DM n°7 sur les fractions

CORRECTION

1) Fréquences d'apparition des lettres

La *fréquence d'apparition* d'une lettre dans un texte est la fraction donnant le nombre de fois où apparaît cette lettre par rapport au nombre total de lettres du texte. Dans le mot *mathématiques*, la fréquence d'apparition de la lettre *e*, notée f_e, est $\frac{2}{13}$ car il y a 2 *e* sur 13 lettres (on ne tient pas compte des accents). Pour des raisons pratiques, on exprime les fréquences d'apparition en pourcentages. Dans notre exemple, on a $f_e \approx 15{,}4\%$.

a) On veut déterminer les fréquences d'apparition des principales lettres de la langue française *a*, *e*, *i*, *n*, *r*, *s* et *t*. Choisir un texte ni trop court ni trop long, en donner les références (Titre, Auteur, Éditeur, Page) et le recopier. Comptabiliser les apparitions de chacune des sept principales lettres ainsi que le nombre total de lettres.
Dresser le tableau des fréquences d'apparition de ces lettres.

Voici un extrait d'un de mes livres préférés : « La vie mode d'emploi » de Georges Perec, Éditions Hachette 1978, p.156. « *Imaginons un homme dont la fortune n'aurait d'égale que l'indifférence à ce que la fortune permet généralement, et dont le désir serait, beaucoup plus orgueilleusement, de saisir, de décrire, d'épuiser, non la totalité du monde - projet que son seul énoncé suffit à ruiner - mais un fragment constitué de celui-ci : face à l'inextricable incohérence du monde, il s'agira alors d'accomplir jusqu'au bout un programme, restreint sans doute, mais entier, intact, irréductible.* »

Pour procéder à un comptage, nous allons enlever accents, espaces entre les mots, signes de ponctuation et casse des caractères (différence minuscule/majuscule).
J'utilise un site qui prétraite le texte.

Voici ce que j'obtiens alors :

```
IMAGINONSUNHOMMEDONTLAFORTUNENAURAITDEGA
LEQUELINDIFFERENCEACEQUELAFORTUNEPERMETG
ENERALEMENTETDONTLEDESIRSERAITBEAUCOUPPL
USORGUEILLEUSEMENTDESAISIRDEDECRIREDEPUI
SERNONLATOTALITEDUMONDEPROJETQUESONSEULE
NONCESUFFITARUINERMAISUNFRAGMENTCONSTITU
EDECELUICIFACEALINEXTRICABLEINCOHERENCED
UMONDEILSAGIRAALORSDACCOMPLIRJUSQUAUBOUT
UNPROGRAMMERESTREINTSANSDOUTEMAISENTIERI
NTACTIRREDUCTIBLE
```

On peut aussi regrouper les lettres par groupe de 5 lettres, ce qui facilite les comptages. Je confie ensuite ce texte a un petit programme* de ma confection qui compte les lettres. J'obtiens ainsi ce que l'on cherche et qu'il est fastidieux d'obtenir par un comptage direct (377 lettres!).

