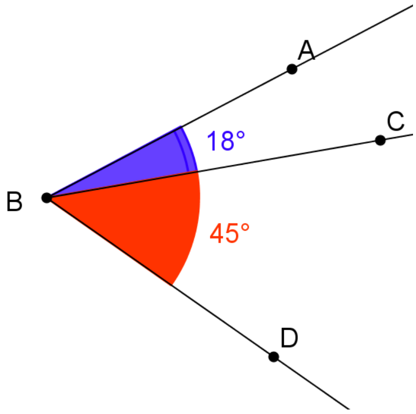
Chapitre 6 Les angles

1) Définitions et premières propriétés

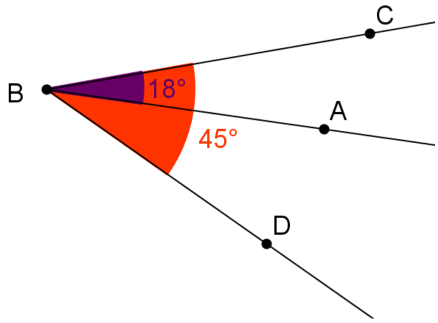
a) Angles adjacents (rappel) : Deux angles sont dits "adjacents" si ils ont un côté en commun et qu'ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun (vu en cours de 6ème).
Autrement dit, si $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont *adjacents* alors B=E car ils ont le même sommet (l'égalité entre des points signifie que ces points sont confondus) et une des égalités suivante est vraie : [BA)=[ED) ou [BA)=[EF) ou [BC)=[ED) ou [BC)=[EF), car ils ont un côté en commun (l'égalité entre 2 demi-droites signifie qu'elles sont confondues).

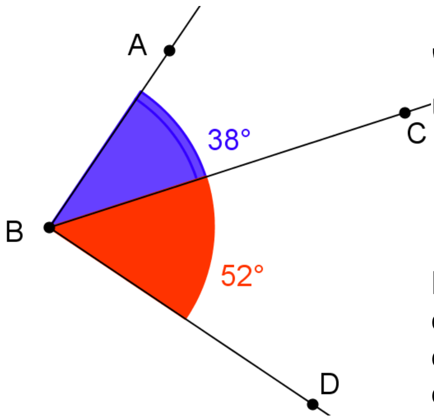
Propriété : Si deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBD}$ sont adjacents, alors on peut ajouter leurs mesures pour trouver la mesure de l'angle composé de ces deux angles: $\widehat{ABD}=\widehat{ABC}+\widehat{CBD}$.



Sur l'exemple de la 1ère figure de droite, $\widehat{ABC}$ =18° et $\widehat{CBD}$ =45° et comme ces angles sont adjacents, alors $\widehat{ABD}=\widehat{ABC}+\widehat{CBD}$ =18+45=63°.

Sur l'exemple de la 2ème figure de droite, $\widehat{ABC}$ =18° et $\widehat{CBD}$ =45° mais ces angles ne sont pas adjacents car ils se superposent (ils sont du même côté de leur côté commun). La somme de leurs mesures ne donne pas celle de $\widehat{ABD}$. Ce sera la différence de leurs mesures qui donnera celle de $\widehat{ABD}$, car alors ce sont $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABD}$ qui sont adjacents.
Ici, on a donc : $\widehat{ABD}=\widehat{CBD}-\widehat{ABC}$ =45-18=27°.





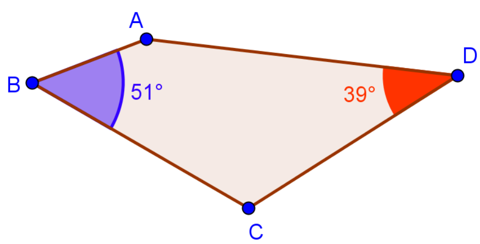
b) Angles complémentaires : Deux angles sont dits "complémentaires" si la somme de leurs mesures vaut un angle droit.

>> Autrement dit, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont *complémentaires* si $\widehat{ABC}+\widehat{DEF}$ =90°.

Lorsqu'on découpe un angle droit en deux angles adjacents, on obtient deux angles complémentaires. (par définition). C'est le cas de la figure de gauche avec un découpage en 2 angles adjacents dont les mesures sont complémentaires : 38+52=90.

Cette propriété sera parfois utilisée pour prouver que deux droites sont perpendiculaires. En effet (AB) et (BD) sont perpendiculaires si il existe un point C, non situé sur (AB), tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBD}$ soient adjacents et complémentaires. Nous donnerons un exemple d'utilisation de cette propriété un peu plus loin.

