$6^{\text{ème}}$ **TD sur les techniques multiplicatives**

I] Technique *à la russe*

Si on sait additionner correctement et que l'on ne sait ni multiplier ni diviser autrement que par 2, on peut obtenir le produit de deux nombres quelconques de la manière illustrée ci-contre pour le cas de 97×23 (ce produit donne 2231).

On divise 97 par 2 en ne gardant que la partie entière du quotient. On continue avec le résultat de la même façon, jusqu'à obtenir 1. En dessous de 23, on écrit le double de 23, et on fait de même à chaque étape jusqu'en face du 1. Il ne reste plus alors qu'à additionner les nombres de la colonne de droite quand ils ne sont pas en face d'un nombre pair (nous avons barré les nombres qui font face à des nombres pairs, surlignés).

97	23
48	~~46~~
24	~~92~~
12	~~184~~
6	~~368~~
3	736
1	1472
	2231

🗲 Appliquer cette technique à quelques produits : 12×17 ; 67×89 ; 123×2048 ; 987 654×321.

J'ai choisi des exemples simples (au début) puis plus compliqué pour vous inviter à observer que cette méthode est parfois laborieuse !! Son grand avantage est d'éviter l'apprentissage des tables puisqu'il suffit de savoir doubler ou prendre la moitié. Par commodité, me servant d'un tableur, j'ai écrit les nombres à additionner dans une colonne B' et le résultat dans une $4^{\text{ème}}$ colonne C.

A	B	B'	Somme/produit
12	17		204
6	34		
3	68	68	
1	136	136	

A	B	B'	Somme/produit
17	12	12	204
8	24		
4	48		
2	96		
1	192	192	

A	B	B'	Somme/produit
67	89	89	5963
33	178	178	
16	356		
8	712		
4	1424		
2	2848		
1	5696	5696	

A	B	B'	Somme/produit
89	67	67	5963
44	134		
22	268		
11	536	536	
5	1072	1072	
2	2144		
1	4288	4288	

A	B	B'	Somme/produit
123	2048	2048	251904
61	4096	4096	
30	8192		
15	16384	16384	
7	32768	32768	
3	65536	65536	
1	131072	131072	

A	B	B'	Somme/produit
2048	123		251904
1024	246		
512	492		
256	984		
128	1968		
64	3936		
32	7872		
16	15744		
8	31488		
4	62976		
2	125952		
1	251904	251904	

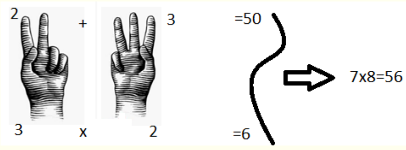
A	B	B'	Somme/produit
987654	321		317036934
493827	642	642	
246913	1284	1284	
123456	2568		
61728	5136		
30864	10272		
15432	20544		
7716	41088		
3858	82176		
1929	164352	164352	
964	328704		
482	657408		
241	1314816	1314816	
120	2629632		
60	5259264		
30	10518528		
15	21037056	21037056	
7	42074112	42074112	
3	84148224	84148224	
1	168296448	168296448	

A	B	B'	Somme/produit
321	987654	987654	317036934
160	1975308		
80	3950616		
40	7901232		
20	15802464		
10	31604928		
5	63209856	63209856	
2	126419712		
1	252839424	252839424	

Pour info : la *méthode du paysan russe* est un très vieil algorithme de multiplication de deux nombres entiers déjà décrit (sous une forme légèrement différente) sur un papyrus égyptien rédigé vers 1650 av. J.-C. Il s'agissait de la principale méthode de calcul en Europe avant l'introduction des chiffres arabes, et les premiers ordinateurs l'ont utilisé avant que la multiplication ne soit directement intégrée dans le processeur sous forme de circuit électronique. Cette méthode était encore utilisée en Russie jusqu'au début du 20ème siècle d'où son nom.

