1) Fractions et quotients

a) Définition

Nous avons vu au chapitre 5 qu'un *quotient* est le résultat d'une division.
Dans la division de *a* par *b*, *a* est appelé le *dividende* tandis que *b* est le *diviseur* ; le quotient est le nombre $a \div b$. Par exemple, dans la division de 100 par 8, le dividende est 100, le diviseur est 8 et le quotient est 12,5 (car $100 \div 8 = 12{,}5$).

Le résultat d'une division n'étant pas toujours un nombre décimal (parfois la division « ne s'arrête pas »), le quotient de *a* par *b* reste souvent écrit comme un quotient, c'est-à-dire $a \div b$ mais dans ce cas on préférera utiliser une notation spécifique, la notation fractionnaire.

Exemple : 2 divisé par 3 donne une suite infinie de 6 ($2 \div 3 = 0{,}66666666666\ldots$).
On peut donner de ce nombre des valeurs arrondies : 0,67 au centième prés ou 0,7 au dixième prés ou 0,666667 au millionième prés, avec l'inconvénient que ce ne sont pas des valeurs exactes.
On peut noter ce quotient avec une notation décimale exacte en soulignant ou surlignant ou marquant d'une autre façon les chiffres qui se répètent : $2 \div 3 = 0{,}\underline{6}$ ou $0{,}\overline{6}$ ou encore 0,[6].
Nous préférerons généralement garder l'écriture sous forme d'un quotient en l'écrivant sous une forme spéciale, la *notation fractionnaire* : $2 \div 3 = \frac{2}{3}$, tout simplement.

Définition : une fraction est un quotient de deux entiers écrit avec la notation fractionnaire.
La *fraction* $\frac{a}{b}$ est le quotient des entiers *a* et *b*.

La notation avec le trait horizontal est la *notation fractionnaire* d'un quotient. On peut utiliser la notation fractionnaire pour un quotient entre deux nombres qui ne sont pas entiers, mais dans ce cas, ce n'est pas une fraction. Par exemple, $\frac{12{,}5}{100}$ ou $\frac{\pi}{3}$ sont des écritures fractionnaires mais ce ne sont pas des fractions. La première peut être transformée en fractions : $\frac{125}{1000}$ ou $\frac{1}{8}$ sont, en effet, des fractions égales à $\frac{12{,}5}{100}$ selon la propriété des quotients que l'on verra plus loin. La seconde écriture fractionnaire, $\frac{\pi}{3}$, ne peut pas être transformée en fraction car π n'est pas un nombre décimal.

Définition : Le nombre *a*, le dividende de la division, est appelé *numérateur* de la fraction, tandis que *b*, le diviseur de la division, est appelé *dénominateur* de la fraction.

Cette notation fractionnaire n'est pas la seule employée :

- Le monde anglo-saxon utilise une notation particulière pour les fractions dont le numérateur est supérieur au dénominateur (fractions dites *impropres*) : ils donnent la partie entière du quotient et, à côté, écrivent la partie décimale sous une forme fractionnaire. C'est la notation mixte d'une fraction. Par exemple $\frac{5}{4}$ sera notée $5\frac{1}{4}$, ce qui signifie $5+\frac{1}{4}$.
- Le trait de fraction n'étant pas toujours facile à utiliser (machines à écrire, ordinateur), on trouve souvent les fractions écrites en ligne avec le / qui remplace, finalement le symbole de la division ÷. Par exemple, on écrit 1/2 ou 12/7 à la place de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{12}{7}$, par contre $\frac{5-2}{4}$ est noté (5-2)/4 car le symbole / ne dispense pas des parenthèses.
- Les pourcentages sont des fractions de dénominateur 100, ou des écritures fractionnaires de dénominateur 100. On ne note pas ce dénominateur, préférant le symbole %. Ainsi 12% ou 12,5% peuvent s'écrire $\frac{12}{100}$ ou $\frac{12{,}5}{100}$.

Certains types de fraction sont remarquables :

- Les fractions décimales sont des fractions dont le dénominateur est une puissance de dix (1, 10, 100, 1000, etc.). Les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction décimale sont les nombres décimaux.
- Les fractions dont le numérateur est 1 sont appelée fractions unitaire ou fraction égyptienne. Dans l'antiquité, les mathématiciens exprimaient les fractions sous la forme d'une somme de fractions unitaires. Par exemple $\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$.

b) Comparaisons des fractions

Pour comparer deux fractions, on a plusieurs possibilités.