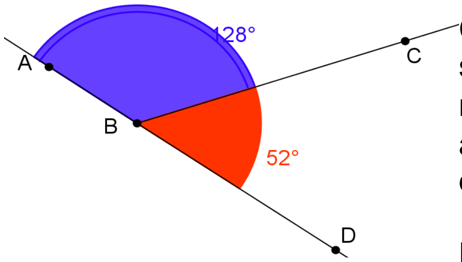
Deux angles complémentaires ne sont pas forcéments adjacents, comme sur l'illustration ci-contre où les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont non-adjacents mais complémentaires. Ce sera le cas, on le vera plus loin, des deux angles aigus d'un triangle rectangle.



c) <u>Angles supplémentaires</u> : Deux angles sont dits "supplémentaires" si la somme de leurs mesures vaut un angle plat.

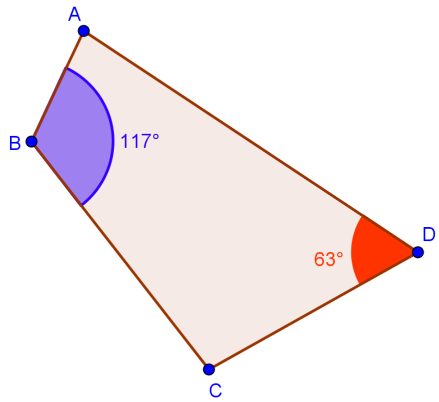
Autrement dit, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont *supplémentaires* si $\widehat{ABC}+\widehat{DEF}=180°$.

Lorsqu'on découpe un angle plat en deux angles adjacents, on obtient deux angles supplémentaires. (par définition). C'est le cas de la figure de gauche avec un découpage en 2 angles adjacents dont les mesures sont supplémentaires : 128+52=180.



Cette propriété sera parfois utilisée pour prouver que des points sont alignés. En effet A, B et D sont alignés si il existe un point C, non situé sur (AB), tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBD}$ soient adjacents et supplémentaires. Nous donnerons un exemple d'utilisation de cette propriété un peu plus loin.

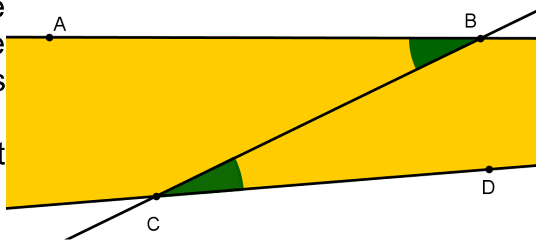
Deux angles supplémentaires ne sont pas forcément adjacents, comme sur l'illustration ci-dessous où les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont non-adjacents et supplémentaires. Ce sera le cas, on le vera plus loin, de deux angles consécutifs d'un parallélogramme.



d) <u>Angles alternes-internes</u> : Deux angles sont dits "alternes-internes" lorsqu'ils sont situés de part et d'autre d'une droite qui coupe une bande comprise entre deux droites.

Sur la figure ci-contre, deux droites déterminent une bande (coloriée en jaune). Ces deux droites sont coupées par une 3ème droite. Deux angles alternes-internes ont été coloriés de la même couleur (en vert).

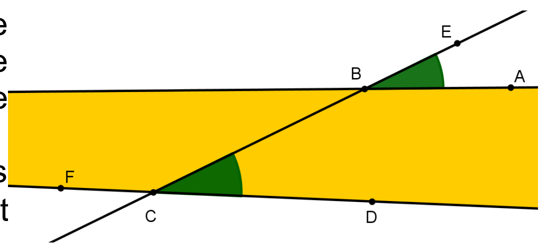
Pour dire la même chose en nommant les points : (AB) et (CD) sont deux droites coupées par (BC). Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont alternes-internes.



e) <u>Angles correspondants</u> : Deux angles sont dits "correspondants" lorsqu'ils sont situés du même côté d'une droite qui coupe une bande comprise entre deux droites, l'un étant dans la bande et l'autre en dehors.

Sur la figure ci-contre, deux droites déterminent une bande (coloriée en jaune). Ces deux droites sont coupées par une 3ème droite. Deux angles correspondants ont été coloriés de la même couleur (en vert).