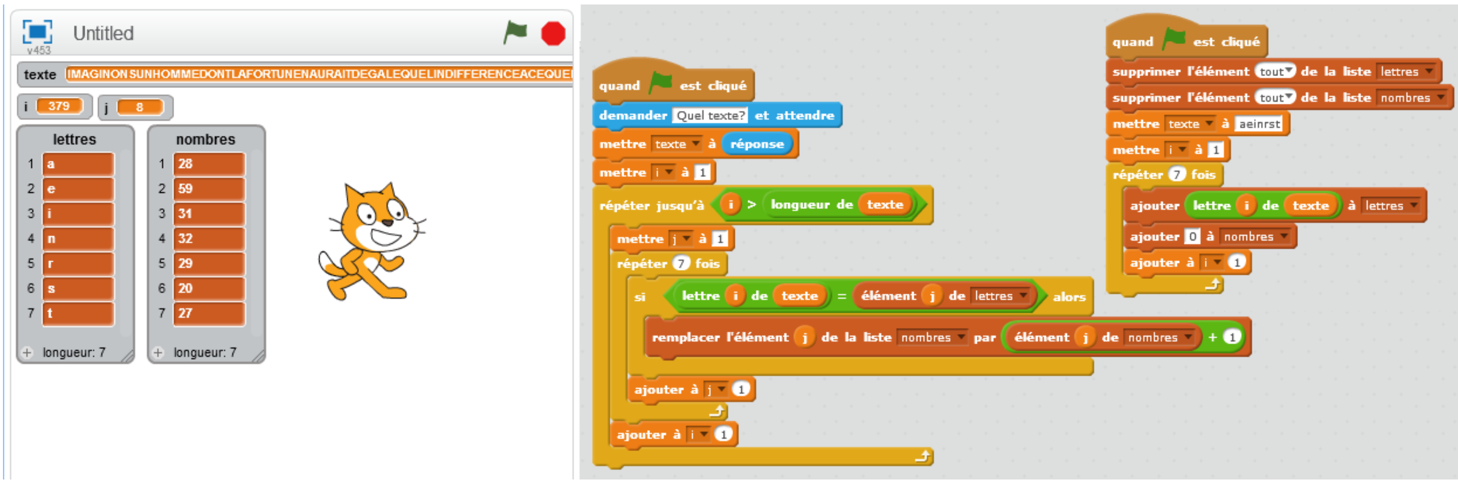
```
Nombre de A : 28 - frequence : 7.427055702917772 %
Nombre de B : 4 - frequence : 1.0610079575596818 %
Nombre de C : 16 - frequence : 4.244031830238727 %
Nombre de D : 17 - frequence : 4.509283819628475 %
Nombre de E : 59 - frequence : 15.649867374005305 %
Nombre de F : 8 - frequence : 2.1220159151193636 %
Nombre de G : 7 - frequence : 1.856763925729443 %
Nombre de H : 2 - frequence : 0.5305039787798409 %
Nombre de I : 31 - frequence : 8.222811671087532 %
Nombre de J : 2 - frequence : 0.5305039787798409 %
Nombre de K : 0 - frequence : 0.0 %
Nombre de L : 19 - frequence : 5.039787798408488 %
Nombre de M : 14 - frequence : 3.713527851458886 %
Nombre de N : 32 - frequence : 8.488063660477454 %
Nombre de O : 22 - frequence : 5.835543766578249 %
Nombre de P : 7 - frequence : 1.856763925729443 %
Nombre de Q : 4 - frequence : 1.0610079575596818 %
Nombre de R : 29 - frequence : 7.6923076923076925 %
Nombre de S : 20 - frequence : 5.305039787798409 %
Nombre de T : 27 - frequence : 7.161803713527852 %
Nombre de U : 28 - frequence : 7.427055702917772 %
Nombre de V : 0 - frequence : 0.0 %
Nombre de W : 0 - frequence : 0.0 %
Nombre de X : 1 - frequence : 0.26525198938992045 %
Nombre de Y : 0 - frequence : 0.0 %
Nombre de Z : 0 - frequence : 0.0 %
Nombre de caracteres au total :377
```

Voici donc ma comptabilité pour les différentes lettres (à droite, la sortie du programme) de ce court texte :

lettre	A	E	I	N	R	S	T
nombre	28	59	31	32	29	20	27
fréquence	7,43%	15.65%	8,22%	8,49%	7,69%	5,31%	7,16%

Pour calculer une fréquence, je dois diviser le nombre d'apparition par le total (ici 377) et multiplier par 100. Le résultat obtenu est arrondi au centième prés, mais on aurait aussi pu arrondir autrement.

* Amusons nous à programmer dans Scratch : pour cela, je définis une liste « lettres » qui contiendra les lettres dont on veut compter le nombre d'apparitions. Pour y mettre les lettres, il suffit de changer le mot « aeinrst » dans le script de droite. Une liste « nombres » contiendra le résultat du comptage des lettres. Remarquez les fonctions intéressantes de Scratch : la longueur du texte est connue avec la fonction « longueur de *texte* » ; la valeur de la i^{ème} lettre est connue grâce à la fonction « lettre *i* de *texte* » ; ce qui est contenu dans une liste est connu par la fonction « élément », par exemple « élément *i* de *nombres* » ou « élément *j* de *lettres* ». Pour compter les apparitions, je procède lettre par lettre, en examinant si la i^{ème} lettre fait partie des lettres comptées. Si la réponse est oui, je remplace la valeur du nombre par cette valeur augmentée de 1.
Une fois que l'on a mis au point ce petit programme, on peut obtenir le résultat du comptage en examinant le contenu des variables qui s'affichent dans la fenêtre de dessin de Scratch (voir notre image). On peut pousser l'effort de programmation jusqu'à obtenir les fréquences (il suffit de diviser les nombres par le nombre total qui est « longueur de *texte* » et multiplier par 100).



b) Dans le jeu de *Scrabble* de langue française, la répartition des lettres avec le nombre de points correspondant est donné dans le tableau ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
points	1	3	3	2	1	4	2	4	1	8	10	1	2	1	1	3	8	1	1	1	1	4	10	10	10	10
nombre	9	2	2	3	15	2	2	2	8	1	1	5	3	6	6	2	1	6	6	6	6	2	1	1	1	1

Déterminer les fréquences d'apparition des sept principales lettres de la langue française liées à cette répartition.
Expliquer comment, à votre avis, les points associés à une lettre ont été calculés.

