

1] Multiplication

a) Multiplications d'entiers (rappel)

Calcul posé : pour multiplier deux entiers, on doit connaître les « tables » de 2 à 9 et on doit aussi savoir comment multiplier par 10, 100, 1000, etc. On utilise aussi une propriété de la multiplication qui décompose un produit en somme (cette propriété est la *distributivité*, on en parlera plus longuement plus loin).

Exemple : le produit 123×56 est décomposé en deux parties $123 \times 6 + 123 \times 50$ car $56 = 50 + 6$.

De même, pour calculer 123×6 on utilise la même propriété : $123 \times 6 = 100 \times 6 + 20 \times 6 + 3 \times 6$.

Finalement, on décortique toute la multiplication en produits simples comme 100×6 , 20×6 ou 3×6 , qui se ramènent, à des multiplications par 10, 100 ou 1000 près, aux produits contenus dans les tables comme 1×6 , 2×6 ou 3×6 . Avant toutes choses concernant la multiplication, il faut donc réviser « les tables ».

Mémoriser les tables			2	3	4	5	6	7	8	9
Les couleurs du fond		×								
représentent le chiffre des unités :		2	4	6	8	10	12	14	16	18
1-cyan, 2-vert, 3-noir,		3	-	9	12	15	18	21	24	27
4-jaune, 5-rose, 6-orange, 7-bleu,		4	-	-	16	20	24	28	32	36
8-rouge, 9-gris et 0-magenta.		5	-	-	-	25	30	35	40	45
		6	-	-	-	-	36	42	48	54
		7	-	-	-	-	-	49	56	63
		8	-	-	-	-	-	-	64	72
		9	-	-	-	-	-	-	-	81

Nous notons généralement ce calcul en colonne de la manière ci-dessous :

123	56
<u>×56</u>	<u>×123</u>
738	168
6150	1120
6888	5600
	6888

La multiplication peut se faire dans les deux sens
 $123 \times 56 = 56 \times 123$, on choisit le plus court, en général,
 en mettant le nombre le plus élevé en haut.

Les zéros qui ont été mis **en gras** sont parfois notés avec un point.
 Ce point « . » évite de confondre les zéros qui viennent des calculs
 et ceux qui viennent des décalages pour les dizaines, les centaines, etc.

Calcul mental : Les deux propriétés de la multiplication qui suivent sont utiles pour faire efficacement du calcul mental. On utilise fait du calcul mental lorsqu'on pose une multiplication, mais pas seulement.

- On peut changer l'ordre des *facteurs* dans un produit. Par exemple, on l'a vu : $123 \times 56 = 56 \times 123$. Cette propriété s'appelle la « commutativité ».
- S'il y a plusieurs multiplications, on commence par celle qu'on veut. Exemple, pour calculer $25 \times 12 \times 4$ on peut faire $(25 \times 12) \times 4$ ou $25 \times (12 \times 4)$ ou même $(25 \times 4) \times 12$ ou encore $25 \times (4 \times 12)$. Dans les deux derniers cas on a changé l'ordre des facteurs. Il suffit de choisir la plus simple de ces combinaisons lorsqu'on effectue les calculs mentalement.

Calcul instrumenté : Lorsqu'on utilise une calculatrice pour calculer un « grand » produit on a parfois des surprises. Par exemple essayez de calculer $121\ 212 \times 343\ 434$. Qu'en pensez-vous ? La calculatrice affiche $4,1628322 \times 10^{10}$ ce qui signifie 41 628 322 000, pourtant les trois derniers chiffres ne sont pas 000 mais 008... La calculatrice tronque les nombres trop grands pour elle.

Pour effectuer ce calcul que la calculatrice ne sait pas faire exactement (faut de place pour afficher le résultat), on peut poser la multiplication et n'effectuer que le début, ou bien utiliser une technique par blocs.