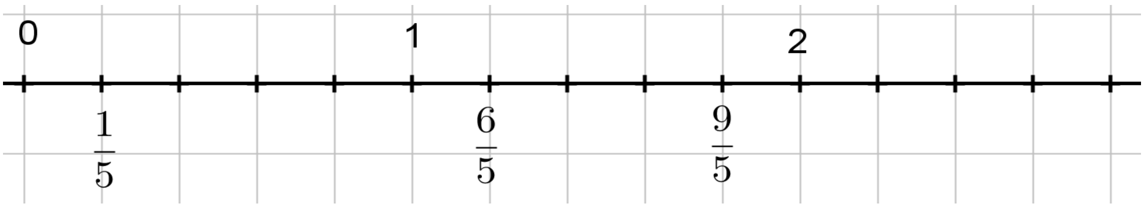
On peut les écrire sous la forme décimale, en effectuant les divisions. C'est parfois le moyen le plus efficace, surtout si on dispose d'une calculatrice. Par exemple, pour comparer $\frac{41}{56}$ et $\frac{13}{17}$ on va écrire le début du développement décimal, en s'aidant de la calculatrice : $\frac{41}{56}=0{,}73...$ et $\frac{13}{17}=0{,}76...$ On peut alors affirmer que $\frac{41}{56}<\frac{13}{17}$ (car 0,73<0,76).

Si les fractions ont le même dénominateur, il suffit de comparer les numérateurs : les fractions sont dans l'ordre des numérateurs. On a, par exemple, $\frac{1}{7}<\frac{2}{7}<\frac{3}{7}<...$. Cette méthode sera employée parfois, après avoir transformé les fractions pour qu'elles aient le même dénominateur (voir plus loin).

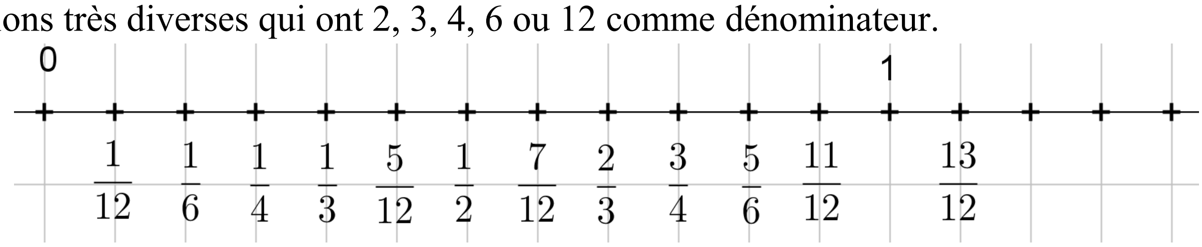
Si les fractions ont le même numérateur, il suffit de comparer les dénominateurs : les fractions sont dans l'ordre inverse des dénominateurs. On a, par exemple, $\frac{7}{1}>\frac{7}{2}>\frac{7}{3}>\frac{7}{4}>...$. Cette méthode est utile si on emploie des fractions unitaires (de numérateur 1).

Une fraction est plus petite que 1 si le numérateur est inférieur au dénominateur. Par exemple $\frac{19}{21}<1$ alors que $\frac{47}{45}>1$. On peut ainsi comparer aisément (sans faire de calcul) $\frac{19}{21}$ et $\frac{47}{45}$: $\frac{19}{21}<\frac{47}{45}$. De même, on doit pouvoir reconnaître qu'une fraction est plus ou moins grande que $\frac{1}{2}$ (comparer le double du numérateur et le dénominateur). Par exemple, $\frac{13}{24}>\frac{5}{11}$ car $13\times2=26>24$ alors que $5\times2=10<11$. On peut aussi justifier cela en constatant que $\frac{13}{24}>\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ alors que $\frac{5}{11}<\frac{5{,}5}{11}=\frac{1}{2}$.

Une autre méthode pour comparer des fractions est de les disposer sur un axe gradué. On a déjà fait cela pour les nombres décimaux (des fractions décimales). L'inconvénient de cette méthode : c'est un peu long à mettre en œuvre, et pour placer un point dont l'abscisse est une fraction, il est préférable de découper l'unité comme le dénominateur. Cela limite l'usage de cette technique aux fractions dont les dénominateurs sont des diviseurs d'un même entier. Si l'unité est divisée en 5, on peut représenter difficilement autre chose que des cinquièmes car 5 n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui-même (5 est premier).



