallélépipède sont de trois sortes seulement, selon les trois dimensions du pavé (hauteur, longueur et largeur), formant trois groupes de quatre arêtes de même longueur.
Nous avons dessinés en vert des languettes pour assembler les faces entre elles. Ce genre de réalisation doit être fait avec beaucoup de précision et pour obtenir un solide qui se tienne bien, il faut employer un papier cartonné, du genre « bristol » ou papier Canson.

Autres solides : il y a de nombreuses autres formes simples dans l'espace. Les pavés font partie d'une grande famille, les polyèdres, dont les faces sont des polygones. Ci-contre, nous avons représenté un prisme à bases pentagonales (à gauche), une pyramide à base triangulaire et une autre sorte de polyèdre (un antiprisme à base carrée). Les prismes ont deux faces polygonales parallèles et superposables (les bases) et des faces latérales qui, dans le cas du prisme droit, sont des rectangles. Les pyramides ont une face polygonale (la base), les autres étant nécessairement des triangles se rejoignant en un point particulier appelé sommet de la pyramide. En réalité, tous les sommets des faces sont des sommets du polyèdre. Il existe une relation entre le nombre A d'arêtes, le nombre S de sommets et le nombre F de faces de tous les polyèdres : A+2=S+F. Le tableau montre qu'elle est vérifiée sur nos trois exemples.