121212
<u>×343 434</u>
484848
363636 .
484848 ..
.....
.....008

La calculatrice donne $121\ 212 \times 343\ 434 = 41\ 628\ 322\ 000$
 Mais on se doute que cela ne se termine pas par 000 (car $2 \times 4=8$)
 On peut poser une partie de cette grande multiplication
 car le reste est donné par la calculatrice
 Cela se termine donc par 008 et non 000...
 Conclusion : $121\ 212 \times 343\ 434 = 41\ 628\ 322\ 008$

b) Multiplication/division par 10, 100, 1000, etc.

Pour multiplier par **10** un nombre décimal on déplace la virgule de **1** rang vers la droite, au besoin on rajoute un zéro ou on enlève la virgule.

$$1234 \times 10 = 12340$$

$$123,4 \times 10 = 1234$$

$$12,34 \times 10 = 123,4$$

Pour multiplier par **100** un nombre décimal on déplace la virgule de **2** rangs vers la droite, au besoin on rajoute un zéro ou on enlève la virgule.

$$1234 \times 100 = 123400$$

$$12,34 \times 100 = 1234$$

$$0,1234 \times 100 = 12,34$$

Pour multiplier par **1000** un nombre décimal on déplace la virgule de **3** rangs vers la droite, au besoin on rajoute un zéro ou on enlève la virgule.

$$12,34 \times 1000 = 12340$$

$$0,1234 \times 1000 = 123,4$$

Et ainsi de suite pour toutes les multiplications par un nombre qui s'écrit $100\dots 0$ (1 suivi d'une suite de zéros). On appelle ces nombres les *puissances* de 10 : $10 \times 10 = 100$ ou 10^2 on dit « dix puissance deux », $10 \times 10 \times 10 = 1000$ ou 10^3 on dit « dix puissance trois », etc. On a aussi $10 = 10^1$ et $1 = 10^0$. Les puissances de dix et celles des autres nombres comme $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ ou $7^2 = 7 \times 7$ seront étudiées plus tard)

$$1234 \times 10 = 12340 \text{ et réciproquement } 12340 \div 10 = 1234.$$

Après avoir **multiplié** par 10 si on veut revenir au nombre de départ il faut **diviser** par 10. La division par 10 se fait donc en déplaçant la virgule de **1** rang **vers la gauche**. De même, on divise par 100 lorsqu'on déplace la virgule de **2** rangs vers la gauche, etc.

Au besoin, on peut supprimer des zéros inutiles ou rajouter le zéro des unités.

Exemples : $12340 \div 10 = 1234$; $123,4 \div 100 = 1,234$; $123,4 \div 1000 = 0,1234$; $1,234 \div 10000 = 0,0001234$

Multiplications et divisions par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; etc.

Il s'agit des mêmes propriétés car 0,1, 0,01, 0,001, etc. sont aussi des puissances de dix.

0,1 c'est 1 dixième (voir chap.1) et donc multiplier par 0,1 c'est compter les dixièmes.

Cela revient à diviser par 10 : $56 \times 0,1 = 56$ dixièmes = 5,6 unités ; $12,3 \times 0,1 = 12,3$ dixièmes = 1,23 unités.

De la même façon, multiplier par 0,01 c'est diviser par 100, multiplier par 0,001 c'est diviser par 1000.

Et dans l'autre sens c'est pareil ! multiplier par 10 c'est diviser par 0,01...

On peut essayer de résumer toute cette partie en un seul tableau :

$\times 0,0\dots 01$ (n zéros)	$\div 100\dots 0$ (n zéros)	On déplace la virgule de n rang vers la gauche
$\times 0,01$ (2 zéros)	$\div 100$ (2 zéros)	On déplace la virgule de 2 rang vers la gauche
$\times 0,1$ (1 zéro)	$\div 10$ (1 zéro)	On déplace la virgule de 1 rang vers la gauche
$\times 1$ (0 zéro)	$\div 1$ (0 zéro)	On ne déplace pas la virgule
$\times 10$ (1 zéro)	$\div 0,1$ (1 zéro)	On déplace la virgule de 1 rang vers la droite
$\times 100$ (2 zéros)	$\div 0,01$ (2 zéros)	On déplace la virgule de 2 rang vers la droite
$\times 10\dots 0$ (n zéros)	$\div 0,0\dots 01$ (n zéros)	On déplace la virgule de n rang vers la droite

c) Multiplication des décimaux

On va se ramener dans tous les cas, à une multiplication entre entiers.

