Chapitre 3 Additions et soustractions

1) Les techniques opératoires

a) Le calcul posé

Il est nécessaire, lorsqu’on pose une addition ou une soustraction en colonne, de positionner les nombres de manière à ajouter unités avec unités, dixièmes avec dixièmes, etc. Le meilleur moyen est de repérer la place de la virgule ou le chiffre des unités (ce qui revient au même, voir le chapitre 1).

On commence toujours par les chiffres les plus à droite pour gérer correctement les retenues.

S'il s'agit d'une *soustraction*, on enlève **toujours** le chiffre du bas à celui du haut (jamais l'inverse). Cela amène parfois une retenue, comme dans l'exemple posé ci-dessous où l'on effectue 12−1,6 : pour connaître le chiffre des dixièmes, on ne peut pas enlever 6 à 0 alors on enlève 6 à 10, ce qui donne 4 dixièmes avec une retenue de 1 unité. Cette retenue est ajoutée au chiffre des unités du nombre du dessous (ou retranchée au chiffres des unités du nombre en dessus, ce qui revient évidemment au même). Dans notre exemple, cela revient à effectuer 12−2 ou bien 11−1.

S'il s'agit d'une *addition*, l'ordre des additions de chiffres d'un même rang n'a pas d'importance. Dans l'exemple de droite posé ci-dessous, on effectue 12+1,6+200,5 : pour le chiffre des dixièmes on effectue 0+6+5=11 ce qui donne 1 dixième et 1 unité de retenue. Celle-ci est ajoutée à la somme des chiffres des unités 2+1+0=3, et on obtient 3+1=4 comme chiffre des unités. Que l'on fasse 2+1+0+1 ou 0+1+1+2 ou un autre ordre encore ne change évidemment pas le résultat.

12	19,35	12	12
+ 1,5	+ 7,9	− 1,6	+ 1,6
13,5	27,25	10,4	+200,5
La virgule n’est pas toujours présente (entier)	*Attention aux retenues !*	*On les écrit ou on les retient « dans sa tête » ou « à l'aide des doigts »*	214,1

On peut aussi poser ces opérations « en ligne » : dans ce cas on écrit des égalités. Les retenues, s’il y en a, sont gardées en tête. Ex : 12 + 1,5 = 13,5.

Remarque concernant les durées : Les retenues dépendent du système de numération utilisé. Dans notre système décimal, on retient des dizaines, des centaines, etc. Dans le système sexagésimal (base 60) des babyloniens, utilisé pour mesurer les durées (les minutes et secondes font une retenue lorsqu’il y en a soixante), on retient donc d’une façon particulière : lorsqu'on dépasse 60 minutes (et non 100 !) on retient une heure. De même, dépasser 60 secondes conduit à retenir 1 minute (voir les exemples ci-dessous).

1h 35’ 47’’	1h 35’ 47’’	**1**h **3**5’ 47’’
+2h 12’ 56’’	+2h 46’ 15’’	− 0h 57’ 12’’
3h 47’ **93**’’	3h **8**1’ **6**2’’	0h 38’ 35’’
3h 4**8’ 3**3’’	**4**h **22’ 0**2’’	*Pour les soustractions on doit parfois retirer des soixantaines..*

Le plus simple, pour les additions de durées, est de calculer dans un premier temps, séparément, les nombres de secondes, de minutes et d'heures. Dans un second temps, on s'occupe de reporter les retenues entre ces différentes catégories de durées. Dans notre premier exemple ci-dessus, on obtient 3h 47’ **93**’’ mais le nombre de secondes ne pouvant pas dépasser 59, on enlève 60 à 93 ce qui donne 33 secondes et on reporte une minute en retenue.

