1) Transformations d'égalités

a) Propriétés des égalités

Lorsqu'on a une égalité qui est vraie, par exemple $a = b$, alors on peut écrire les égalités suivantes qui seront vraies aussi pour tous nombres relatifs a, b et c (sauf dans un cas particulier où $c \neq 0$) :

- $b = a$. On a le droit d'intervertir les 2 membres d'une égalité
- $a+c = b+c$. On a le droit d'ajouter le même nombre aux 2 membres d'une égalité
- $a \times c = b \times c$. On a le droit de multiplier par le même nombre les 2 membres d'une égalité

Remarque : la 2ème propriété comprend également l'ajout d'un nombre négatif, on doit comprendre qu'il s'agit de somme algébrique. Pour ce qui est de la 3ème propriété, cela comprend également la multiplication par l'inverse, c'est-à-dire la division. Mais on ne peut pas diviser par 0, donc il faut reformuler la propriété pour ce cas : on a le droit de diviser par un même nombre non nul les 2 membres d'une égalité.

b) Application à la résolution des équations du 1er degré

Définition : une **équation** est une égalité dans laquelle figure un nombre (ou plusieurs) inconnu.

Exemples : $2x+1=0$ est une équation dans laquelle le nombre inconnu est x.

$2x+5y=3$ est une équation dans laquelle il y a deux nombres inconnus x et y.

$3x^2+2x+1=0$ est une équation du second degré dans laquelle le nombre inconnu est x.

Définition : Le **degré** de l'équation est l'exposant maximum de l'inconnu.

Dans une équation du 1er degré, le nombre x^2 n'intervient pas. Par exemple l'équation $x^2+2x+1= x^2$ n'est pas vraiment une équation du 2d degré car le terme x^2 disparaît complètement si on l'enlève des 2 côtés de l'égalité (propriété 2).

Définition : **Résoudre** une équation signifie trouver toutes les valeurs du nombre inconnu (ou des nombres inconnus s'il y en a plusieurs) qui vérifient l'égalité. On appelle ces valeurs les **solutions** de l'équation. Résoudre une équation consiste donc à trouver ses solutions.

Exemples : L'équation $2x+1=0$ a pour solution $x=-0,5$. Mais est-ce la seule solution ? Oui.

L'équation $(x-1)^2-5(x-1)=0$ a pour solution évidente $x=1$ (car $(1-1)^2-5(1-1)=0^2-5\times0=0$). Mais est-ce la seule solution ? Non, il y a aussi $x=6$. Vérification : $(6-1)^2-5(6-1)=5^2-5^2=0$

Comment être sûr de trouver toutes les solutions ? En utilisant les propriétés vues au paragraphe précédent. La méthode pour résoudre une équation du 1er degré à 1 inconnue est la suivante : isoler dans un membre ce qui contient le nombre inconnu (en ajoutant ou en enlevant ce qu'il faut) puis diviser l'égalité par un nombre tel qu'il ne reste plus que le nombre inconnu dans un membre. On trouve ainsi la solution unique de ce genre d'équations.

Exemple : soit l'équation suivante à résoudre $3x+5 = -1$. On commence par ajouter -5 des 2 côtés. On obtient : $3x+5-5 = -1-5$, soit $3x = -6$. On divise ensuite par 3. On obtient : $x = -6 \div 3 = -2$. C'est fini, la solution unique de cette équation est donc -2.

c) Tester une égalité

Nous avons parlé des égalités qui sont vraies pour certaines valeurs et qui sont fausses pour d'autres valeurs. Lorsqu'une égalité est donnée, on peut remplacer les nombres inconnus par des valeurs particulières et voir (en effectuant les calculs) si l'égalité est vraie ou fausse. Cela s'appelle tester une égalité.

Exemple : testons l'égalité suivante $7=n\times(3-k)$ pour savoir si elle est vérifiée pour des valeurs entières des nombres inconnus k et n. On peut

n	k=3-7/n	n	k=3-7/n
0	-	0	-
1	-4	-1	10
2	-0,5	-2	6,5
3	0,67	-3	5,33
4	1,25	-4	4,75
5	1,6	-5	4,4
6	1,83	-6	4,17
7	2	-7	4
8	2,13	-8	3,88
9	2,22	-9	3,78
10	2,3	-10	3,7
11	2,36	-11	3,64
12	2,42	-12	3,58
13	2,46	-13	3,54
14	2,5	-14	3,5
15	2,53	-15	3,47
16	2,56	-16	3,44
17	2,59	-17	3,41
18	2,61	-18	3,39
19	2,63	-19	3,37

