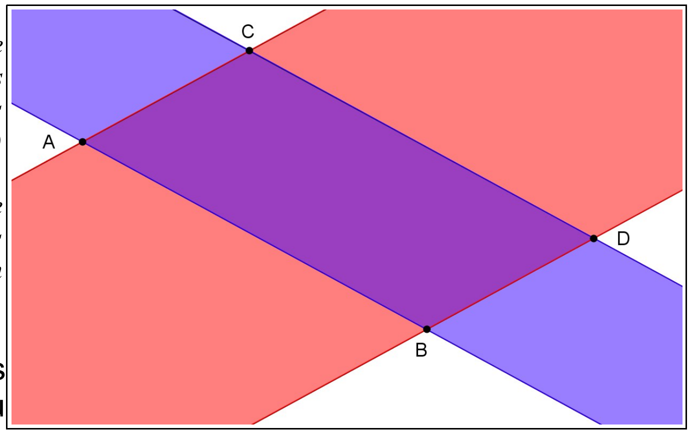
1) Définition et propriétés

a) Définition

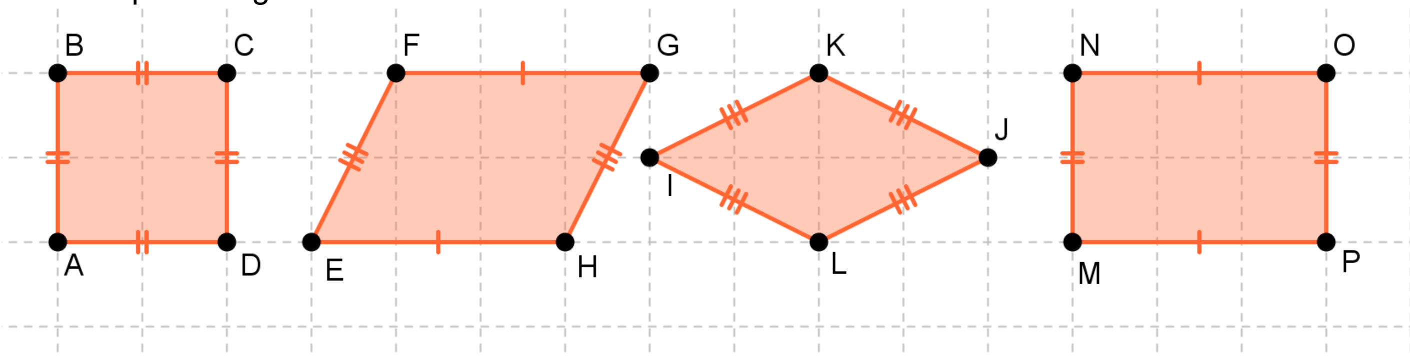
Rappel : Nous allons nous intéresser ici à une catégorie de polygones souvent rencontrés en géométrie : les quadrilatères, qui sont les polygones à 4 côtés. Parmi ces quadrilatères nous ne retiendrons que ceux qui répondent à la définition suivante :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



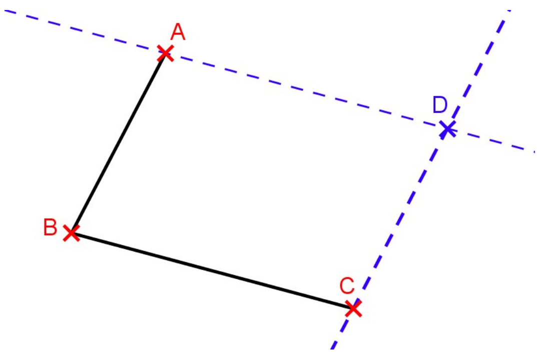
Observation : *Lorsque deux séries de 2 droites parallèles se croisent, elles déterminent un parallélogramme. Dans l'illustration ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont parallèles et forment une bande colorée en bleu. Les droites (AC) et (BD) sont aussi parallèles et forment une bande colorée en rose. L'intersection des deux bandes est un polygone (figure fermée formée de segments mis bout-à-bout) à 4 côtés dont les côtés opposés sont des segments parallèles, c'est un parallélogramme.*