Pour soustraire des durées, le principe est le même, mais il faut l'appliquer à l'envers : quand on ne peut pas enlever à un nombre suffisant, on commence par ajouter 60 à ce nombre et on reporte la retenue sur la catégorie supérieure. Pour enlever 0h 57’ 12’’ à 1h 35’ 47’’ comme ci-dessus à droite, on ne peut pas enlever 57 minutes à 35, donc on ajoute 60 à 35, ce qui fait 95, et on enlève 57 minutes à 95, ce qui fait 38. On n'oublie pas ensuite de traiter les heures avec une retenue de 1, ce qui fait 0−0 ou 1−1, soit 0h.

b) Le calcul mental

Ce qu'il faut savoir par cœur : Les tables d'additions (7+5=12 ; 8+7=15 ; etc.) ne doivent pas être retrouvée avec les doigts, il faut les apprendre par cœur ! Pour les soustractions, se sont les mêmes tables, mais utilisées différemment (12–7=5 ; 5 ôté de 12 égale 7 ; etc.).

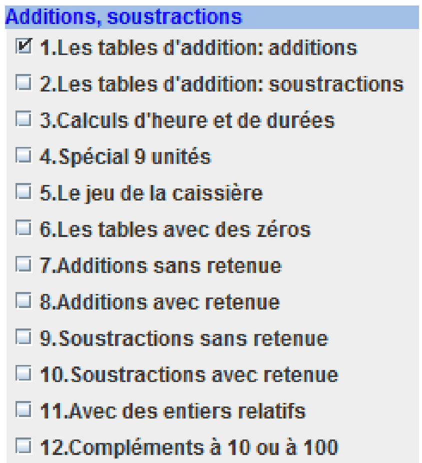
Ce qu'il faut avoir travaillé pour être efficace : Les compléments à 10, à 100, etc. sont nécessaires aussi dans la pratique : combien ajouter à 37 pour faire 100 ? 63, car 63+37=100. 63 est appelé le complément à 100 de 37. Cette notion a été étudiée au primaire et permet de calculer de tête facilement 100– 37=63 ou aussi, en passant aux centièmes, 1– 0,37=0,63.

Les additions/soustractions avec des 9 : il est facile d'ajouter 10, 20, etc. 100, 200, etc. On peut donc ajouter simplement 9 (on ajoute 10 et on retranche 1) ou 11 (on ajoute 10 et puis 1), 19 ou 21, etc. 99 ou 101. Pour calculer 35 + 29 par exemple, on fait 35+30−1.

Il y a encore d'autres techniques à maîtriser si on veut être efficace en calcul mental. Si la numération décimale est bien comprise, on doit pouvoir déplacer la virgule de tête pour effectuer certaines opérations (comme 1– 0,37) et l'on doit se servir de celle-ci comme une aide, une ancre, pour additionner les autres chiffres. Regardez par exemple cette addition où il n'y a aucune retenue, juste des chiffres non-nuls à ajouter à des 0.

1 006,008 + 480,86 =

Entraînement au calcul mental : il est indispensable de continuer à s'entraîner pour ne pas perdre la bonne habitude de compter avec sa tête. Le programme du site mathadomicile est prévu pour cela. Concernant l'addition et la soustraction, il y a une bonne dizaine d'opérations qui peuvent être travaillées :



- A1 et A2 pour le travail et la mémorisation des tables,
- A3 pour les calculs avec des durées en heures et minutes,
- A4 pour les opérations contenant des termes qui finissent par 9 comme 79 ou 199.
- A5 pour apprendre à rendre la monnaie...
- A6 pour travailler les tables et en même temps un déplacement de la virgule.
- A7 et A9 pour des additions simples, sans retenue. Lorsque cette compétence est maîtrisée, on passera aux opérations avec retenue : A8 et A10.
- A12 pour travailler les compléments à la dizaine et à la centaine (par exemple 700–13= ou 186+14=) qui doivent être reconnu très rapidement, sans forcément être appris par cœur.

c) Le calcul instrumenté

La calculatrice, l'ordinateur, la règle à calcul, le boulier sont des instruments de calculs, des machines qui sont programmées ou construites pour exécuter ou faciliter l'exécution des calculs. Notre objectif n'est pas ici d'apprendre à utiliser un ordinateur ou un boulier, mais on peut dire quelques mots sur ces outils.

