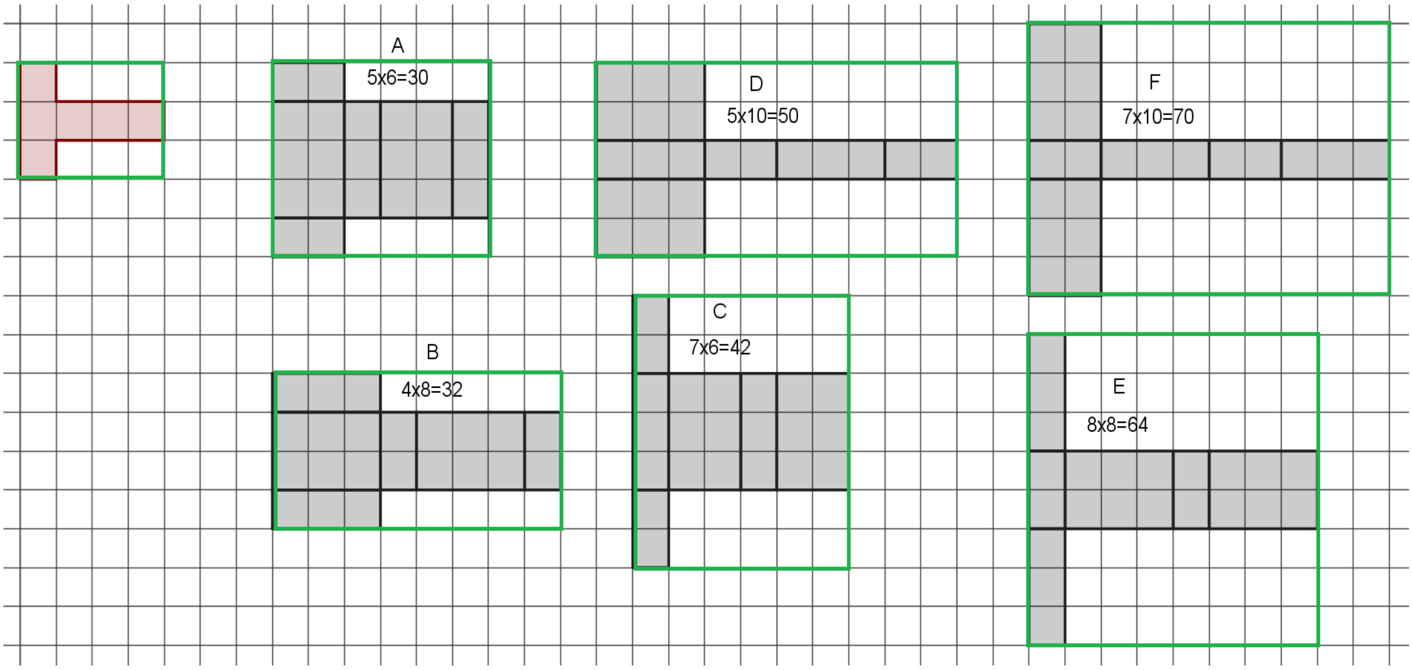
TD sur les patrons de solides

1) Parallélépipèdes rectangles

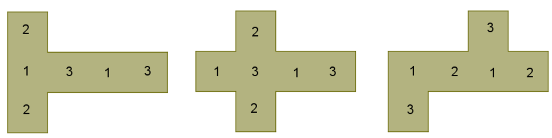
a) Notre illustration montre un des patrons possibles pour un cube $1 \times 1 \times 1$.
Tracer, selon ce modèle, les six patrons différents d'un parallélépipède rectangle $1 \times 2 \times 3$.



b) Déterminer les dimensions et l'aire de la feuille rectangulaire qu'il faut utiliser pour découper chacun des patrons ci-dessus (pour le cube $1 \times 1 \times 1$, les dimensions sont 3×4 et l'aire de la feuille rectangulaire est 12).
Nommer alors les six patrons avec les lettres A, B, C, D, E et F dans l'ordre des aires croissantes (A est le patron qui demande l'aire la plus petite et F celui qui demande l'aire la plus grande).
Les faces sont de trois types : 3×1, 3×2 et 2×1. Comme on peut tourner ces faces de deux façons, le modèle imposé pour le patron conduit à six patrons différents. Les six aires sont, dans l'ordre : 30, 32, 42, 50, 64 et 70. L'aire la plus petite est 30 (patron noté A) tandis que la plus grande est 70 (patron noté F).

c) Défi : Parmi tous les patrons de parallélépipèdes rectangles $a \times b \times c$ tracés selon le modèle ci-dessus, dont les côtés a, b et c sont des nombres entiers de cm, quel est celui que l'on peut découper dans une feuille de format A4 ($21\ cm \times 29{,}7\ cm$) qui conduit au plus grand volume possible ?
Nous avons supposé que le patron qui convient est disposé parallèlement aux bords de la feuille (ceci afin de maximiser le volume et aussi de simplifier le problème). Donc en largeur on dispose de 21 cm et en longueur de 29 (avec des entiers, il faut oublier le 0,7). Dans tous les cas, il y a 3 faces sur la largeur et 4 dans la longueur (ou le contraire). Il y a donc une bande de 4 rectangles consécutifs.