essayer au hasard différentes valeurs de ces nombres, mais le plus efficace est d'exprimer une inconnue à l'aide de l'autre. On effectue pour cela des transformations qui utilisent les propriétés des égalités vues plus haut. En divisant par n, on obtient $\frac{7}{n}=3-k$. Si on enlève $\frac{7}{n}$ et qu'on ajoute k des 2 côtés de l'égalité, on obtient $k=3-\frac{7}{n}$ qui permet de calculer k lorsqu'on connaît n. Utilisons alors le tableur pour répondre à la question initiale (voir tableau). On trouve alors quelques couples $(n\ ;\ k)$ solutions du problème : (1 ; −4), (7 ; 2) pour les valeurs positives de n, et (−1 ; 10), (−7 ; 4) pour les valeurs négatives. Cette méthode ne permet pas de déterminer toutes les solutions, ou d'être sûr de les avoir trouver toutes, mais elle permet d'explorer efficacement la situation.

2) Factorisation et développement

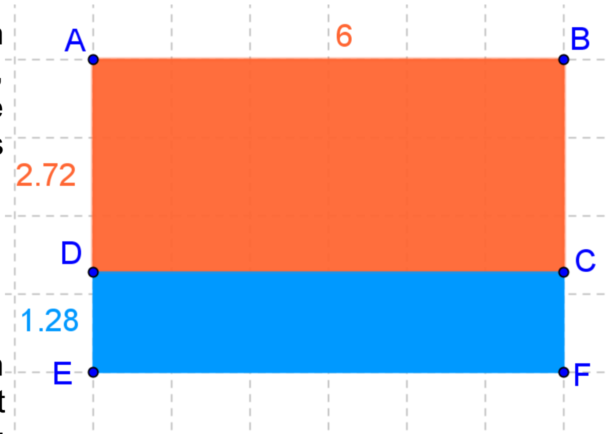
a) Distributivité

<u>Remarque introductive</u>: Lorsque nous calculons un produit 'à la main', nous décomposons un des facteurs en somme. Par exemple, pour calculer 75×12 nous décomposons 12 en la somme 10+2 et effectuons 75×10 et 75×2, puis nous ajoutons les produits partiels 750 et 150 pour trouver le résultat final 900. Nous avons donc considéré que 75×(10+2)= 75×10+75×2. Cette propriété que nous utilisons - depuis la classe de CE2 - s'appelle la distributivité de la multiplication sur l'addition et peut s'énoncer ainsi :

75
<u>×12</u>
150
<u>750</u>
900

<u>Propriété1</u> : a, b et c étant trois nombres quelconques,
le *produit* a × (b+c) est égal à la *somme* a×b + a×c. Autrement dit : a × (b+c) = a×b + a×c.

On peut illustrer cette propriété visuellement par un calcul d'aire de rectangle : a est la longueur d'un côté, l'autre côté mesure (b+c). On comprend bien que l'aire du grand rectangle est égale à la somme des aires des deux plus petits rectangles qui le compose.
Ici, l'aire du rectangle ABCD est 6×2,72.
L'aire du rectangle DCFE est 6×1,28.
L'aire du grand rectangle ABFE est 6×(2,72+1,28).



Un des intérêts de cette propriété est de simplifier un calcul. Par exemple ici, la somme 6×2,72 + 6×1,28 est simplifiée quand on l'écrit sous la forme du produit 6×(2,72+1,28) qui peut se calculer de tête car 2,72+1,28=4 et donc 6×(2,72+1,28)=6×4=24.

Autre exemple : calculons mentalement 16×21. On décompose un des facteurs, par exemple 21, en une somme : 16×21= 16×(20+1). On distribue alors la multiplication: 16×(20+1)=16×20+16×1. On effectue alors les produits simples 16×20=320 et 16×1=16 et puis la somme 320+16=336.

Remarque : cette propriété est valable aussi lorsqu'on remplace l'addition par la soustraction. Nous avons vu qu'en effet, une soustraction n'est rien d'autre que l'addition de l'opposé. Par conséquent la propriété suivante est vraie.

<u>Propriété2</u> : a, b et c étant trois nombres quelconques,
le *produit* a × (b-c) est égal à la *différence* a×b - a×c. Autrement dit : a × (b-c) = a×b - a×c.

Exemple: 16×19 = 16×(20-1) = 16×20 - 16×1 = 320 - 16 = 304.

Illustration avec le calcul des aires de rectangles: Si nous avions voulu calculer l'aire du rectangle ABCD, nous aurions soustrait l'aire du petit rectangle DCFE au grand rectangle ABFE.

6×4 - 6×1,28 = 6×(4 - 1,28) = 6×2,72

b) Développement et factorisation

La forme a × (b+c) est un **produit**. C'est le produit de deux *facteurs*, le premier est a et le second est la somme b+c. On met des parenthèses autour de b+c car sinon - la multiplication étant prioritaire - on ne multiplierai a que par b car a×b+c=(a×b)+c. On dit que cette forme est *factorisée*.