En découpant l'unité en 12, comme 12 a de nombreux diviseurs, on peut représenter des fractions très diverses qui ont 2, 3, 4, 6 ou 12 comme dénominateur.



c) Quotients égaux→ fractions égales

Rappelons qu'un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie son dividende et son diviseur par un même nombre. Par exemple 0,2÷12,5=2÷125=4÷250=16÷1000.

C'est cette propriété qui nous a permis d'étendre la technique de la division des entiers aux nombres décimaux. Puisque les fractions sont des quotients, nous allons pouvoir utiliser cette propriété avec les fractions, et en explorer les nombreux usages.

Ainsi on peut écrire, par exemple $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{80}{120}=\frac{2\times\phi}{3\times\phi}$.

Toutes les fractions obtenues de cette manière sont égales. Dans la dernière fraction, nous avons utilisé la lettre ϕ (phi) pour représenter n'importe quel nombre. Ainsi, les quatre fractions écrites à gauche sont obtenues pour $\phi=1$, $\phi=2$, $\phi=4$ et $\phi=40$, mais on aurait aussi bien pu prendre $\phi=7$ ou $\phi=2017$. Nous aurions alors obtenu les fractions $\frac{14}{21}=\frac{4034}{6051}$, égales comme les autres à $\frac{2}{3}$, la plus simple de toutes celles que l'on peut imaginer sur ce modèle.

On peut généraliser cet exemple en écrivant ce règle d'égalité entre deux fractions :

Si *a, b* et *c* sont des nombres quelconques (*b* et *c* doivent être différents de 0 pour que les quotients existent), alors on a l'égalité suivante : $\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$

Cette propriété permet de transformer une fraction ou une écriture fractionnaire pour la *simplifier* ou pour obtenir un certain dénominateur. Ces transformations sont indispensables pour *comparer* des fractions, les ajouter ou les soustraire.

Exemples : Simplifions les fractions $\frac{112}{450}$ et $\frac{129}{450}$.

Pour la première, remarquons que 128 et 450 sont *pairs* (des multiples de 2) et donc on peut simplifier la fraction par 2 : $\frac{112}{450}=\frac{2\times 56}{2\times 225}=\frac{56}{225}$.

Pour la seconde, remarquons que 126 et 450 sont des multiples de 3 (la somme de leurs chiffres est à chaque fois un multiple de 3 : 1+2+9=12=3×4 et 4+5+0=9=3×3) et donc on peut simplifier la fraction par 3 : $\frac{129}{450}=\frac{129\div 3}{450\div 3}=\frac{43}{150}$.

Remarque : On peut continuer à simplifier une fraction pour réduire *au maximum* son numérateur et son dénominateur. Dans notre exemple on ne peut pas simplifier davantage la première fraction car 56 ne se divise que par des nombres pairs et par 7 alors que 225 n'est ni pair ni divisible par 7. Pour la deuxième fraction, on ne peut pas continuer la simplification car 43 est un nombre *premier* (qui n'est divisible par aucun nombre plus petit que lui, à part 1) et que 150 n'est pas divisible par 43.

Ce n'est pas difficile de *comparer* des fractions qui ont le même dénominateur : comme on l'a dit plus haut, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur. Par exemple, on a $\frac{1}{8}<\frac{2}{8}<\frac{3}{8}<\frac{4}{8}$. Si, par contre, on doit comparer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on va commencer par les transformer pour que ce soit le cas. Ensuite on compare les fractions obtenues, et on conclut en donnant les comparaisons cherchées.

Par exemple, si on doit comparer $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{8}$, on va les exprimer avec le même dénominateur. Ici on peut choisir 40 car 5×8=40. Transformons : $\frac{2}{5}=\frac{2\times 8}{5\times 8}=\frac{16}{40}$ et $\frac{3}{8}=\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{15}{40}$.

Comparons : $\frac{16}{40}>\frac{15}{40}$ car 16>15 et concluons : $\frac{2}{5}>\frac{3}{8}$.

Vérifions, en effectuant les divisions : $\frac{2}{5}=0{,}4$ et $\frac{3}{8}=0{,}375$. La comparaison sous la forme décimale est plus simple (on compare alors des fractions décimales) 0,4>0,375 donc $\frac{2}{5}>\frac{3}{8}$.

Pour *ajouter* ou *soustraire* des fractions, c'est facile quand elles ont le même dénominateur. En effet, il suffit d'ajouter (ou soustraire) les numérateurs : $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1+3}{8}=\frac{4}{8}$ ou $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3-1}{5}=\frac{2}{5}$.

