9.Utilisation de la proportionnalité

CORRECTION

1] Produit en croix

Si deux grandeurs sont proportionnelles, on peut déterminer une des deux grandeurs connaissant l'autre ainsi qu'un autre couple de valeurs. L'opération qui résume cela est le « produit en croix ». Dans cette situation,

On a : G1 = G2×G'1÷G'2

Ou encore : G2 = G1×G'2÷G'1

G1	G'1
G2	G'2

Ou encore : G'1 = G1×G'2÷G2

Ou encore : G'2 = G2×G'1÷G1

a) On sait que le carré de la période T d'oscillation d'un pendule est proportionnel à la longueur ℓ du pendule. Martin a mesuré la période d'un pendule de 104,5 *cm* de longueur. Il a trouvé 2,05 *s*. Il se demande quelle doit être la longueur ℓ d'un pendule dont la période d'oscillation serait de 10 *s*. Aidez-le !

104,5 *cm*	ℓ = ?
$2{,}05^2=4{,}2025\ s^2$	$10^2=100\ s^2$

$\ell=104{,}5\times100\div4{,}2025\approx2486{,}615\ cm$

soit 24,9 *m* environ ! Il faut dire que 10 *s* pour une oscillation c'est très lent...

b) En géométrie : on sait que la longueur d'un cercle est proportionnelle a son rayon (le coefficient de proportionnalité longueur/rayon vaut $2\pi R/R=2\pi$). On sait aussi que l'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon (le coefficient de proportionnalité aire/(rayon×rayon) vaut $\pi R^2/R^2=\pi$). Vous apprendrez bientôt que le volume d'une boule est proportionnelle au cube de son rayon ($\text{rayon}^3=\text{rayon}\times\text{rayon}\times\text{rayon}$). Pour l'instant, ne sachant pas le coefficient de proportionnalité, on en est réduit à faire des expériences.
Santosh a mesuré le volume d'une boule de diamètre 12 *cm*. Il a trouvé 905 cm^3.
Combien vaut approximativement le coefficient de proportionnalité volume/(rayon×rayon×rayon) ?
Attention : on nous donne le diamètre de la boule. Il faut diviser par 2 pour obtenir le rayon : 6 *cm*.

le coefficient de proportionnalité est $905/6^3\approx4{,}189814815$

Aidez-le à en déduire le volume d'une boule de rayon 6400 *km* (il s'agit de la Terre) !

12 *cm*	R=6400 *km*=640 000 000 *cm*
$12^3=1728\ cm^3$	R^3
905 cm^3	V= ?

Appliquons la règle vue plus haut, dite du produit en croix. Convertissons le rayon dans la même unité que la boule de Santosh (si on appliquait le coefficient trouvé à un rayon en *km*, trouverait-on un volume en km^3?) :

R= 640 000 000 *cm*

$R^3= 2{,}62144\times10^{26}\ cm^3$ (réponse de la calculatrice, cela signifie 262 144 000 000 000 000 000 000 000)

Pour V, il faut maintenant multiplier par le coefficient de proportionnalité trouvé. On obtient :

$V= 2{,}62144\times10^{26}\times4{,}189814815\ cm^3\approx1{,}09833481\times10^{27}\ cm^3$

Cela signifie 1 098 334 810 000 000 000 000 000 000 cm^3.

Convertissons en km^3, une unité plus convenable pour exprimer le volume de la Terre :

V= 1 098 334 810 000 km^3

Vérifions sur internet le volume de la Terre :

$V= 1{,}083\,21\times10^{12}\ km^3$ soit 1 083 210 000 000 km^3

Santosh a raison d'être fier de son estimation, pas si mauvaise que ça.

Pour information, la valeur exacte du coefficient de proportionnalité est $4\pi/3$ soit 4,188790205 environ.