Les *calculatrices* savent exécuter n'importe quelle addition ou soustraction, pourvu qu'on respecte ses limitations : le nombre de chiffres affichés ne dépasse pas 12 ou 13. Pour les nombres qui contiennent trop de chiffres, les résultats sont arrondis et l'affichage parfois utilise une écriture qu'on n'étudie qu'en classe de 4$^{\text{ème}}$: la notation scientifique. Par exemple, le nombre 130 000 000 000 000 qui contient 15 chiffres ne sera pas affiché ainsi (cela ne rentrerai pas sur l'écran) mais sera affiché sous la forme $1{,}3\times10^{14}$ qui signifie que l'on doit multiplier 1,3 par 10^{14}=100 000 000 000 000 (1 suivi de 14 zéros). Un autre exemple, le nombre 0,000 000 000 004 56 qui contient 15 chiffres ne sera pas non plus affiché ainsi, mais sera affiché sous la forme $4{,}56\times10^{-12}$ qui signifie que l'on doit multiplier 4,56 par 10^{-12}=0,000 000 000 001 (1 précédé de 12 zéros, en comptant le zéro des unités) ou que l'on doit diviser 4,56 par 10^{12}=1 000 000 000 000.

Une 2ème remarque concernant la calculatrice : celle-ci ne sait pas qu'en 6ème on ne connait pas encore les nombres négatifs (ils seront étudiés en 5ème). Pour elle, le calcul 5−12 n'a rien d'impossible et elle affichera le résultat −7 qui est un nombre négatif, précédé du signe « moins » (noté −). Ces nombres complèteront les ensembles de nombres connus jusqu'à présent (entiers, décimaux, fractions).

Pour faire des additions et des soustractions avec un ordinateur, on pourra utiliser un type de logiciel très répandu, appelé *tableur*. La suite OpenOffice est gratuite et téléchargeable sur internet. On y trouvera un tableur très efficace, calc, comparable au tableur de Microsoft, Excel, qui est payant. Ouvrez une feuille de classeur sur calc et essayez de réaliser des additions avec la fonction « SOMME » pour mesurer l'efficacité de ce type de logiciel.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
N+(N+1)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
total partiel	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253	276	300	325	351	378	406	435	465

Dans cette illustration, on a commencé par taper la suite des nombres entiers (ligne N) : pour cela, il suffit d'additionner 1 au contenu de la cellule située à gauche. S'il y a 1 dans la cellule B1, on tape dans la cellule C1 la formule =B1+1 et on valide. Ensuite, il suffit de recopier cette formule avec la poignée (un petit carré situé en bas à droite de la cellule) que l'on tire vers la droite.
Dans la ligne N+(N+1), nous avons additionné le contenu d'une cellule et de sa voisine.
Dans la ligne suivante, nous avons effectué la somme partielle de tous les nombres de la 1ère ligne en utilisant la fonction SOMME : dans la cellule C3 nous avons tapé la formule =SOMME($B1:C1) pour faire la somme de tous les nombres entre les cellules B1 et C1. En recopiant la formule avec la poignée, le $ devant le B évite que la formule change de point de départ.

2) Propriétés des opérations + et –

a) L'addition

La somme s de deux nombres a et b est le nombre obtenu en réunissant les unités de ces deux nombres. On écrit : $a+b=s$. On dit que a et b sont les termes de cette somme.

123,45 + 67,8 + 0,009 est la somme de trois termes. Elle vaut 191,259.

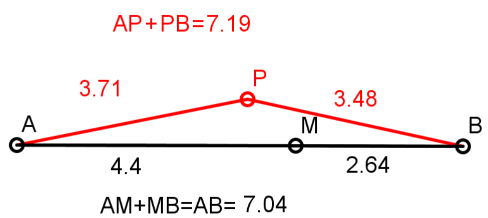
<u>Définition</u> : L'addition est l'opération qui permet de calculer la somme de plusieurs nombres. La *somme* est un nombre : le résultat d'une opération (l'addition), mais c'est aussi l'expression qui conduit à ce résultat. Les différents nombres que l'on ajoute pour effectuer une somme sont les *termes* de cette somme.

Les propriétés de cette opération, l'addition, sont les suivantes :

- Commutativité : On peut intervertir deux termes 18 + 5 = 5 + 18.
- Associativité : dans une somme de trois termes ou plus, on peut commencer par n'importe quelle addition : 12,5+3+17=12,5+20 mais aussi 15,5+17.
- 0 ajouté à n'importe quel nombre ne change pas ce nombre. $a+0=0+a=a$.

