<u>Chapitre 1</u> : Les nombres décimaux

1] <u>Les nombres entiers</u>

Les nombres servent à compter les objets : cinq doigts, six pommes, trois jours.
Historiquement, les hommes ont découverts en premier les nombres entiers. Le zéro ne fut considéré comme un nombre entier que beaucoup plus tard. Les nombres entiers naturels (supérieurs à zéro) seront complétés en classe de 5ème avec des nombres entiers négatifs (inférieurs ou égal à zéro).
Les nombres décimaux dont il est question dans ce chapitre contiennent les nombres entiers et beaucoup d'autres nombres. Les nombres entiers sont les nombres décimaux dont la partie décimale est nulle.

a) <u>Écriture en lettres</u>

En français, il suffit de 26 mots pour écrire les nombres entiers courants. Ces mots sont les suivants :

Zéro – un – deux – trois – quatre – cinq – six – sept – huit – neuf
Ces **nombres** correspondent aux **chiffres** utilisés pour les noter en numération décimale (voir partie b).

Dix – onze – douze – treize – quatorze – quinze – seize
Vingt – trente – quarante – cinquante – soixante (en Belgique ou en Suisse, on ajoute à cette liste de dizaines : septante, octante et nonante)

Cent – mille – million (mille fois mille ou mille milliers) – milliard (mille millions)
NB : Il existe aussi en français le billion (million de millions) et le trillion (million de billions) mais on ne les utilise pas, d'autant plus que, en anglais, un milliard se dit *a billion*… Il faut mille (*thousand*) *billions* anglais pour faire un billion français. Comme cela prête à confusion et que l'on a d'autres façons de dire les grands nombres, nous n'utilisons quasiment pas ces termes en français.

Parmi les bizarreries de l'orthographe française, certains de ces mots (deux, mille, etc.), en fait la plupart, sont **invariables** tandis que d'autres prennent un 's' au pluriel et sont donc **variables** (un qui peut aussi prendre un 'e' au féminin, vingt et cent qui ont des particularités, million et milliard qui s'accordent toujours avec le nombre).

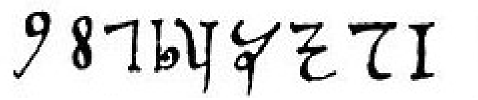
> <u>Cent</u> est *variable* précédé d'un nombre qui le multiplie s'il n'y a pas de nombre derrière ou s'il est suivi de milliers, millions ou milliards (trois cents, trois cents millions) mais *invariable* s'il est suivi par un nombre ou par mille (trois cent vingt, trois cent mille). À peu près pareil pour <u>vingt</u> dans quatre-vingts (quatre-vingts hommes, quatre-vingts milliards de secondes et quatre-vingt-quatre euros). Lorsque ces nombres sont utilisés comme ordinaux (dans une énumération), ces deux mots sont invariables. Ainsi on écrit l'an mille neuf cent et page quatre-vingt sans le 's' ainsi que les années quatre-vingt.

On mets des tirets entre les mots pour combiner ces mots entre dix-sept et quatre-vingt-dix-neuf, sauf avec un ou onze quand ils sont reliés aux autres par la conjonction 'et' (vingt et un, soixante et onze, quarante-quatre mille deux cent quatre-vingt-onze, cent un mille quatre-vingt-un). Une ordonnance du Conseil Supérieur de la Langue Française (JO du 06/12/1990) accepte qu'on mette des tirets partout (deux-cent-soixante-et-onze,), mais celle-ci n'est que rarement appliquée.

On n'écrit pas les nombres trop grands en lettres. Ce n'est pas très compréhensible d'écrire que la population mondiale en deux mille quatorze est environ égale à sept milliards deux cent quarante-trois millions sept cent quatre-vingt-quatre mille habitants, on préfère dans ce cas écrire en chiffres (en 2014, il y a 7 243 784 000 hab.), mais les nombres simples sont écrits en lettres (j'ai moins de cent amis sur FB).