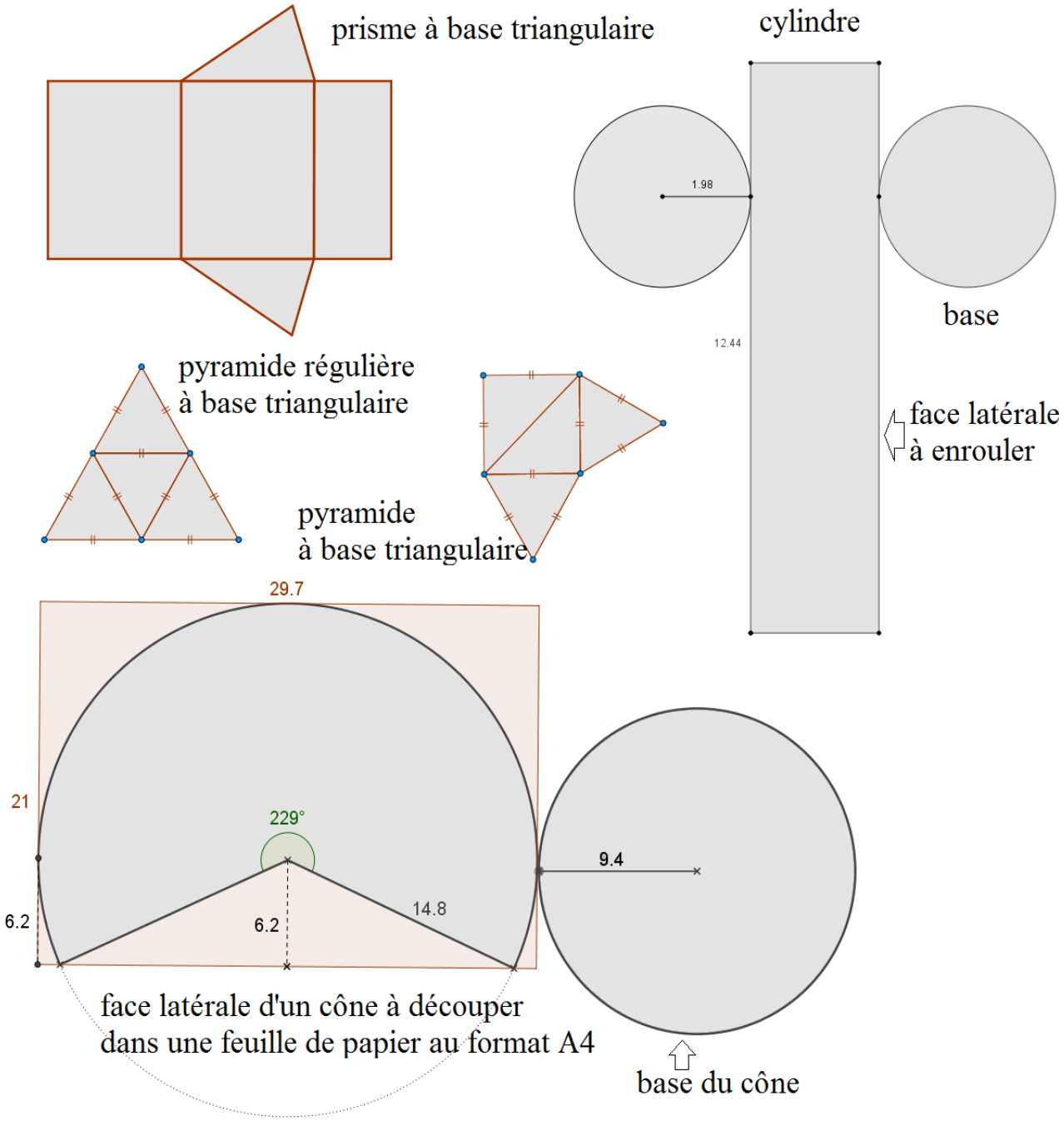


	Arêtes	Faces	Sommets	S+F=A+2
Prisme	15	7	10	17
Pyramide	6	4	4	8
Antiprisme	16	10	8	18

D'autres solides ont des faces courbes, parmi lesquels : les cylindres, les cônes et les sphères. Les cylindres s'apparentent aux prismes car ils ont deux bases parallèles et superposables, mais ce sont des disques (et non des polygones). L'unique face latérale est un rectangle courbé qui s'enroule autour des bases. Les tubes cylindriques n'ont généralement que cette face latérale, les bases étant absentes. La figure du milieu, sur notre illustration est un cylindre.
Les cônes (à gauche sur l'illustration) s'apparentent, quant-à eux, aux pyramides. Ils ont une base unique qui a la forme d'un disque, tandis qu'une face courbe forme comme un cornet autour du sommet, en s'enroulant autour de cette base.
Les sphères sont l'équivalent spatial de nos cercles plans : une sphère est l'ensemble des points de l'espace équidistants d'un point particulier appelé centre de la sphère (le point C sur notre illustration, à droite). Le solide qui forme l'intérieur d'une sphère est appelé boule (de la même façon que la surface plane enfermée à l'intérieur d'un cercle s'appelle un disque).

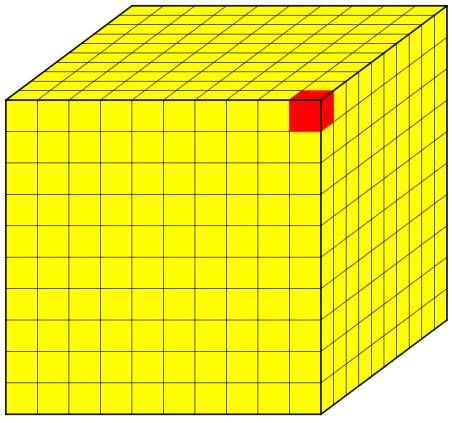


On peut toujours tracer le patron d'un polyèdre, comme on l'a fait pour le pavé droit. Le patron d'une sphère est impossible à tracer ; celui d'un cylindre est constitué de deux disques de rayon r et d'un rectangle de longueur $2\times\pi\times r$ et de largeur h, la hauteur du cylindre (la distance B_1B_2 sur notre illustration) ; celui d'un cône est constitué d'un disque et d'un secteur circulaire de disque.



b) <u>Unités de mesure</u>

Les unités de volume les plus usitées sont celles dérivées du système métrique. Le cube de 1 *m* de côté a un volume égal à 1 m^3 (ce qui signifie 1*m*×1*m*×1*m*), le cube de 1 *dm* de côté a un volume de 1 dm^3. On peut compter le nombre de dm^3 qu'il y a dans 1 m^3 en utilisant la figure ci-contre où le petit cube rouge a un volume de 1 dm^3 et le grand cube jaune un volume de 1 m^3. Vous constatez qu'il y a 1000 dm^3 dans 1 m^3. De même, il y a 1000 cm^3 dans 1 dm^3, ou encore 1000 m^3 dans 1 dam^3…



