1) Les nombres négatifs

a) Définitions

Remarques introductives: Lorsque nous effectuons une soustraction en enlevant plus que ce que l'on a, par exemple si on enlève 8 à 3 (on calcule 3−8=?), la calculatrice donne un résultat (3−8=−5) : un nombre avec un signe moins devant (−5). Ce nombre est négatif. Il est inférieur à zéro, c'est pour cela qu'on lui met un signe moins. Nous rencontrons ce genre de nombre aussi dans la vie courante : température négative, étage d'un immeuble en dessous du rez-de-chaussée...

Définition1 : un nombre *négatif* est un nombre précédé d'un signe moins (−).

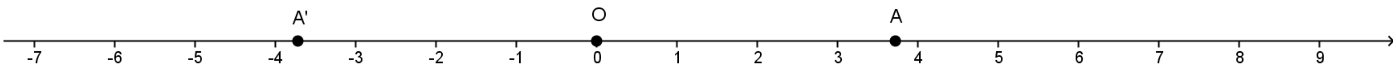
Il y a des entiers négatifs, des décimaux négatifs, des fractions négatives, etc.
Exemples: −3 et −12 sont des entiers négatifs; −3, −0,5 et −10,25 sont des décimaux négatifs.

Par opposition aux nombres négatifs, les autres - ceux qui ne sont pas négatifs - sont appelés positifs. Les nombres *positifs* peuvent être précédés d'un signe plus (+3), mais généralement, on ne met rien devant (+3=3). Les entiers *naturels* (ceux que l'on utilise pour compter les objets, depuis la nuit des temps) sont par définition les entiers positifs.

Définition2 : si deux nombres ne diffèrent que par leur signe, on dit qu'ils sont *opposés*.

Propriétés : Tous les nombres positifs ont un opposé négatif, et réciproquement. L'opposé de 3 est −3 et réciproquement, l'opposé de −3 est 3.
L'opposé de l'opposé d'un nombre est le nombre lui même. Par exemple −(−3)=3.
La somme de deux nombres opposés est nulle. Par exemple (−3)+3=0.

Sur un axe gradué, on peut disposer les nombres négatifs de la façon suivante :



Sur cet axe gradué, nous avons mis deux points A et A', symétriques par rapport à une droite perpendiculaire à l'axe passant par l'origine de cet axe, le point O. Ces deux points sont repérés par des abscisses (des nombres) opposées. Ici l'abscisse de A est environ 3,7 et celle de A' est donc −3,7.

Pour résumer tout ce que nous venons de dire, en notant x un nombre quelconque :
si $x>0$ alors $-x<0$ et si $x<0$ alors $-x>0$.

Le seul nombre qui soit à la fois positif et négatif est 0 qu'on peut écrire −0 (mais cela n'a aucun intérêt). 0 est le plus grand nombre négatif et le plus petit nombre positif.

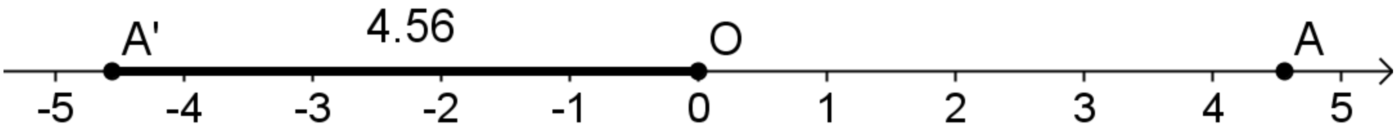
Définition3 : un nombre *relatif* est un nombre qui peut être positif ou négatif.

b) Ordre des nombres relatifs

Sur l'axe gradué, on remarque que l'ordre des entiers négatifs est en sens inverse de celui des entiers positifs : 3>2>1>0 mais −3<−2<−1<0.

Propriété1 : Les nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs opposés.

Pour un nombre relatif quelconque, on définit la *distance à zéro* - on parle aussi de *valeur absolue* du nombre - comme la valeur du nombre privé de son signe. Par exemple, la distance à zéro de −3 est 3, celle de −12 est 12 et celle de 15 est 15. Cette distance à zéro est mesurable sur l'axe gradué : pour un point A' c'est la distance OA'. C'est un nombre positif comme chacun sait car une distance est toujours positive.