On peut appliquer ce coefficient à un rayon en *km* : on le multiplie par le rayon au cube (en km^3), ici :

$4\pi/3\times6400^3\approx1\,098\,066\,210\,000\ km^3$

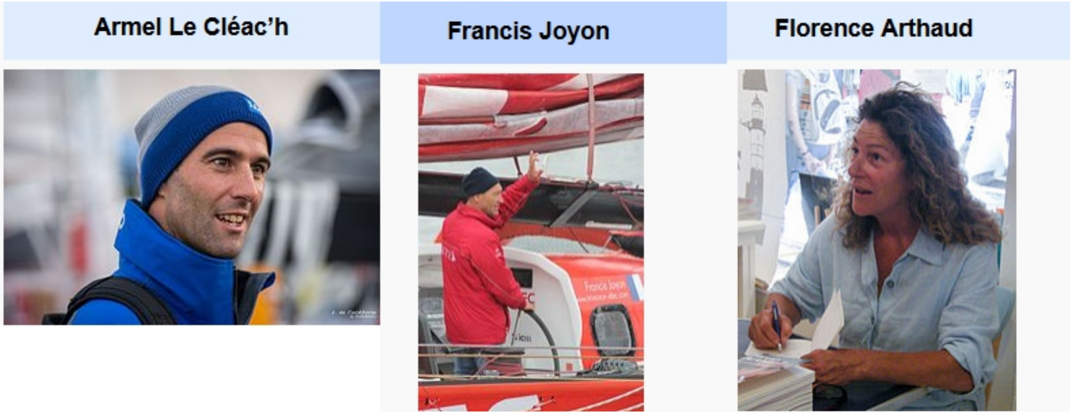
c) Alice a battu le record de la traversée de l'Atlantique en parcourant 4800 *km* en 10 jours et 12*h*.
Quelle a été sa vitesse en *km/h* ? 4800÷(10×24+12)=4800÷252≈19,05 *km/h*.
Sachant que 20 nœuds correspondent à 37*km/h*, quelle a été sa vitesse en nœuds ?

20 nœuds	37 *km/h*
? nœuds	19,05 *km/h*.

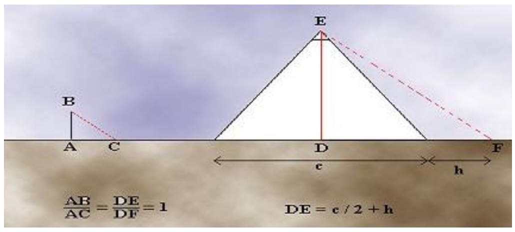
? =20×19,05÷37≈10,2973. Alice a parcouru l'Atlantique à un peu plus de 10 nœuds de moyenne.

Pour information, le véritable record de cette traversée, en solitaire, dans le sens Ouest-Est (le plus rapide) est aujourd'hui détenu par Francis Joyon qui mis 5 j 02 h 56 min 10 s en 2013 (soit une vitesse de 23,3 nœuds) sur le trimaran IDEC. Il y a en réalité 5330 km à parcourir du phare d'Ambrose (New York) au Cap Lizard (Grande Bretagne). Florence Arthaud, en 1990, établit un record proche de celui d'Alice puisqu'elle mis 9 j 21 h 42 min sur le trimaran Pierre 1er. Dans l'autre sens, d'Est en

Ouest, la traversée est plus longue puisque 8300 km séparent Cadix (Espagne) de San Salvadore. Dans ce sens, le record actuel est détenu depuis 2014 par Armel Le Cléac'h sur Maxi Solo Banque Populaire VII avec un temps de 6 j 23 h 42 min 18 s (soit une vitesse de 23,16 nœuds).



d) Thalès de Milet vivait au VI^ème^ siècle avant J-C, sur les bords de la mer Égée, en Grèce. L'histoire raconte que le Pharaon Amasis aurait dit que personne n'était en mesure de donner la hauteur de la grande pyramide du plateau de Guizeh … Thalès releva le défi !



Après quelques jours de voyage sur le Nil, Thalès aperçut, dressée au milieu du plateau, la pyramide. Les dimensions du monument âgé alors de 2000 ans, dépassaient de loin tout ce qu'il avait imaginé. Comment allait-il s'y prendre pour déterminer la hauteur de cette pyramide ? Il regarda son ombre et eut alors cette idée : « *Le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que celui que la pyramide entretient avec la sienne.* » Il en déduisit ceci : « *à l'instant où mon ombre sera égale à ma taille, l'ombre de la pyramide sera égale à sa hauteur*. » Sachant qu'au moment où cet événement se produit, la longueur h (voir schéma) est mesurée à 60 coudées et que la largeur de la pyramide vaut c=440 coudées. Déterminer la hauteur de la pyramide en coudées. Cinq coudées Égyptiennes mesurant 2,62 m combien de mètres mesure la hauteur et le côté de la grande pyramide ?