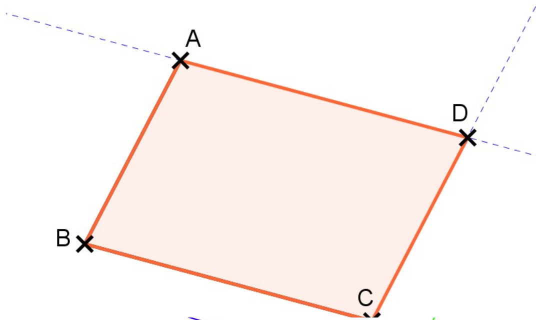
Remarque importante : dans cette définition, nous ne disons rien des longueurs ou des angles du quadrilatère. Ceux-ci peuvent être quelconques ou particuliers. Par conséquent, il est possible que les angles soient droits. Les rectangles sont donc des parallélogrammes particuliers. Il est possible que les côtés aient même longueurs. Les losanges sont donc aussi des parallélogrammes particuliers. Et le carré est un parallélogramme très particulier puisqu'il est losange et rectangle! Sur l'illustration ci-dessous, les 4 quadrilatères sont des parallélogrammes.



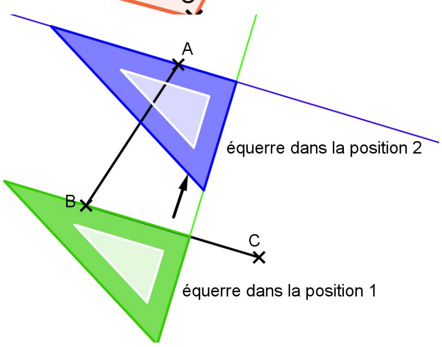
Construction du parallélogramme ABCD connaissant les points A, B et C :

- *Tracer la parallèle à la droite (AB) passant par C.*
- *Tracer la parallèle à la droite (BC) passant par A.*
- *Nommer D le point d'intersection de ces droites.*





Rappel : pour cette construction, nous devons tracer la parallèle à une droite passant par un point. La méthode appropriée pour réaliser ceci sur une feuille est d'utiliser une équerre et une règle. La règle se colle sur un côté de l'angle droit tandis qu'on ajuste l'autre sur la droite. Puis,on fait glisser l'équerre sur la règle, et on trace sur ce côté de l'équerre la parallèle cherchée.



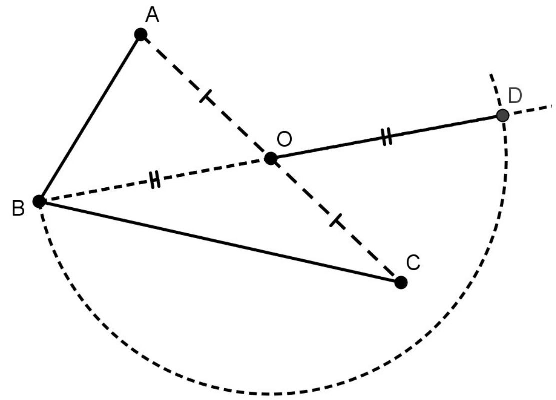
b) Propriétés

Nous avions indiqué sur la figure aux 4 parallélogrammes de dessus les côtés de même longueur. C'était facile à voir en utilisant le quadrillage. On observe que les côtés opposés de ces 4 types de parallélogrammes sont égaux. C'est la première propriété que vérifient tous les parallélogrammes :

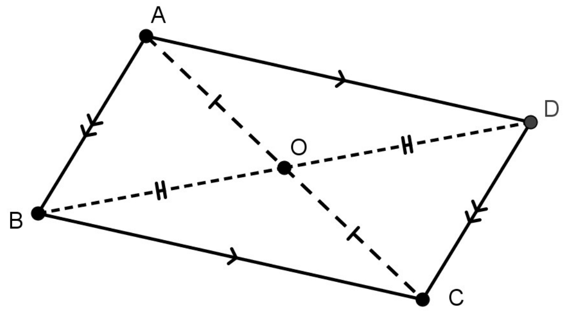
Propriété 1 : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, deux à deux.

Démonstration : pour prouver que cette propriété est vraie pour tout parallélogramme nous allons utiliser une autre construction du parallélogramme ABCD connaissant les points A, B et C.

- Placer le milieu O du segment [AC].
- Construire le symétrique D du point B par rapport à O.



Pourquoi le quadrilatère ABCD est un parallélogramme? Parce que la symétrie possède cette propriété : *le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment parallèle*. D'après cette propriété, [BC] et [AD] étant symétriques par rapport à O sont parallèles. De même pour les segments [AB] et [CD]. Le quadrilatère ABCD a donc ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.



Une autre propriété de la symétrie centrale nous permet de comprendre pourquoi les côtés opposés sont égaux : *le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment de même longueur.* D'après cette propriété, [BC] et [AD] étant symétrique par rapport à O sont égaux : BC = AD. De même pour les segments [AB] et [CD] : AB = CD. Le quadrilatère ABCD a donc ses côtés opposés égaux.