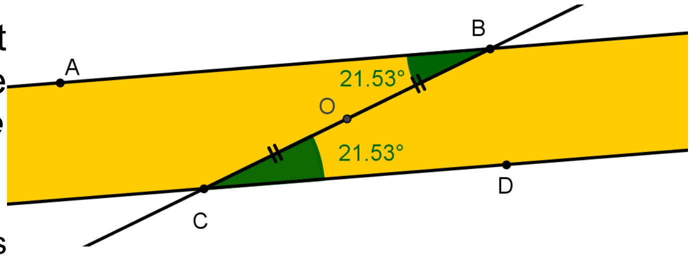
En nommant les points : (AB) et (CD) sont deux droites coupées par (BC). Les angles $\widehat{EBA}$ et $\widehat{BCD}$ sont correspondants.



2) Propriétés

a) Angles alternes-internes

Lorsque les deux droites qui déterminent la bande sont parallèles, la figure obtenue avec la droite sécante possède un *centre de symétrie*.



Dans la figure ci-contre, la droite (BC) coupe les droites (AB) et (CD) qui sont parallèles. Le milieu O du segment [BC] est le centre de symétrie de cette figure. En effet, B et C sont symétriques et le symétrique de (AB) par rapport à O est une droite arallèle à (AB) passant par C, le symétrique de B. C'est donc (CD).

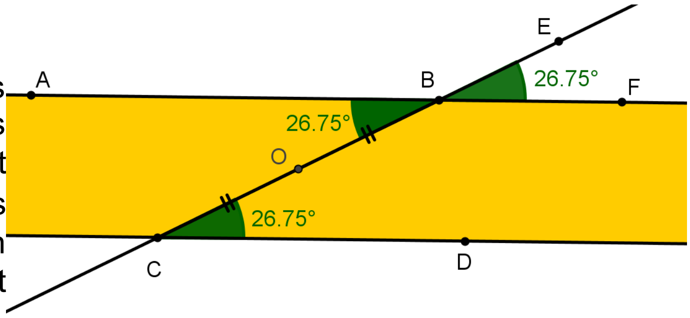
Par la symétrie de centre O, les angles alternes-internes sont symétriques. La symétrie conservant les angles, on en déduit que les angles alternes-internes sont égaux (ils ont la même mesure).

<u>Conséquence</u> : Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles coupées par une droite d_3, les angles alternes-internes qu'elles déterminent sont égaux.

La réciproque de cette propriété est vraie aussi, c'est-à-dire que si des angles alternes-internes sont égaux, alors les deux droites qui sont coupées par une sécante sont parallèles.

b) Angles correspondants

Lorsque les deux droites qui déterminent la bande sont parallèles, nous venons de voir que les angles alternes-internes sont égaux. Nous savons également que des angles opposés par leur sommet sont égaux. Nous allons en déduire que les angles correspondants sont égaux aussi.



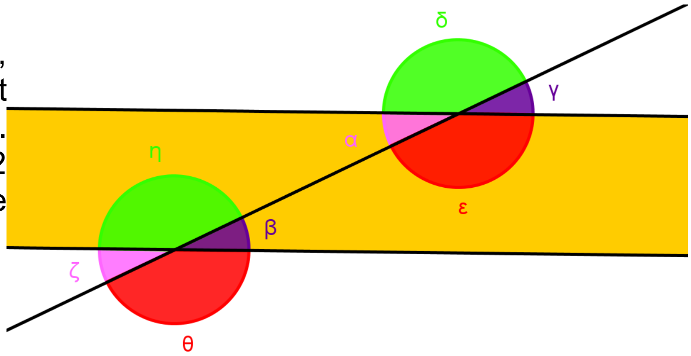
Dans la figure ci-contre, la droite (BC) coupe les droites (AB) et (CD) qui sont parallèles. Les angles alternes-internes $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EBF}$ sont opposés par leur sommet B, ils sont donc égaux. On en déduit que les angles correspondants $\widehat{EBF}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux.

<u>Propriété</u> : Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles coupées par une droite d_3, les angles correspondants qu'elles déterminent sont égaux.

La réciproque de cette propriété est vraie aussi, c'est-à-dire que si des angles correspondantes sont égaux, alors les deux droites qui sont coupées par une sécante sont parallèles.

Pour résumer : si d_1 // d_2 et si d_3 coupe d_1 et d_2, alors les angles alternes-internes sont égaux et les angles correspondants aussi. Réciproquement, une seule égalité d'angle (2 alternes-internes ou 2 correspondants) permet de conclure au parallélisme des droites d_1 et d_2.

