8.Proportionnalité

Deux grandeurs sont *proportionnelles* lorsque les valeurs de la 2[de] s'obtiennent en multipliant les valeurs de la 1[ère] par un même nombre *k*. Pour obtenir les valeurs de la 1[ère] à partir de celles de la 2[de] on divise alors par *k*.
Il suffit donc de déterminer les rapports des grandeurs se correspondant : si ces rapports sont égaux, alors la situation est une situation de proportionnalité, sinon ce n'en est pas une.

1] Tableaux de proportionnalité

a) Les oscillations du pendule

On a mesuré très précisément la période d'oscillation T d'un pendule en fonction de sa longueur ℓ. L'objectif est de vérifier une loi* énoncée par Galilée (en 1638) :

Le carré de la période est proportionnel à la longueur du pendule.

Période T (*s*)	0,897	1,085	1,246	1,402	1,541	1,631	1,748	1,818	1,862	1,929	2,046
ℓ=Longueur (*m*)	0,2	0,295	0,39	0,49	0,585	0,665	0,758	0,825	0,865	0,925	1,045
T²=T×T (*s*²)	0,805	1,177	1,553	1,966	2,375	2,660	3,056	3,305	3,467	3,721	4,186
Rapports	4,023	3,991	3,981	4,011	4,059	4,000	4,031	4,006	4,008	4,023	4,006

Calculer les carrés de la période puis les rapports des deux grandeurs ℓ et T².

Ce tableau, on est d'accord, est plus facile à obtenir sur un tableur qu'avec la calculatrice.

Ici, nous avons arrondi les résultats à trois chiffres après la virgule pour ne pas donner trop de chiffres, excédant la précision des données de départ. Si on s'en tient aux valeurs mathématiques, on remarque que les valeurs du rapport ne sont pas les mêmes. On serait tenté de dire qu'il n'y a pas proportionnalité, que le rapport est irrégulier, mais c'est faux. Il s'agit de mesures physiques, et toute mesure est entachée d'une certaine erreur de mesure qui peut expliquer de petits écarts. Les physiciens ont l'habitude de ce phénomène et considère, dans un cas comme celui-ci, que les rapports sont égaux. Les deux grandeurs T² et ℓ sont proportionnelles.

C'est d'ailleurs ce qui est indiqué dans le texte : depuis 1638, on sait que le rapport de ces grandeurs est égal à une constante $4\pi^2/g$ où g est l'accélération de la pesanteur (environ 9,81 m/s² à Paris). Le rapport $4\pi^2/g$ vaut environ 4,02, ce qu'on observe bien dans notre tableau (les valeurs obtenues sont des approximations de cette constante) :

$$\frac{4\times 3{,}141592654^2}{9{,}81}\approx 4{,}024303527$$

*Cette loi de la physique implique que la période des oscillations ne dépend pas de la masse du pendule, ce qui n'est pas forcément évident à comprendre.

La loi physique qui exprime cela s'écrit $\frac{4\times\pi^2}{g}=\frac{T^2}{l}$ ou bien $T^2=\frac{4\times\pi^2\times l}{g}$ ou encore $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Faites l'expérience : mettez un poids important au bout d'une corde de longueur donnée. Mesurez la période des oscillations (dans la pratique, on en mesure 10 à la seconde près et on divise par 10 pour avoir une mesure à 0,1 *s* près). Changez ensuite pour un poids plus léger mais avec la même longueur de corde. Vous devriez trouver la même période dans les deux cas.

b) Le vol de Solar Impulse

Parti d'Abu Dabi (EAU) le 9 mars 2015, l'avion photovoltaïque *Solar Impulse* termine le 26 juillet 2016 le premier tour du monde (40 000 kilomètres) sans carburant. Les distances parcourues à chaque escale* et les temps de vol sont donnés dans le tableau ci-dessous.

* Les 17 escales : Mascate (Oman), Ahmedabad (Inde), Varanasi, Mandalay (Birmanie), Chongqing (Chine), Nankin, Nagoya (Japon), Honolulu (USA), San Francisco, Phoenix, Tulsa, Dayton, Lehigh valley, NewYork, Séville (Espagne), Le Caire (Egypte), Abu Dabi (EAU).

