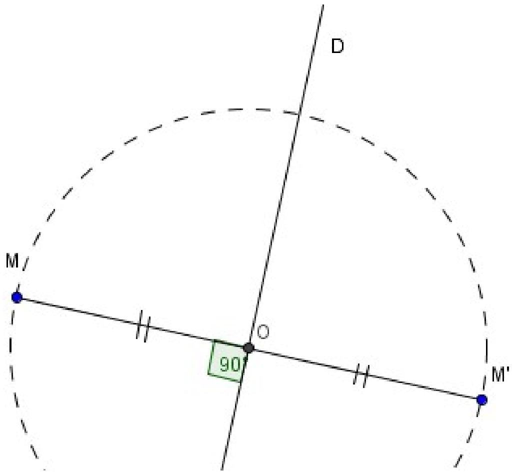
1) Symétrique d'un point

a) Construction du symétrique d'un point par rapport à une droite.

Définition : Le symétrique *M'* d'un point *M* par rapport à une droite *D* est tel que : (*MM'*) est perpendiculaire à *D* et [*MM'*] a pour milieu un point de *D*.



Nous utilisons l'équerre et le compas pour faire cette construction. Le programme de construction est le suivant :

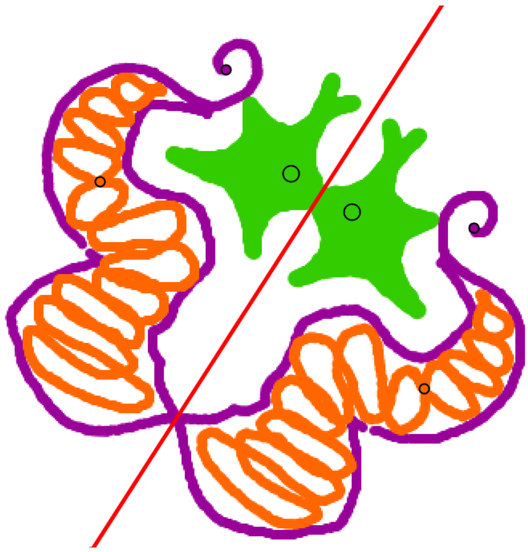
- Tracer la droite perpendiculaire à *D* passant par *M*
- Cette droite coupe *D* en un point *O*, tracer le cercle de centre *O* passant par *M*.
- Ce cercle recoupe la perpendiculaire à *D* en un point *M'*, placer *M'*.

Remarque : un point de la droite *D* a pour symétrique lui-même. Sur notre figure, le symétrique de *O* par rapport à *D* est *O*. On dit d'un point qui n'est pas déplacé par une symétrie qu'il est *invariant*.

b) Symétrique d'une figure point par point

Si nous construisons le symétrique de chaque point d'une figure avec la définition précédente, on obtient le symétrique de la figure. Mais la plupart du temps les figures sont constituées d'une infinité de points, la construction des symétriques de tous les points est impossible à faire manuellement. Il faudra utiliser les propriétés de la symétrie qui suivent pour effectuer les constructions de manière efficace, ou alors, il faudra utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

La figure ci-contre a été construite à l'aide du logiciel 'GeoGebra' qui est libre, gratuit et téléchargeable sur internet. Pour réaliser une telle figure, il faut utiliser l'outil 'symétrique d'un point par rapport à une droite' et activer la trace des points. En déplaçant le point de départ, son symétrique se déplace aussi, et la trace des déplacements dessine une figure symétrique.