Les fréquences ne sont pas difficile à calculer, car le nombre de lettres est 100 !
Il suffit donc de donner le nombre avec le symbole % derrière indiquant que cela représente une fraction du total : Il y a 9 A sur 100 lettres, donc la fréquence du A est $\frac{9}{100}=9\%$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Total
points	1	3	3	2	1	4	2	4	1	8	10	1	2	1	1	3	8	1	1	1	1	4	10	10	10	10	103
nombre	9	2	2	3	15	2	2	2	8	1	1	5	3	6	6	2	1	6	6	6	6	2	1	1	1	1	100
fréquence	9%	2%	2%	3%	15%	2%	2%	2%	8%	1%	1%	5%	3%	6%	6%	2%	1%	6%	6%	6%	6%	2%	1%	1%	1%	1%	

Les points d'une lettre sont inversement proportionnels à la fréquence de la lettre : plus la lettre est fréquente, et moins elle compte de points. C'est normal de procéder ainsi pour valoriser davantage les mots utilisant les lettres les plus rares car ces mots sont en nombre réduit, difficile à reconstituer avec le choix des lettres à disposition. Pour montrer cette inversion, et examiner si les créateurs du jeu ont été justes dans leurs attributions des points, nous avons calculé l'inverse des points et multiplié par un coefficient (7,15) de manière à ce que la somme corresponde au mieux à la répartition des points et des lettres du jeu. Nous avons fait de même sur la ligne d'après, en calculant l'inverse des nombres et en multipliant par un coefficient adapté (ici 7,9).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Total
points	1	3	3	2	1	4	2	4	1	8	10	1	2	1	1	3	8	1	1	1	1	4	10	10	10	10	103
nombre	9	2	2	3	15	2	2	2	8	1	1	5	3	6	6	2	1	6	6	6	6	2	1	1	1	1	100
7,15/points	7,15	2,38	2,38	3,58	7,15	1,79	3,58	1,79	7,15	0,89	0,72	7,15	3,58	7,15	7,15	2,38	0,89	7,15	7,15	7,15	7,15	1,79	0,72	0,72	0,72	0,72	100,1
7,9/nombre	0,88	3,95	3,95	2,63	0,53	3,95	3,95	3,95	0,99	7,9	7,9	1,58	2,63	1,32	1,32	3,95	7,9	1,32	1,32	1,32	1,32	3,95	7,9	7,9	7,9	7,9	100,1

Nous voyons que le E est sur-noté dans le jeu : il y en a 15 dans le jeu, alors que les lettres qui sont notées 1 devraient être au nombre de 7,15. En fait, avec cette fréquence de 15 sur 100, il devrait être noté 0,53 mais l'arrondi oblige à noter 1. Le A est aussi dans cette situation, comme les lettres rares W, X, Y, Z et K d'ailleurs.

c) Chercher sur internet les fréquences d'apparition des lettres en français, telles qu'on peut les déterminer sur un texte plus long et plus représentatif que votre extrait. Comparer les fréquences des lettres principales avec celles de votre texte (question a) et celles du jeu de Scrabble (question b).

Je n'ai pas eu besoin de chercher très loin : sur le site Wikipédia, on trouve ce tableau (l'article est intitulé « Analyse fréquentielle » ; il en existe un autre, intitulé « Fréquence d'apparition des lettres en français », mais celui-ci donne un tableau trop complet, avec des distinction selon les accents ; d'autres sites donne des résultats très semblables) :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
En français	9,42	1,02	2,64	3,39	15,87	0,95	1,04	0,77	8,41	0,89	0,00	5,34	3,24	7,15	5,14	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32
En anglais	8,08	1,67	3,18	3,99	12,55	2,17	1,80	5,27	7,24	0,14	0,63	4,04	2,60	7,38	7,47	1,91	0,09	6,42	6,59	9,15	2,79	1,00	1,89	0,21	1,65	0,07

On retiendra que les lettres importantes sont dans l'ordre, en français, E(15,87%), A(9,42%), I(8,41%), S(7,90%), T(7,26%), N(7,15%) et R(6,46%), ensuite, on a : U, L, O, D, M, P, C, V, Q, G, B, F, J, H, Z, X, Y, K et W.
Remarque : en anglais, la lettre la plus fréquente est aussi le E (12,55%) mais cette prépondérance est moins marquée qu'en français. Ce genre de différence permet de distinguer les langues, même avec des messages cryptés (à condition que le principe du cryptage conserve les fréquences).

Pour en revenir à la question posée, comparons les fréquences des lettres principales dans nos différentes sources. J'ai surligné en orange les lettres dont les fréquences sont inférieures à celles qu'elles ont en français. En bleu, j'ai surligné lorsque les fréquences sont supérieures.

Lettre	A	E	I	N	R	S	T
Fréquence texte perso	7,43%	15.65%	8,22%	8,49%	7,69%	5,31%	7,16%
Fréquence Scrabble	9,00%	15,00%	8,00%	6,00%	6,00%	6,00%	6,00%
Fréquence français	9,42%	15.87%	8,41%	7,15%	6,46%	7,90%	7,26%

On voit que l'on ne s'écarte pas beaucoup des vraies fréquences. Dans notre texte, il y a un déficit de A et de S alors qu'il y a un excédent de N et de R. Pour le S, je peux le comprendre car il s'agit d'une description au singulier (aucun terme n'est au pluriel). Pour les autres lettres, les écarts ont des causes plus mystérieuses...