Ceci nous conduit au tableau de conversion des unités de volume du système métrique suivant dans lequel on met **trois chiffres par colonnes** :

Conversion des volumes						
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
	0,	000	000,	100	000	000
0,	000	012,	500			

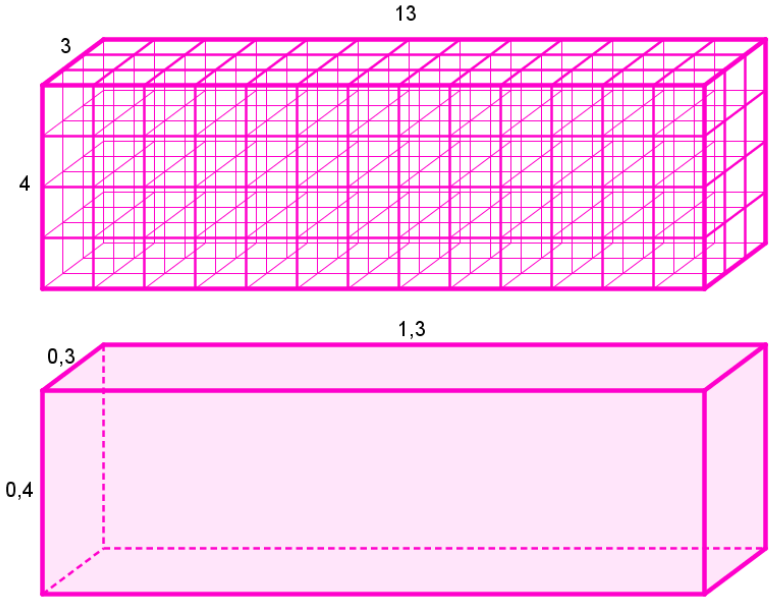
On voit par exemple, que 100 000 000 mm^3 = 0,1 m^3 = 100 dm^3 ou encore, que 12 500 m^3 = 12,5 dam^3 = 0,000 0125 km^3.

Unités spécifiques pour les volumes:

- Le litre est égal au dm^3 (1 *L* = 1 dm^3). Défini à la Révolution, pour unifier les volumes, les longueur et les masses (1 *kg* d'eau occupe le volume d'un cube de 1 *dm* de côté), le litre devrait avoir pour symbole une minuscule (ℓ), mais dactylographié, le l se confondant avec le chiffre 1, l'usage est d'utiliser la majuscule. Des unités dérivées du litres souvent utilisées : l'hectolitre (*hL*), le décalitre (*daL*), les déci-, centi- et millilitres (*dL*, *cL* et *mL*).
- Unités spécifiques : la *stère* équivalente au m^3 (pour mesurer le bois). Le *boisseau* (pour mesurer les grains) est une unité tombée en désuétude.
- Parmi les unités anglo-saxonnes citons l'*once US* (1 *fl oz* ≈ 30 *mL*), le *teaspoon* (environ 5 *mL*), la *pinte* (environ 0,5 *L*) et le *gallon* (1 *gal GB*≈4,5 *L*) qui ne sont pas les mêmes aux États-Unis (1 *gal US*≈3,8 *L*) et en Grande Bretagne… Citons aussi une unité tristement célèbre car en voie de disparition : le *baril* de pétrole (1 bl=42 *gal US*≈159 *L*).

c) <u>Volumes d'un parallélépipède rectangle</u>

Rien de plus facile, il s'agit de compter le nombre de petits cubes unités qu'il y a dans le parallélépipède rectangle. Les côtés ayant pour longueur des nombres entiers ou décimaux, on se ramène toujours à une figure formée de petits cubes comme la figure ci-dessous. Pour représenter un pavé dont les côtés mesurent 1,3 *km*, 0,4 *km* et 0,3 *km*, on peut utiliser l'*hm* comme unité de mesure et compter les hm^3. Ici on voit qu'il y a 13×4×3 = 156 hm^3 soit 0,156 km^3. On aurait trouvé le même résultat avec les longueurs directement en *km* (1,3×0,4×0,3 = 0,156).