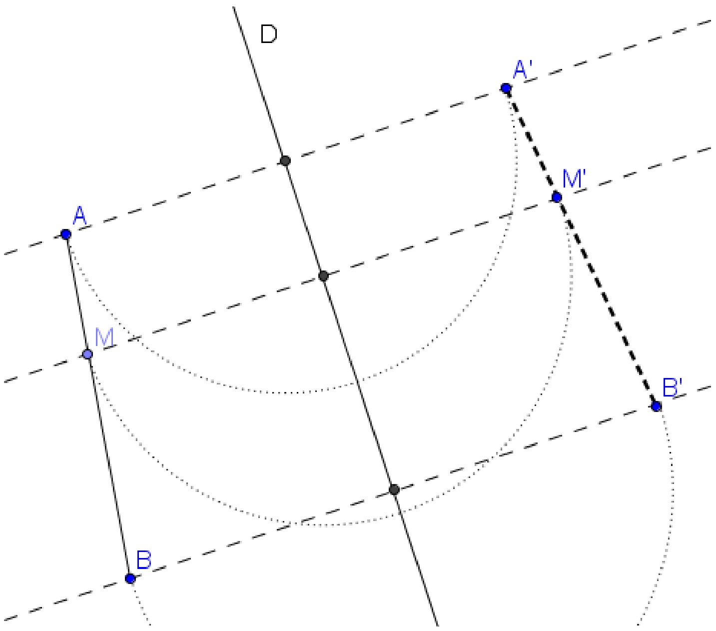
2) Propriétés de la symétrie

a) Symétrique d'un segment

Si l'on construit les symétriques de 3 points alignés comme *A, M* et *B* sur la figure ci-contre, on obtient 3 points alignés. De plus, la distance entre deux points est conservée par symétrie.
Sur notre figure $AB = A'B'$ ou encore $AM = A'M'$.

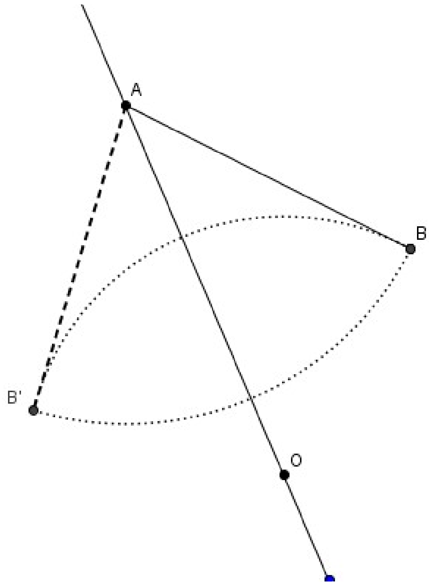
Nous retiendrons qu'une symétrie transforme un segment en un segment de même longueur. Sur notre figure [*AB*] est transformé en [*A'B'*].

Pour construire le symétrique d'un segment, il suffit donc de construire le symétrique des deux extrémités du segment, puis de tracer le segment qui joint ces deux points.



Si le segment dont on cherche le symétrique a une extrémité sur la droite *D* (l'axe de la symétrie), alors c'est plus simple encore car ce point, qui est sur *D* a pour symétrique lui-même (il est invariant). Il suffit de trouver le symétrique d'un seul autre point.

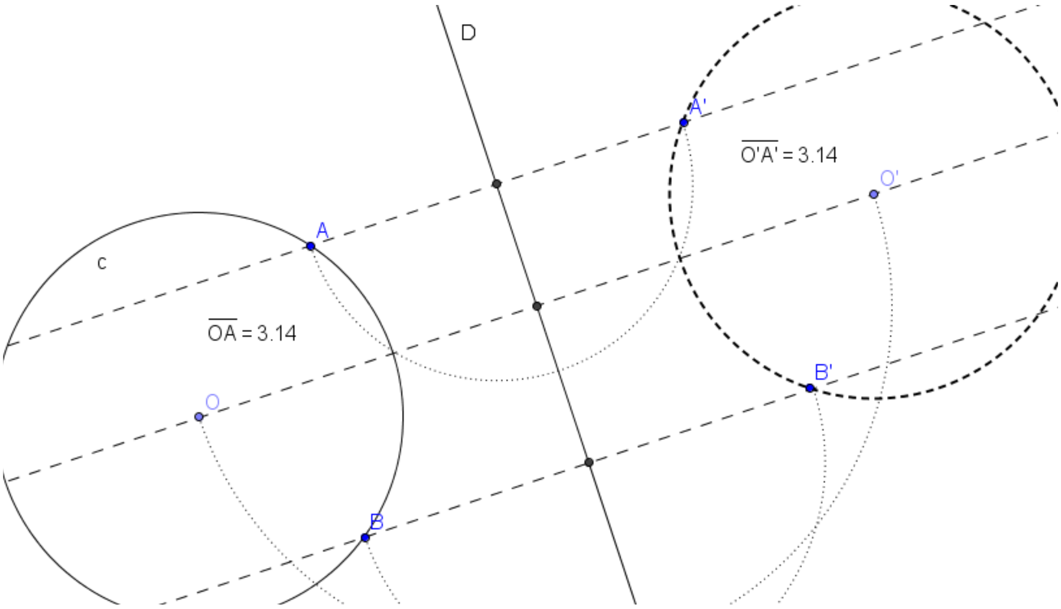
Sur notre illustration ci-contre, nous avons construit *B*', le symétrique de *B*, **sans utiliser d'équerre**, mais en introduisant un autre point invariant *O* sur la droite *D*. On sait en effet, que le symétrique *B*' de *B* est sur un cercle de centre *A* passant par *B* et sur un cercle de centre *O* passant par *B* (car la symétrie conserve la longueur d'un segment). Ensuite nous avons tracé [*AB*'] le symétrique de [*AB*].