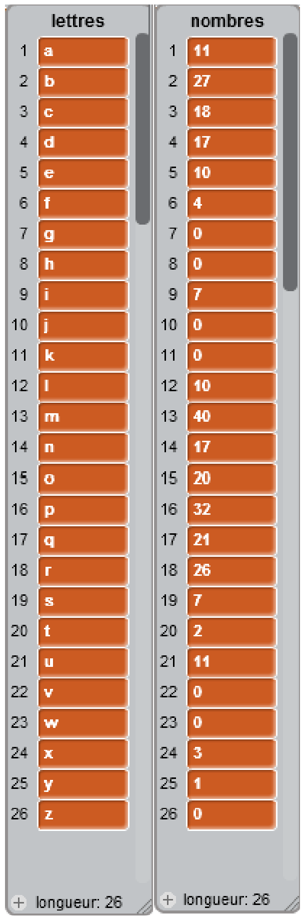
d) La répartition des fréquences obtenues peut être utilisée pour décrypter un message codé dans le cas où chaque lettre est remplacée par une autre, toujours la même. La lettre la plus fréquente dans le message chiffré sera sans doute la lettre *e* dans le message clair. On déduit les autres lettres sur le même principe. Décrypter le message suivant dont on a enlevé accents, apostrophes et signes de ponctuation, qu'on a tout écrit en majuscules et découpé en tranches de cinq lettres :


```
UNEEM OBQMB RPMOB PDQAM OUNOB AMQIR AXRQR ALUNE EMBNC
BDMEN OLMUN EEMOB QRIIM DRPMO BPDQS CMFNC QPEIN ABMLN
CFMOR PMOBP DQLCD PMCDM IDCQI ANUXR PONCR DDRPM OBPDQ
MQBUM SCMDN OQRPB NCDNO FRSCM LPQRP MOBPD QDMER PBAMO
MLPQR PBAPM OMBYR USCMQ LPQRP BSCMQ NOURI PBRPO MLPQR
PBSCM BNCBU MSCPO NCQRA APFML MTPMO MBLME RDPUP TRQMB
RPBMU APBDR XRCB
```

Indication : Nous avons utilisé un alphabet unique, désordonné mais réversible (13 couples de lettres sont appariées, nous les avons choisi en écrivant le prénom de l'auteur, puis les lettres restantes de notre alphabet).

Commençons par faire l'analyse fréquentielle des lettres de ce texte.

Notre programme Scratch va nous y aider. Un petit détail : la variable i qui s'affiche à la fin dépasse de 1 le nombre de caractères. Comme Scratch compte également les espaces, il faut encore enlever 56 au nombre i pour trouver le nombre de lettres total dans le texte. Il y a donc 341-1-56=284 lettres dans le texte. On aurait aussi pu, pour trouver ce nombre, multiplier 56 (le nombre de paquet de 5 lettres) par 5 et ajouter 4 (le dernier paquet qui est incomplet).



Pour savoir quelles lettres sont les plus importantes, on va toutes les compter. Dans notre programme Scratch, il suffit d'entrer le mot « abcdefghijklmnopqrstuvwxyz » à la place de « aeinrst » et de changer le nombre de tests à effectuer : 26 au lieu de 7. C'est assez long car notre programme n'est pas optimisé. Iil faudrait faire une boucle « tant que non(lettre i de texte = élément j de lettres) » au lieu de la simple boucle « répéter 26 fois ». On examine le résultat dans lequel il faut sélectionner les 7 lettres les plus fréquentes.

Je construis alors le tableau ci-dessous dans lequel je peux calculer les fréquences :

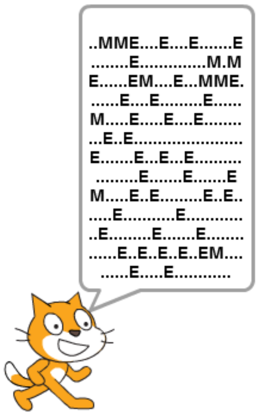
Lettre	M	P	B	R	Q	O	C
Nombre	40	32	27	26	21	20	18
Fréquence texte perso	14,08%	11,27%	9,51%	9,15%	7,39%	7,04%	6,33%

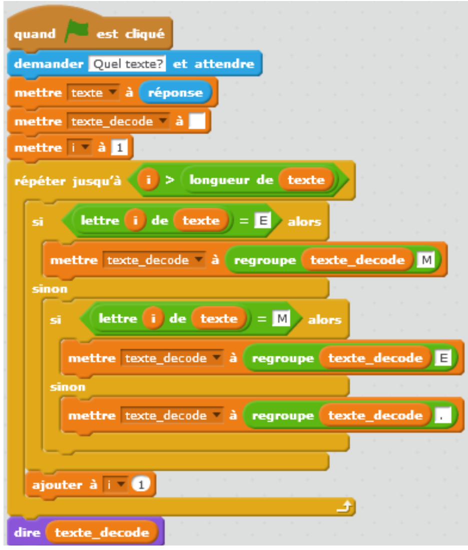
On peut alors penser à identifier les lettres grâce à leur fréquence.