Calculer les vitesses moyennes pour chacune des escales de Solar Impulse.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Distances (*km*)	733	1434	1170	1536	1450	1241	2852	7212	4707	1113	1570	1113	1044	265	6765	3745	2694
Temps de vol (*h*)	13	15,3	13,5	13,5	20,5	17,4	44,1	118	62,5	15,9	18,2	16,5	16,8	4,7	71,1	50,8	48,6
Vitesse (*km/h*)	56,38	93,73	86,67	113,78	70,73	71,32	64,67	61,12	75,31	70,00	86,26	67,45	62,14	56,38	95,15	73,72	55,43

Le temps de vol est-il proportionnel à la distance parcourue ? Les rapports Distances/Temps ne sont pas constants ; ils sont assez loin de l'être. La situation n'est donc pas une situation de proportionnalité. On verra plus loin pourtant qu'on peut pourtant rattacher cette situation à la proportionnalité, même si ce n'est pas strictement vérifié. On se doute que l'avion ne vole pas à vitesse constante : il y a des courants variables selon les endroits traversés et la vitesse de l'avion solaire doit également être sensible aux défauts d'ensoleillement (la nuit, les nuages, etc.).

c) <u>Situations indéniables de proportionnalité</u>

Contrairement à ces deux exemples, il existe des situations où la proportionnalité est parfaitement réalisée. Donner un exemple d'une telle situation indéniable.

Grandeur 1 : Le périmètre d'un cercle
Grandeur 2 : Le diamètre d'un cercle

G_1=périmètre	π	$2\times\pi$	$3\times\pi$	$4\times\pi$
G_2=diamètre	1	2	3	4
Rapport G_1/G_2	π	π	π	π

C'est facile de trouver de tels exemples : en géométrie, le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté, etc. ; dans la vie courante, au marché le prix des pommes de terre est proportionnel à leur poids, etc. ; lorsqu'on parcourt un trajet à vitesse constante, par exemple la lumière qui va à 300000 km/s parcourt une distance proportionnelle au temps, etc.

2] <u>Reconnaître graphiquement une situation de proportionnalité</u>

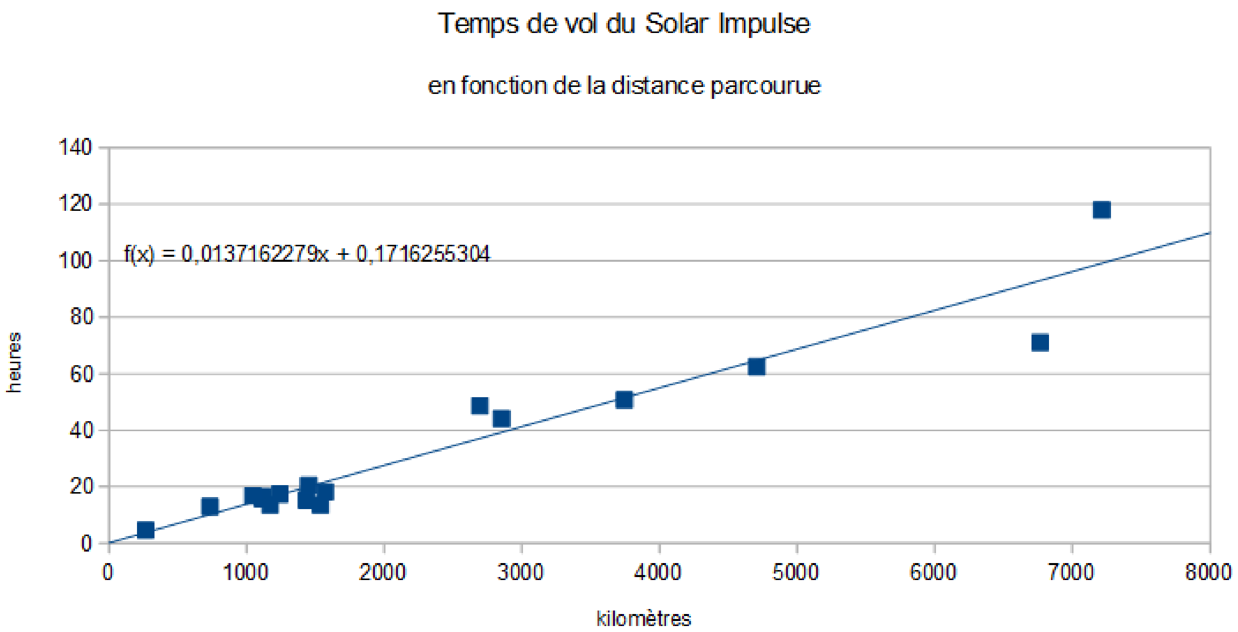
Avec la notation précédente, deux grandeurs sont *proportionnelles* si les points de coordonnées (G_1 ; G_2) sont alignés sur *une droite passant par l'origine** du repère

* L'origine d'un repère est le point de coordonnées (0 ;0).