b) <u>Symétrique d'un cercle</u>

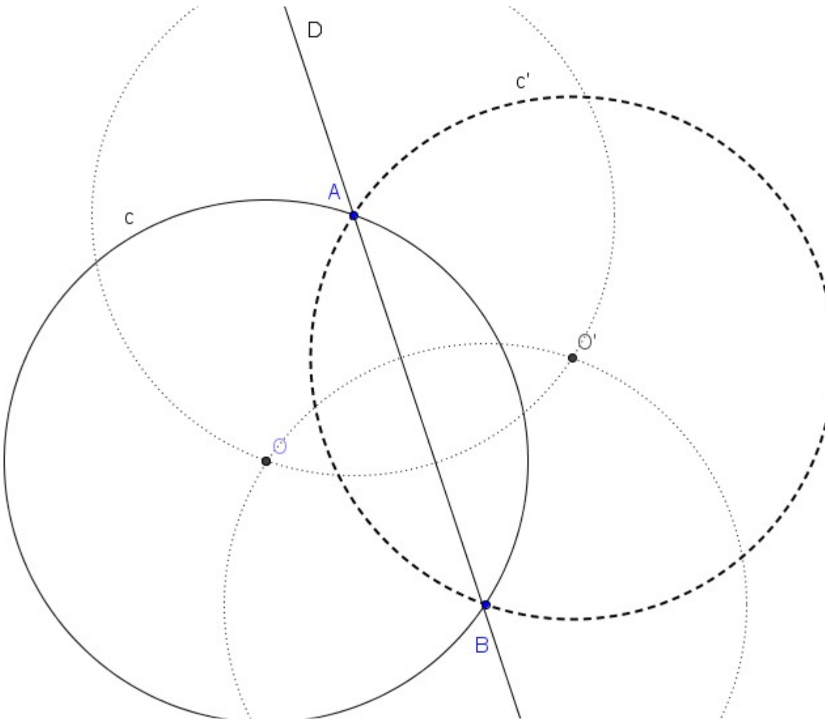
Si l'on doit tracer le symétrique d'un cercle de centre *O* passant par *A*, il suffit de tracer l'image *O*' du centre *O* et l'image *A*' du point *A*. Un cercle a, en effet, pour symétrique un autre cercle de même rayon et dont le centre est le symétrique du centre du cercle de départ.

N'importe quel point *B* du cercle de départ aura pour symétrique un point *B*' du cercle symétrique.