Pour les mesures, l'usage de très grands nombres est simplifié par l'utilisation de préfixes qu'on accole à l'unité : Kilo (K) pour mille – Méga (M) pour million – Giga (G) pour milliard – Téra (T) pour mille milliards (1 suivi de 3×4=12 zéros) – péta (3×5=15 zéros) – exa (3×6=18 zéros) – zetta – yotta...
On utilise ainsi les Kg (1000 grammes), les Ko (1000 octets) ou les Km (1000 mètres), et aussi les Go (1 Go=1 000 0000 000 octets) ou les TV (1 TéraVolt = 100 000 000 Volts). Les Mm, Gm ou TM ne sont pas vraiment utilisés, même si l'on mesure parfois des grandes distances : 42 000 Km pour le tour de la Terre (et non 42 Mm), 380 000 Km pour la distance Terre-Lune (et non 380 Mm), 150 millions de Km pour la distance Terre-Soleil (et non 150 Gm)...

b) Écriture en chiffres



Extrait d'un manuscrit du $X^{\text{ème}}$ siècle

Dans notre système de numération décimal actuel, nous utilisons dix chiffres (0, 1, 2, 3, …9) pour écrire les nombres, de la même façon que notre alphabet de 26 lettres permet d'écrire tous les mots. Les chiffres sont donc des symboles qui servent à écrire les nombres.
Nous utilisons les chiffres indo-arabes (inventés par les indiens et transmis aux européens au $X^{\text{ème}}$ siècle par les arabes, via l'Espagne). On dit aussi les chiffres arabes, le mot chiffre venant de l'arabe ṣifr désignant le zéro (śūnya en indien). Avant (et encore un peu maintenant), nous utilisions les chiffres romains qui ne contiennent pas de zéro. Et avant encore ? Des tas de cailloux, des entailles sur le bois ou sur des os...

Parfois, le 0 est barré Ø pour ne pas le confonde avec la lettre O (en informatique, lorsqu'on a des codes alphanumériques). Il y a aussi des variantes graphiques pour le 1 (avec ou sans la barre en bas et avec ou sans le petit côté en haut), le 4 et le 7 notamment. L'important est de ne pas prêter à confusion (un 7 écrit comme un 1 par exemple). Les polices de caractères d'un traitement de texte donnent une idée de ces variations : 1 (Times), 1 (Arial), 1 (Calibri), *1* (Script), ... 7 (Times), 7 (Arial), 7 (Calibri), *7* (Script), ...

Notre numération est une <u>numération de position</u> : la place d'un chiffre dans un nombre indique sa valeur.
Dans les nombres 123 et 34, les deux 3 n'ont pas la même valeur (3 unités dans 123, donc 3 vaut 3, mais 3 dizaines dans 34, donc 3 vaut ici 30). Un chiffre n'a sa propre valeur que dans la position des unités (à droite), sinon cette valeur est multipliée par autant de fois 10 que la position est décalée vers la gauche.
Pour exprimer cela, on peut décomposer un nombre selon les « puissances de dix » :
$34=3\times\mathbf{10}+4\times\mathbf{1}$ (3 dizaines et 4 unités)
$2015=2\times\mathbf{1000}+0\times\mathbf{100}+1\times\mathbf{10}+5\times\mathbf{1}$ (2 unités de mille, 1 dizaine et 5 unités)

On a l'habitude de regrouper les chiffres par groupe de trois en commençant par les unités (la gauche) pour simplifier la lecture des grands nombres. 1230000000000 s'écrit 1 230 000 000 000 (sur un ordinateur, il faut utiliser l'espace insécable ou un format de nombre avec séparateur des milliers). Par contre, les années 1999 ou 2014 s'écrivent généralement sans l'espace.

De droite à gauche, un nombre est toujours constitué d'un chiffre des unités suivi éventuellement d'un chiffre des dizaines puis d'un chiffre des centaines, ces trois chiffres constituant le groupe des unités. Il peut y avoir ensuite un groupe des milliers, puis des millions, des milliards, etc. Ce qui se résume plus facilement dans un tableau :

Milliards			*Millions*			*Milliers*			*Unités*		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4
						5	6	0	7	0	0

U : Unités
D : Dizaines
C : Centaines

Attention à ne pas confondre le **chiffre** des dizaines et le **nombre** de dizaines.
Dans le nombre 560 700 écrit à la dernière ligne, le chiffre des dizaines est 0 alors que le nombre de dizaines est 56 070 (car $560\,700=56\,070\times\mathbf{10}$).

Certains zéros sont *inutiles* (même si on les écrit parfois) : ceux situés à gauche du premier chiffre non nul. Certains de ces zéros inutiles sont pourtant parfois écrits (étiquette, prix, date, affichage divers) quand il s'agit de respecter un format. Tout le monde connait l'agent 007, et lorsqu'on écrit une date, on respecte le format jj/mm/aa même s'il y a des zéros inutiles (Anna est née le 02/01/03).