A partir de cette construction nous pouvons également comprendre les autres propriétés, vérifiée par tous les parallélogrammes :

Propriété 2 : Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.

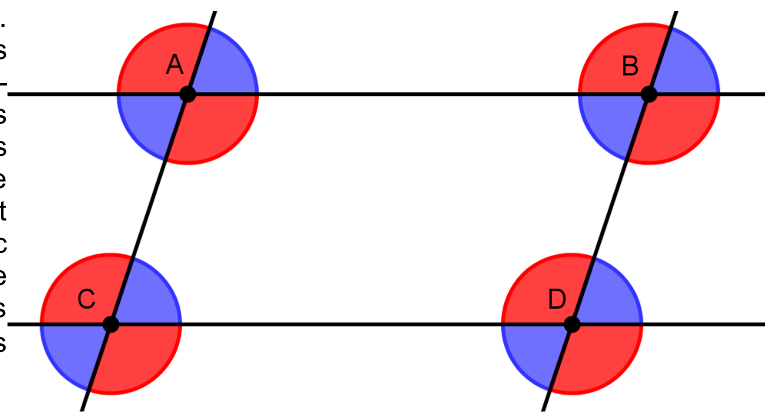
Propriété 3 : Un parallélogramme a un centre de symétrie.

Remarque : Le centre de symétrie est bien évidemment le milieu des diagonales.

Propriété 4 : Les angles opposés d'un parallélogramme ont même mesure et deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires (leur somme fait 180°).

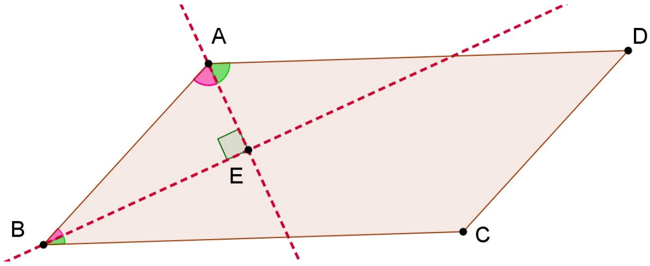
Pour cette dernière propriété concernant les angles, on peut le comprendre à l'aide de la symétrie car *le symétrique d'un angle est un angle de même mesure*. Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$ étant symétriques sont égaux. De même pour $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$. On peut alors utiliser le fait que dans un quadrilatère, la somme des angles est égale à 360° pour prouver la deuxième partie de la propriété. $\widehat{ABD}+\widehat{ACD}+\widehat{BAC}+\widehat{BDC}=360°$ or $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$ et $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$ et donc $2\times\widehat{ABD}+2\times\widehat{BAC}=360°$. En divisant par 2 cette égalité $\widehat{ABD}+\widehat{BAC}=180°$.

La figure ci-contre permet une autre approche. Nous savons que deux droites parallèles coupées par une sécante déterminent des angles alternes-internes égaux et des angles correspondants égaux. Nous savons aussi que les angles opposés par le sommet sont égaux. Nous savons enfin que deux angles adjacents qui forment un angle plat sont supplémentaires. Nous en déduisons donc les égalités d'angles de la propriété comme l'indiquent le coloriage : en bleu tous les angles d'une certaine mesure $\widehat{ABD}$, et en rouge tous les angles d'une mesure supplémentaire $\widehat{BDC}$.



Propriété 5 : les bissectrices d'un parallélogrammes sont perpendiculaires.

Preuve : Cette propriété découle de la précédente
Sur notre figure $\widehat{BAE} = ½\ \widehat{BAD}$ et $\widehat{ABE} = ½\ \widehat{ABC}$ (propriété des bissectrices), or $\widehat{BAD} = 180° - \widehat{ABC}$ (propriété précédente), donc $\widehat{BAE} = ½(180 - \widehat{ABC}) = 90 - \widehat{ABE}$. $\widehat{BAE}$ et $\widehat{ABE}$ sont donc complémentaires et par conséquent $\widehat{AEB}$ est droit.