D'une manière générale, si L est la longueur, ℓ la largeur et h la hauteur, alors le volume V du parallélépipède rectangle est donnée par la formule

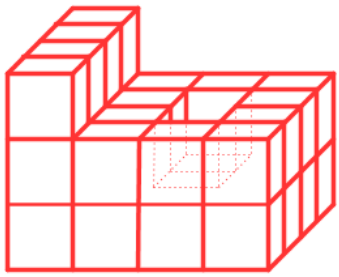
$$V = L \times \ell \times h .$$

Attention à toujours utiliser des longueurs dans la même unité ! Ainsi, un pavé de 3,5 *mm* sur 4 *cm* et 1,2 *dm* a un volume égal à

3,5×40×120 = 16 800 mm^3,

soit 16,8 cm^3 ou encore 0,0168 dm^3 (on aurait pu calculer en cm^3 directement 0,35×4×12 = 16,8).

On peut utiliser cette formule pour calculer d'autres volumes, par découpages en pavés comme dans l'exemple suivant :
Le solide ci-contre peut être vu comme un pavé 4×4×2 auquel on aurait enlevé un pavé 2×1×1 et ajouté un pavé 4×1×1. Son volume sera donc égal à 32 – 2 + 4 = 34.



d) <u>Les différentes perspectives (complément)</u>

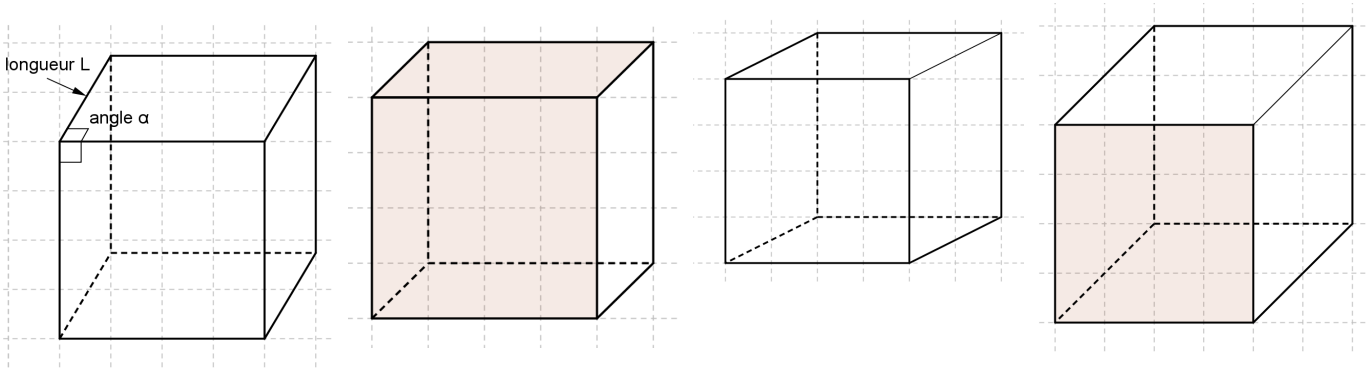
Lorsqu'on représente un objet de l'espace ordinaire (un objet en 3D) sur une feuille ou un tableau, donc sur un *plan*, un espace à deux dimensions, on utilise un procédé de représentation (un ensemble de règles qui définissent comment il faut procéder). Il existe de multiples procédés différents (axonométrie, perspective avec deux points de fuite, etc.) mais en géométrie, sauf contre-indication, on utilise la perspective cavalière.

En perspective cavalière, les droites ou segments parallèles sont toujours représentés parallèles. Les longueurs et les angles ne sont respectés que sur les plans qui sont vus de face. Dans tous les autres plans les longueurs et les angles sont déformés, selon les choix qui ont été faits pour ces deux critères de la perspective cavalière :

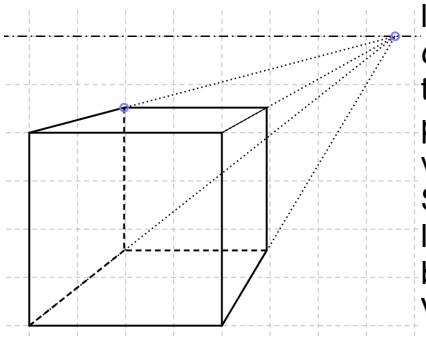
- Sur les droites qui sont perpendiculaires aux plans vus de face, on applique un *coefficient de réduction des longueurs* caractéristique de la perspective (souvent ½ mais cela peut être, théoriquement, n'importe quel nombre entre 0 et 1).
- Ces droites font un angle droit avec la direction horizontale des plans vus de face, mais on convient d'un *angle aigu*, caractéristique de la perspective (souvent 45° ou 60° mais cela peut être, théoriquement, n'importe quel nombre entre 0° et 90°), pour représenter cet angle droit.