La propriété 1 nous dit que l'ordre de deux nombres négatifs est l'inverse de celui de leur distance à zéro. Par contre, l'ordre de deux nombres positifs est celui de leur distance à zéro.

Propriété2 : tous les négatifs sont inférieurs aux positifs.

Si deux nombres n'ont pas le même signe, le plus petit est le nombre négatif. Par exemple $-3<2$. Si deux nombres ont le même signe, le plus petit est celui qui a la plus petite distance à zéro si les signes sont positifs (la plus grande distance à zéro si les signes sont négatifs). Par exemple $-3<-2$ mais $3>2$.

Conclusion : Les nombres négatifs nous enrichissent donc en amenant une nouveauté : désormais il n'y aura plus de soustraction *impossible*. Mais ils introduisent un risque d'erreur (lorsqu'on oublie le signe) dans les calculs et perturbent légèrement notre sens de l'ordre. Pendant longtemps, les mathématiciens s'opposèrent à les utiliser car ils n'apparaissaient pas naturels, mais aujourd'hui nous sommes habitués à eux et ils ne choquent plus personne. Les historiens, les archéologues ou les paléontologues (scientifiques étudiant les fossiles) manient des années négatives (avant une origine du temps : notre époque, la naissance d'un personnage important...) tandis que les économiste nous parlent de *déficit* ou de *perte* (un gain négatif), du "trou de la sécu" ou de l'état négatif d'un compte en banque.

Les nombres relatifs sont-ils plus nombreux que les nombres positifs ? Cela semble vrai car pour chaque nombre positif, il y a le nombre positif qui lui correspond (son opposé). On pourrait en déduire qu'il y a 2 fois plus de nombres relatifs que de nombres positifs, sauf que les nombres en question étant infinis, on ne peut multiplier ainsi par 2 un nombre infini... Si l'on voulait numéroter tous les nombres entiers relatifs, on pourrait procéder ainsi : 0 est le n°1, 1 est le n°2, −1 est le n°3, 2 est le n°4, −2 est le n°5, etc. En procédant ainsi, on pourrait numéroter tous les nombres entiers relatifs avec seulement les nombres entiers positifs ! Ce raisonnement prouve que les 2 ensembles de nombres ont le même nombre d'éléments, ce qui reste assez paradoxal.

2) Additions et soustractions de nombres relatifs

a) Additions

Nous savons qu'additionner des nombres positifs c'est additionner leur distance à zéro. Et bien pour additionner des nombres négatifs cela sera pareil : on additionne leur distance à zéro et on conserve le signe −.

Par exemple : $3+5=8$. Avec des nombres négatifs : $(-3)+(-5)=-8$. On additionne 3 et 5, les distances à zéro, et puis on remet le signe −. Penser à des pertes : si j'ai déjà une perte de 3 et que je perds 5 à nouveau. En tout, j'ai perdu $3+5=8$, comme c'est une perte je mets un signe −, j'ai donc en tout −8.

Les premières parenthèses sont facultatives, on peut écrire $-3+(-5)=-8$. Mais on ne peut pas enlever les deuxièmes parenthèses car écrire deux signes contigu n'est pas permis : $+-8$ pose problème mais $--8$ est encore plus problématique...

Règle1 : Pour additionner deux nombres relatifs de même signe, on doit effectuer une addition des distances à zéro et conserver le signe des nombres.

Additionner des nombres de signes opposés - un négatif et un positif - ne peut pas se faire avec la même règle. En effet, l'addition de deux nombres opposés doit donner zéro. $3+(-3)=0$, alors qu'avec la règle précédente cela donnerai −6... En réalité, additionner des nombres de signes différents, c'est effectuer une soustraction : le positif moins le négatif. $3+(-3)=3-3=0$. La règle suivante énonce cela.

Règle2 : Pour **additionner** deux nombres relatifs de signes contraires, on doit effectuer une **soustraction** des distances à zéro et conserver le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro.