Ce problème est encore un problème caché de conversion. Il faut additionner h et $c/2$ pour obtenir la longueur de l'ombre. Il y a 60+220=280 coudées pour l'ombre, et autant pour la hauteur. La pyramide mesure 280 coudées de haut. Combien cela fait-il en mètres ?

280 coudées	? m
5 coudées	2,62 m

?= 280×2,62÷5≈146,72 m.

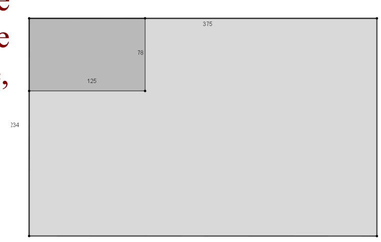
Pour information, la hauteur initiale était de 146,58 mètres (~ 280 coudées). Aujourd'hui, avec l'érosion, elle n'est plus que de 137 mètres.

e) Une image mesure : largeur = 375 pixels ; hauteur = 234 pixels. Cette image, en 16 millions de couleurs, a un poids avant compression de 87Ko. On la réduit de manière à avoir une hauteur de 78 pixels. Quelle sera sa largeur ? Quel sera son poids (en Ko) ?

Ici, on effectue une réduction des longueurs. La hauteur passant de 234 à 78 pixels, le coefficient de réduction des longueurs (un coefficient de proportionnalité) est 78/234, soit 1/3. Appliquons ce coefficient à la largeur :

375×78÷234=375/3=125 pixels.

234	375
78	?=375×78÷234=125



Le poids d'une image est le produit de sa longueur par sa largeur (l'équivalent de l'aire). En effet, 375×234=87750 px², soit environ 87000 px². L'octet est une unité de stockage informatique. En supposant qu'un octet stocke un pixel carré, le produit longueur×largeur est équivalent au poids en Ko.

Le poids de l'image réduite est donc de 78×125=9750 px², soit 9,75Ko (K, kilo, est le préfixe signifiant 1000).

En divisant les longueurs par 3, on divise le poids des images par 3×3=9.

2] Pourcentage d'une quantité

2-1] Baccalauréat

a) Un Lycée a présenté 320 élèves au Bac. On sait que 80% des élèves de ce Lycée ont réussi.

Combien d'élèves de ce Lycée ont réussi?
$320\times80/100=320\times0,8=256$. Il y a 256 élèves de ce Lycée qui ont réussi.

b) Le pourcentage de réussite à un examen est de 72%. 1450 candidats se sont présentés à cet examen. Combien de candidats ont échoué à cet examen ?
$1450\times72/100=1450\times0,72=1044$. Il y a 1044 candidats qui ont réussi, donc $1450-1044=406$ élèves ont échoué à cet examen (cela correspond à 28% des élèves).

2-2] Élection
a) Lors de l'élection des délégués des élèves, dans une classe de 32 élèves, Boris a recueilli 18 voix.
Quel pourcentage des voix a t-il recueilli ?
Il a obtenu 18/32 soit 0,5625 ou 56,25% des voix.

b) Zoé aussi est devenue déléguée de sa classe en recueillant 60% des voix.
Sachant que dans la classe de Zoé il y a 30 élèves, combien d'élèves ont voté pour Zoé ?
60% de 30 élèves, cela fait $60/100\times30=18$ élèves.

Qui, entre Boris et Zoé, a reçu le plus de voix ? Il y en a autant pour l'un que pour l'autre.
En pourcentage de la classe, il y a davantage de votes pour Zoé, mais en nombre de voix, c'est pareil.

c) Est-il possible que dans une autre classe, John recueille le même nombre de voix que Boris tout en recevant 75% des voix de sa classe ? Quel serait alors le nombre d'élèves dans la classe de John ?
Si 75% des x fait 18, c'est que $75/100\times x=18$. On doit avoir $x=18\div(75/100)=18\div0,75=24$. C'est possible donc, il faut qu'il y ait 24 élèves dans la classe (ce ne sera pas possible au collège Henri IV...)

