

1) Les puissances de seize

Quand on dit « seize puissance trois », cela signifie $16 \times 16 \times 16$. On note ce nombre 16^3 où 3 est l'exposant de 16.

a) Les premières puissances de 16 sont données dans le tableau ci-dessous (à recopier et compléter) :

On admet que 16^0 vaut 1 ; 16^1 vaut 16 ; 16^3 vaut 4096

Exposant	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Puissance de 16	1	16	256	4096	65 536	1 048 576	16 777 216	268 435 456	4 294 967 296

Remarque : on peut obtenir ce tableau très simplement avec un tableur (calc de OpenOffice par exemple) :

exposant	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
puissance de 16	1	16	256	4096	65536	1048576	16777216	268435456	4294967296	68719476736

Pour obtenir cela, j'ai tapé dans la cellule C2 (là où il y a 16) la formule : $=16*B2$

Ensuite j'ai recopié cette formule en tirant sur la poignée noire (en bas à droite de la cellule sélectionnée). La 1^{ère} ligne n'est pas utilisée ; elle n'est là que pour indiquer l'exposant.

	A	B	C	D
1	exposant	0	1	2
2	puissance de 16	1	16	256
3				

b) Tous les nombres entiers se décomposent en une somme des puissances de seize prises entre 0 et 15 fois :

$$60 = 3 \times 16 + 12 \times 1 ; 10\ 000 = 2 \times 4096 + 7 \times 256 + 1 \times 16 ; \text{etc.}$$

Sur le modèle du tableau suivant qui donne la décomposition de ces nombres entiers selon les puissances de seize, donner la décomposition des nombres 25, 120, 255, 2017, 2050, 1 000 000, 1 111 111.

Puissance de 16	1	16	256	4096	65 536	1 048 576	16 777 216
décomposition de 60	12	3					
décomposition de 10 000	0	1	7	2			
décomposition de 25	9	1					
décomposition de 120	8	7					
décomposition de 255	15	15					
décomposition de 2017	1	14	7				
décomposition de 2050	2	0	8				
décomposition de 1 000 000	0	4	2	4	15		
décomposition de 1 111 111	7	4	4	15	0	1	

Explications :

Pour trouver les coefficients de la décomposition de 1 000 000 en base 16, je fais :

$1\ 000\ 000 \div 65\ 536 = 15,28\dots$ (je divise par la plus grande puissance de 16 qui est contenue dans le nombre)

$1\ 000\ 000 - 15 \times 65\ 536 = 16\ 960$ (puisque'il va au moins 15 fois **65 536** dans 1 000 000, je les enlève du nombre ; ce qu'il reste est le reste de la division euclidienne de 1 000 000 par **65 536**)

$16\ 960 \div 4096 = 4,14\dots$ (je divise par la plus grande puissance de 16 qui est contenue dans le nombre)

$16\ 960 - 4 \times 4096 = 576$ (puisque'il va au moins 4 fois **4096** dans 16 960, je les enlève du nombre ; ce qu'il reste est le reste de la division euclidienne de 16 960 par **4096**)

$576 \div 256 = 2,25$ (je divise par la plus grande puissance de 16 qui est contenue dans le nombre)

$576 - 2 \times 256 = 64$ (puisque'il va au moins 2 fois **256** dans 576, je les enlève du nombre ; ce qu'il reste est le reste de la division euclidienne de 576 par **256**)

$64 \div 16 = 4$ (je divise par la plus grande puissance de 16 qui est contenue dans le nombre)

$64 - 4 \times 16 = 0$. Comme il ne reste rien, c'est fini. Je peux donc écrire la décomposition :

$$1\ 000\ 000 = 15 \times 65\ 536 + 4 \times 4096 + 2 \times 256 + 4 \times 16 + 0 \times 1$$

2) Numération hexadécimale (en base seize)

Dans le système de numération hexadécimale, il y a seize chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F.

On note les nombres entiers en utilisant leur décomposition selon les puissances de seize :

Le nombre décimal 60 se note 3C en base seize (car $C=12$) ; le nombre décimal 10 000 se note 2710 en base seize ; etc.

a) Écrire les nombres décimaux suivants en base seize : 25, 120, 255, 2017, 2050, 1 000 000, 1 111 111.