Si l'on considère la figure ci-contre où d_1 // d_2 on a :



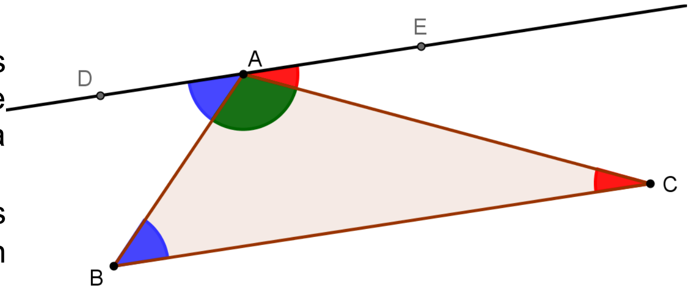
angles alternes-internes	angles correspondants
$\alpha=\beta$ - $\varepsilon=\eta$	$\beta=\gamma$ - $\theta=\varepsilon$ - $\delta=\eta$ - $\alpha=\zeta$

Désolé pour ces symboles inhabituels - ce sont des lettres grecques - mais traditionnellement les mathématiciens utilisent l'alphabet grec pour désigner des angles.

c) Angles d'un triangle

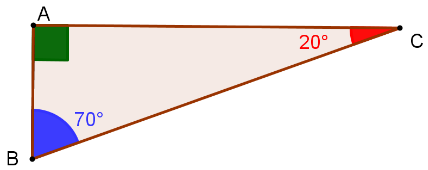
Une propriété entrevue en 6ème nous devient maintenant accessible.

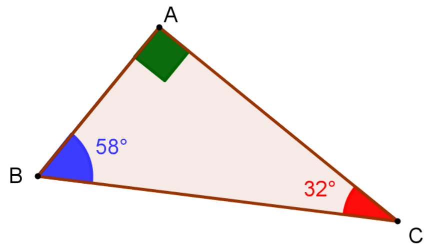
Propriété du triangle : La somme des trois angles d'un triangle vaut un angle plat.



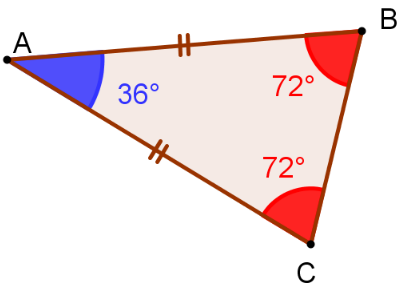
Considérons la figure ci-contre où nous avons tracé la parallèle à un côté passant par le sommet opposé : la droite (DE) étant parallèle à (BC), les angles alternes-internes $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DAB}$ sont égaux (en bleu), de même, les angles alternes-internes $\widehat{BCA}$ et $\widehat{EAC}$ sont égaux (en rouge). Nous avons donc :
$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{EAC} = 180°$ car ces trois derniers angles sont adjacents et forment un angle plat (puisque D, A et E sont alignés).

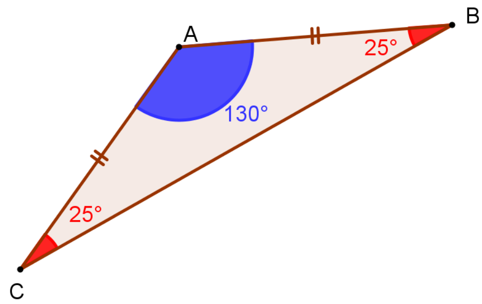
Cette propriété est valable pour tous les triangles. Certains cas particuliers retiendront notre attention :
Dans un **triangle rectangle**, un des angles mesure 90°, les deux autres seront donc complémentaires. Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$.



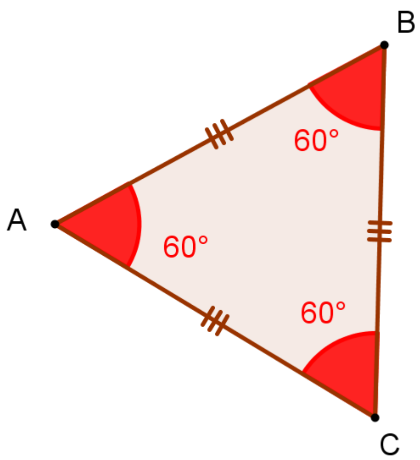


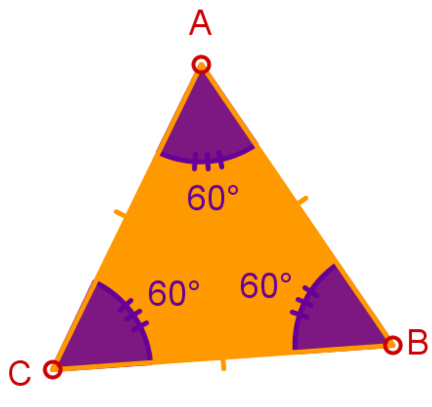
Dans un **triangle isocèle**, deux angles sont égaux. Si on note α la mesure de ces angles égaux alors le troisième mesurera 180-2α.