Remarque : notre système de numération actuel est un système parmi d'autres. La base de numération utilisée est la base 10 (d'où le mot décimal). Le choix de cette base provient sans doute du fait que nous avons, en général, dix doigts qui nous aident, entre autres, à compter. Les autres systèmes parfois utilisés sont la numération binaire (base 2, utilisé par l'ordinateur qui n'a que 2 doigts...), octale (base 8, utilisée en informatique), duodécimale (base 12, plus intéressante que la base 10 à cause de la divisibilité de 12 par 2, 3, 4, 5 et 6), hexadécimale (base16, en informatique toujours, les chiffres en sont 0123456789ABCDEF), vigésimale ou vicésimale (base 20, les mayas et aussi au moyen-âge en Europe) et sexagésimale (base 60, la civilisation babylonienne et ce qu'il en reste dans notre compte des secondes et des minutes).

2] Les nombres décimaux

Dans la vie courante, on utilise généralement des nombres décimaux mais il faut savoir que tous les nombres ne sont pas des nombres décimaux.

a) Définitions

Un nombre décimal n'est pas « un nombre à virgule » ! Cette définition, parfois connue des élèves, n'est pas correcte : un nombre entier comme 2 est décimal, malgré l'absence de virgule (on pourrait écrire ce nombre 2,0) et le nombre qui s'écrit pourtant avec une virgule 0,33333... (des 3 jusqu'à l'infini) n'est pas décimal.

Pour être décimal un nombre doit pouvoir s'écrire avec une virgule.
Ainsi 159 peut s'écrire 159,0 donc 159 est décimal.
Le nombre π ne peut pas s'écrire exactement sous la forme décimale (il y a une infinité de chiffres qui se succèdent) car ce nombre n'est pas décimal. On utilise des approximations décimales de π comme 3,14 ou 3,1416 mais il faut les distinguer de la valeur exacte qui est non-décimale (on note $\pi \approx 3{,}14$ et $\pi \neq 3{,}14$).
Il faut distinguer un nombre et son écriture : 2 et 2,0 sont deux écritures différentes du même nombre. On peut écrire le nombre 2 avec d'autres systèmes numériques (II avec le système romain, 10 avec le système binaire, etc.), et on peut aussi, tout en restant dans notre système décimal, utiliser des fractions ou des radicaux (au programme de la classe de 4ème) pour écrire ce nombre : $2=\frac{6}{3}=\sqrt{4}=...$

L'*écriture décimale* d'un nombre est celle qui utilise la virgule (en français, car en anglais c'est un point qui sépare la partie entière de la partie décimale, la virgule étant utilisée comme séparateur des milliers).

Définition 1 : Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec une virgule. Devant (à gauche) la virgule il y a la **partie entière** (qui contient toujours au moins un chiffre des unités) et derrière (à droite) la virgule, il y a la **partie décimale** qui doit être finie.

La partie décimale peut être nulle, le nombre est alors un entier. Dans ce cas, on n'écrit généralement pas la partie décimale et on ne met pas de virgule. Tous les nombres entiers sont des nombres décimaux qui ont une partie décimale nulle.
Exemple : 12,0 est un nombre décimal et entier qu'on écrit simplement 12 mais qui peut aussi s'écrire 12,00.

La partie décimale peut contenir beaucoup de chiffres mais, à partir d'un certain rang, on ne doit trouver que des zéros qu'on n'écrit généralement pas.
Exemple : $1 \div 256 = 0{,}00390625 = 0{,}003906250000...$ La partie décimale du quotient de 1 par 256 contient huit chiffres, puis, rien que des zéros. C'est un nombre décimal. Ce qu'on appelle partie décimale de ce nombre ce sont les 390 625 cent millionièmes qui sont derrière la virgule. La partie entière est nulle ici.

La partie entière d'un nombre décimal peut être nulle. Dans ce cas, il faut toujours écrire le zéro des unités, suivi éventuellement par d'autres zéros à gauche de la partie décimale. C'est le seul cas où un nombre commence par zéro et la seule exception à la règle des zéros inutiles à gauche. Les calculatrices autorisent (pour simplifier la saisie) que l'on note les nombres commençant par 0,... sans ce zéro des unités (on écrit par exemple .3+.5 et elle donne 0.8) mais cette notation n'a pas d'autres usages.
Exemple : Dans $1 \div 256 = 0{,}00390625$ les 3 premiers zéros sont utiles, et même obligatoires.

Si on ne peut écrire tous les chiffres de la partie décimale car ils sont en nombre infini, le nombre n'est pas un nombre décimal (c'est un nombre rationnel non-décimal ou un nombre irrationnel).
Exemples : $\frac{10}{11} = 10 \div 11 = 0{,}0909090909090...$ Le quotient de 10 par 11 est un nombre qui a une partie décimale infinie constituée d'une suite de chiffres qui se répètent éternellement. On peut noter ce nombre $0{,}\overline{09}$ ou 0,[09] pour montrer que c'est le groupe de deux chiffres 09 qui se répète. $\pi = 3{,}1415928...$ est un nombre qui a une partie décimale infinie mais où on ne peut pas trouver une suite de chiffres qui se répète. $\frac{10}{11}$ et π sont deux nombres non-décimaux.