Le M doit vraisemblablement être un E codé car c'est la lettre la plus fréquente. En continuant ainsi, en supposant que les ordres des fréquences soient exactement les mêmes dans le texte qu'en français, on obtiendrait :

décodé	E	A	I	S	T	N	R						
codé	M	P	B	R	Q	O	C						

Cela n'est pas possible car si le R code le S, il faut que le S code le R (alphabet réversible). Commençons par changer tous les E en M et les M en E. Un petit programme va nous y aider. Le programme nous donne ceci (il n'y a que les bonnes lettres à leur place) qui n'est pas très parlant, mais qui ne contient pas de contradiction. Changeons définitivement tous les E en M et les M en E, et essayons de changer les P en A et les A en P. On obtient un texte qui contient beaucoup de successions AE (à gauche), ce qui n'est pas très courant en français (il y a certains mots comme « aérien » ou « cæcum »), et même s'il s'agit de deux mots différents (avec un espace entre le A et le E), c'est rare. Je suppose donc que cette association n'est pas correcte. J'en essaie une autre : les P en I et les I en P, de cette façon, les AE se transforment en AI, ce qui est courant en français (au milieu).





Mon tableau devient (je colorie en bleu ce qui a été identifié) :

décodé	E	I	A	S	T	N	R	
codé	M	P	B	R	Q	O	C	

M<=>E
P<=>A

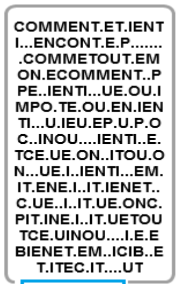
M<=>E
P<=>I

M<=>E
P<=>I
B<=>T

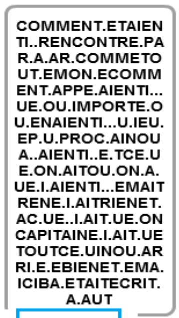
La transformation des A en B et réciproquement nous amènerait 11 B (car il y a 11 A dans le texte codé) ce qui est trop pour un texte en français (11/284 c'est presque 4% alors qu'il n'y a que 1% de B en français). Essayons plutôt d'échanger le B avec le T car il n'y a que 2 fois T dans le texte codé, cela fera 2 B dans le texte décodé. Testons cette transformation des B en T et réciproquement (à droite). Cela semble tout à fait convenable.

Le fragment BIE.. vers la fin me donne même envie d'essayer de mettre le mot BIEN. Cela arrive à la 36ème lettre en partant de la fin, juste après un passage TPM qui a été traduit en BIE. En regardant dans le message codé, je trouve qu'il s'agit de TPMO. Donc les O seraient des N ? J'essaie cette transformation qui était suggérée d'ailleurs dans mon précédent tableau. Au passage, je viens de m'apercevoir que mon programme me met un point lorsqu'il rencontre un espace ce qui n'est pas correct. Je supprime donc les espaces qui n'en sont pas (puisqu'ils ont été ajoutés au texte codé) avec un test supplémentaire. Le résultat ci-contre (à gauche) est très encourageant.

M<=>E
P<=>I
B<=>T
N<=>O



M<=>E
P<=>I
B<=>T
N<=>O
C<=>U



M<=>E
P<=>I
B<=>T
N<=>O
C<=>U
A<=>R

Le début du texte étant .OMMENT, j'ai envie d'essayer COMMENT, car je ne vois pas ce qui pourrait, sinon, expliquer la succession NT. Cela m'incite donc à essayer la conversion des C en U et réciproquement. Le résultat est visible au centre.

Je continue mon déchiffrage, en regardant la succession .ENCONT.E qui fait penser au mot RENCONTRE. Pour que cela corresponde, il faudrait que les deux R soient codés par la même lettre. Il s'agit de la 19ème et de la 26ème lettre. Il s'agit, les deux fois, d'un A. J'en déduis que la conversion A en R devrait fonctionner (pour ce mot au moins). Je l'essaie et regarde le résultat (à droite). Tout à l'air correct.

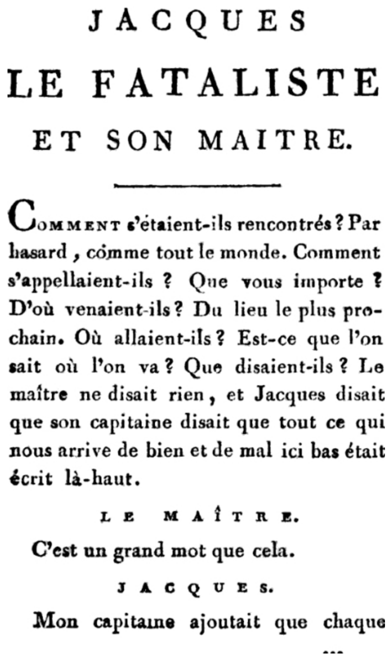
En procédant ainsi, par essais et validations successifs, je finis par obtenir un texte qui tient la route :

COMMENTSETAIENTILSRENCONTRESPARHASARDCOMMETOUTLEMONDECOMMENTSAPPELAIEN
TILSQUEVOUSIMPORTEDOUVENAIENTILSDULIEULEPLUSPROCHAINOUALLAIENTILSESTCE
QUELONSAITOULONVAQUEDISAIENTILSLEMAITRENEDISAITRIENETJACQUESDISAITQUES
ONCAPITAINEDISAITQUETOUTCEQUINOUSARRIVEDEBIENETDEMALICIBASETAITECRITLAHAUT.