II] Les tables sur le bout des doigts

Si je veux le produit de 7 par 8, je peux avoir mémorisé que la réponse est 56. Mais si j'hésite... si j'ai oublié mes tables... comment faire ? La solution vient de nos mains :



- j'abaisse les doigts de la main gauche sauf **2** doigts (car 7=**2**+5)
- j'abaisse les doigts de la main droite sauf **3** doigts (car 8=**3**+5)
- J'additionne les dizaines (doigts relevés) **2+3=5**, on a donc déjà **5**0.
- Je multiplie les unités (doigts abaissés) : 3×2=6

Résultats : 50+6=56 ! Et ça fonctionne pour toutes les produits $a \times b$ pour lesquels a et b sont supérieurs à 5.

✍Essayer pour 6×6 ; 6×7 ; 6×8 ; 6×9 ; 7×7 ; (7×8) ; 7×9 ; 8×8 ; 8×9 ; 9×9.

Pour faire ces vérifications, nous allons encore une fois utiliser le tableur :

	A	B		
	6	6		
dizaines	1	1	20	somme
unités	4	4	16	produit
			36	total

	A	B		
	6	7		
dizaines	1	2	30	somme
unités	4	3	12	produit
			42	total

	A	B		
	6	8		
dizaines	1	3	40	somme
unités	4	2	8	produit
			48	total

	A	B		
	6	9		
dizaines	1	4	50	somme
unités	4	1	4	produit
			54	total

	A	B		
	7	7		
dizaines	2	2	40	somme
unités	3	3	9	produit
			49	total

	A	B		
	7	8		
dizaines	2	3	50	somme
unités	3	2	6	produit
			56	total

	A	B		
	7	9		
dizaines	2	4	60	somme
unités	3	1	3	produit
			63	total

	A	B		
	8	8		
dizaines	3	3	60	somme
unités	2	2	4	produit
			64	total

	A	B		
	8	9		
dizaines	3	4	70	somme
unités	2	1	2	produit
			72	total

	A	B		
	9	9		
dizaines	4	4	80	somme
unités	1	1	1	produit
			81	total

On peut remarquer qu'il y a une retenue à faire pour les unités avec les produits 6×6 et 6×7. Sinon, cela fonctionne parfaitement bien pour tous ces produits.
Cette méthode fonctionne aussi pour les produits 5×5, 5×6, 5×7, 5×8 et 5×9, mais il va y avoir des retenues.

	A	B		
	5	5		
dizaines	0	0	0	somme
unités	5	5	25	produit
			25	total

	A	B		
	5	6		
dizaines	0	1	10	somme
unités	5	4	20	produit
			30	total

	A	B		
	5	7		
dizaines	0	2	20	somme
unités	5	3	15	produit
			35	total

	A	B		
	5	8		
dizaines	0	3	30	somme
unités	5	2	10	produit
			40	total

	A	B		
	5	9		
dizaines	0	4	40	somme
unités	5	1	5	produit
			45	total

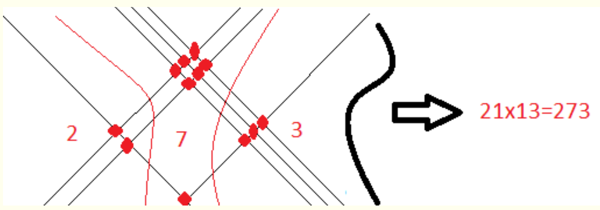
2 dizaines retenues
1 dizaine retenue

Personnellement, je trouve cette méthode particulièrement intéressante. Certains d'entre vous connaissent la technique pour retrouver sur les doigts la table de 9, mais on ne peut retrouver ainsi ni la table de 8 (sauf si on n'a que 9 doigts et qu'on compte en base 9) et le fameux produit 7×8 (fameux pour être le plus difficile à retrouver, le plus difficile à mémoriser), ni les autres tables... Avec cette méthode, il suffit de connaître les produits des nombres inférieurs ou égaux à 5.