Ces différentes propriétés permettent de faciliter certains calculs effectués de tête (calcul mental) : on peut regrouper les termes qui s'ajoutent facilement, par exemple les compléments à la dizaine et à la centaine. Dans la somme 12+37+8+123 on effectuera évidemment la somme en inversant le 2ème et le 3ème terme, ce qui conduit à effectuer (12+8)+(37+123)=20+160=180. Dans une opération mentale, cet échange de terme ne se fait pas, mais on prend les termes mentalement, dans l'ordre qui nous arrange.

<u>Distance et somme</u> :



Si M est un point du segment [AB] alors la somme des distances AM+MB est égale à la distance AB. Ceci caractérise la présence d'un point sur un segment. Partout ailleurs, dans le plan de la feuille, la somme AM+MB serait supérieure à la distance AB. Ceci provient de la définition même du segment [AB] : *le plus court chemin allant de A vers B*. Si, en passant par M c'est aussi court, c'est qu'on a avancé en ligne droite (sur le segment).

b) La soustraction

La différence *d* entre les nombres *a* et *b* est le nombre qu'il faut ajouter au plus petit (*b*) pour obtenir le plus grand (*a*). On écrit $b+d=a$ ou encore $d=a–b$. On dit que *a* et *b* sont les termes de cette différence.

123,4–56,7809 est la différence entre 123,4 et 56,7809. Elle vaut 66,6191.

On peut vérifier que 66,6191+56,7809=123,4.

> Définition : La soustraction est l'opération qui permet de calculer la différence de deux nombres. La *différence* est un nombre : le résultat d'une opération (la soustraction).

Les propriétés de cette opération sont :

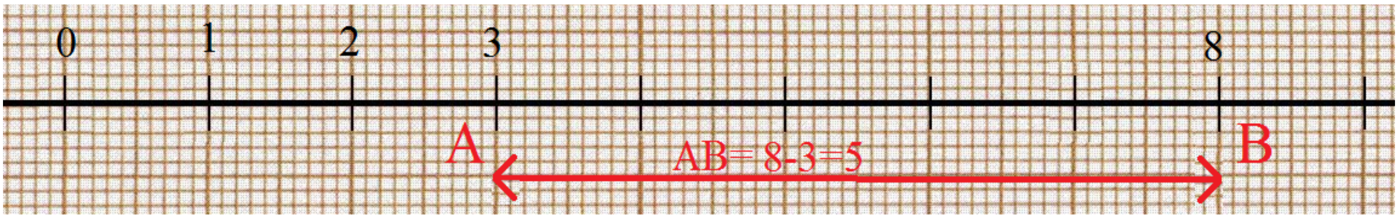
- Pas commutative ! On ne peut pas intervertir deux termes 18–5≠5–18 !
- Pas associative !! 12–(5–3)=12–2=10 alors que (12–5)–3=7–3=4 ≠10 !!
- On doit **effectuer une suite de soustractions de la gauche vers la droite** car 12–5–3=(12–5)–3. Si on veut mettre des parenthèses à droite, pour changer l'ordre des opérations, il faut changer une opération 12–5–3=12–(5+3). Par contre, 12–(5–3)=12–5+3.

Pour résumer : des parenthèses derrière un signe de soustraction peuvent être enlevées à condition de changer à l'intérieur les opérations (+ devient – et réciproquement…)

$$(12 - (11 - (10 - 9)) + 8 - 7 - ((6 - 5 - (4 - 3)) - (2 + 1) = 2 + 8 - 7 - 0 - 3 = 0$$

Distance et différence :

Sur un axe gradué, entre le point d'abscisse 3 et le point d'abscisse 12,5 il y a une distance égale à la différence entre les abscisses 12,5–3=9,5. La soustraction entre les abscisses de 2 points permet de trouver la distance entre ces deux points. Sur l'illustration ci-dessous, on a des points A et B repérés par leur abscisse A(3) et B(8) et donc AB=8–3=5. Bien sûr, on peut vérifier cela en mesurant la distance sur la figure, mais la mesure est une opération imparfaite (qui introduit des erreurs, dues à l'imprécision de cette mesure) alors que le calcul donne un résultat exact.