On place alors des espaces entre les mots qui se dessinent, et on ajoute une ponctuation vraisemblable.
Les lettres sont rétablies en minuscules et les accents ajoutés.
On obtiens ce texte :

« Comment s'étaient-ils rencontrés ? Par hasard, comme tout le monde. Comment s'appelaient-ils ? Que vous importe ? D'où venaient-ils ? Du lieu le plus prochain. Où allaient-ils ? Est-ce que l'on sait où l'on va ? Que disaient-ils ? Le maître ne disait rien ; et Jacques disait que son capitaine disait que tout ce qui nous arrive de bien et de mal ici-bas était écrit là-haut. »

Il s'agit du début de *Jacques le fataliste et son maître*, un dialogue philosophique (entre Jacques et son maître) de Denis Diderot dont l'écriture s'étend de 1765 jusqu'à la mort de ce dernier en 1784. C'est un des premiers romans de langue française et ce début (on appelle *incipit* le début d'une œuvre littéraire) est célèbre. Si vous tapez « incipit célèbre » dans Google, vous trouverez ce texte. Wikipédia qualifie cet incipit de Diderot de déroutant ; ce doit être ce qui me l'a fait choisir...


JACQUES LE FATALISTE ET SON MAITRE.

COMMENT s'étaient-ils rencontrés ? Par hasard, cómme tout le monde. Comment s'appellaient-ils ? Que vous importe ? D'où venaient-ils ? Du lieu le plus prochain. Où allaient-ils ? Est-ce que l'on sait où l'on va ? Que disaient-ils ? Le maître ne disait rien, et Jacques disait que son capitaine disait que tout ce qui nous arrive de bien et de mal ici bas était écrit là-haut.

LE MAÎTRE.

C'est un grand mot que cela.

JACQUES.

Mon capitaine ajoutait que chaque ...

L'alphabet réversible utilisé commence par le prénom de l'auteur « Denis ». Ensuite, les lettres sont écrites dans l'ordre de l'alphabet, mais bien sûr on ne répète pas les lettres de Denis.

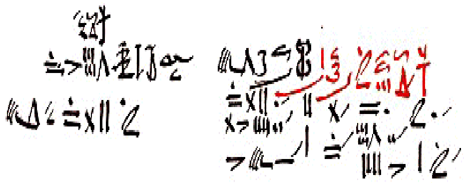
D	E	N	I	S	A	B	C	F	G	H	J	K
L	M	O	P	Q	R	T	U	V	W	X	Y	Z

Si on connaît le mot-clé, ici DENIS, ce principe de cryptage est vraiment très facile à décoder. J'espère cependant que personne n'a essayé de décoder ce texte en essayant tous les prénoms français...

2) Fractions égyptiennes

Un document vieux de plus de 3500 ans, conservé au *British Museum*, nous renseigne sur les mathématiques égyptiennes : le papyrus *Rhind*, écrit par le scribe *Ahmès* en écriture hiératique (voir l'illustration), commence par donner une table de doubles dont nous avons extrait le tableau suivant, traduit dans notre écriture moderne :

1/5	a pour double	1/3 + 1/15
1/7	a pour double	1/4 + 1/28
1/9	a pour double	1/6 + 1/18
1/15	a pour double	1/10 + 1/30



Les égyptiens utilisaient uniquement des fractions de numérateur 1 (appelées quantièmes) et de dénominateurs différents. Pour écrire 2/5, ne pouvant écrire 1/5+1/5, ils écrivaient 1/3+1/15.

a) Vérifier les calculs du scribe Ahmès, en utilisant l'égalité $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ et en simplifiant le résultat.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{3+15}{3\times15}=\frac{18}{45}=\frac{2}{5}$. Cette somme est bien égale au double de $\frac{1}{5}$.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\frac{4+28}{4\times28}=\frac{32}{112}=\frac{2}{7}$. Cette somme est bien égale au double de $\frac{1}{7}$.

$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{6+18}{6\times18}=\frac{24}{108}=\frac{2}{9}$. Cette somme est bien égale au double de $\frac{1}{9}$.

$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{10+30}{10\times30}=\frac{40}{300}=\frac{2}{15}$. Cette somme est bien égale au double de $\frac{1}{15}$.