Examinons, par exemple, comment on s'y prend pour calculer $12,3 \times 0,56$ sans calculatrice.

On va se ramener au produit 123×56 car $12,3 \times 10 = 123$ et $0,56 \times 100 = 56$.

En utilisant les propriétés de la multiplication : $123 \times 56 = 12,3 \times 10 \times 0,56 \times 100 = 12,3 \times 0,56 \times 10 \times 100$.

Finalement : $123 \times 56 = 12,3 \times 0,56 \times 1000$, et donc $12,3 \times 0,56 = 123 \times 56 \div 1000$.

Pour obtenir le produit $12,3 \times 0,56$ il faut diviser le produit 123×56 par 1000.

Il faudra donc déplacer la virgule de trois rangs vers la gauche dans $123 \times 56 = 6888$.

En résumé $12,3 \times 0,56 \times 1000 = (12,3 \times 10) \times (0,56 \times 100) = 123 \times 56 = 6888$ donc

$$12,3 \times 0,56 = 6888 \div 1000 = 6,888.$$

Ce qu'on dit, pour simplifier tout cela :

On compte le nombre de chiffres après la virgule dans les deux facteurs du produit.

On place la virgule dans le produit des deux entiers en y mettant autant de chiffres après la virgule.

Dans le produit $12,3 \times 0,56$ il y a 3 chiffres après la virgule, il y aura donc 3 chiffres après la virgule dans le résultat. Comme $123 \times 56 = 6888$, on aura donc $12,3 \times 0,56 = 6,888$ (3 chiffres après la virgule).

Remarque : si vous savez que $123 \times 56 = 6888$, alors vous pouvez obtenir, sans aucun calcul, les résultats de $12,3 \times 56$; $1,23 \times 56$; $12,3 \times 5,6$; $1,23 \times 5,6$; $1,23 \times 5,6$; $1,23 \times 0,56$; $12,3 \times 0,56$; $0,123 \times 0,56$; $12,3 \times 560$; $1,23 \times 5600$; $12,3 \times 0,00056$; $123000 \times 0,0056$; etc. Pour toutes ces opérations, en effet, il suffit d'appliquer la règle que nous venons d'énoncer :

$$12,3 \times 56 = 123 \times 5,6 = 1230 \times 0,56 = 688,8 \text{ (1 chiffre après la virgule),}$$

$$1,23 \times 56 = 12,3 \times 5,6 = 123 \times 0,56 = 68,88 \text{ (2 chiffres après la virgule), etc.}$$

On retiendra donc cette règle : Pour effectuer le produit de deux nombres décimaux, on ne se préoccupe pas des virgules (on effectue le produit de deux entiers) puis, on place la virgule dans le résultat obtenu de manière à avoir autant de chiffres après la virgule qu'on en avait au départ.

Exemple : Calculons le produit $57,3 \times 1,87$. Pour cela, calculons 573×187 , puis plaçons la virgule.

$$\begin{array}{r} 573 \\ \times 187 \\ \hline 4011 \\ 45840 \\ \hline 57300 \\ 107151 \end{array}$$

$$573 \times 187 = 107151$$

Il y a $1+2=3$ chiffres après la virgule dans le produit $57,3 \times 1,87$

Il doit donc y avoir 3 chiffres après la virgule dans le résultat

$$\text{Donc } 57,3 \times 1,87 = 107,151$$

Certains calculs peuvent ainsi se faire directement, sans être posés (on dit qu'ils sont faits « en ligne »)

Exemple : $0,0056 \times 0,007 = 0,0000392$ (on effectue $56 \times 7 = 392$, puis on place la virgule, en ajoutant les zéros et la virgule. Il y a $4 + 3 = 7$ chiffres après la virgule dans les deux facteurs du produit donc 7 chiffres après la virgule dans le résultat).