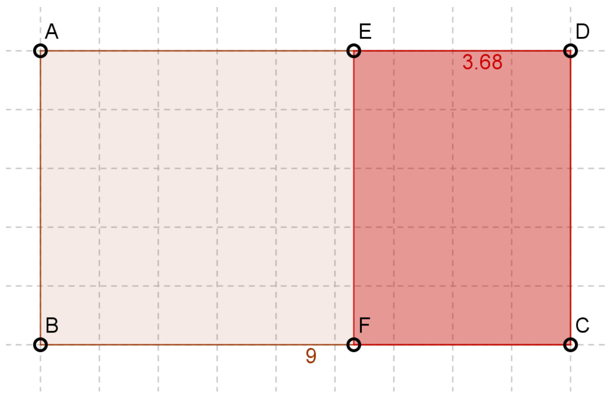


Une autre application de la différence en géométrie : puisque, si M est un point du segment [AB] alors AM+MB=AB, si on doit calculer AM par exemple, on effectuera une différence : AM=AB–MB.

Sur l'illustration ci-contre, ABCD est un rectangle, E est un point de [AD] tel que ED=3,68. F étant le 4ème sommet du rectangle EDCF, combien mesure BF ?

Comme $E\in[AD]$ on a AE=AD–ED=9–3,68=5,32.

Comme EDCF est un rectangle, CF=ED et donc, finalement, BF=AE=5,32.



3) Problèmes

a) Trouver la bonne opération

Les problèmes qui demandent d'effectuer une addition ou une soustraction ou une succession d'additions/soustractions sont très élémentaires. Ces situations ont été étudiées déjà au primaire. Cependant, certains élèves ne reconnaissent pas toujours la bonne opération (celle qui traduit correctement l'énoncé).

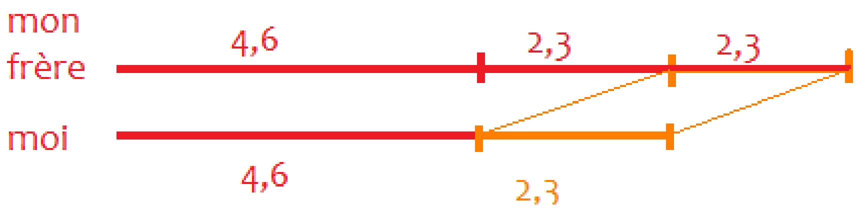
Voici quelques exemples :

Exemple 1 : J'ai 12,5 machins. J'en perds 9,3 et en gagne 4,7. Combien m'en reste t-il ?

Je calcule ici le nombre de machins : 12,5–9,3+4,7=7,9. Il me reste donc 7,9 machins.
On ne se préoccupe pas de ce qu'est un machin, on traduit juste les quantités ajoutées (gagnées) ou soustraites (perdues).

Exemple 2 : J'ai 12,5 trucs. Hier, j'en ai perdu 6,4 et avant-hier j'en avais perdu 2,7.
Combien en avais-je avant avant-hier?
Attention, ici on donne la quantité aujourd'hui et on demande celle d' avant-hier. Si on appelle x la quantité des trucs possédés avant-hier, on doit donc traduire l'énoncé par l'égalité x–6,4–2,7=12,5 qui peut se transformer en x–9,1=12,5 (9,1 est la quantité de trucs perdus hier et avant-hier) et donc x doit être égal à 12,5+9,1=21,6. Vérifions que 21,6–6,4–2,7=12,5. J'avais donc 21,6 trucs avant-hier. L'introduction de ce nombre inconnu x que l'on cherche, est parfois utile pour traduire un énoncé. On résout alors une *équation* en découvrant la valeur de x par le calcul adapté.
Bien sûr, on aurait pu faire autrement. Le calcul qui donne la bonne réponse d'un seul coup est une somme : 12,5+6,4+2,7=21,6 (il suffit d'ajouter à ce que j'ai aujourd'hui ce que j'ai perdu hier et avant-hier).