Au passage, signalons que la méthode proposée est loin d'être la plus simple.
À chaque fois, un des dénominateurs est un multiple de l'autre ; cela permet de simplifier les calculs :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}\ ;\ \frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\frac{7}{28}+\frac{1}{28}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}\ ;$$
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{3}{18}+\frac{1}{18}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}\ ;\ \frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{3}{30}+\frac{1}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}.$$

b) Poursuivre la table d'Ahmès en donnant les doubles de $\frac{1}{3}$, de $\frac{1}{11}$, de $\frac{1}{13}$, de $\frac{1}{17}$, etc. (en donner quelques-uns) sous la forme d'une somme de fractions unitaires différentes. Les petits dénominateurs sont préférés, de même on préfère une somme de deux quantièmes que de trois ou davantage... Si vous êtes en manque d'inspiration, vous pourrez toujours utiliser, après l'avoir vérifiée, l'égalité $\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$.

$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$. Pour trouver cette décomposition, j'ai juste essayé de décomposer la fraction égale trouvée en multipliant par 2 le numérateur et le dénominateur. Comme on a trouvé une somme de quantièmes, on n'est pas allé plus loin, sinon on aurait essayé avec des multiplications par 3, par 4, etc.

$\frac{2}{11}=\frac{4}{22}=\frac{1}{22}+\frac{3}{22}$ ne se simplifie pas en quantièmes, on essaie alors $\frac{2}{11}=\frac{6}{33}=\frac{1}{33}+\frac{5}{33}$ qui ne convient pas non plus. $\frac{2}{11}=\frac{8}{44}=\frac{1}{44}+\frac{7}{44}$ non plus, ni $\frac{2}{11}=\frac{10}{55}=\frac{1}{55}+\frac{9}{55}$, par contre $\frac{2}{11}=\frac{12}{66}=\frac{1}{66}+\frac{11}{66}=\frac{1}{66}+\frac{1}{6}$.

La solution proposée à trois termes est moins élégante : $\frac{2}{11}=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{132}$. D'une façon générale, il était demandé de vérifier cette propriété. Vérifier, cela ne veut pas dire prouver : il suffit de vérifier sur un exemple au moins qu'elle donne un bon résultat. Ici, on a $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{132}=\frac{12}{132}+\frac{11}{132}+\frac{1}{132}=\frac{12+11+1}{132}=\frac{24}{132}=\frac{2}{11}$ qui est bien le double voulu. Si on avait voulu prouver l'égalité pour toutes les valeurs de *n* entières, il aurait fallu faire du calcul littéral (avec des lettres) :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}+\frac{n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1+n+1}{n(n+1)}=\frac{2n+2}{n(n+1)}=\frac{2(n+1)}{n(n+1)}=\frac{2}{n}\text{, voilà.}$$

Appliquons encore cette propriété pour trouver le double suivant comme une somme de trois termes :

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{182}$$

La vérification est inutile ici puisqu'on l'a déjà faite pour tout *n*.

On peut remarquer une autre propriété qui permet de trouver le double de n'importe quelle fraction égyptienne dont le dénominateur est un nombre impair (un nombre est impair s'il peut s'écrire $2n+1$, avec *n* entier) :

$$\frac{2}{2n+1}=\frac{2(n+1)}{(n+1)(2n+1)}=\frac{2n+2}{(n+1)(2n+1)}=\frac{2n+1}{(n+1)(2n+1)}+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\text{,}$$

cette propriété peut aussi s'écrire, en remplaçant $2n+1$ par N, donc $2n$ par $N-1$ et donc n par $\frac{N-1}{2}$, ou encore $n+1$ par $\frac{N-1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{N-1+2}{2}=\frac{N+1}{2}$: $\frac{2}{N}=\frac{1}{\frac{N+1}{2}}+\frac{1}{\frac{N(N+1)}{2}}$. Certains d'entre vous ont trouvé cette formule par un autre moyen, par exemple, en partant de la formule de l'énoncé : $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2}{n}$, on trouve que $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$, et donc, en doublant tout : $\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}$, ce qui revient exactement à $\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$, mais toutes ces considérations sont tout de même largement au-delà de ce qu'on attend d'un élève de sixième...

En appliquant cette propriété, on trouve $\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$, $\frac{2}{17}=\frac{1}{9}+\frac{1}{153}$, $\frac{2}{19}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190}$, etc.

Examinez cette table qui donne la liste des doubles telles qu'on la trouve dans le papyrus Rhind, selon un spécialiste de la question, Otto Eduard Neugebauer (1899-1990) qui l'étudie dans sa thèse de 1926. C'est tout de même plus facile à lire que le papyrus lui-même (ci-dessous) !

La notation employée est empruntée aux égyptiens : on surligne le dénominateur, le numérateur valant toujours 1 n'a pas besoin d'être écrit. Par exemple, la 1ère ligne donne $\overline{2}+\overline{6}$ pour $\frac{2}{3}$, ce qui signifie $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ (c'est ce que nous avons trouvé). Une seule exception est la fraction $\frac{2}{3}$ justement qui est notée à d'autres endroits avec deux traits au-dessus du 3 (voir au bout à droite de la 1ère ligne).