Le nombre 1,9999... (que des 9 qui se répètent jusqu'à l'infini) est décimal ! C'est même un nombre entier !! Pour vous en convaincre, calculez la différence $2 - 1{,}9999999999999...$ Elle vaut $0{,}00000000...$ (le 1 final est repoussé à l'infini, c'est à dire jamais). Il s'agit de l'écriture impropre d'un nombre décimal. Tout nombre décimal a une écriture propre et une impropre : 0,5 (écriture propre)=0,49999 (écriture impropre).

Définition 2 : Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme du quotient d'un entier par 1, 10, 100, 1000, etc. (une puissance de dix). Lorsqu'on écrit ces quotients avec le trait de fraction, on parle alors de **fractions décimales**.

12 peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale : $12=\frac{12}{1}=\frac{120}{10}=\ldots$ c'est donc un nombre décimal.
0,25 peut aussi s'écrire sous la forme d'une fraction décimale : $0{,}25=\frac{25}{100}=\frac{250}{1000}=\ldots$ c'est un nombre décimal.

Un quotient de deux entiers n'est pas toujours décimal.
Exemple : Le quotient de 1 par 256 peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale car $\frac{1}{256}=1\div 256=0{,}00390625=\frac{390625}{100000000}$, mais pas celui de 10 par 11. $\frac{1}{256}$ est décimal mais pas $\frac{10}{11}$.

On peut écrire un nombre décimal comme la somme d'un entier (la *partie entière*) et de plusieurs fractions décimales correspondant chacune aux chiffres de la *partie décimale*
Exemple : $16{,}095=\frac{16095}{1000}=16+\frac{9}{100}+\frac{5}{1000}$. La 1$^{\text{ère}}$ écriture est l'écriture décimale (avec la virgule), la 2$^{\text{ème}}$ est la fraction décimale et la 3$^{\text{ème}}$ est celle qui donne chacun des chiffres de la partie décimale.
Remarque : Historiquement, cette l'écriture fut employée avant l'invention de la virgule : Simon Stevin préconise, en 1585 dans *La Disme*, d'écrire les nombres décimaux avec des fractions décimales. Il écrit 16,095 sous la forme 16◎9②5③. Puis, en 1612, Bartholomäus Pitiscus introduisit la virgule décimale pour la confection de tables trigonométriques (calculs de nombres liés aux angles) et John Napier l'utilise à son tour pour ses tables logarithmiques.

On peut aussi écrire un nombre décimal comme la somme d'un entier et d'une seule fraction décimale inférieure à 1 (une fraction décimale est inférieure à 1 si son numérateur est inférieur à son dénominateur) correspondant à *la partie décimale* comme par exemple : $16{,}095=\frac{16095}{1000}=16+\frac{95}{1000}$.

b) Description

La position d'un chiffre indique sa valeur (comme pour les nombres entiers). D'une position à une autre voisine, la valeur d'un chiffre est multipliée par 10 si on va vers la gauche, divisée par 10 si on va vers la droite.

Milli**ers**	Cent**aines**	Diz**aines**	Unités	**,**	dix**ièmes**	cent**ièmes**	mill**ièmes**
0	0	0	0	,	1	2	0
3	0	4	5	,	0	6	7

Certains zéros sont inutiles à gauche ou à droite (nous les avons écrit en rouge), les autres sont indispensables. Le premier nombre s'écrit tout simplement 0,12 et le second 3045,067.

Ne pas confondre le chiffre des dix**ièmes** et le chiffre des Diz**aines**, même si les mots se ressemblent.
Dans le second nombre le chiffre des dix**ièmes** est 0 et le chiffre des Diz**aines** est 4.
De même, ne pas confondre le chiffre des cent**ièmes** et le chiffre des Cent**aines**…

Ne pas confondre le **chiffre** des dixièmes et le **nombre** des dixièmes. D'une façon générale un chiffre est un caractère, alors qu'un nombre est une quantité. Dans le second nombre, le **chiffre** des dixièmes est 0 mais le **nombre** des dixièmes est 30 450.

Pour écrire en lettres ou pour dicter un nombre décimal, on sépare les unités de la partie décimale : on dira pour 3045,067 que c'est 3045 unités et 67 millièmes. Souvent, c'est plus pratique mais moins élégant, on dit tout simplement *ce qu'on voit* de la partie décimale (trois mille quarante-cinq virgule zéro soixante-sept), cela évite de compter les décimales…

Pour faciliter la lecture des nombres décimaux, on sépare les chiffres par groupes de trois en partant de la gauche vers la droite pour la partie décimale (le contraire pour la partie entière).
Ainsi on note 1 234 567 890,098 765 432 1 ou encore 0,000 000 000 01.