Exemple 3 : Mon frère a deux fois plus de schmolls que moi, s'il m'en donne 2,3 on en aura autant l'un que l'autre. Combien ai-je de schmolls ?



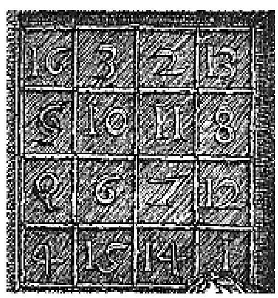
Pour qu'on ait autant de schmolls, mon frère et moi, il faut partager en deux ce qu'il a en plus. Il avait donc 4,6 en plus (2,3×2=4,6) et comme il en avait deux fois plus que moi, il en avait 4,6×2 soit 9,2 et j'en avais donc 4,6. Dans cette situation, on peut s'aider d'un schéma comme sur l'illustration. On peut aussi raisonner en utilisant une lettre x, pour le nombre que l'on cherche : la quantité de schmolls que je possède. Ainsi x+2,3 est la quantité de schmolls que je posséderai quand mon frère m'en aura donné 2,3. Mon frère en avait 2x (deux fois plus que moi) et, lorsqu'il m'en aura donné 2,3, il lui en restera 2x–2,3.
L'énoncé dit seulement que l'on doit avoir l'égalité 2x–2,3=x+2,3. En enlevant x des deux côtés, on obtient x–2,3=2,3. Il suffit d'ajouter 2,3 des deux côtés pour comprendre que x=2,3+2,3=4,6.

Exemple 4 : Pendant le mois de novembre j'ai vu Bidule 12 jours et Machin 15 jours. Pendant 8 jours je n'ai vu ni Bidule ni Machin. Combien de jours ai-je vu Bidule et Machin ?
J'ai vu Bidule ou Machin pendant 22 jours (30–8=22) et pourtant, si j'additionne les jours où j'ai vu l'un ou l'autre je trouve 27 (15+12=27). C'est qu'il y a 5 jours (27–22=5) pendant lesquels j'ai vu l'un et l'autre.

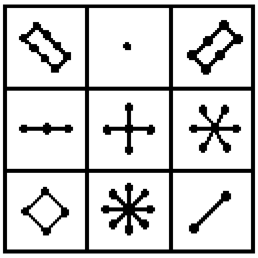
b) Problèmes de recherche

Voici quelques situations plus élaborées qui demandent d'effectuer des additions ou des soustractions :
Exemple 1 : Les carrés magiques normaux 4×4.
Ce sont des tableaux de 4 lignes de 4 cases chacune, remplies des premiers nombres entiers consécutifs, donc des nombres compris entre 1 et 16. Ils sont « magiques » car les sommes des 4 lignes, des 4 colonnes et des 2 diagonales font un même nombre appelé « somme magique » ou densité.
Comme 1+2+3+4+…..+15+16=136 et que 136 ÷ 4 = 34, la somme magique doit donc être égale à 34.
Un carré magique répondant à ces règles a traversé les siècles car il figure parmi d'autres symboles dans une gravure de Dürer. Comme l'explique le texte ci-dessous la valeur de la densité (34) ajoute une signification au carré magique choisi.

En 1514, le peintre et graveur allemand, Albrecht DÜRER, a réalisé sa plus célèbre gravure « La Mélancolie ».



Détail intéressant dans ce tableau : la date du tableau est inscrite au milieu de la dernière ligne (1514) ! L'artiste a donc pris la peine de choisir une solution particulière pour servir son propos. Parmi les 20 922 789 888 000 carrés possibles, il n'y en a que 880 qui sont magiques (on ne tient pas compte des sept variantes d'un même carré magique obtenues par rotation ou par symétrie). À titre de comparaison, il n'y a qu'un unique carré magique normal de 3 lignes de 3 cases chacune : le carré 816-357-492 de densité 15 illustré à droite (les nombres de 1 à 9 sont représentés sous forme géométrique). Les questions portant sur les carrés magiques demandent généralement de compléter un carré avec seulement quelques nombres révélés.



Le carré 4×4 à compléter ci-contre est normal et *diabolique*, car on retrouve la somme magique dans beaucoup d'autres configurations de quatre nombres que les quatre lignes, quatre colonnes et deux diagonales.