2] Division

a) Division euclidienne

Définition : une division euclidienne¹ est une division où le dividende, le diviseur, le quotient et le reste sont entiers. Dans une division euclidienne, le reste est toujours inférieur au diviseur.

Exemple : nous avons 56 euros à partager en 3. Posons la division euclidienne de 56 par 3 :

$$\begin{array}{r} 56 \\ 3 \overline{) 56} \\ \underline{3} \\ 26 \\ \underline{24} \\ 2 \end{array}$$

$$\text{Donc } 56 = 3 \times 18 + 2$$

On note aussi $56 \div 3 = 18$, reste 2.

Le dividende est ici 56, le diviseur 3, le quotient 18 et le reste 2.

Applications de la division euclidienne à des problèmes de conversion ou de partage :

Application 1 : On veut convertir 1250 secondes en minutes.

Sachant qu'il y a 60 secondes par minutes, on effectue la division euclidienne de 1250 par 60 :

$$\begin{array}{r} 1250 \\ 60 \overline{) 1250} \\ \underline{120} \\ 50 \end{array}$$

$$\text{Donc } 1250 = 60 \times 20 + 50$$

$$1250 \div 60 = 20, \text{ reste } 50.$$

Le dividende est ici 1250, le diviseur 60, le quotient 20 et le reste 50.

Il y a 20 minutes et 50 secondes dans 1250 secondes.

Application 2 : On veut répartir 333 œufs dans des boîtes de 12. Combien faut-il de boîtes ?

$$\begin{array}{r} 333 \\ 12 \overline{) 333} \\ \underline{24} \\ 93 \\ \underline{-84} \\ 9 \end{array}$$

$$\text{Donc } 333 = 12 \times 27 + 9$$

$$333 \div 12 = 27, \text{ reste } 9.$$

Le dividende est ici 333, le diviseur 12, le quotient 27 et le reste 9.

Il y a 27 boîtes pleines et 9 œufs dans une 28^{ème} boîte. Il faut 28 boîtes.

¹ L'adjectif *euclidien* vient de Euclide qui est un mathématicien grec de l'antiquité. À cette époque, on s'intéressait surtout aux entiers et on inventa l'arithmétique (mathématique des entiers).

Utilisation de la calculatrice (touche de division avec reste) : Les calculatrices de collège, généralement, savent effectuer une division euclidienne. Sur certains modèles, la touche $\div R$ est utilisée pour cela. Sinon, on peut toujours « bricoler » une division euclidienne, en prenant la partie entière de la division décimale (celle qu'effectue normalement une calculatrice).

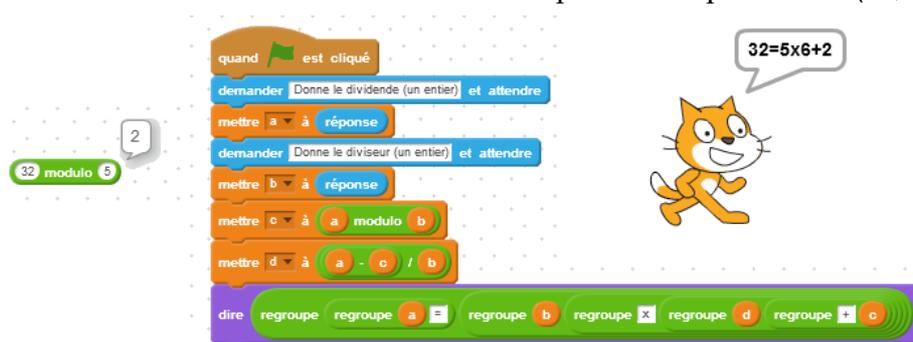
Voici l'exemple d'un tel bricolage :

$333 \div 12 = 27,75$ (c'est ce qu'affiche la calculatrice, le résultat de la division décimale qui « tombe » juste) ; on garde le 27 (la partie entière du quotient) puis on effectue $333 - 27 \times 12 = 9$ pour trouver le reste (ou encore $27 \times 12 = 324$ et puis $333 - 324 = 9$, ce qui revient au même).