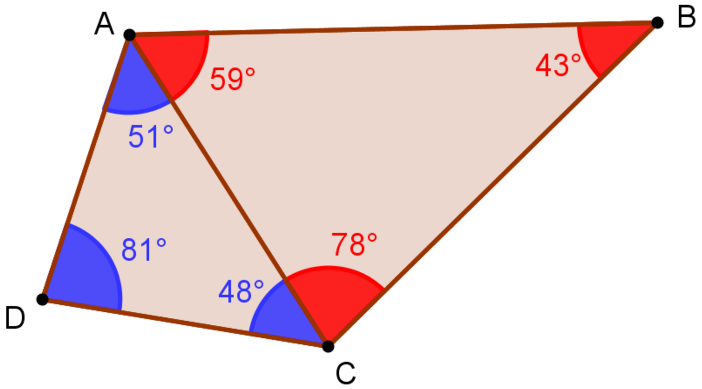


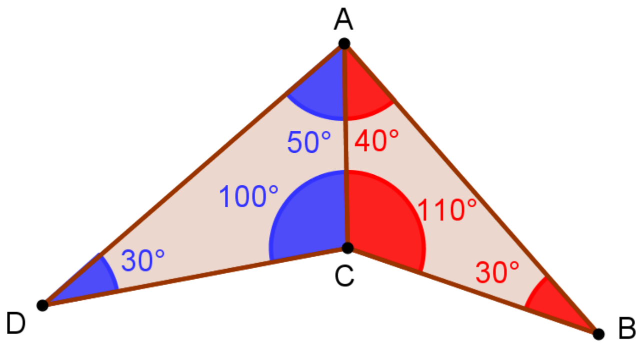
Dans un **triangle équilatéral**, les trois angles sont égaux. Si on note α la mesure de ces angles égaux alors leur somme vaut 3α=180, et donc un seul de ces angles vaut α=180÷3=60. Les angles d'un triangle équilatéral valent tous 60°.





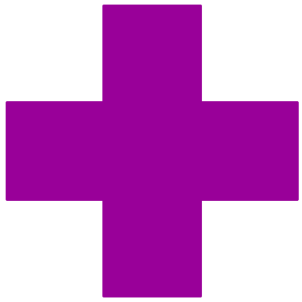
Remarque : la propriété du triangle s'étend à un polygone quelconque. Pour un quadrilatère, la somme des angles est 360°. Pour un polygone à n côtés, la somme des angles vaut (n-2)×180°.

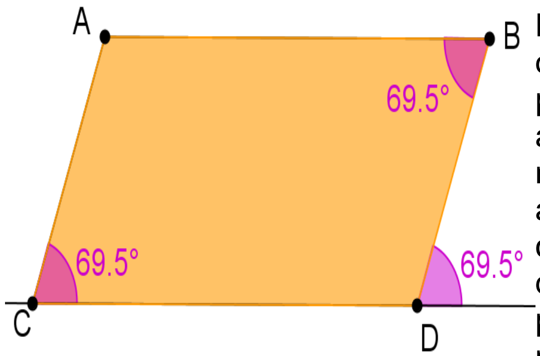




Pour le quadrilatère ABCD de gauche, la somme des angles vaut : (51+49)+43+(78+48)+81 = 360
Il suffit de décomposer le polygone en triangles et d'appliquer la propriété des angles du triangle.

Cela marche aussi évidemment pour un polygone non-convexe comme le quadrilatère de droite dont les angles valent 90, 30, 210 et 30°. Certains angles sont rentrants (supérieurs à 180°) mais la propriété reste valable. Dans le cas de ce dodécagone (polygone à 12 côtés) régulier, les angles sont 90° ou 270°. Leur somme doit valoir (12-2)×180=10×180=1800°. Vérification : 8 angles valent 90°, cela fait 720°, et 4 angles valent 270°, cela fait 1080°, la somme vaut 720+1080=1800°.





Dans un **parallélogramme** (quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles), les angles opposés sont égaux par raison de symétrie. On peut aussi considérer les angles alternes-internes et correspondants comme ceux colorés en rose sur la figure. Si on note α et β la mesure des deux angles différents alors la somme des 4 angles vaut α+β+α+β=360, et donc α+β=180°. Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont donc supplémentaires. Ces propriétés des angles du parallélogramme se comprennent mieux lorsqu'on envisage la supplémentarité des angles consécutifs sur la figure complète.