1		4	15
8	11		
		16	3

Pour le compléter, on se sert de la somme magique ou densité, qui doit être égale à 34 (voir plus haut). Ainsi on doit avoir sur la 1ère ligne $1+x+4+15=34$ et donc $x=34-(1+4+15)=34-20=14$. Le nombre manquant de la 1ère ligne est donc $x=14$. On peut ensuite compléter la 1ère diagonale : $1+11+16+y=34$ et donc $y=34-(1+11+16)=34-28=6$. De proche en proche on va ainsi compléter ce carré : la 4ème colonne, puis la 2ème ligne, etc. Si nécessaire on pourra se servir encore du fait que le carré est normal pour vérifier nos résultats : aucune nombre ne doit apparaître deux fois ! Ceci ne vaut que pour les carrés normaux, car il en existe qui ne sont pas normaux (les nombres ne se suivent pas, la densité ne se calcule alors pas sans connaître une ligne complète).

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

<u>Exemple 2</u> : Les addition-mystères.

Ce sont des additions posées dans lesquelles chaque chiffre a été remplacé par une lettre et chaque lettre représente un chiffre différent. Par exemple l'addition CINQ+SIX=ONZE contient deux nombres CINQ et SIX constitués de quatre et trois chiffres, et leur somme vaut ONZE, mais c'est une sorte de jeu de mot (et de nombre) car la lettre C est un chiffre, la lettre I un autre (qu'on retrouve dans les nombres CINQ et SIX), etc. Il y a en tout, dans cette addition, huit chiffres différents C, I, N, Q, S, X, O, Z qu'il faut trouver pour rendre exacte la somme proposée. Une des solutions est 1306+739=2045. Pour cette solution, la valeur des lettres est C=1, I=3, N=0, Q=6, S=7, X=9, O=2, Z=4. Sauriez-vous en trouver une autre ? Il y en a en tout 142 de différentes (valeur trouvée par un programme). Pour trouver une solution, on peut émettre des hypothèses et essayer de compléter la somme jusqu'à devoir changer d'hypothèse : par exemple, on peut supposer que Q=1 et essayer avec X=2, cela conduit à E=3. Ensuite il faut encore émettre une nouvelle hypothèse, N=4 et I=5 conduirait à Z=9. On doit alors avoir I+S=N et donc 5+S=4 ce qui obligerait à prendre 9 pour S, ce qui n'est pas possible. Donc il faut essayer de changer une des hypothèses précédente (la dernière par exemple).

Voici une addition-mystère contenant les dix chiffres : TROIS+TROIS+TROIS+TROIS+TROIS=QUINZE. Avec les dix chiffres remplaçant les dix lettres différentes, il y a 10×9×8×7×6×5×4×3×2=3 628 800 possibilités. Pourtant seulement six solutions peuvent être données pour ce problème. Examinez à droite toutes les solutions pour cette addition-mystère.

trois+trois+trois+trois+trois=quinze

```
Solution 1 : 35892 + 35892 + 35892 + 35892 + 35892 = 179460
Solution 2 : 54638 + 54638 + 54638 + 54638 + 54638 = 273190
Solution 3 : 58634 + 58634 + 58634 + 58634 + 58634 = 293170
Solution 4 : 71892 + 71892 + 71892 + 71892 + 71892 = 359460
Solution 5 : 95362 + 95362 + 95362 + 95362 + 95362 = 476810
Solution 6 : 97261 + 97261 + 97261 + 97261 + 97261 = 486305
```

Voici d'autres addition-mystères avec des jeux de mots portant sur les chiffres et qui ont des solutions :

NEUF+UN+UN=ONZE (celle-ci n'a qu'une seule solution) ;
NEUF+DEUX=ONZE(celle-ci a 44 solutions) ;
ONZE+NEUF=VINGT (celle-ci a 32 solutions) ;
DEUX+DEUX+DEUX+DEUX=HUIT (9 solutions) ;
CINQ+DEUX+DEUX=NEUF (44 solutions) ; HUIT+DEUX+DEUX=DOUZE (9 solutions) ;
DEUX+HUIT+UN=ONZE (156 solutions) ; UN+UN+UN+UN+UN+UN=SIX (12 solutions).

