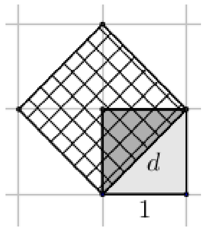
# DM n°8 : Longueurs et Aires

*Travail à faire à deux (une seule copie avec deux noms, la répartition du travail est laissée libre)*

1) <u>Demi-carré</u>

Lorsqu'on coupe un carré de côté 1 en deux, selon une de ces diagonales, on obtient un demi-carré de côté 1.
L'aire du demi-carré de côté 1 peut être calculée de deux façons différentes :

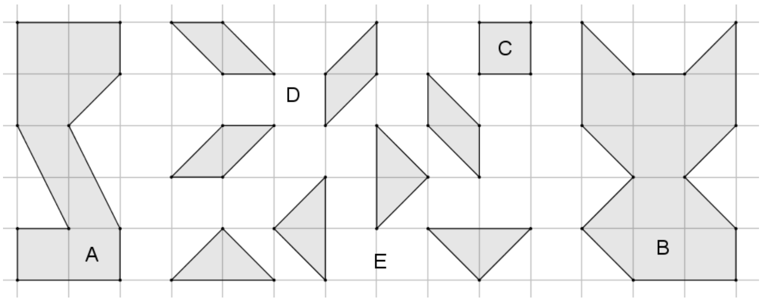
- en divisant par 2 l'aire du carré de côté 1 (en gris sur notre figure)
- en divisant par 4 l'aire du carré construit sur la diagonale de longueur $d$ (en quadrillé).




Déduire de cette remarque une égalité vérifiée par la longueur $d$.
Par tâtonnements, en faisant des essais successifs à la calculatrice, déterminer la valeur approchée de $d$ au millième le plus proche.

2) <u>La famille des polyabolos</u>

Les polyabolos sont des polygones obtenus par des assemblages corrects de plusieurs demi-carrés de côté 1.
Pour un assemblage correct de deux demi-carrés, il faut faire coïncider les côtés de même longueur : on fait coïncider deux côtés de longueur 1 ou bien, on fait coïncider deux côtés de longueur $d$. Le polygone A dessiné ci-contre n'est pas un polyabolo à cause de la partie intermédiaire qui n'est pas décomposable en demi-carrés. Le polygone B, par contre, est un polyabolo constitué de 21 demi-carrés.



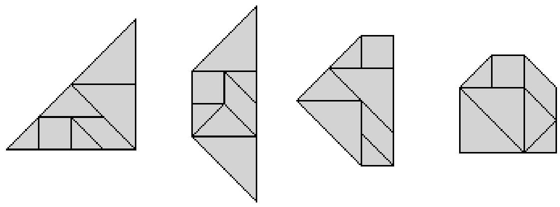

Deux polyabolos qui peuvent être superposés exactement sont dits *identiques*, même si ils ne sont pas dessinés de la même façon. Les quatre dessins de parallélogrammes et de triangles ci-dessus correspondent, chacun, à un seul polyabolo (noté D et E). Le carré C, D et E sont les trois seuls polyabolos d'aire 1.

a) Dessiner, en utilisant un quadrillage, les quatre polyabolos d'aire 1,5 et les quatorze polyabolos d'aire 2.

b) Déterminer les périmètres $P$ de chacun des polyabolos d'aire inférieure ou égale à 2. Pour cela, compter le nombre $N_1$ de côtés de longueur 1 et le nombre $N_2$ de côtés de longueur $d$. Déterminer alors la valeur approchée arrondie au millième de ces périmètres en utilisant votre valeur approchée de $d$ (question 1). Ranger les différentes valeurs de $P$ par ordre croissant et dessiner un représentant de chacune de ces valeurs.

c) On dit d'une forme qu'elle est *compacte* lorsque le rapport $\frac{P \times P}{S}$, noté $\frac{P^2}{S}$, entre le carré de son périmètre $P$ et son aire $S$ est petit Déterminer les différentes valeurs prises par le rapport $\frac{P^2}{S}$ des polyabolos d'aire inférieure ou égale à 2. Quelle est, parmi ces polyabolos, la forme la plus compacte ? Quelle est la moins compacte ?
En augmentant le nombre de demi-carrés constituant les polyabolos, on peut en trouver qui sont plus compacts que ceux qui ont déjà été obtenus. En donner un exemple, en précisant son périmètre $P$, son aire $S$ et le rapport $\frac{P^2}{S}$. Trouver, de même, un polyabolo moins compact que ceux qui ont déjà été obtenus.

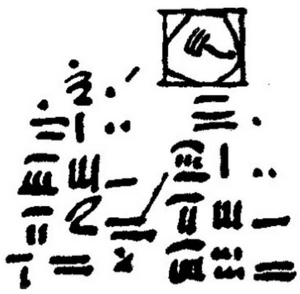
d) On dit d'un polygone qu'il est *convexe* lorsque toutes ses diagonales sont contenues à l'intérieur.
Faire la liste des polyabolos convexes d'aire inférieure ou égale à 2.
Le Tangram est un jeu d'aire 8 composé de sept pièces, choisies parmi les polyabolos convexes. La figure ci-contre montre quatre assemblages convexes réalisés avec le Tangram.
Choisir quatre ou cinq pièces parmi les polyabolos convexes de manière à constituer un jeu d'aire 4. Chercher avec ce jeu (lui donner un nom) toutes les formes convexes que l'on peut reconstituer.



3) <u>Cercle</u>

Le cercle est la forme la plus compacte que l'on puisse trouver.

a) Combien vaut le rapport $\frac{P^2}{S}$ pour un cercle ?



b) Pour évaluer le nombre π, les égyptiens avaient obtenu ce résultat :
un cercle de diamètre 9 a même aire (approximativement) qu'un carré de côté 8.
Cette affirmation conduit à donner quelle valeur approchée à π ?
Que pensez-vous de la précision de cette estimation ?