III] Multiplication « maya »

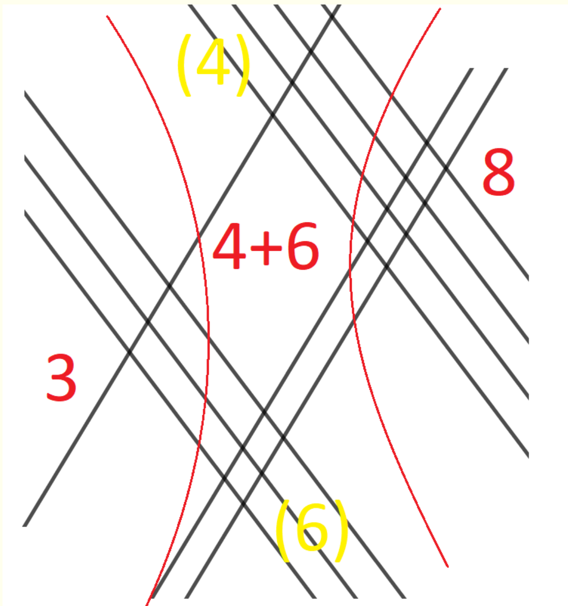
Il s'agit de tracer des traits parallèles par paquets, dans deux directions et de compter les points d'intersection de ces séries comme le montre l'illustration.

Pour 21×13 par exemple, 21 est décomposé en 1 paquet de 2 traits et 1 deuxième paquet de 1 trait, tandis que 13 est décomposé en 1 paquet de 1 trait suivi d'1 deuxième paquet de 3 traits. Ces séries de traits se coupent en 2 points (à gauche), 6+1=7 points (les 2 groupes du milieu) et 3 points (à droite), ce qui conduit au résultat : 21×13=273.

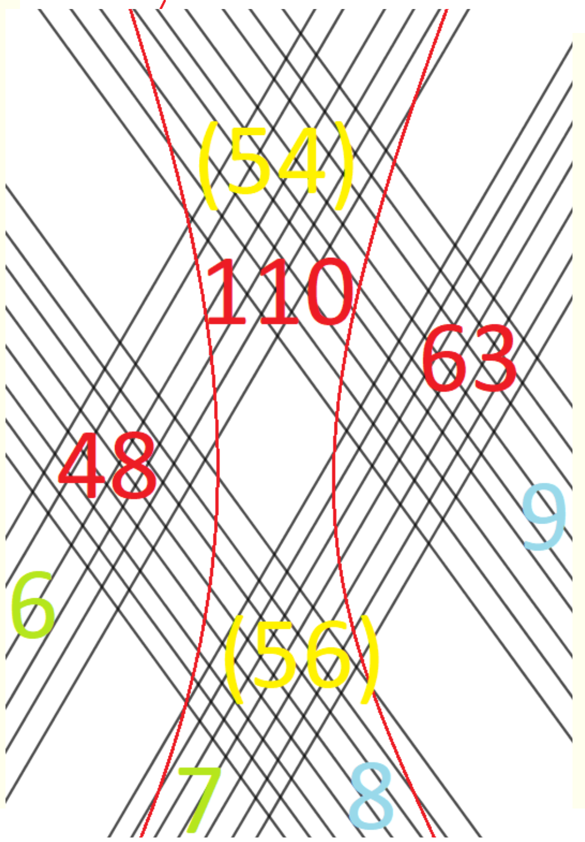


Appliquer cette technique aux produits 12×34 ; 67×89 ; 123×321. Quels sont les inconvénients de cette technique ?

Cette technique est particulièrement attractive puisqu'il ne faut connaître aucun produit par cœur ! Sauf que si les nombres contiennent des chiffres élevés, le nombre de points à compter devient important et les problèmes de retenue sont aussi plus compliqués. Les exemples donnés permettent de réaliser cela. Cette fois, je ne peux utiliser de tableur (il ne me serait utile qu'à effectuer les additions finales), je vais utiliser Geogebra (car il permet de tracer facilement des parallèles).