Conclusion : $333 = 12 \times 27 + 9$.

Sur Scratch et sur un tableur, le reste de la division euclidienne est donné par la fonction « modulo ». Dans *calc* (le tableur d'OpenOffice), on obtient le reste de la division de 32 par 5 en tapant =MOD(32;5). Sur

Scratch, on compose cette opération comme il est montré sur l'illustration. Cette illustration montre un programme qui affiche le résultat en ligne de la division euclidienne d'un nombre a (dividende) par un nombre b (diviseur).



Définition : On dit que l'entier a est divisible par l'entier b lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul (égal à 0).

Dans ce cas, on dit aussi que a est un multiple de b , que b est un diviseur de a ou que b divise a .

Remarquons que l'on reconnaît aussi qu'un nombre a est divisible par un entier b : lorsqu'on effectue la division à la calculatrice (division décimale), on trouve un quotient entier. Par exemple 221 est divisible par 13 car $221 \div 13 = 17$, un entier. On note alors $221 = 13 \times 17$. Le nombre 221 est divisible par 13 (et aussi par 17). Les diviseurs de 221 sont 13 et 17, mais il y en a aussi deux autres : 221 et 1.

Il existe des *critères de divisibilité* pour reconnaître les nombres divisibles par 2, par 3, par 4, par 5, par 6, par 9, par 10, etc. **sans avoir à effectuer la division.**

Les nombres divisibles par 2 se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Les nombres divisibles par 3 se reconnaissent à la somme de leurs chiffres : elle doit être divisible par 3.

Les nombres divisibles par 9 se reconnaissent à la somme de leurs chiffres : elle doit être divisible par 9.

Les nombres divisibles par 5 se terminent par 0 ou 5 ; ceux qui sont divisibles par 10 se terminent par 0.

Les nombres divisibles par 6 sont divisibles par 2 et par 3 (leur appliquer les deux critères).

b) Division décimale

Lorsque le reste de la division euclidienne n'est pas nul, on peut continuer la division.

Dans notre premier exemple on avait $56 = 3 \times 18 + 2$.

$$\begin{array}{r} 56 \\ \underline{54} \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 2 \end{array}$$

Le reste est deux unités, cela représente 20 dixièmes que l'on peut diviser en 3 pour trouver 6 dixièmes et un nouveau reste de 2 dixièmes, qui font 20 centièmes que l'on divise à nouveau en 3, etc.

La division ici ne s'arrête jamais, on trouve que $56 \div 3 = 18,6666666666\dots$ (des 6 jusqu'à l'infini). On peut écrire « en ligne » le résultat à chaque étape : $56 = 3 \times 18,6 + 0,2$; $56 = 3 \times 18,66 + 0,02$...etc.

La division ne tombe pas juste. Il ne peut y avoir d'écriture décimale à ce quotient de 56 par 3. Dans ce cas il faut se résoudre à donner une valeur approchée de celui-ci. Généralement, on donne un **arrondi**, c'est-à-dire la valeur ayant un certain nombre de chiffres après la virgule, la plus proche du quotient considéré. On peut arrondir à l'entier le plus proche, au dixième le plus proche, au centième (le plus proche), etc.

Pour être plus clair donnons des exemples : $18,666666\dots$ est compris entre deux entiers : 18 et 19, mais il est plus proche de 19 (car 66 est plus proche de 100 que de 0) donc 19 est l'arrondi de ce nombre (le quotient de 56 par 3) à l'entier le plus proche. De la même manière on comprendra que 19,7 est l'arrondi au

dixième le plus proche de ce nombre, que 19,67 en est l'arrondi au centième. La calculatrice donne un arrondi aussi quand elle affiche 19,666667 (le 7 provient de l'arrondi).

Revenons au problème « partager 56 euros en 3 parts égales » : si on donne comme résultat 19 ce n'est pas juste car $19 \times 3 = 57$ (il manque un euro), si on prend 18,7 ou 18,67 ce n'est pas juste non plus mais plus précis ($18,7 \times 3 = 56,1$ et $18,67 \times 3 = 56,01$). Il n'y a pas de solution qui donne un résultat exact et continuer au-delà des centimes n'aurait guère de sens, donc arrêtons nous là et disons que le résultat est égal à 18,67 à un centime près.