D'après les résultats du tableau ci-dessus, on a

Base 10	Décomposition selon les puissances de 16	Base 16
25	$1 \times 16 + 9 \times 1$	19
120	$7 \times 16 + 8 \times 1$	78
255	$15 \times 16 + 15 \times 1$	FF
2017	$7 \times 256 + 14 \times 16 + 1 \times 1$	7E1
2050	$8 \times 256 + 0 \times 16 + 2 \times 1$	802
1 000 000	$15 \times 65\,536 + 4 \times 4096 + 2 \times 256 + 4 \times 16 + 0 \times 1$	F4240
1 111 111	$1 \times 1\,048\,576 + 0 \times 65\,536 + 15 \times 4096 + 4 \times 256 + 4 \times 16 + 7 \times 1$	10F447

b) Traduire 1A, B2, FF, et 123 en numération décimale (justifier vos traductions).

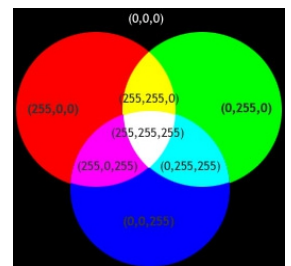
C'est ici le travail inverse : l'écriture en base 16 me donne la décomposition. Il ne reste qu'à effectuer le calcul.

Base 16	Décomposition selon les puissances de 16	Base 10
1A	$1 \times 16 + 10 \times 1$	26
B2	$11 \times 16 + 2 \times 1$	178
FF	$15 \times 16 + 15 \times 1$	255
123	$1 \times 256 + 2 \times 16 + 3 \times 1$	291

3) Application

Il y a plusieurs façons de noter les couleurs en informatique, mais une notation souvent utilisée est la décomposition « rouge, vert, bleu » abrégée en RVB (ou RGB en anglais « red, green, blue »). Les écrans d'ordinateurs reconstituent une couleur en juxtaposant sur l'écran des points d'une mosaïque rouge, verte et bleue. Pour chacune de ces couleurs primaires, la valeur s'exprime dans un intervalle entre 0 et 255.

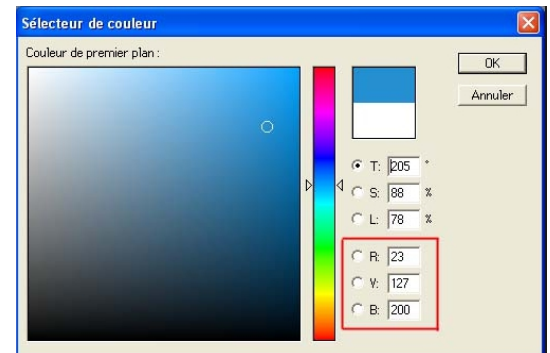
Comme 255 s'écrit FF en hexadécimal, cette numération donne une couleur avec seulement six chiffres :



- le rouge s'écrit FF0000 (255, soit le maximum de rouge, et rien pour le vert et le bleu)
- le noir pur s'écrit 000000 et le blanc pur s'écrit FFFFFFFF
- la couleur « saumon » s'écrit FFCC99

a) Comment est codée la couleur sélectionnée ci-contre en hexadécimal (voir le sujet en couleur sur mathadomicile.fr) ?

Cette couleur est codée, dans le système RVB par le triplet de nombres (23,127,200). Comme $23=1 \times 16 + 7 \times 1$, $127=7 \times 16 + 15 \times 1$ et $200=12 \times 16 + 8 \times 1$, en hexadécimal, cette couleur est codée (17,7F,C8) ou plutôt, en concaténant les trois nombres hexadécimaux, 177FC8. Ce code signifie qu'il y a :



- 23/255 soit 9% de Rouge,
- 127/255, soit 50% de Vert
- 200/255, soit 78% de Bleu

La couleur sélectionnée est donc un bleu-vert (on le constate sur l'échantillon) une sorte de turquoise foncé. Un site m'indique son nom en anglais : *Pittsburgh Paints Electric Blue*, le bleu électrique des Peintures de Pittsburgh (Peintures de Pittsburgh : une marque américaine)