Les jeux de mots que l'on peut lire dans ces égalités ne sont pas forcément des opérations (les mots ne sont pas forcément des nombres). Par exemple, on peut trouver une seule solution à cette égalité cryptée à sept chiffres différents : ARBRE+ARBRE=FORET, vingt-neuf solutions pour celle-ci qui utilise les dix chiffres : JOUR+HEURE=TEMPS et cinquante-quatre pour la romantique : TOI+MOI=LOVE...
Chacun peut en inventer de nouvelles, même si ce n'est pas très facile. Que pensez-vous de celle-ci qui est assez personnelle, mais que je partage volontiers avec vous : PHILIPPE+MOUTOU=PILEPOIL. Les neuf lettres qui cachent des chiffres inconnus sont P, H, I, L, E, M, O, U, et T. Il n'y a que quatre solutions différentes.

```
             philippe + moutou = pilepoil
Solution 1 : 17828119 + 463563 = 18291682
Solution 2 : 28909227 + 163463 = 29072690
Solution 3 : 38909336 + 154254 = 39063590
Solution 4 : 86737882 + 591091 = 87328973
```

Exemple 3 : Une propriété étonnante des nombres.

Programme : Choisissez n'importe quel nombre à trois chiffres. Inversez* les chiffres de ce nombre. Soustrayez les deux nombres. Prenez la différence. Inversez les chiffres de ce nombre. Ajoutez les deux nombres.

*si un nombre à deux chiffres apparaît pour la différence (par exemple 98), on considère qu'il a trois chiffres (donc 098).
Par exemple, on choisit le nombre 189, inversé on a 981, la différence 981–189=792. On inverse la différence 297 et on ajoute ce nombre à la différence 297+792=1089.

993	399	594	495	1089
994	499	495	594	1089
995	599	396	693	1089
996	699	297	792	1089
997	799	198	891	1089
998	899	99	990	1089
999	999	0	0	0

Voici la fin de la séquence obtenue avec un tableur pour les nombres à trois chiffres.
Qu'observe t-on : le résultat est toujours le même (1089). Sauf pour certains type de nombres pour lesquels le résultat est nul. Les nombres qui conduisent à 0 ont un axe de symétrie, on les appelle des nombres *palindromes* (ils se lisent à l'envers comme à l'endroit) et la différence est donc nulle. Comme 0 est aussi un palindrome à trois chiffres (000), on l'ajoute à lui-même pour trouver 0. Mais pourquoi trouve t-on toujours 1089 dans les autres cas ?
Essayons d'écrire ce nombre de trois chiffres avec des lettres. Le nombre qui s'écrit abc a une valeur égale à a×100+b×10+c. Lorsqu'on l'inverse, on trouve cba qui vaut c×100+b×10+a. La différence entre ces deux nombres est égale à
c×100+**b×10**+a−(a×100**+b×10**+c)
ou le contraire si a>c.
Cela peut s'écrire
(c−a)×100+(a−c)=(c−a)×100−(c−a),
soit (c−a)×99, car le terme en b disparaît dans la différence.
La différence est donc un nombre de la table de 99
099-198-297-396-495
594-693-792-891-990.
On remarque alors que tous ces nombres ont une forme abc telle que a+c=9 et b=9, donc lorsqu'on inverse en cba, on retrouve cette même forme et la somme abc+cba=(a+c)×100+b×20+(a+c)=9×100+9×20+9=1089.

100	1	99	990	1089
101	101	0	0	0
102	201	99	990	1089
103	301	198	891	1089
104	401	297	792	1089
105	501	396	693	1089
106	601	495	594	1089
107	701	594	495	1089
108	801	693	396	1089
109	901	792	297	1089
110	11	99	990	1089
111	111	0	0	0
112	211	99	990	1089
113	311	198	891	1089
114	411	297	792	1089
115	511	396	693	1089

NB : on trouve qu'avec les nombres à quatre chiffres, le résultat est toujours égal à 10890, sauf pour les nombres palindromes comme 1001 ou 2332.