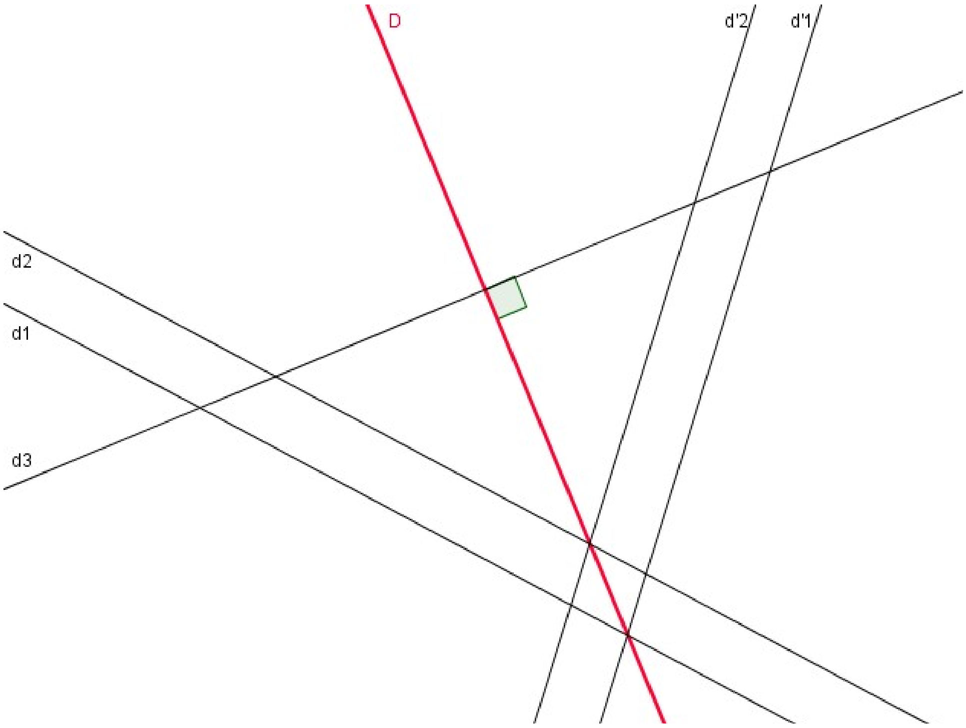


Lorsque le cercle de départ coupe l'axe *D* de la symétrie, nous avons deux points invariants (les points du cercle qui sont sur la droite *D*). Il suffit donc de construire le symétrique du centre *O*. Car alors le cercle symétrique est obtenu en traçant le cercle de centre *O*' passant par un de ces points invariants.

Sur notre illustration, nous avons construit le symétrique de *O* par rapport à *D* sans utiliser l'équerre, avec la construction expliquée au a) : nous traçons les cercles de centre *A* et *B* passant par *O*. Ils se croisent en *O* et *O*', le point cherché.

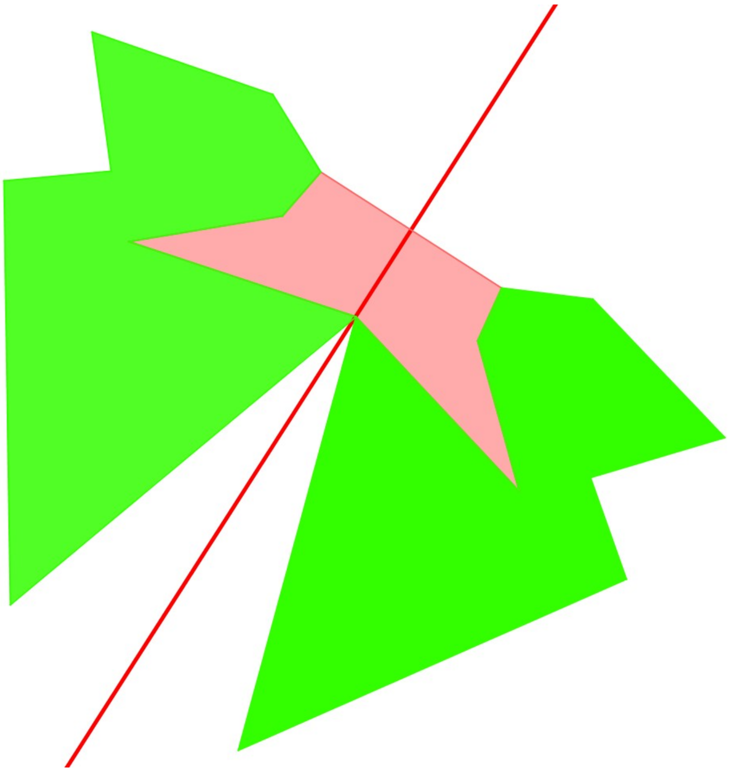


c) Symétrique d'une droite



Le symétrique d'**une droite** d par rapport à une droite D est une droite d' qu'on trace en construisant les symétriques de 2 points quelconques P_1 et P_2 de la droite d. Les symétriques P'_1 et P'_2 de ces 2 points seront en effet sur la droite d'. Il existe des droites qui sont invariantes par symétrie : ce sont les droites perpendiculaires à l'axe D de la symétrie. Une droite parallèle à cet axe de symétrie aura pour symétrique une droite parallèle.