Dans un autre système de codage (le système TSL, pour Teinte, Saturation, Lumière ou HSL en anglais pour *Hue, Saturation, Lightness*), cette même couleur est codée par le triplet $T=205^\circ$, $S=88\%$ et $L=78\%$. Dans cet autre système, la « teinte » est codée par un angle du cercle chromatique ci-contre où on voit comment se situe le bleu sélectionné.



b) Combien de couleurs différentes peuvent être codées en utilisant le système RVB ? (justifier la réponse)

On peut coder 256 (16 puissance 2) nuances de Rouge, 256 de Vert et 256 de Bleu. On peut donc coder $256 \times 256 \times 256 = 16\,777\,216$ (16 puissance 6) couleurs différentes.

c) Colorier la figure ci-contre (la télécharger depuis le site mathadomicile.fr et l'imprimer pour l'avoir sans les codes) en sachant que les couleurs sont codées avec le système RVB.

Pour cette question, on peut s'aider d'un convertisseur d'internet, par exemple :

<http://htmlcolorcodes.com/fr/selecteur-de-couleur/>

Voici la solution (à gauche) :



- 004182
- 848A55
- FF9900
- 525252
- CC0000
- 7B5944
- FFCC99
- D8D8D8
- FFCC00
- 000000

Quelques
plages colorées
avec des nuances
plus sombres
donnent un
résultat avec
plus de relief.



ASCII Table

Dec	Hex	Oct	Char	Dec	Hex	Oct	Char	Dec	Hex	Oct	Char	Dec	Hex	Oct	Char
0	0	0		32	20	40	[space]	64	40	100	@	96	60	140	`
1	1	1		33	21	41	!	65	41	101	A	97	61	141	a
2	2	2		34	22	42	"	66	42	102	B	98	62	142	b
3	3	3		35	23	43	#	67	43	103	C	99	63	143	c
4	4	4		36	24	44	\$	68	44	104	D	100	64	144	d
5	5	5		37	25	45	%	69	45	105	E	101	65	145	e
6	6	6		38	26	46	&	70	46	106	F	102	66	146	f
7	7	7		39	27	47	'	71	47	107	G	103	67	147	g
8	8	10		40	28	50	(72	48	110	H	104	68	150	h
9	9	11		41	29	51)	73	49	111	I	105	69	151	i
10	A	12		42	2A	52	*	74	4A	112	J	106	6A	152	j
11	B	13		43	2B	53	+	75	4B	113	K	107	6B	153	k
12	C	14		44	2C	54	,	76	4C	114	L	108	6C	154	l
13	D	15		45	2D	55	-	77	4D	115	M	109	6D	155	m
14	E	16		46	2E	56	.	78	4E	116	N	110	6E	156	n
15	F	17		47	2F	57	/	79	4F	117	O	111	6F	157	o
16	10	20		48	30	60	0	80	50	120	P	112	70	160	p
17	11	21		49	31	61	1	81	51	121	Q	113	71	161	q
18	12	22		50	32	62	2	82	52	122	R	114	72	162	r
19	13	23		51	33	63	3	83	53	123	S	115	73	163	s
20	14	24		52	34	64	4	84	54	124	T	116	74	164	t
21	15	25		53	35	65	5	85	55	125	U	117	75	165	u
22	16	26		54	36	66	6	86	56	126	V	118	76	166	v
23	17	27		55	37	67	7	87	57	127	W	119	77	167	w
24	18	30		56	38	70	8	88	58	130	X	120	78	170	x
25	19	31		57	39	71	9	89	59	131	Y	121	79	171	y
26	1A	32		58	3A	72	:	90	5A	132	Z	122	7A	172	z
27	1B	33		59	3B	73	;	91	5B	133	[123	7B	173	[
28	1C	34		60	3C	74	<	92	5C	134	\	124	7C	174	\
29	1D	35		61	3D	75	=	93	5D	135]	125	7D	175]
30	1E	36		62	3E	76	>	94	5E	136	^	126	7E	176	^
31	1F	37		63	3F	77	?	95	5F	137	_	127	7F	177	_

Une autre application : le codage informatique des caractères utilisait au départ (il y a une cinquantaine d'années) la table ASCII qui ne nécessite que 2 caractères hexadécimaux pour les principaux caractères (colonnes Hex pour la valeur hexadécimale et Char pour le caractère correspondant).