Muni de ces deux caractéristiques, on peut représenter un objet de l'espace à trois dimensions. Voyons ce que donne la représentation d'un cube pour différentes valeurs de ces caractéristiques. On a choisi de représenter une face carrée en vraies grandeurs (celle qui lui est opposée est aussi, du coup, en vraies grandeurs) et un point de vue légèrement décalé vers le haut et la droite, afin de voir les faces de droite et du dessus, déformées par la perspective. L'angle caractéristique, noté « angle α » sur la première vue, vaut 90° dans la réalité. La longueur caractéristique, notée « longueur L » sur la première vue, vaut 4 carreaux (comme les autres arêtes du cube) dans la réalité.

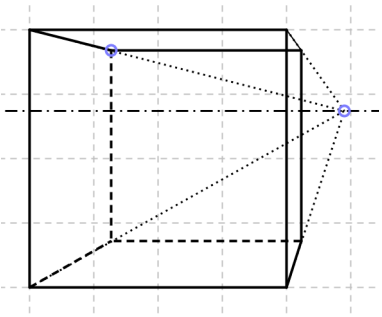
Persp. Cav. (½ - 60°) Persp. Cav. (0,35 - 45°) Persp. Cav. (0,56 - 27°) Persp. Cav. (0,71 - 45°)



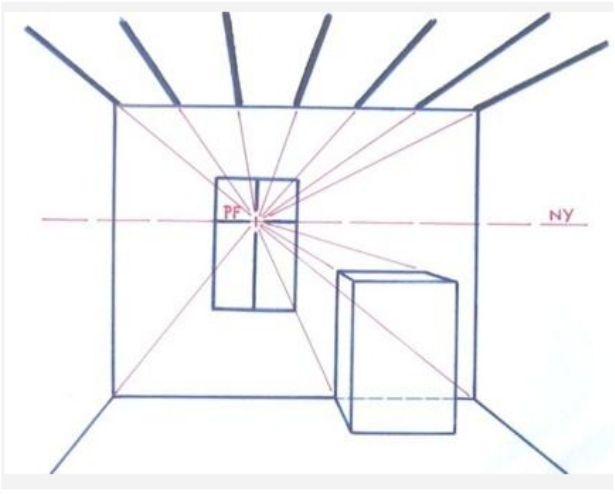
Autre représentation du cube qui n'est pas la perspective cavalière :



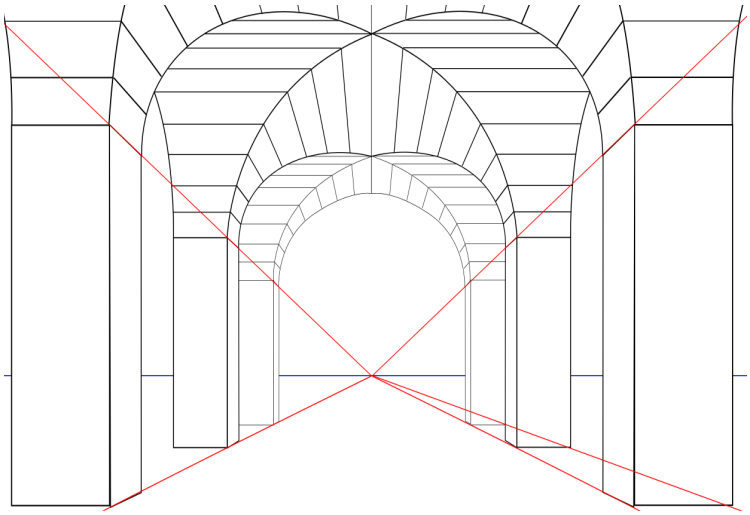
la *perspective frontale avec un point de fuite*. L'idée est de faire converger toutes les droites parallèles qui sont perpendiculaires au plan vu de face vers un point de fuite « à l'infini ». Selon la position de ce point de fuite, les lignes de fuite peuvent s'écarter beaucoup du parallélisme.