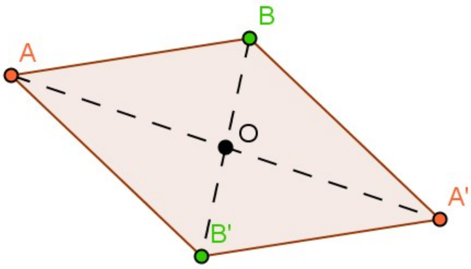


c) <u>Reconnaissance d'un parallélogramme</u>

Pour reconnaître un parallélogramme dans une figure, il faut déjà que cette figure soit un quadrilatère (cela n'est pas trop difficile à démontrer). Il faut ensuite que ce quadrilatère vérifie une propriété *caractéristique* des parallélogramme, c'est-à-dire, qui caractérise à coup sûr un parallélogramme ou, qui permette à elle-seule de prouver que le quadrilatère est un parallélogramme. Ces propriétés sont les suivantes :

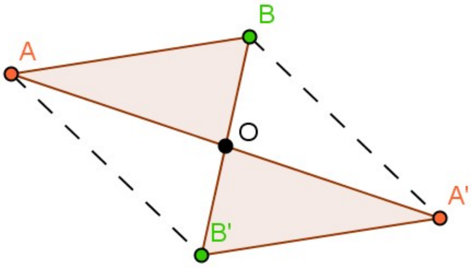
1. Si un quadrilatère a <u>ses côtés opposés parallèles</u> deux-à-deux alors c'est un parallélogramme.
2. Si un quadrilatère a <u>ses diagonales qui ont le même milieu</u> alors c'est un parallélogramme.
3. Si un quadrilatère **non croisé** a <u>ses côtés opposés de même longueur</u> alors c'est un parallélogramme.
4. Si un quadrilatère **non croisé** a <u>un centre de symétrie</u> alors c'est un parallélogramme.
5. Si un quadrilatère **non croisé** a <u>deux côtés opposés parallèles et de même longueur</u> alors c'est un parallélogramme.

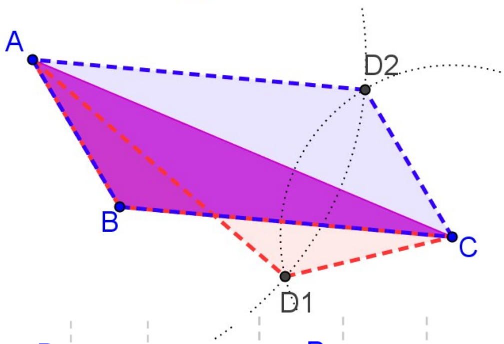
<u>Remarques sur ces propriétés caractéristiques</u> :



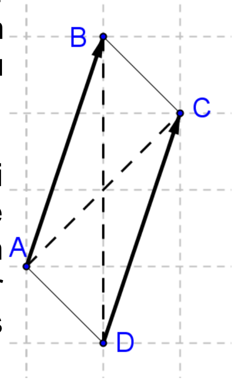
La propriété 1 vient de la définition.

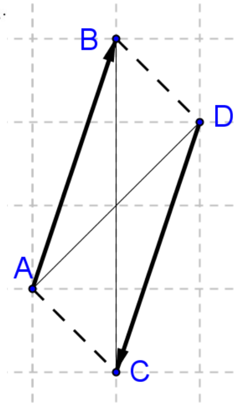
La propriété 2 et la propriété 4 disent à -peu-près la même chose : pour que 4 points soient les sommets d'un parallélogramme, il faut qu'ils forment deux paires de points symétriques par rapport à un même centre. Mais alors (voir figure) il peut se trouver que le quadrilatère ne soit pas un parallélogramme. S'il est croisé (figure du bas) ce sont deux côtés qui se croisent en leur milieu et non les diagonales. C'est la raison de cette précision supplémentaire nécessaire pour la plupart de ces propriétés caractéristiques et mise en gras : le quadrilatère doit être **non-croisé**.





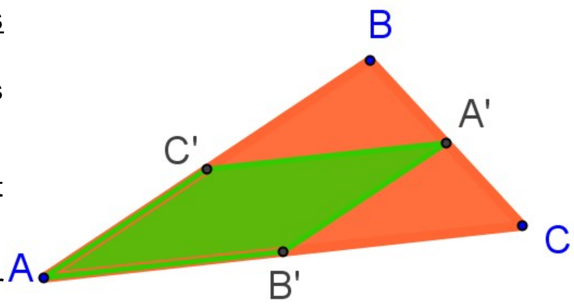
La propriété 3 implique que deux côtés opposés soient de même longueur, mais ce n'est pas suffisant, la condition de non-croisement doit aussi être respectée. Lorsque les côtés opposés sont de même longueur nous nous trouvons dans la configuration de la figure ci-contre. Si on cherche à placer un point D tel que AB=CD et BC=AD, il y a deux points qui sont à la distance AB du point C et à la distance BC du point A. Les cercles de centres A et C et de rayon AB et BC se coupent en deux points différents, notés D_1 et D_2. Le point D_1 conduit à un quadrilatère $ABCD_1$ croisé tandis que le point D_2 conduit au parallélogramme.