Pour 12×34, on voit que ça fait 3 centaines, 10 dizaines et 8 unités, soit 408. La disposition est importante pour comprendre où se trouve les chiffres (celui des dizaines notamment qui est composé en deux parties, car on obtient les dizaines en multipliant les dizaines par les unités ou les unités par les dizaines).

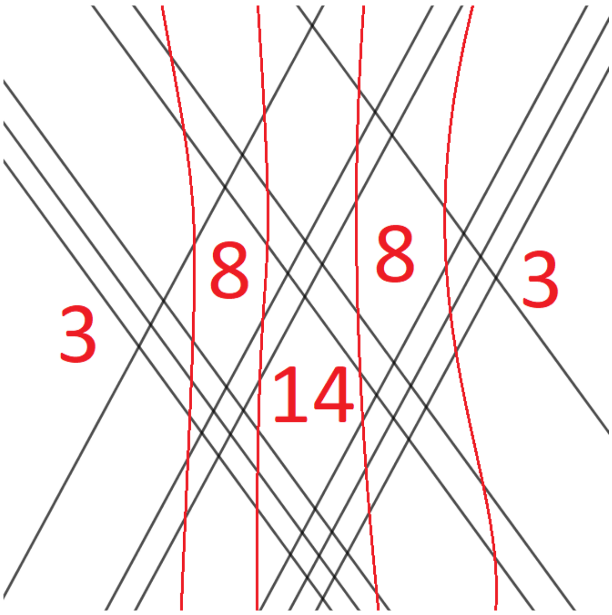


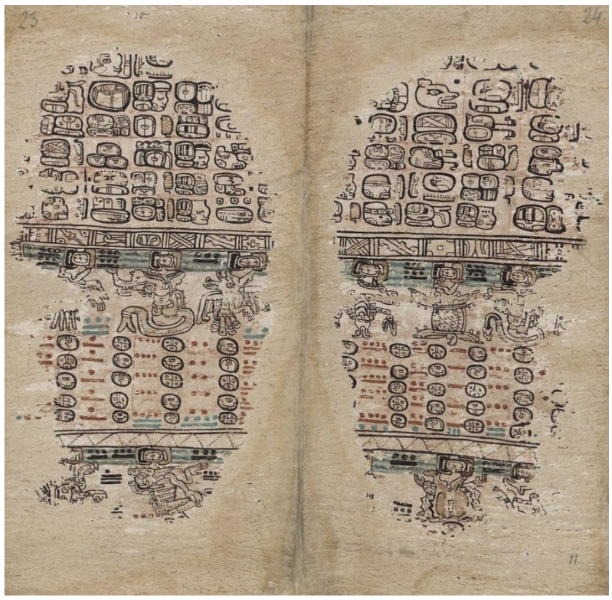
Pour 67×89, le travail est vraiment fastidieux. On voit cependant que ça fait 48 centaines, 110 dizaines et 63 unités, soit 4800+1100+63=5963. La disposition est la même que précédemment mais les points sont vraiment nombreux ce qui oblige tout de même à connaître les tables (si on ne veut pas avoir à compter tous les points, avec le risque de se tromper...) et les problèmes de retenue sont ici importants.

Pour 123×321, le travail est plus simple car les chiffres sont petits. On trouve 3 unités, 8 dizaines, 14 centaines, 8 milliers et 3 dizaines de mille, ce qui fait :

30000+8000+1400+80+3=39483

La disposition propre des chiffres facilite grandement l'application de cette technique qui n'est qu'une curiosité amusante. Même si on trouve à son propos les noms de technique maya ou japonaise, je ne pense pas que les mayas ou quiconque ne s'en sont servis véritablement. Ce doit être bien difficile de leur poser la question aujourd'hui vu que la civilisation maya est éteinte. Quelques rares écrits subsistent comme ce codex de Paris (l'illustration en montre les pages 23 et 24 où des nombres sont présents) mais nulle trace de division avec des traits parallèles ne s'y voit.