Reprendre au dos de cette feuille, dans des graphiques adaptés, les données de la partie 1 pour vérifier et préciser la plus ou moins grande proportionnalité de ces situations.

a) Vol du Solar Impulse

Placer les points de coordonnées (*d* ; *t*).



Conclure : La situation ne ressemble pas vraiment à une situation de proportionnalité lorsqu'on considère les rapports (page précédente). Cependant, lorsqu'on place les points, on s'aperçoit qu'ils s'alignent globalement sur une droite qui passe par l'origine (ou presque). Le tableur nous a trouvé la meilleure droite qui passe au plus près de tous les points (tracée en bleue) : celle-ci représente la situation idéale moyenne qui montre que l'avion solaire parcourt des distances globalement proportionnelles au temps. En d'autres termes, la situation est proportionnelle lorsque l'avion ne va ni trop vite, ni trop lentement, à une vitesse moyenne de 72 km/h environ (7200 km en 100 h d'après le graphique).

Ci-contre, le trajet du Solar Impulse : en rouge le trajet prévu, en vert le trajet effectué lorsque l'avion s'est posé au Japon. On constate que la route suivie a scrupuleusement respecté la route prévue.

b) Oscillations du pendule

Les carrés des périodes d'oscillation T sont rappelés, arrondis au centième, en fonction de la longueur ℓ.

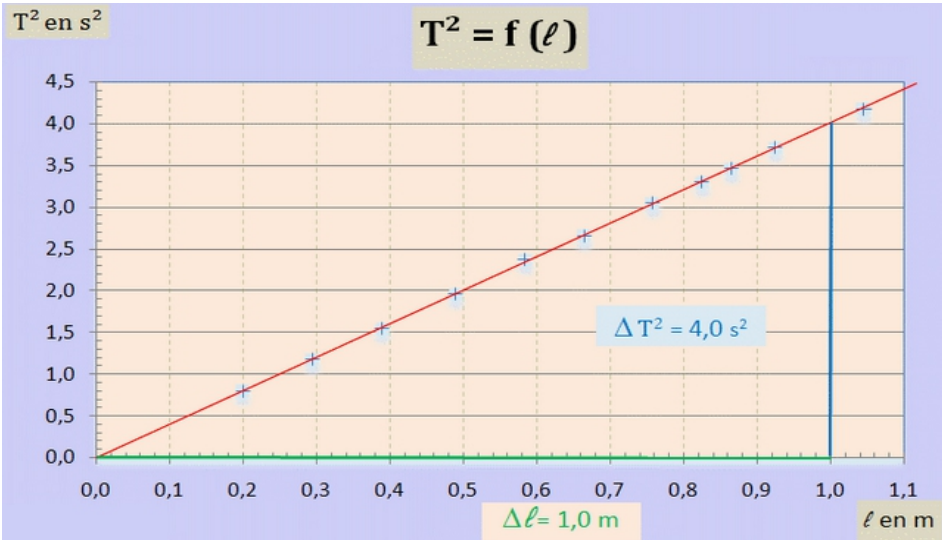
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$T^2=T\times T$ (s^2)	0,81	1,18	1,55	1,97	2,38	2,66	3,06	3,31	3,47	3,72	4,19
ℓ=Longueur (m)	0,20	0,30	0,39	0,49	0,59	0,67	0,76	0,83	0,87	0,93	1,05

Placer les points de coordonnées (ℓ ; T^2)

Conclure :

On place les points dans un graphique avec des points en forme de croix indiquant l'erreur de mesure sur chacune des grandeurs.

En cas de proportionnalité, les points doivent s'aligner sur une droite qui passe par l'origine du repère. C'est bien le cas ici, donc il y a proportionnalité.



c) Votre situation indéniable

Placer les points de coordonnées (G_1 ; G_2). C'est fait (à droite, avec GeoGebra cette fois). Nous avons tracé la droite qui passe par tous les points, de façon exacte cette fois, et qui passe par l'origine.

Conclure : Le périmètre d'un cercle est strictement proportionnel à son diamètre. Bien sûr, si l'on veut vérifier cela avec des instruments de mesure, on va se retrouver dans le cas de la situation 1 (le pendule) : on aura l'impression que la proportionnalité n'est pas parfaitement réalisée (erreurs de mesure, cercles pas tout-à-fait ronds, etc.), ce qui est faux.