2-3] Commission
Un représentant de commerce gagne, en plus de son salaire fixe, une commission qui dépend du montant des ventes selon le principe suivant :

- Tranche 1 : 2% du montant des ventes jusqu'à 15 000 €
- Tranche 2 : 3% du montant des ventes compris entre 15 000 € et 20 000 €
- Tranche 3 : 5% du montant des ventes supérieur à 20 000 €

Le calcul de la commission ajoute donc les commissions partielles calculées dans chaque tranche.
a) En janvier, ce représentant a réalisé 12 000 € de vente. Le montant de la commission est calculé dans la 1$^{\text{ère}}$ tranche seulement. Quel est le montant de la commission en janvier ?
La commission en janvier s'élève à 2% de 12 000 €, soit :
$2/100\times12000=2\times120=240$ €.

b) En février, ce représentant a réalisé 19 000 € de vente. Le montant de la commission est la somme des deux commissions partielles : C_1 calculée dans la 1$^{\text{ère}}$ tranche (pour les premiers 15 000 €) et C_2 calculée dans la 2$^{\text{ère}}$ tranche (pour le restant des ventes, soit 4 000 €). Quel est le montant C_1+C_2 de la commission en février ?
La commission en février s'élève à 2% de 15 000 € plus 3% de 4 000 €, soit :
$2/100\times15000+3/100\times4000=2\times150+3\times40=300+120=420$ €.

c) En mars, ce représentant a réalisé 24 000 € de vente. Quel est le montant de la commission en mars ?
La commission en mars s'élève à 2% de 15 000 €, plus 3% de 5 000 €, plus 5% de 4 000 €, soit :
$2/100\times15000+3/100\times5000+5/100\times4000=2\times150+3\times50+5\times40=300+150+200=650$ €.

2-4] ISF
L'Impôt Sur la Fortune est à payer par les personnes dont le patrimoine (ensemble des propriétés et du capital) excède 1 300 000 € (en 2016), selon le barème suivant :

- 0,50% du patrimoine compris entre 800 000 € et 1 300 000 €
- 0,70% du patrimoine compris entre 1 300 000 € et 2 570 000 €
- 1% du patrimoine compris entre 2 570 000 € et 5 000 000 €
- 1,25% du patrimoine compris entre 5 000 000 € et 10 000 000 €
- 1,50% du patrimoine supérieur à 10 000 000 €

a) Calculer ISF_A : l'ISF d'une personne A dont le patrimoine s'élève à 2 500 000 €.
Le principe de l'ISF est de taxer les patrimoines de plus de 1 300 000 €, et cette taxe s'applique aux 500 000 € qui précèdent qui sont taxés à 0,50%. Ensuite, on taxe à 0,70% les 1 200 000 € de la 2$^{\text{ème}}$ tranche. L'ISF de cette personne est donc :

ISF_A=0,50/100×500 000+ 0,70/100×1 200 000=5×500+7×1 200=2500+8400=10 900 €

b) Calculer ISF_B : l'ISF d'une personne B dont le patrimoine est le quadruple de celui de A, soit 10 000 000 €. l'ISF_B est-elle égale au quadruple de l'ISF_A ?

L'impôt de B s'applique aux 500 000 € qui précèdent 1 300 000 € (taxés à 0,50%), ensuite, taxés à 0,70% il y a les 1 270 000 € de la 2ème tranche, puis, taxés à 1%, il y a les 2 430 000 € de la 3ème tranche et enfin les 5 000 000 € de la 4ème tranche. L'ISF de cette personne est donc :

ISF_B=0,50/100×500 000+0,70/100×1 270 000+1/100×2 430 000+1,25/100×5 000 000=5×500+7×1 270+24 300+1,25×50 000=98 190 €.

On peut vérifier, sur cette image extraite du [site du journal Le Revenu], qui illustre l'explication du dispositif de l'ISF, que notre résultat est correct.

L'ISF de cette personne est donc bien supérieur au quadruple de celui de A (le quadruple de 10900 est 43600 €).

Patrimoine net taxable	Montant de l'ISF
1 300 001€	1 250€
1 350 000€	2 225€
2 500 000€	10 900€
10 000 000€	98 190€

c) Pour les personnes dont le patrimoine est compris entre 1,3 et 1,4 M€, il existe une décote égale à 17 500 € moins 1,25% du patrimoine. Calculer ISF_C : l'ISF d'une personne C dont le patrimoine est de 1 350 000 €.

La décote est 17500–1,25/100×1 350 000=17500–1,25×13 500=625 €.

Il faut donc enlever cette décote au montant normal de l'ISF :

0,50/100×500 000+0,70/100×50 000=5×500+7×50=2 850 €.

ISF_C=2850–625=2225 €, valeur encore confirmée par l'illustration.

Le graphique ci-dessous résume les informations sur le calcul de l'ISF en 2017.

On y retrouve les trois valeurs calculées précédemment (ISF_A ,ISF_B et ISF_C).