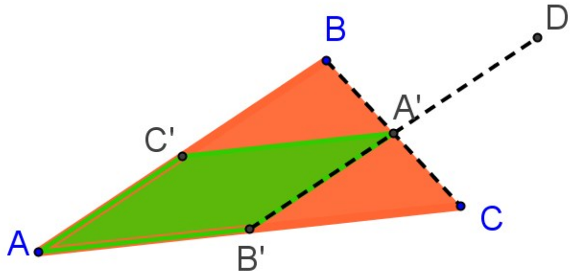


La propriété 5 ne parle que de une paire de côtés opposés. Si la double condition est respectée (parallélisme et même longueur), il faut encore respecter la condition de non croisement comme le montrent les deux figures ci-contre. Sur celle de gauche, ABCD est un parallélogramme car les côtés opposés [AB] et [CD] sont parallèles et égaux et que les diagonales [AC] et [BD] se croisent. Sur celle de droite, ABCD n'est pas un parallélogramme malgré le fait que les côtés opposés [AB] et [CD] soient parallèles et égaux car les diagonales[AC] et [BD] ne se croisent pas, ce sont les autres côtés opposés qui se croisent.

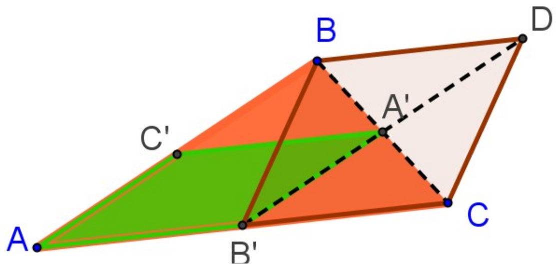
<u>Exemple d'utilisation de ces propriétés caractéristiques pour prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme</u>:
Considérons un triangle ABC et A', B' et C' les milieux de ses côtés comme sur la figure suivante.
Prouvons que le quadrilatère AB'A'C' est un parallélogramme.
Pour cela nous allons construire le symétrique de B' par rapport à A', appelons D ce point.



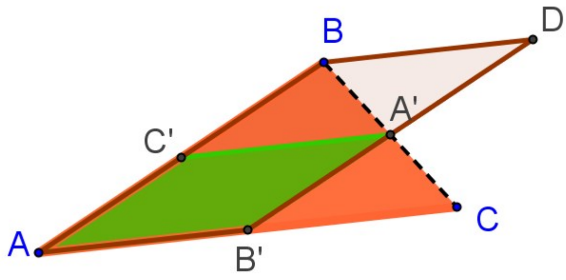
D'après notre construction, BDCB' est un parallélogramme car c'est un quadrilatère qui a ses diagonales se coupant en leur milieu [propriété n°2]. En effet, A' est le milieu de [BC] par définition et de même, A' est le milieu de [B'D].



Comme BDCB' est un parallélogramme, nous déduisons que [B'C] et [BD], deux de ses côtés opposés, sont parallèles et de même longueur. Par ailleurs, B' étant le milieu de [AC], les segments [AB'] et [B'C] sont parallèles et de même longueur aussi. Le quadrilatère AB'DB' a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur : les côtés [AB'] et [BD]. De plus, ce quadrilatère est non-croisé car par construction, D est situé à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ et donc le segment [B'D] aussi. Ce segment rejoint un point d'un côté avec un point intérieur, il ne peut donc pas couper l'autre côté [AB) de l'angle. Le quadrilatère AB'DB' est donc un parallélogramme [propriété n°5].



Comme AB'DB' est un parallélogramme, nous déduisons que [B'D] et [AB], deux de ses côtés opposés, sont parallèles et de même longueur. Notre quadrilatère AB'A'C' a ses côtés [B'A'] et [AC'] construits sur ceux de AB'DB' ils sont donc parallèles. Comme AC' est la moitié de AB et que B'A' est la moitié de B'D, ces côtés ont même longueur. Le quadrilatère AB'A'C' a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, et il n'est *évidemment** pas croisé, c'est donc un parallélogramme [propriété n°5].
*Le terme *évidemment* évacue le problème de la démonstration qui n'est pas toujours facile (on l'a vu plus haut pour le quadrilatère AB'DB') du non-croisement des côtés d'un quadrilatère. Mais ici il s'agit d'un argument de convexité : le triangle ABC est convexe et donc, le segment [A'B'] ne peut pas couper un des côtés du triangle, ici le côté [AB] et donc [A'B'] ne peut pas couper [AC'].