La forme a×b + a×c est une **somme**. C'est la somme de deux *termes*, le premier est le produit a×b et le second est le produit a×c. On ne met pas de parenthèses autour des produits car - la multiplication étant prioritaire - ils s'effectuent en premier. On dit que cette forme est *développée*.

Transformer le produit en somme - c'est-à-dire écrire a×(b+c) = a×b+a×c - c'est *développer*. Par exemple, lorsqu'on écrit 16×(20-1) = 16×20 - 16×1 on a *développé*. Cette transformation d'écriture s'appelle un *développement*.

La transformation inverse s'appelle une *factorisation*. *Factoriser*, c'est transformer une somme en produit - c'est-à-dire écrire a×b+a×c = a×(b+c). Lorsqu'on fait cela, on dit qu'*on met a en facteur*. On remarque que a est un *facteur commun* des deux produits a×b et a×c, et donc qu'on peut l'extraire de la somme.

Développer

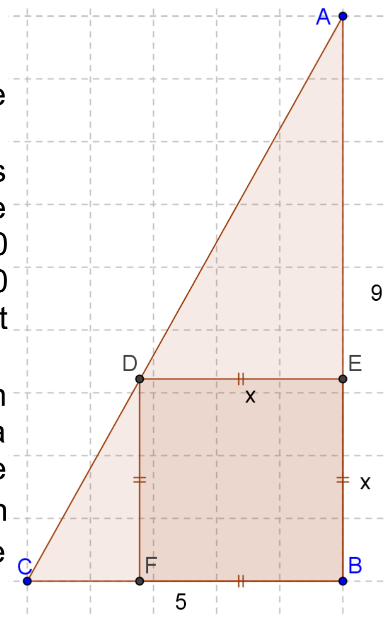
a×b+a×c = a×(b+c)

Factoriser

Variantes : Il y a des variantes de cette propriété obtenues en intervertissant les facteurs d'un des produits. Par exemple a×b+c×b = (a+c)×b = b×(a+c) ou encore a×b+b×c = (a+c)×b = b×(a+c) ou encore a×b - b×c = (a - c)×b = b×(a - c).
On peut aussi remplacer un des termes de la somme par une autre somme et obtenir des égalités de ce genre : a×d+b×d +c×d = (a+b+c)×d ou encore a×b + a×c - a×d= (b+c-d)×a

Généralement, dans une expression littérale, certains nombres seulement sont remplacés par une lettre. Souvent il n'y a qu'une seule lettre, qui peut éventuellement se retrouver à plusieurs endroits.
Par exemple, dans l'expression 3×a+5×a, il y a le nombre a qui est un facteur commun. On peut donc factoriser cette expression en mettant a en facteur : 3×a+5×a = (3+5)×a = 8×a.
Un autre exemple, dans l'expression 8×a+16×b, le facteur commun ici n'est pas un nombre remplacé par une lettre car à priori il n'y a rien de commun entre a et b. Le facteur commun est ici 8 (ou 2, ou 4) et donc on va mettre 8 en facteur : 8×a+16×b = 8×a+8×2×b = 8×(a+2×b).

c) Applications



Les transformations d'écritures que nous venons d'étudier ont de nombreuses applications :

- Résoudre des équations. Certaines expressions présentes dans une équation doivent être développées, d'autres doivent être factorisées. Exemple : pour résoudre l'équation $5(2x-1)-3(x-2)=0$ on commence par développer $10x-5-3x+6=0$, soit $10x-3x+1=0$ ensuite on factorise $(10-3)x+1=0$, soit $7x+1=0$ et enfin on conclut $x=-1\div 7$.
- Simplifier des expressions numériques. Dans une situation, on obtient une expression qui peut être simplifiée (raccourcie) grâce à des développements/factorisations. Exemple : l'aire du triangle ABC ci-contre privé du carré BEDF vaut $x\frac{(9-x)}{2}+x\frac{(5-x)}{2}$, expression que l'on peut simplifier grandement en la factorisant de la manière suivante $x\frac{(9-x+5-x)}{2}=x\frac{(14-2x)}{2}=x(7-x)$.
- Prouver des propriétés. On peut transformer une égalité pour obtenir un certain résultat. Exemple : montrons que le produit de 2 nombres impairs p=2n+1 et p'=2n'+1 est toujours un nombre impair égal à un multiple de 4 plus 1. p×p'=(2n+1)(2n'+1)=(2n+1)×2n+(2n+1)×1=2n×2n+1×2n+2n×1+1×1=4n²+2n+2n+1=4n²+2n(1+1)+1=4n²+4n+1=4(n²+n)+1=4n''+1. Dans ces transformations successives nous avons développé, puis factorisé 2 fois.