Il existe aussi des préfixes pour écrire les tout petits nombres décimaux lorsqu'ils sont des mesures : déci (d, dixième) – centi (c, centièmes) – milli (m, millièmes) – micro (µ, millioniѐmes) – nano (n, milliardièmes) – picoa (p) – femto (f) – atto (a) ...
On utilise ainsi les mg (1mg=0,001 g), les µs (1 µs = 0,000 001s) ou les nm (1 nm = 0,000 000 001m)...

3] Ordre des décimaux

a) Comparaison des décimales

Pour ranger des nombres décimaux dans l'ordre, on compare d'abord les parties entières puis les parties décimales. On compare chiffre par chiffre, d'abord les chiffres en position la plus à gauche puis, en cas d'égalité, les chiffres dans les positions successives vers la droite.

Rangeons les nombres 20,2 ; 2,02 ; 22; 2; 20,02 ; 2,2 dans l'ordre croissant.
Pour effectuer ce travail de rangement, on peut écrire les nombres en dessous les uns des autres comme s'ils étaient dans le tableau précédent, cela permet de comparer les chiffres d'une même position.
Par exemple ici, on pourrait faire d'abord la liste, puis le classement :
(en bleu nous avons mis le chiffre qui permet de décider qu'un nombre est plus grand que le suivant)

rang	Diz**aines**	***Unités***	**,**	dix**ièmes**	cent**ièmes**
2	2	0	,	2	
5		2	,	0	2
1	2	2			
6		2			
3	2	0	,	0	2
4		2	,	2	

rang	Diz**aines**	***Unités***	**,**	dix**ièmes**	cent**ièmes**
1	2	2			
2	2	0	,	2	
3	2	0	,	0	2
4		2	,	2	
5		2	,	0	2
6		2	,	(0)	(0)

Finalement on écrit une suite d'inégalités pour ordonner ces nombres : 2 < 2,02 < 2,2 < 20,02 < 20,2< 22

b) Comparaison des fractions décimales

Une autre méthode pour comparer des nombres qu'on peut écrire sous forme de fractions est de les écrire <u>avec le même dénominateur</u> (le nombre du dessous), les nombres étant alors rangés comme les numérateurs (les nombres du dessus) de ces fractions.

Pour le classement précédent, nous aurions pu tout d'abord écrire les nombres sous formes de fractions décimales dont le dénominateur est 100 :

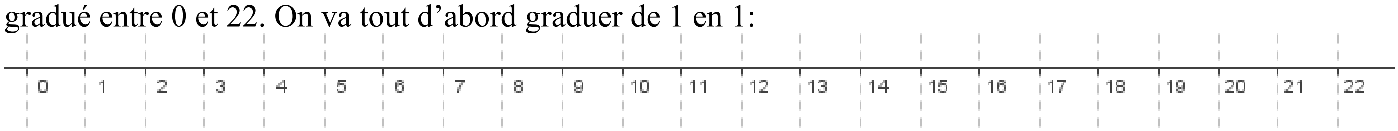
$$20{,}2=\frac{2020}{100}\,;2{,}02=\frac{202}{100}\,;22=\frac{2200}{100}\,;2=\frac{200}{100}\,;20{,}02=\frac{2002}{100}\,;2{,}2=\frac{220}{100}$$

Ensuite il s'agit de comparer les numérateurs de ces fractions : 2020 ; 202 ; 2200 ; 200 ; 2002 ; 220.
Lorsqu'ils sont mis dans l'ordre (200 ; 202 ; 220 ; 2002 ; 2020 ; 2200) on doit encore réécrire la liste des nombres de départ, en divisant par 100 les numérateurs qu'on vient d'ordonner.

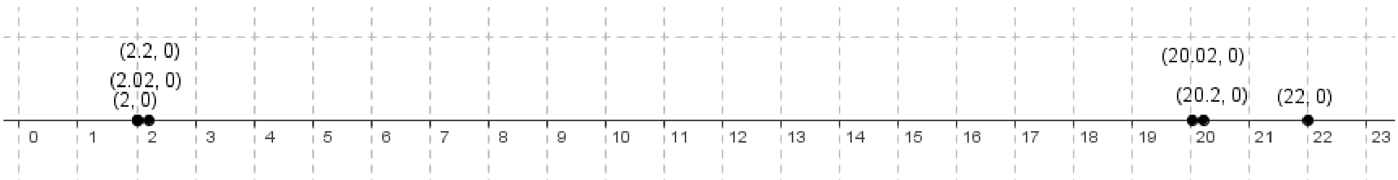
c) Utilisation d'un axe gradué

Une dernière méthode qui permet d'ordonner les nombres et qui permet d'obtenir une représentation graphique de l'ensemble des nombres décimaux, consiste à **graduer régulièrement** une droite. On choisit pour cela *une unité de longueur* adaptée aux nombres que l'on veut placer sur la droite. On choisit aussi la portion de droite que l'on va utiliser pour y visualiser nos nombres.