Pour ajouter ½ et ¼ (par exemple ½ heure et ¼ d'heure) il faut, encore cette fois, convertir les deux fractions au même dénominateur. Comme $\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{2}{4}$, on additionne 2 quarts et 1 quart, ce qui donne 3 quarts. Cela se note $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$. Pour soustraire un quart à un demi, on fait de même : $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$.

Le même principe est employé pour toutes les additions ou soustractions de fractions.
Ainsi, on a $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}=\frac{16}{40}+\frac{15}{40}=\frac{16+15}{40}=\frac{31}{40}$ et $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}=\frac{16}{40}-\frac{15}{40}=\frac{16-15}{40}=\frac{1}{40}$.

Les fractions égyptiennes utilisent des sommes de fractions unitaires. Avec celles-ci, on peut remarquer la propriété suivante : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a\times b}$. Par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2+3}{2\times 3}=\frac{5}{6}$. En effet, un multiple commun à 2 et à 3 qui pourrait servir de dénominateur commun est 2×3=6. On exprime chacune des fractions en sixièmes : $\frac{1}{2}=\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{3}{6}$ et $\frac{1}{3}=\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{2}{6}$, d'où le résultat.

2) Multiplication d'un quotient par un nombre

a) Considérations introductives

Lorsqu'on partage un segment de 12 *cm* en 5 (on en prend $\frac{1}{5}$) on obtient un segment qui mesure 2,4 *cm* car 12÷5=2,4. Donc $\frac{1}{5}$ de 12 vaut 12÷5 ou $\frac{12}{5}$.
La fraction $\frac{2}{3}$ c'est 2÷3 (2 unités divisées par 3) mais c'est aussi deux tiers (2 fois 1 tiers) c'est-à-dire que $\frac{2}{3}=\frac{2\times 1}{3}$.
Si l'on prend les $\frac{2}{3}$ d'un segment de 12 *cm*, on peut calculer la longueur d'un tiers et multiplier cette longueur par 2 : $\frac{2}{3}$ de 12= $2\times\frac{12}{3}=2\times 4=8$. On trouve le même résultat si on effectue d'abord la multiplication 2×12 et ensuite la division par 3 car 24÷3=2×4=8. En résumé, comme $\frac{2}{3}$ de 12 vaut $2\times\frac{12}{3}=\frac{2\times 12}{3}=8$, on notera $\frac{2}{3}$ de 12 sous la forme $\frac{2}{3}\times 12$.

b) Calculs de la fraction d'une quantité

D'une manière générale, les $\frac{2}{3}$ d'une quantité q correspondent à un quantité égale à $\frac{2}{3}\times q$ qui se calcule aussi bien par le produit $2\times\frac{q}{3}$ que par le quotient $\frac{2\times q}{3}$.
Dans tous les cas, prendre $\frac{a}{b}$ d'une quantité q, c'est calculer une quantité q' égale à $\frac{a}{b}\times q=\frac{a\times q}{b}=a\times\frac{q}{b}$ (Il y a en fait trois façons distinctes d'effectuer le calcul de q').

Exemple 1 : $\frac{4}{5}$ des élèves d'une classe contenant 25 élèves sont des filles. Le nombre de filles est $\frac{4}{5}\times 25$ qu'on peut calculer de trois façons distinctes :
$\frac{4}{5}\times 25=0{,}8\times 25=20$; $\frac{4\times 25}{5}=\frac{100}{5}=20$; $4\times\frac{25}{5}=4\times 5=20$

Exemple 2 : Une entreprise a utilisé 45% ($\frac{45}{100}$) de sa réserve de fuel qui fait 6000 *L*. Combien lui en reste t-il ? Elle a utilisé $\frac{45}{100}\times 6000=45\times\frac{6000}{100}=45\times 60=2700\ L$, il lui en reste donc 6000−2700=3300 *L*.

c) Définition du quotient

Jusqu'à présent nous n'avons pas donné de définition d'un quotient car cette notion est connue et utilisée depuis longtemps. Mais ici, ce serait dommage de ne pas la mentionner.

Si a et b sont deux nombres quelconques ($b\neq 0$), alors le quotient $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a. Autrement dit, si l'on veut trouver le nombre φ tel que $b\times\varphi=a$, il suffit de calculer le quotient $\frac{a}{b}$ car $\varphi = \frac{a}{b}$.

Exemple : Vous le saviez mais lorsque vous achetez 3 CDs et que vous payez 25,8 euros au total, vous avez payé chaque CD à un prix moyen $\varphi=\frac{25,8}{3}=8,6$ car on doit avoir $3\times\varphi=25,8$. Le prix moyen d'un CD est donc égal à 8,6 euros.