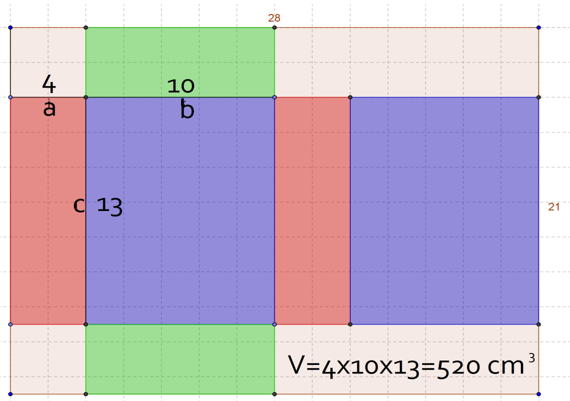
Examinons celui qui est proposé, ou un variante qui donne la même disposition des rectangles : le patron en forme de croix, ou cet autre qui ressemble vaguement à la lettre « Y ».



On peut inscrire un patron de cette forme en prenant comme côtés : 4, 10 et 13. Le volume est alors 520 cm^3.
On a trouvé cela en choisissant les dimensions entières donnant le plus grand volume. Cela peut être utile de présenter les résultats dans un tableau : a, b et c sont les 3 longueurs. En se servant des relations obligatoires dues aux dimensions de la feuille :

- $a+b+a+b=2\times(a+b)=28$
  (ce nombre doit être pair, il ne peut atteindre 29)
- $a+c+a=2\times a+c=21$.

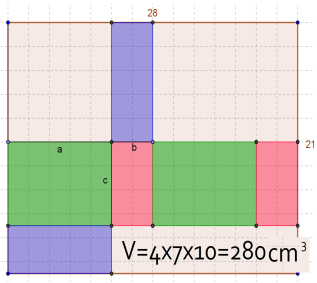
Ces relations conduisent à un choix obligé de b et c, une fois que a est choisi : $b = 14 - a$ et $c = 21 - 2\times a$.

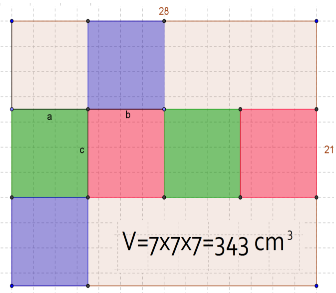


Donc on va choisir a dans une feuille de tableur, et on va calculer b et c.

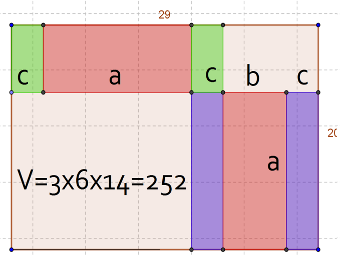
a	b	c	abc
1	13	19	247
2	12	17	408
3	11	15	495
4	10	13	520
5	9	11	495
6	8	9	432
7	7	7	343

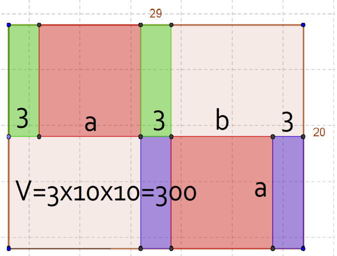
Peut-on faire mieux avec un autre patron ? Examinons les possibilités de n'importe laquelle des autres formes de patrons possibles (je rappelle qu'il y a 8 autres dispositions de patron possibles pour un cube, en dehors des 3 que l'on a examiné jusqu'ici).





En suivant la même méthode que précédemment, avec les 3 variantes du patron où les faces opposées sont en alternance (ci-contre) on trouve que les dimensions conduisant au plus grand volume sont celles du cube $7\times7\times7=343\ cm^3$. C'est beaucoup moins intéressant que celui qu'on a déjà trouvé. L'inconvénient de ce genre de patron est qu'on utilise mal la feuille en s'obligeant à perdre forcément davantage dés qu'on s'écarte du carré (voir illustration).



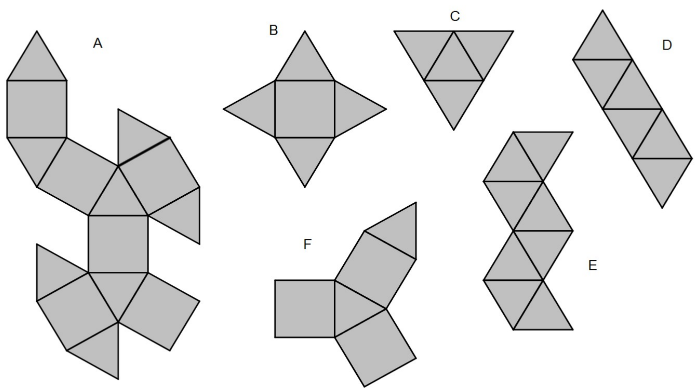


Les cinq autres patrons ne semblent pas très prometteurs. On peut parier qu'ils ne donneront rien de mieux. Essayons le plus spécial de tous : celui qui n'a que deux rangées de carrés : un petit calcul nous montre que si on veut utiliser la feuille au maximum, un des côtés c doit valoir 3 cm, la somme des deux autres devant faire 20 cm. On doit avoir en effet $a+b+3\times c=29$ et $a+b=20$, donc $20+3\times c=29$, et donc $3\times c=29-20=9$ d'où $c=3\ cm$. Le volume maximum sera donc égal à $3\times10\times10=300\ cm^3$. Encore moins bien...