2) <u>Parallélogrammes particuliers</u>

a) <u>Rectangles</u>

Nous allons nous intéresser ici à une catégorie de parallélogrammes bien connus : les rectangles qui répondent à la définition suivante :

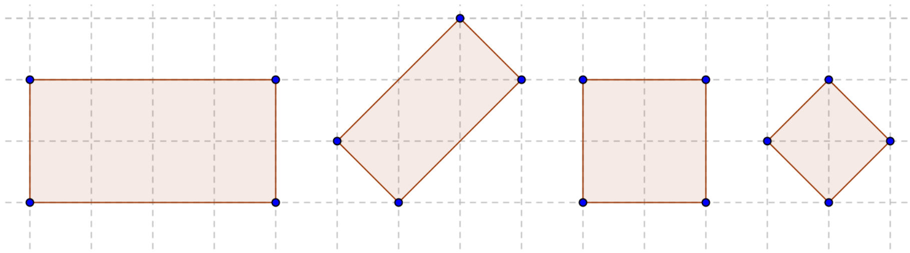
Un rectangle est un quadrilatère qui a 4 angles droits.

Du fait de ces angles droits, les côtés opposés du rectangle sont parallèles*. Le rectangle est donc un parallélogramme particulier.

*En effet, lorsque 2 droites sont perpendiculaires à une même 3ème droite, elles sont parallèles entre elles.

Sur notre illustration figurent 4 rectangles. Les 2 derniers sont d'un type particulier : ce sont des carrés...

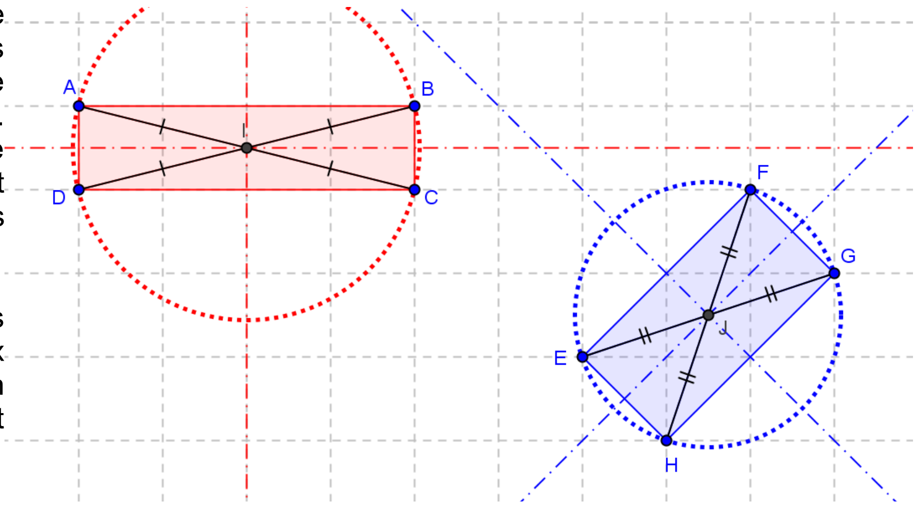
Remarque : disons-le une fois pour toutes, les carrés sont des rectangles particuliers. Autrement dit, tous les carrés sont des rectangles. Le contraire, évidemment, n'est pas vrai (tous les rectangles ne sont pas des carrés!)



Propriété caractéristique : le rectangle a deux axes de symétrie perpendiculaires qui sont les *médiatrices* de ces côtés (ils passent par les milieux des côtés et sont perpendiculaires aux côtés) et des diagonales de longueurs égales.

Les axes de symétrie passent par le centre de symétrie (l'intersection des diagonales). Ce centre est à égale distance des 4 sommets du rectangle. Il est donc le centre d'un cercle circonscrit au rectangles. Autrement dit, les rectangles sont inscriptibles dans un cercle.