Quel est le rapport avec le fait de prendre la fraction d'une quantité ? Nous venons de dire que $b\times\frac{a}{b}=a$ mais cela est un cas particulier de la règle que nous avons mentionné dans la partie précédente, à savoir : $\frac{a}{b}\times q=\frac{a\times q}{b}=a\times\frac{q}{b}$. Lorsqu'on effectue $b\times\frac{a}{b}$, on trouve $\frac{b\times a}{b}$: une fraction que l'on peut simplifier par b et qui est égale à a.

Application : par quel nombre faut-il multiplier 3 pour trouver 4 ? Réponse : par $\frac{4}{3}$ car $3\times\frac{4}{3}=\frac{3\times 4}{3}=4$. Nous allons voir que cette application aura son utilité dans la partie suivante, pour le calcul d'un coefficient de proportionnalité.

3) Proportionnalité

a) Rappels sur les opérateurs

On appelle *opérateur additif*, un nombre qui est **ajouté** aux nombres d'une série de données pour la transformer. Par exemple, un professeur décide de mettre un point de plus à tous les élèves de la classe! Les moyennes sont ainsi transformées, en utilisant l'opérateur additif +1

Note moyenne **avant** opérateur	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Note moyenne **après** opérateur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

On appelle *opérateur multiplicatif*, un nombre qui est **multiplié** aux nombres d'une série de données pour la transformer. Par exemple, un professeur décide de multiplier toutes les moyennes par 1,1! Les moyennes sont ainsi transformées, en utilisant l'opérateur multiplicatif $\times 1,1$:

Note moyenne **avant** opérateur	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Note moyenne **après** opérateur	0	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9	11	12,1	13,2

b) La situation de proportionnalité

Définition : on appelle *situation de proportionnalité*, une situation où deux séries de nombres sont liées par un opérateur multiplicatif. On dit que les deux séries sont *proportionnelles*, ou qu'une série est proportionnelle à l'autre.

Dans notre dernier exemple d'opérateur, les notes avant et après sont proportionnelles. Un autre exemple : les prix en francs PF et les prix en euros PE ont été définis par la relation de proportionnalité : $PE=PF\times 6,55957$. Un dernier exemple : le périmètre p d'un carré est proportionnel au côté c du carré car $p=4\times c$.

L'opérateur multiplicatif qui agit dans une situation de proportionnalité est appelé *coefficient de proportionnalité*. Pour trouver ce coefficient, lorsqu'on connaît un couple de valeurs proportionnelles, il suffit de prendre leur quotient car si $b\times ?=a$ alors $?=\frac{a}{b}$. Par exemple si $3\times ?=7$ alors $?=\frac{7}{3}$ comme dans la situation ci-dessous :

Situation : dans son jardin potager, mon grand-père arrose 7 rangées de légumes avec 3 seaux d'eau. Combien de seaux d'eau sont nécessaires pour arroser 1 rangée? Combien pour l'ensemble du jardin qui fait 30 rangées? Avec un seau combien arrose t-on de rangée? Combien en arrose t-on avec 15 seaux?

Nombre de rangées	7	1	$\frac{7}{3}$	30	$\frac{15\times 7}{3}=\frac{15}{3}\times 7=5\times 7=35$

Nombre de seaux	3	$\frac{3}{7}$	1	$\frac{30\times3}{7}=\frac{90}{7}=12+\frac{6}{7}\approx13$	15

Comment sait-on qu'une situation est une situation de proportionnalité ? Lorsqu'on reconnaît qu'il y a un opérateur multiplicatif. Parfois celui-ci est donné explicitement. Par exemple, au marché le prix d'un article est proportionnel au poids de cet article puisqu'on donne un prix au kilo (*kg*). Si on achète des pommes à 2,5 €/kg alors le prix de pommes *Px* et leur poids *Pd* sont liés par la relation $Px=2{,}5\times Pd$ *ou* $Pd=Px\div2{,}5$. Parfois ce coefficient n'est pas donné explicitement et il faut le calculer en prenant le quotient, comme on l'a expliqué plus haut. Mais pour s'assurer que la situation est une situation de proportionnalité on peut se poser les 2 questions suivantes :

- Si je double le 1er nombre, alors le 2ème nombre est-il doublé ?
- Si le 1er nombre est nul, alors le 2ème nombre est-il nul aussi ?

Si la réponse est non à une de ces deux questions, alors sans aucun doute, notre situation n'est pas une situation de proportionnalité. Sinon, il y a de grandes chances qu'elle le soit.