On peut aussi donner des **troncatures** (on coupe alors la suite des décimales), ce qui est plus simple mais c'est toujours une **valeur approchée par défaut** (inférieure à la valeur exacte) alors que l'arrondi est équitablement supérieur (on dit alors **valeur approchée par excès**) ou inférieur à la valeur exacte.

c) Division de deux décimaux

Propriété : On obtient des quotients égaux lorsqu'on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre. Par exemple $1 \div 2 = 0,5$ mais aussi $10 \div 20$ ou $2 \div 4$ ou $5 \div 10$ etc.

Nous allons utiliser cette propriété des quotients pour transformer un quotient de décimaux en un quotient d'entiers. Il suffit de multiplier le diviseur et le dividende du quotient par 10, 100, 1000, etc. jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chiffres derrière la virgule.

Exemple : $2,51 \div 0,2 = 25,1 \div 2$ (on a multiplié par 10 le dividende et le diviseur)
 $= 251 \div 20$ (on a multiplié par 100 le dividende et le diviseur)

Ainsi pour effectuer $2,51 \div 0,2$ il suffit d'effectuer $251 \div 20$, et cela, nous savons le faire.

Bien évidemment tout ce que nous venons de dire est surtout utile pour effectuer les opérations à la main (calcul posé). Car si nous disposons d'une calculatrice, elle effectue directement la division des décimaux.

d) Sens de la division

Il est bon de connaître le lien entre division et multiplication.

Généralement on définit le quotient de a par b comme étant le nombre qui, multiplié par b donne a . Autrement dit, lorsqu'on cherche quel nombre x vérifie l'égalité $b \times x = a$, le nombre x cherché est le quotient de a par b . On le note $\frac{a}{b}$ et on le calcule en effectuant $a \div b$.

$$\begin{array}{r} 1,0 \\ - 8 \\ \hline 20 \\ - 16 \\ \hline 40 \\ - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

Lorsque nous effectuons la division décimale de 1 par 8, nous trouvons le quotient de 1 par 8 : $1 \div 8 = 0,125$; cela signifie que ce nombre, multiplié par 8 donne 1. En effet, $8 \times 0,125 = 1$, cette égalité est à rapprocher de l'écriture « en ligne » de la division euclidienne, celle qui permet d'écrire le reste de la division. Ici le reste est nul, mais on aurait pu écrire : $1 = 8 \times 0,125 + 0$

Dans un problème si on dit par exemple que l'on vide un tonneau de 30 litres en remplissant des bouteilles contenant chacune 0,75 litres, en notant x le nombre de bouteilles, cela s'écrit $0,75 \times x = 30$. Le nombre x que l'on cherche est égal à $\frac{30}{0,75} = 30 \div 0,75 = 40$.

Un autre exemple avec des vitesses : Si j'effectue un trajet de 250 Km à une vitesse de 90 Km/h quelle est la durée du trajet ? Si j'augmente ou si je diminue ma vitesse de 10 Km/h gagnerai-je ou perdrai-je le même temps sur ce trajet ?

Vous savez que vitesse \times temps = distance, donc $90 \times$ temps = 250 et donc temps = $250 \div 90$ soit $25 \div 9$ ou encore 2,777...h ou encore 2 heures et 47 minutes environ.

- Quel temps gagnerai-je à parcourir la même distance à une vitesse de 100 Km/h ? Ici le temps sera de $250 \div 100$ soit 2,5h ou encore 2 heures et 30 minutes. Je gagnerai donc 17 minutes environ.
- Quel temps perdrai-je à parcourir la même distance à une vitesse de 80 Km/h ? Ici le temps sera de $250 \div 80$ soit $25 \div 8 = 3,125$ h ou encore 3 heures et 7 minutes et 30 secondes. Je perdrai donc 20 minutes et 30 secondes environ.