Sur notre illustration, nous avons tracés les cercles circonscrits aux rectangles ABCD et EFGH en pointillés, les axes de symétrie sont en tiretets.



b) Losanges

Une catégorie de parallélogrammes particuliers moins habituels, les losanges, répondent à la définition suivante :

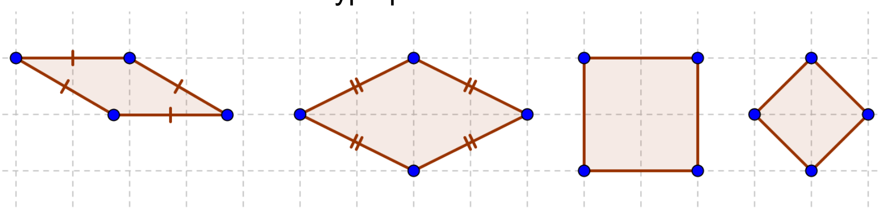
Un losange est un quadrilatère qui a 4 côtés égaux.

Du fait de ces côtés égaux, les diagonales du losange vont jouer un rôle particulier : elles sont des axes de symétrie du losange. En effet, pour un losange ABCD, la définition implique que AB=BC=CD=EF et donc, deux sommets opposés -par exemple A et C- sont sur la médiatrice de la diagonale qui les oppose (A est sur la médiatrice de [BD] car AB=AD, de même pour C), disposés de façon symétrique (à cause des égalités de longueur). Il y a donc deux axes de symétrie perpendiculaires et donc un centre de symétrie*. Le losange est donc un parallélogramme particulier.

*Nous n'avons pas vu encore cette propriété qui est pourtant importante : si une figure admet deux axes de symétrie perpendiculaires alors elle a un centre de symétrie.

Sur notre illustration figurent 4 losanges. Les 2 derniers sont d'un type particulier : ce sont des carrés...

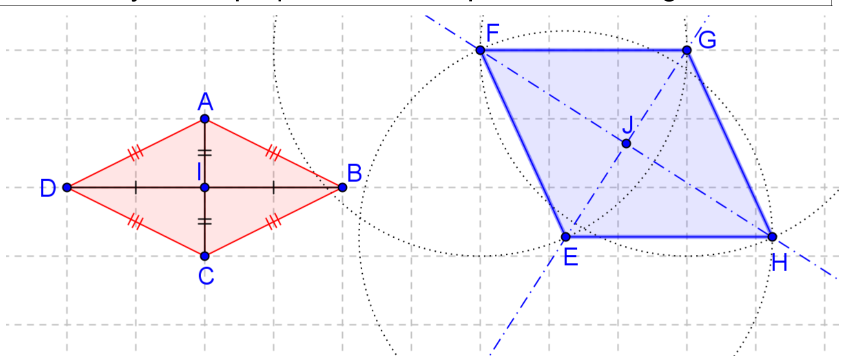
Remarque : disons-le une fois pour toutes, les carrés sont des losanges particuliers. Autrement dit, tous les carrés sont des losanges. Le contraire, évidemment, n'est pas vrai (tous les losanges ne sont pas des carrés!)



Propriété caractéristique : le losange a deux axes de symétrie perpendiculaires qui sont ses diagonales.

Les axes de symétrie passent par le centre de symétrie (l'intersection des diagonales).

Sur notre illustration, nous avons tracés les axes de symétrie du losange EFGH en tiretets. Nous avons tracé ce losange en utilisant des cercles pour reporter les longueurs FG=FE à partir de G et de E afin de construire le point H.



c) Reconnaissances des parallélogrammes

Quelles sont les propriétés qui doivent être vérifiées pour qu'une certaine figure soit un parallélogramme ?

Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu alors c'est un parallélogramme.
Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles 2 à 2 alors c'est un parallélogramme.
Si un quadrilatère **convexe** a ses côtés opposés égaux 2 à 2 alors c'est un parallélogramme.
Si un quadrilatère **convexe** a 2 côtés opposés parallèles et égaux alors c'est un parallélogramme.

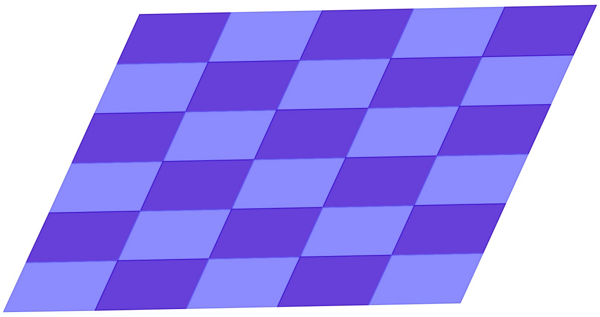
Quelles sont les propriétés qui doivent être vérifiées pour qu'une certaine figure soit un rectangle ?