d) Symétrique d'un angle

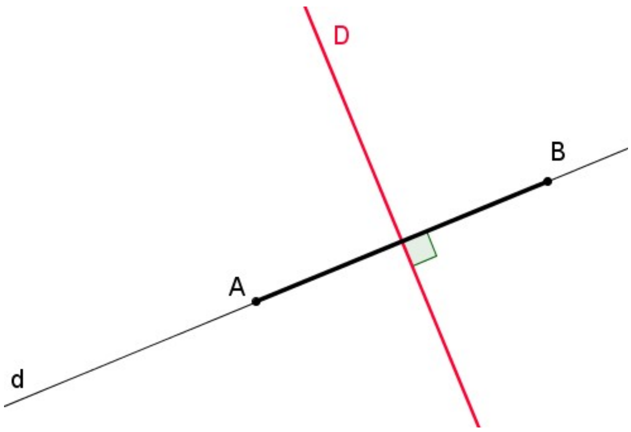


Le symétrique d'un angle $\widehat{ABC}$ est un angle $\widehat{A'B'C'}$ de même mesure. En particulier un angle droit a pour symétrique un angle droit. Un triangle dont les angles mesurent 34°, 56° et 90° aura pour symétrique un triangle dont les angles mesurent 34°, 56° et 90°. Deux droites parallèles auront pour symétriques deux droites parallèles. Deux droites perpendiculaires auront pour symétriques deux droites perpendiculaires. Autrement dit, la symétrie ne déformera pas les triangles, ni aucun polygone, ni aucune figure. La symétrie conserve les angles, les longueurs et les formes. C'est une transformation qui ne fait que déplacer les figures.

Sur la figure ci-contre le polygone vert a été dessiné puis, avec l'outil 'symétrique' on a tracé son symétrique par rapport à la droite rouge. Les 2 polygones symétriques ont les mêmes dimensions, les mêmes angles. On dit qu'ils sont superposables. Si on pliait la figure selon l'axe de symétrie, les 2 polygones verts se confondraient.

3) Axes de symétrie d'une figure

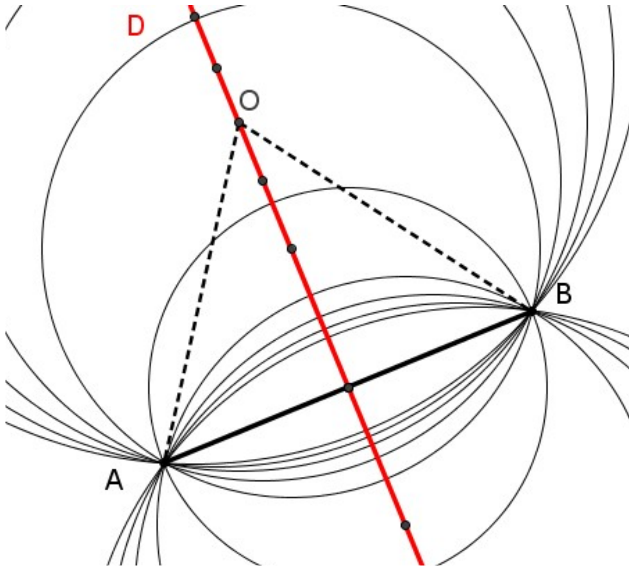
a) Médiatrice d'un segment



Si, par une symétrie d'axe D, le point A a pour symétrique le point B, alors tous les points du segment [AB] ont pour symétrique un point du segment [AB]. Pour cette raison on dit que la droite D est un *axe de symétrie* pour le segment [AB].

Par définition, la droite D et le segment [AB] sont perpendiculaires. De plus, D traverse le segment [AB] au milieu de [AB]. Cette droite D qui est un axe de symétrie du segment [AB] est appelée ***médiatrice*** du segment [AB].

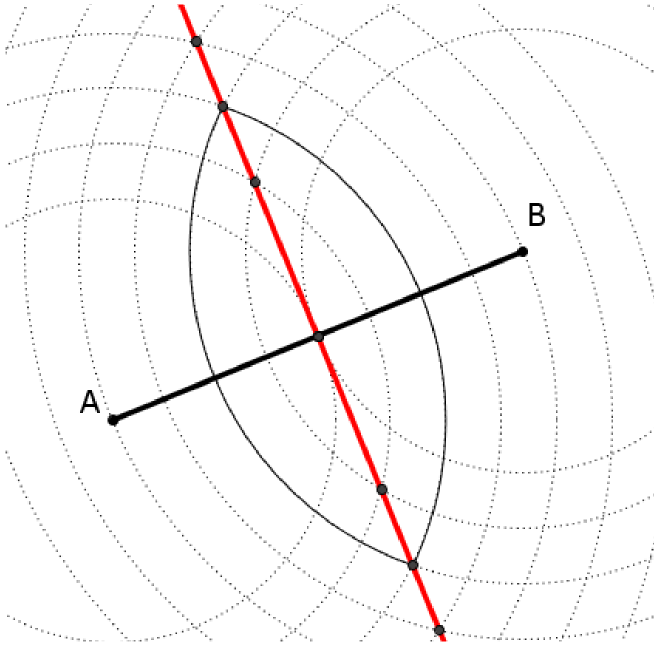
Définition 1 : La médiatrice d'un segment est la droite passant par le milieu du segment et qui est perpendiculaire au segment.