Exemples : $3+(-5)=-(5-3)=-2$. On garde le signe de -5 (le signe $-$) car 5 est plus grand que 3.
$5+(-3)=5-3=2$. On garde le signe de 5 (le signe +) car 5 est plus grand que 3.

b) Soustractions

Nous savons qu'additionner des nombres de signes contraires c'est soustraire des nombres de même signe. Le contraire est forcément vrai : soustraire des nombres de même signe c'est additionner des nombres de signes contraires.
Par exemple : $(-3)-(-5)=(-3)+(+5)$ ou encore : $(+3)-(+5)=(+3)+(-5)$

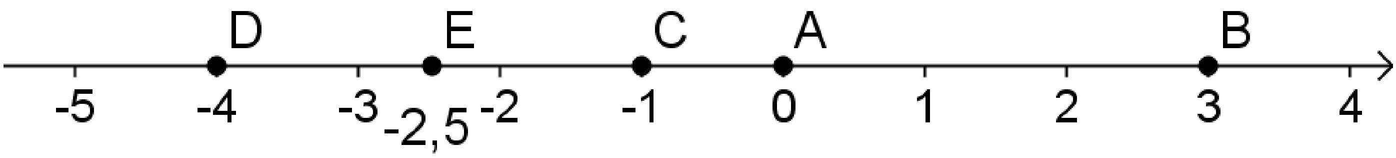
Pour simplifier et généraliser cette règle, il suffit de dire "**soustraire c'est additionner l'opposé"**.

- enlever -5 c'est ajouter 5.
  Par exemple : $(-3)\mathbf{-(-5)}=(-3)\mathbf{+(+5)}$ et aussi $(+3)-(-5)=(+3)+(+5)$.
- enlever 5 c'est ajouter -5.
  Par exemple : $(-3)\mathbf{-(+5)}=(-3)\mathbf{+(-5)}$ et aussi $(+3)-(+5)=(+3)+(-5)$.

Pour faire encore plus simple, il suffit de remarquer que les symboles −(− et +(+ sont interchangeables, et de même −(+ et +(− sont interchangeables.

Règle3 : Pour **soustraire** un nombre relatif, on doit **ajouter** l'opposé de ce nombre.

Application de la soustraction : calcul de distance sur un axe gradué.
La distance entre deux points d'un axe gradué est égale à la différence entre les abscisses : on doit enlever l'abscisse la plus petite à l'abscisse la plus grand. De cette façon la distance sera toujours positive (supérieure à zéro) comme il se doit.



$AB=3-0=3$; $CB=3-(-1)=3+(+1)=4$; $DB=3-(-4)=3+4=7$; $DE=(-2,5)-(-4)=-2,5+(+4)=4-2,5=1,5$

En fait, on s'aperçoit qu'avec les nombres relatifs, une addition peut conduire à effectuer une soustraction (comme $-2,5+(+4)$ qui est une soustraction car on ajoute des nombres de signes opposés) et une soustraction peut conduire à effectuer une addition (comme $3-(-1)$ qui est l'addition de 3 et 1).

c) Simplifications d'écriture

Les parenthèses sont lourdes à manipuler, longues à écrire. On va essayer de s'en passer. Pour cela, il faut appliquer certaines règles pour ne pas se tromper.

Règle I : On remplace toutes les soustractions par des additions : on ajoute l'opposé du nombre qu'on devait soustraire. Par exemple $3-(-1) = 3+(+1)$ et $-3-(+2) = -3+(-1)$. De cette façon, il n'y a plus de signe $-$ devant une parenthèse.

Règle II : On enlève les additions et les parenthèses. Il ne restera plus que les signes des nombres qui feront offices de symboles d'opérations. Cela peut paraître déroutant, mais ça marche! Heureusement, les mathématiciens ne sont pas fous (pas tous). Par exemple, on écrira la suite d'additions suivantes $3+(+5)+(-2)+(-4)+(+11)$ de manière simplifiée $3+5-2-4+11$.

Règle III : On effectue les opérations dans l'ordre que l'on veut.
On peut séparer les additions et les soustractions :
$3+5-2-4+11=\underline{3+5+11}-2-4=\underline{19}-\underline{2}-4=17-4=13$.
On peut regrouper ce qu'il y a à enlever dans une somme :
$3+5-2\boldsymbol{-}4+11=\underline{3+5+11}-(2\boldsymbol{+}4)=19-6=13$.
On peut procéder de façon *astucieuse* si possible :
$43+14-3-64=(43-3)+(14-64)=40-50=-10$.