2) Prismes, pyramides et autres polyèdres

a) Notre illustration montre quelques patrons de polyèdres. Déterminer les nombres de faces, de sommets et d'arêtes pour chacun d'eux.

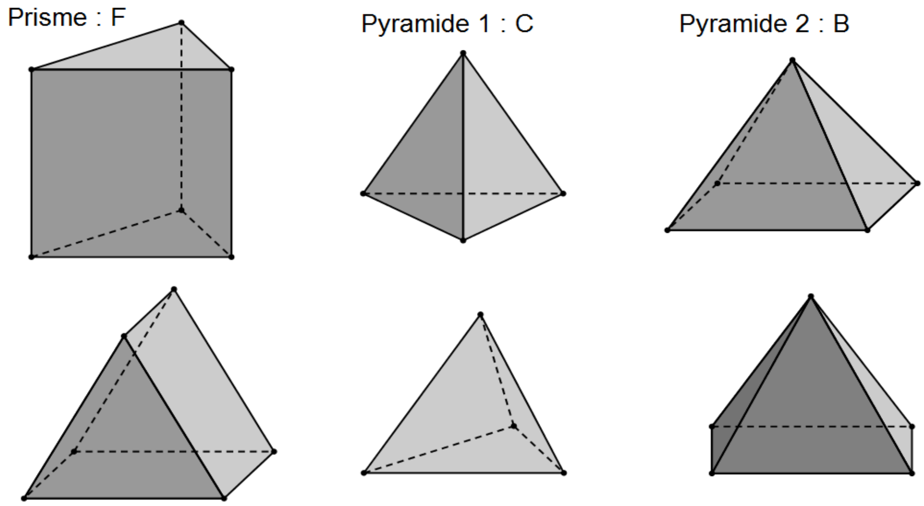
	Faces	Sommets	Arêtes
A	14	12	24
B	5	5	8
C	4	4	6
D	6	5	9
E	8	6	12
F	5	6	9



Remarquons que la relation de Euler (F+S=A+2) est toujours vérifiée pour les polyèdres, cela permet de vérifier les résultats. Une autre remarque : on ne peut pas compter directement le nombre d'arêtes ou de sommets sur un patron car certain(e)s se superposent quand on effectue le pliage pour réaliser la forme. Si on veut néanmoins compter les arêtes sur le patron, celles qui sont sur le bord extérieur comptent pour 0,5 (il en faut deux pour s'assembler en une arête). De même pour les sommets, sauf que c'est plus compliqué : dans un cube les sommets sont à l'intersection de trois faces. Dans certains polyèdres (polyèdres A et C par exemple) c'est pareil, mais dans certains autres c'est variable : il peut y avoir plus de trois faces qui se rejoignent en un sommet. Par exemple, le polyèdre B a un sommet où quatre faces se rejoignent alors que pour les quatre autres sommets, il y en a trois seulement. Le polyèdre E n'a que des sommets où se joignent quatre faces.

b) Identifier parmi ces patrons le prisme et les deux pyramides, puis dessiner ces trois solides en perspective cavalière 45°.

Le prisme a une base triangulaire, il s'agit du patron F.
Les pyramides ont une base triangulaire (patron C) ou carrée (patron B).



Les règles de la perspective cavalière sont parfois pas si simple à mettre en œuvre, surtout lorsqu'on s'aventure à dessiner autre chose que des parallélépipèdes rectangles. On prend parfois facilement quelques libertés avec ces règles : par exemple, la pyramide à base carrée dessinée sur la ligne du dessous montre une des faces triangulaires en vraies grandeurs (le triangle est vraiment équilatéral). Dans ce cas, la base carrée apparaît comme un parallélogramme, mais est-ce que celui que j'ai dessiné est correct (j'ai dessiné un rectangle) ? Sans doute pas, l'angle droit est sûrement déformé par la perspective et devrait apparaître aigu mais j'ai tracé cette figure sans rien mesurer, juste pour que *cela ressemble* à une pyramide à base carrée...

Remarquons que le polyèdre A est un cuboctaèdre (6 carrés et 8 triangles équilatéraux), D est une bipyramide à base triangulaire tandis que E est une bipyramide à base carrée qu'on appelle aussi octaèdre. L'image ci-dessous montre plusieurs perspectives sur ces solides. Ces images sont extraites de divers sites internet et montrent la variété des représentations : parfois il peut s'agir de photos (le cuboctaèdre central), mais ce sont plus souvent des réalisations utilisant des outils informatiques de dessin comme GeoGebra. La qualité de la représentation de l'octaèdre de gauche est impressionnante : faces un peu transparentes mais pas trop, arêtes avec un effet 3D...