Si un quadrilatère a 3 angles droits alors c'est un rectangle.
Si un **parallélogramme** a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.
Si un **parallélogramme** a 1 angle droit alors c'est un rectangle.

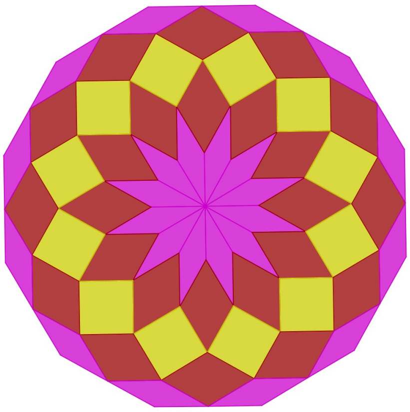
Quelles sont les propriétés qui doivent être vérifiées pour qu'une certaine figure soit un losange ?

Si un quadrilatère a ses 4 côtés de même longueur alors c'est un losange.
Si un **parallélogramme** a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.
Si un **parallélogramme** a 2 côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.

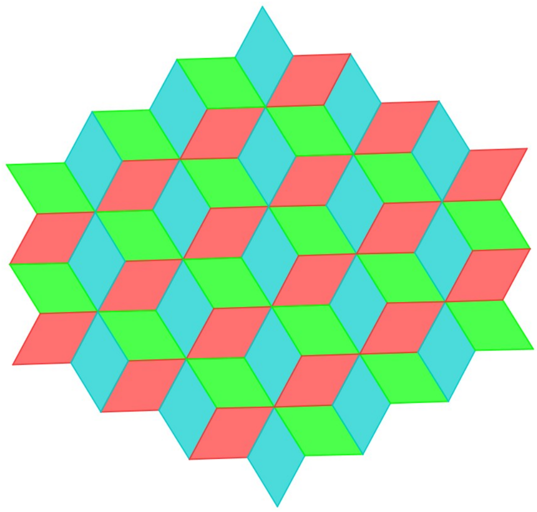
d) Divers

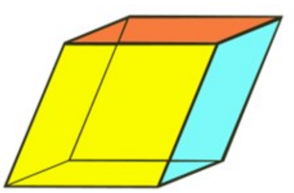


Des parallélogrammes quelconques identiques pavent le plan (ils remplissent un espace plan sans trous ni chevauchements). Des losanges ou des rectangles identiques *a fortiori* pavent le plan. Certains pavages de losanges le pavent en étoile comme le montre l'illustration.

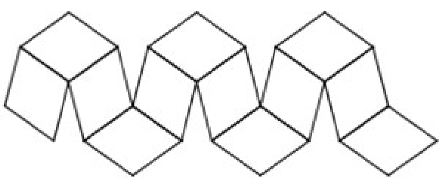


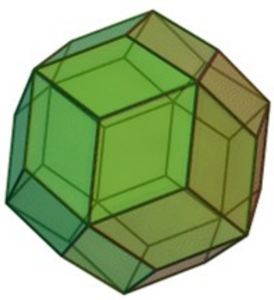
Les losanges permettent de concevoir de belles rosaces comme celle qui est tracée ci-dessous contenant 5 anneaux de 12 losanges qui sont associés 2 à 2 d'une façon complémentaires (contact par les pointes aiguës vers le centre, par les pointes obtuses vers la périphérie).

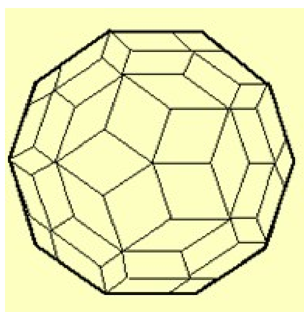




Dans l'espace à 3 dimensions, tout le monde connaît les parallélépipèdes rectangles formés de rectangles. On connait moins les parallélépipèdes non-droits qui sont formés par des parallélogrammes quelconques. Les rhomboèdres sont formés des parallélépipèdes dont les faces sont des losanges. Certains polyèdres semi-réguliers sont formés d'une même sorte de losange : le dodécaèdre rhombique[1] (12 faces qui sont des losanges dont le petit angle mesure environ 70,31°) ou le triacontaèdre rhombique (30 faces qui sont des losanges dont le petit angle mesure environ 63,43°) tandis que d'autres sont fait de 2 sortes de losanges comme l'imposant ennéacontaèdre rhombiques (90 losanges de 2 sortes).







1 Voir ici la façon de plier une feuille pour former un dodécaèdre rhombique qui peut servir de calendrier (12 faces..)