Dans la pratique, on doit tout d'abord identifier le plus grand et le plus petit nombre à représenter. Pour notre exemple il s'agit de 2 et de 22. Pour placer tous les nombres de cet exemple, on va donc utiliser un axe gradué entre 0 et 22. On va tout d'abord graduer de 1 en 1:

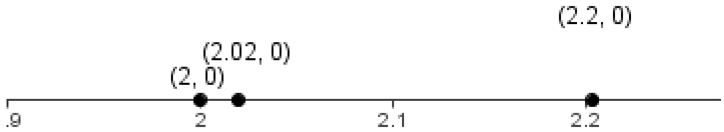


Puis on va placer nos nombres en utilisant ces graduations qui sont des entiers.

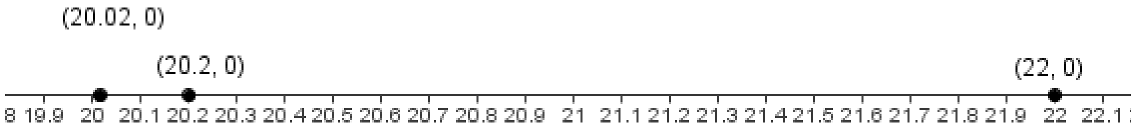


Nous avons utilisé pour obtenir ce graphique le logiciel libre GeoGebra qui donne entre parenthèses les coordonnées des points : seul le premier nombre de ces coordonnées nous intéresse (l'autre est tout simplement nul ici). L'inconvénient de cette représentation graphique est évident : certains points sont très espacés alors que d'autres sont indiscernables (ils se superposent presque).

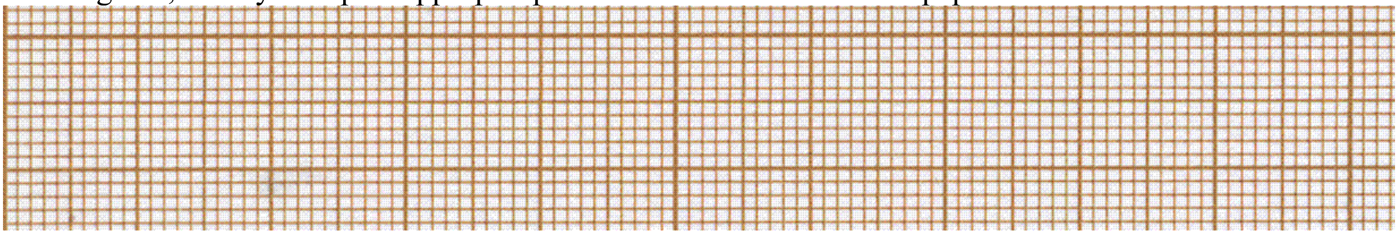
Pour remédier à cet inconvénient on peut zoomer la partie qui nous intéresse, par exemple les nombres compris entre 2 et 2,2.



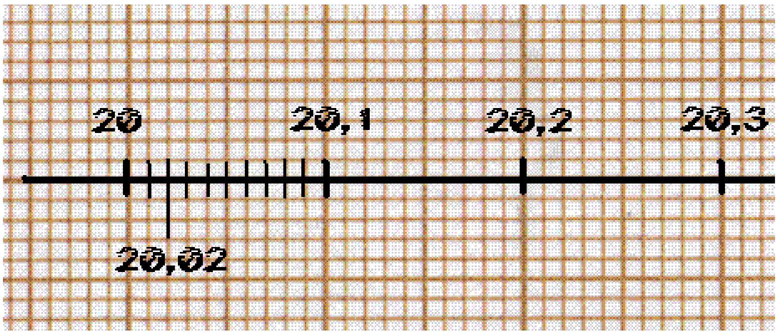
On peut ensuite faire le même travail pour les nombres compris entre 20 et 22.



Sans logiciel, le moyen le plus approprié pour effectuer ce travail est le papier millimétré.