Propriété : un point de la médiatrice de $[AB]$ est à égale distance de A et de B, les extrémités du segment.

Cette propriété vient du fait que A et B sont symétriques par rapport à la médiatrice. Si on prend un point O quelconque de la médiatrice, il est invariant par symétrie (il est confondu avec son symétrique). Les segments $[OA]$ et $[OB]$ sont donc symétriques par rapport à la médiatrice, et donc les longueurs OA et OB sont égales.

Conséquence : Pour tracer la médiatrice de $[AB]$ on peut construire 2 points équidistants de A et B. Il suffit pour cela de tracer deux cercles (ou deux arcs de cercle) d'égal rayon, ayant pour centres A et B.



Cette propriété conduit à une autre définition de la médiatrice d'un segment :

Définition 2 : La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants (à égale distance) des 2 extrémités du segment.

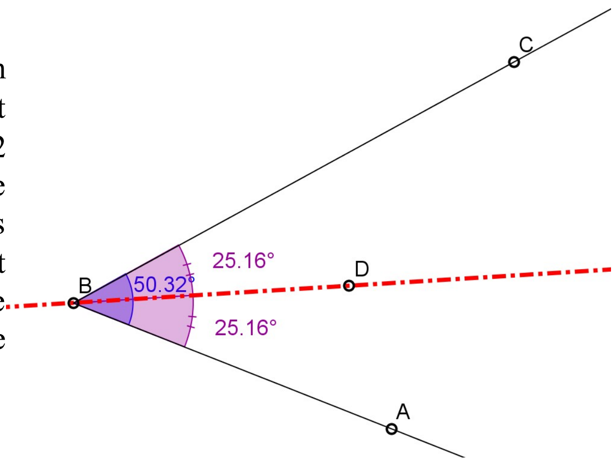
On a vu que la médiatrice contient *des* points équidistants de A et de B, cette définition affirme qu'elle les contient *tous*. Autrement dit, si Ω est un point équidistant de A et B alors Ω est sur la médiatrice de $[AB]$.

Remarque : la médiatrice n'est pas le seul axe de symétrie du segment $[AB]$. La droite (AB) est autre axe de symétrie pour cette figure. En effet, la symétrie d'axe (AB) transforme A en A, B en B, et tout point de $[AB]$ en lui-même. Ce segment étant invariant par la symétrie d'axe (AB) admet cette droite comme axe de symétrie.

Pour résumer, un segment $[AB]$ admet 2 axes de symétrie perpendiculaires : la médiatrice de $[AB]$ et (AB).

b) Bissectrice d'un angle

Nous avons vu que le symétrique d'un angle $\widehat{ABD}$ est un angle $\widehat{A'B'D'}$ de même mesure. Nous avons vu également que la demi-droite [BD) qui partage un angle $\widehat{ABC}$ en 2 angles adjacents et égaux s'appelle la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Notre illustration montre cette situation où les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{A'B'D'}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite (BD) qui est donc, finalement, un axe de symétrie pour la figure globale : l'angle $\widehat{ABC}$. Nous tirons de cette observation une 2de définition de la bissectrice d'un angle :