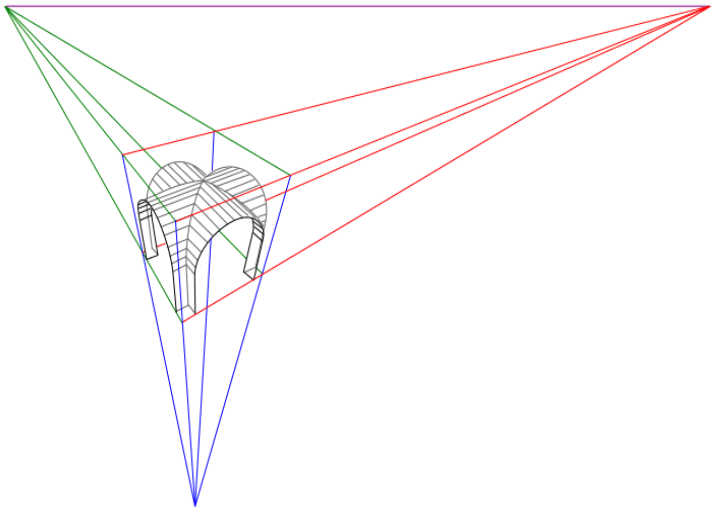
Voici deux vues qui utilisent ce principe de représentation.

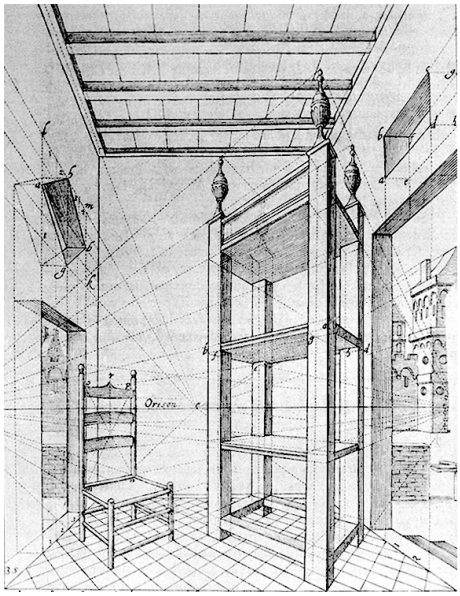
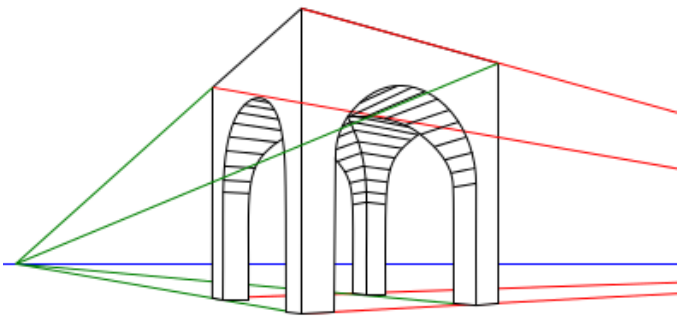


Bien sûr cette perspective peut parfois paraître un peu « plate » et les techniques de dessin assisté par ordinateur évoluant, on peut maintenant réaliser des perspectives plus compliquées ayant deux ou trois points de fuite.



On peut en effet, faire converger les trois ensembles de droites parallèles (les trois groupes des quatre arêtes parallèles d'un cube) vers trois points de fuite « à l'infini » en créant une impression plus réaliste du relief.





On peut aussi se limiter à deux points de fuite seulement comme dans l'exemple de gauche ci-dessous où les droites verticales sont représentées parallèles. Dans la représentation d'une vue en relief, il peut y avoir plusieurs points de fuite situés sur une même ligne de fuite comme dans ce tableau ci-contre à droite.