Les grosses lignes sont subdivisées en 10 parties (avec une ligne plus importante au milieu) ce qui est bien adapté aux nombres décimaux. Nous pouvons donc graduer en dixièmes les grosses lignes, les petites lignes étant pour les centièmes.



L'inconvénient d'avoir à placer des points parfois très proches ne doit pas nous arrêter. Il est normal de faire des erreurs lorsqu'on place des points sur un axe gradué ou un graphique. Pour faire le moins d'erreur possible, la précision est importante, mais le choix d'une graduation adaptée aux nombres qu'on veut représenter l'est tout autant.

4] Approximations décimales

a) Définitions

Définition 1 : On dit qu'un nombre est une **valeur approchée** d'un autre nombre au centième si la différence entre ces 2 nombres ne dépasse pas un centième, soit 0,01. On peut remplacer dans cette définition 0,01 par n'importe par 0,1 ou par 1 : dans le 1er cas il s'agit d'une valeur approchée au dixième près, dans le 2d cas il s'agit d'une valeur approchée à l'unité près.

Exemples : 1,5 est une valeur approchée de 1,503 à 0,01 près car : 1,503 – 1,5 = 0,003 et cette différence est plus petite que 0,01. 1,51 est une autre valeur approchée de 1,503 à 0,01 près car : 1,51 – 1,503 = 0,007 qui est inférieur à 0,01.
Si l'on veut une valeur approchée de 1,503 à 0,1 près on peut prendre 1,5 ou 1,51 mais aussi 1,6 car 1,6 – 1,503 = 0,097 qui est plus petit que 0,1. Par contre 1,6 n'est pas une valeur approchée de 1,503 à 0,01 près.
3,33 est une valeur approchée du quotient 10÷3 à 0,01 près car : 10÷3 = 3,3333… et la différence avec 3,33 vaut 0,00333… qui est plus petite que 0,01. 3,34 est aussi une valeur approchée du quotient 10÷3 à 0,01 près car 3,34 – 3,33333… vaut 0,006666… qui est plus petit que 0,01

Définition 2 : On parle de valeur approchée **par défaut** si celle-ci est inférieure au nombre approché. Sinon on parle de valeur approchée **par excès**.

Exemple : 1,5 est une valeur approchée *par défaut* de 1,503 tandis que 1,6 en est une *par excès*. On peut encadrer un nombre décimal par une valeur approchée *par défaut* et une valeur approchée *par excès* comme par exemple ici $1,5<1,503<1,6$ on a réalisé un encadrement de 1,503 par 2 nombres de dixièmes successifs.

b) Troncature et arrondis

Définition : On obtient une **troncature** d'un nombre décimal en coupant la fin du nombre. Une troncature à l'unité est le nombre privé de sa partie décimale (on parle alors de partie entière), une troncature au dixième est le nombre privé de toutes les décimales sauf de la première (celle des dixièmes), etc.

Exemple : la troncature au dixième de 1,503 est 1,5. La troncature au centième de 1,503 est 1,50, donc 1,5 aussi. La troncature à l'unité de 1,503 est 1.

Remarque : une troncature est toujours une valeur approchée par défaut (on enlève toujours quelque chose au nombre).

Définition : L'**arrondi** d'un nombre décimal au centième le plus proche (on dit aussi arrondi à 2 chiffres) est le nombre à 2 chiffres après la virgule le plus proche du nombre décimal. De même, on définit l'arrondi au dixième le plus proche ou l'arrondi à l'entier le plus proche, etc.

Exemple : L'arrondi au centième le plus proche de 1,503 est 1,50 ou 1,5, c'est une valeur approchée par défaut. L'arrondi au dixième le plus proche de 1,503 est aussi 1,5, c'est encore une valeur approchée par défaut. L'arrondi à l'unité la plus proche de 1,503 est 2 (car on est plus proche de 2 que de 1), c'est une valeur approchée par excès.

Le quotient 1/3 = 0,3333… arrondi au centième le plus proche est 0,33 (valeur approchée par défaut).
Le quotient 2/3 = 0,6666… arrondi au centième le plus proche est 0,67 (valeur approchée par excès).
On note : $1/3 \approx 0,33$ et $2/3 \approx 0,67$

Remarque : l'affichage des calculatrices est généralement arrondi. Vérifiez pour 2÷3 ce qu'affiche votre calculatrice. Si elle affiche quelque chose comme 0,66666667 c'est qu'elle arrondit, si elle affiche quelque chose comme 0,6666666 c'est qu'elle tronque.
Le résultat arrondi est plus proche de la réalité mais il peut transformer une décimale ou plusieurs. Supposez qu'un calcul aboutisse au nombre décimal 12,99999999925. Avec une calculatrice qui arrondit et qui affiche au plus 10 chiffres on obtiendra l'affichage 13 qui est un arrondi. Cela ne signifie nullement que le résultat est entier…

c) Ordres de grandeur

Définition : Un ordre de grandeur est une valeur arrondie à 1 ou 2 chiffres significatifs (chiffres non-nuls).