On y trouve une autre décomposition de $\frac{2}{13}$ en trois termes : $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$ qui est différente de celle que nous proposions ($\frac{2}{13}=\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{182}$), mais les deux sont beaucoup moins intéressantes que celle qui n'a que deux termes ($\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$).

D'une façon générale, il y a plusieurs façons de répondre. Le papyrus ne donne pas forcément la solution la plus simple, mais il varie les solutions : au lieu de donner $\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$, ce que donne notre formule (voir plus haut), il donne $\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Les deux solutions sont également valables, et on peut sans doute en trouver d'autres...

n	$\frac{2}{n}$	$1+\alpha$ [1]	n	$\frac{2}{n}$	$1+\alpha$ [1]
3	$\overline{2}+\overline{6}$	$1+\overline{2}$	53	$\overline{30}+\overline{318}+\overline{795}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}$
5	$\overline{3}+\overline{15}$	$1+\overline{\overline{3}}$	55	$\overline{30}+\overline{330}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{6}$
7	$\overline{4}+\overline{28}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$	57	$\overline{38}+\overline{114}$	$1+\overline{2}$
9	$\overline{6}+\overline{18}$	$1+\overline{2}$	59	$\overline{36}+\overline{236}+\overline{531}$	$1+\overline{2}+\overline{12}+\overline{18}$
11	$\overline{6}+\overline{66}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{6}$	61	$\overline{40}+\overline{244}+\overline{488}+\overline{610}$	$1+\overline{2}+\overline{40}$
13	$\overline{8}+\overline{52}+\overline{104}$	$1+\overline{2}+\overline{8}$	63	$\overline{42}+\overline{126}$	$1+\overline{2}$
15	$\overline{10}+\overline{30}$	$1+\overline{2}$	65	$\overline{39}+\overline{195}$	$1+\overline{\overline{3}}$
17	$\overline{12}+\overline{51}+\overline{68}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{12}$	67	$\overline{40}+\overline{335}+\overline{736}$	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{20}$
19	$\overline{12}+\overline{76}+\overline{114}$	$1+\overline{2}+\overline{12}$	69	$\overline{46}+\overline{138}$	$1+\overline{2}$
21	$\overline{14}+\overline{42}$	$1+\overline{2}$	71	$\overline{40}+\overline{568}+\overline{710}$	$1+\overline{2}+\overline{4}+\overline{40}$
23	$\overline{12}+\overline{276}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{4}$	73	$\overline{60}+\overline{219}+\overline{292}+\overline{365}$	$1+\overline{6}+\overline{20}$
25	$\overline{15}+\overline{75}$	$1+\overline{\overline{3}}$	75	$\overline{50}+\overline{150}$	$1+\overline{2}$
27	$\overline{18}+\overline{54}$	$1+\overline{2}$	77	$\overline{44}+\overline{308}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$
29	$\overline{24}+\overline{58}+\overline{174}+\overline{232}$	$1+\overline{6}+\overline{24}$	79	$\overline{60}+\overline{237}+\overline{316}+\overline{790}$	$1+\overline{4}+\overline{15}$
31	$\overline{20}+\overline{124}+\overline{155}$	$1+\overline{2}+\overline{20}$	81	$\overline{54}+\overline{162}$	$1+\overline{2}$
33	$\overline{22}+\overline{66}$	$1+\overline{2}$	83	$\overline{60}+\overline{332}+\overline{415}+\overline{498}$	$1+\overline{3}+\overline{20}$
35	$\overline{30}+\overline{42}$	$1+\overline{6}$	85	$\overline{51}+\overline{255}$	$1+\overline{\overline{3}}$
37	$\overline{24}+\overline{111}+\overline{296}$	$1+\overline{2}+\overline{24}$	87	$\overline{58}+\overline{174}$	$1+\overline{2}$
39	$\overline{26}+\overline{78}$	$1+\overline{2}$	89	$\overline{60}+\overline{356}+\overline{534}+\overline{890}$	$1+\overline{3}+\overline{10}+\overline{20}$
41	$\overline{24}+\overline{246}+\overline{328}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{24}$	91	$\overline{70}+\overline{130}$	$1+\overline{5}+\overline{10}$
43	$\overline{42}+\overline{86}+\overline{129}+\overline{301}$	$1+\overline{42}$	93	$\overline{62}+\overline{186}$	$1+\overline{2}$
45	$\overline{30}+\overline{90}$	$1+\overline{2}$	95	$\overline{60}+\overline{380}+\overline{570}$	$1+\overline{2}+\overline{12}$
47	$\overline{30}+\overline{141}+\overline{470}$	$1+\overline{2}+\overline{15}$	97	$\overline{56}+\overline{679}+\overline{776}$	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{14}+\overline{28}$
49	$\overline{28}+\overline{196}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$	99	$\overline{66}+\overline{198}$	$1+\overline{2}$
51	$\overline{34}+\overline{102}$	$1+\overline{2}$	101	$\overline{101}+\overline{202}+\overline{303}+\overline{606}$	1

[1] Diese Spalte steht nicht im Text (s. S. 157 ff.).