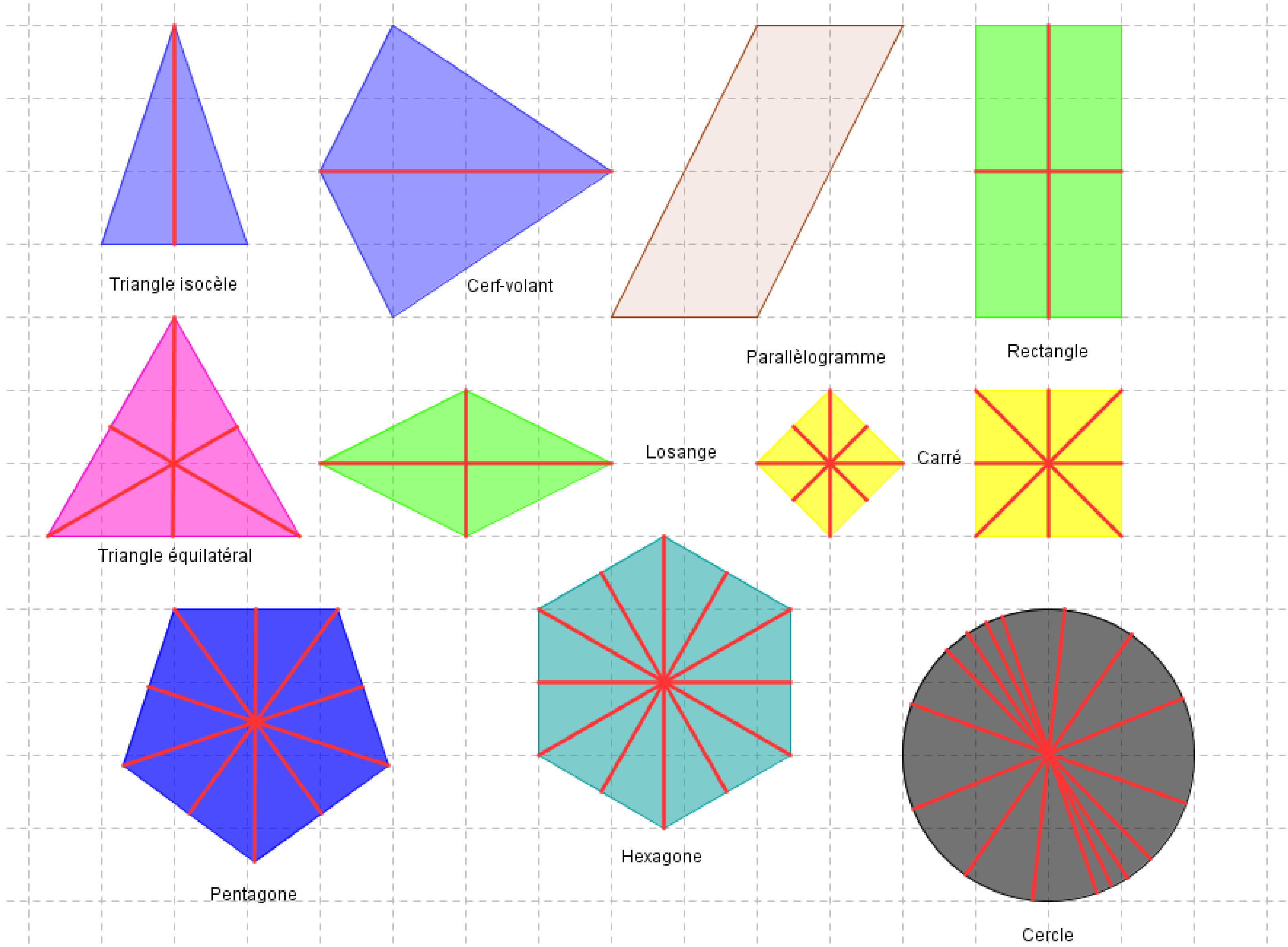


Définition : La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.

c) <u>Axe(s) de symétrie d'une figure quelconque</u>

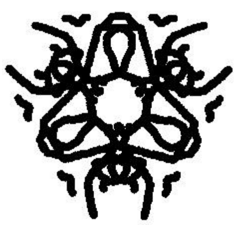
Définition : on dit qu'une figure *F* admet la droite *D* comme *axe de symétrie* si tous les points de la figure *F* ont pour symétrique par rapport à la droite *D*, un point de la figure *F*. Autrement dit *D* est un axe de symétrie pour la figure *F* si *F* est invariante par la symétrie d'axe *D*.