IV] Grands calculs [*avec la calculatrice*]

Si j'effectue sur ma calculatrice le « grand » produit 1 234 567×7 654 321, elle me donne: $9{,}44977211\times10^{12}$ ce qui signifie 9 449 772 110 000 (10^{12} c'est 1 suivi de 12 zéros). Or je sais bien que le produit en question ne se termine pas par 0 mais par 7 (le chiffre des unités est celui de 7×1). Ce que me dit ma calculatrice est donc faux ! Il me faut retrouver les six derniers chiffres de ce produit.

Technique des blocs : grouper les chiffres par blocs de trois puis effectuer, avec la calculatrice, la multiplication des blocs entre eux, en mettant les décalages qui conviennent (voir l'exemple ci-dessous). L'addition finale se fait à la main :

1 234 567		1 234 567
×7 654 321		×7 654 321
182 007	*Le produit 321 par 567*	1 234 567
75 114 . . .	*Le produit 321 par 234*	2 469 12.
321	*Le produit 321 par 1*	37 036 8. .
370 818 . . .	*Le produit 654 par 567*	493 824 . . .
153 036	*Le produit 654 par 234*	6 172 80. . . .
654	*Le produit 654 par 1*	74 073 6. . . . .
3 969	*Le produit 7 par 567*	864 192 . . . . . .
1 638	*Le produit 7 par 234*	9 449 772 114007
7	*Le produit 7 par 1*	*Sinon, on peut toujours faire classiquement*
9 449 772 114007	*L'addition des blocs*	Comparer les 2 méthodes

Il y a 43 chiffres à additionner dans la technique de droite (traditionnelle) contre 38 dans celle de gauche (par blocs) par contre il y a moins de lignes à droite. Je ne vois pas très bien l'intérêt de cette méthode par bloc, si ce n'est qu'elle permet de comprendre un peu mieux notre bonne vieille méthode traditionnelle : d'où viennent les décalages notamment. Quand on procède par blocs de mille, les décalages se font 3 par 3.

Du fait qu'il ne nous manquait que les 6 derniers chiffres de ce produit, on voit qu'il n'y a que 3 blocs à multiplier, cela peut être fait rapidement. La technique traditionnelle demande par contre d'effectuer les 6 premiers produits ce qui est bien plus important. Voici donc ce qu'il faut réellement effectuer pour avoir les six derniers chiffres :

Technique par blocs	Technique traditionnelle
321×567 321×234000 654000×567	1234567×1 1234567×20 1234567×300 1234567×4000 1234567×50000 1234567×600000

Utiliser cette technique pour effectuer le produit : 123 456 789×987 654 321.

Si j'effectue sur ma calculatrice le « grand produit » 123456789 × 987654321, elle me dit:
$1{,}21932631\times10^{17}$ ce qui signifie 121 932 631 000 000 000 (10^{17} c'est 1 suivi de 17 zéros).
Or je sais bien que le produit en question ne se termine pas par 0 mais par 9.
Il me faut reconstituer les 9 derniers chiffres de ce produit :

123 456 789	
×987 654 321	
253 269	Le produit 321 par 789
146 376 000	Le produit 321 par 456 000
39 483 000 000	Le produit 321 par 123 000 000
516 006 000	Le produit 654 000 par 789
298 224 000 000	Le produit 654 000 par 456 000
80 442 000 000 000	Le produit 654 000 par 123 000 000
778 743 000 000	Le produit 987 000 000 par 789
450 072 000 000 000	Le produit 987 000 000 par 456 000
121 401 000 000 000 000	Le produit 987 000 000 par 123 000 000
121 932 631 112 635 269	L'addition des blocs

On voit qu'il faut exécuter au moins les produits de 6 blocs (coloriés en rouge) pour retrouver les 9 chiffres manquants. Le produit cherché est donc 121 932 631 112 635 269.