On utilise les ordres de grandeurs lorsque la valeur exacte n'a pas d'intérêt ou bien est inconnue.
Les ordres de grandeurs sont utiles aussi pour estimer le résultat d'un calcul ou pour vérifier un résultat.

Exemples : Début 2016, la France comptait 67 millions d'habitants. Il s'agit d'un ordre de grandeur, la valeur exacte n'a pas d'intérêt (cela change chaque jour).
Je dois louer un camion : la location pour une journée est 39,5€ et il faut ajouter 0,59€ par *km*. Je dois effectuer un trajet de 118 *km*. À combien me revient cette location : un ordre de grandeur est 40+0,6×100=40+60=100€ (la vraie valeur demande d'être posée 39,5+0,59×118=109,12€ mais elle n'est pas très différente).

Quand choisir 1 ou 2 chiffres ? Si je dois estimer le produit 0,59×118 je vais prendre 0,6×100 (un seul chiffre pour les deux nombres) car c'est plus difficile de faire 0,6×120 de tête. Par contre, si je doit effectuer 118÷6 je vais prendre 120÷6 car ça tombe juste, alors que 100÷6 est difficile à calculer de tête...
D'une façon générale, il n'y a que la facilité des calculs qui nous guide pour choisir un ordre de grandeur

5] Pour aller plus loin, et plus vite...

Le Programme d'Entraînement au Calcul Mental et à la Numération du site mathadomicile.fr propose plusieurs situations en relation avec l'écriture des nombres décimaux et la pratique des arrondis. On peut s'entraîner selon différents modes (Bilan, Bonus, Correction) et aussi enregistrer des scores sur les serveur, notamment pour figurer au classement de mathadomicile.

NB : En 2016, la connexion avec le serveur est momentanément indisponible (changement d'hébergeur sans les bases de données...) ainsi que les classements.

Vous avez une présentation du programme dans la page internet.
Les opérations N1 (Chiffre positionnel) et N3 (Écriture d'un décimal en chiffres) de Numération ont un rapport avec ce chapitre. On peut ajouter les opérations N2 (Écriture d'un entier en chiffres), N4 (Addition positionnelle) et N6 (Arrondis).

Pour s'entraîner aux autres systèmes de numération (ce n'est pas demandé pour l'évaluation mais par curiosité), on peut utiliser les opérations N7 (Changements de base), N8 (Conversions faciles en base 2) et N9 (Conversions en base 2).

Numérations, conversions

- [x] 1.Chiffre positionnel
- [x] 2.Ecrire un entier en chiffres
- [x] 3.Ecrire un décimal en chiffres
- [x] 4.Addition positionnelle
- [ ] 5.Notation scientifique
- [x] 6.Arrondis
- [ ] 7.Changements de base
- [ ] 8.Conversions faciles en base 2
- [ ] 9.Conversions en base 2
- [ ] 10.Conversions de longueurs
- [ ] 11.Conversions d'aires
- [ ] 12.Conversions de volumes

Voici quelques exemples des questions posées pour ces opérations :

Ope=N1	Le chiffre des milliers dans 451,568 est : 0		
	Le chiffre des dixièmes dans 408,361 est : 3		
Ope=N2	L'écriture en chiffres du nombre trente mille neuf est : 30009		
	L'écriture en chiffres du nombre cent quatre-vingt-onze est : 191		
Ope=N3	L'écriture en chiffres du nombre sept mille unités et quatre-vingt-dix-neuf centièmes est : 700.99		7000.99
	L'écriture en chiffres du nombre neuf mille cent cinquante unités et trois centièmes est : 9105.03		9150,03
Ope=N4	6,06 + 1 840,509 = 1846.569		
	70,24 + 8 001,004 = 8071.244		
Ope=N6	Arrondi 419,97223865809195 à la dizaine supérieure = 420		
	Arrondi 0,4009256504455604 au centième le plus proche = 0.40		
Ope=N7	Convertir dans la base 5 le nombre 15 = 30		
	Convertir dans la base 7 le nombre 12 = 15		
Ope=N8	Convertir en base 10 le nombre binaire 110 = 6	Max=10	
	Convertir en base 10 le nombre binaire 1001001 = 73	Max=100	
Ope=N9	Convertir dans la base 2 le nombre 10 = 1010	Max=10	
	Convertir dans la base 2 le nombre 34 = 100010	Max=100	