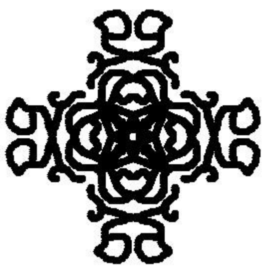
Exemples : on a vu qu'un segment admet 2 axes de symétrie perpendiculaires. Un triangle isocèle n'a en général qu'un seul axe de symétrie. Par contre un triangle équilatéral a 3 axes de symétrie. Nous donnons ci-dessous quelques figures simples qui ont un nom en géométrie et leurs axes de symétrie

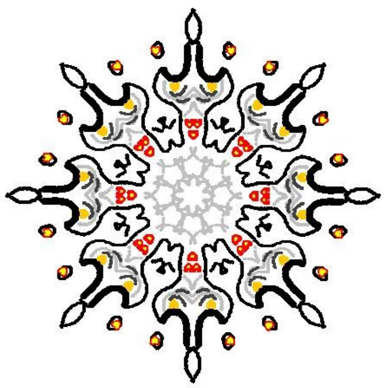


Certaines figures n'ont qu'un seul axe de symétrie, d'autres n'en ont pas, d'autres encore peuvent en avoir 2, 3, 4, etc. Le nombre d'axes de symétrie que peut avoir une figure n'est pas limité : le cercle possède une infinité d'axes de symétrie concourants (se coupant en un point unique). Le point d'intersection des axes de symétrie du cercle est, bien sûr, son centre.

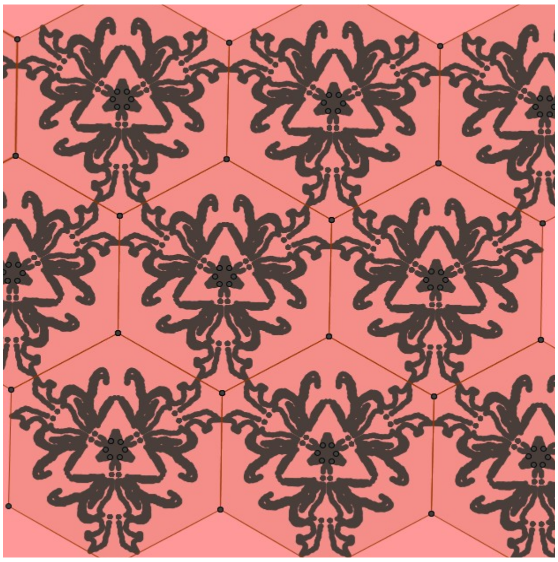
Les figures ayant plusieurs axes de symétrie ont des axes de symétrie concourants, c'est-à-dire qui se coupent en seul point. Les axes de symétrie concourants donnent naissance à de jolies figures ayant un centre. Ces figures forment la famille des rosaces dont voici quelques exemples dessinés avec l'applet 'Frises, rosaces et cadres' de Mathadomicile. La 1ère a 3 axes (ceux du triangle équilatéral), la seconde 4 (ceux du carré) et la dernière 8 (ceux de l'octogone régulier).



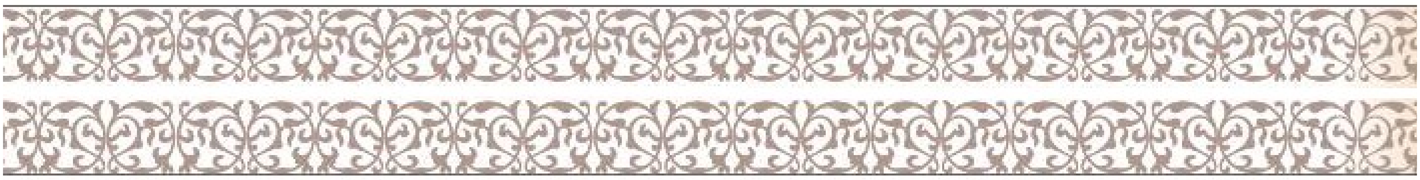




On peut utiliser des axes parallèles ou plusieurs séries d’axes parallèles et obtenir une figure dont les axes se croisent de façon non concourante. Voici un exemple avec 3 séries d’axes parallèles. Il s'agit d'un exemple de 'pavage' c'est-à-dire de figure obtenue en juxtaposant des figures identiques. La juxtaposition recouvre tout le plan.



Voici un autre exemple de figures obtenues par juxtaposition de motifs semblables. Il s'agit cette fois de 'frises' car les motifs sont disposés à la suite les uns des autres et forment une bande de longueur infinie.



On peut ensuite créer d'autres types de figures qui utilisent la symétrie à des fins décoratives. Voici par exemple des 'cadres' créés avec l'applet 'Frises, rosaces et cadres' de Mathadomicile.