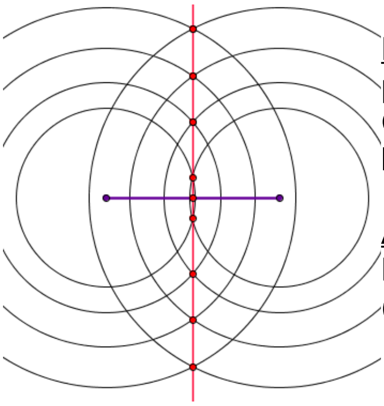
5ème Chapitre 4 Triangles

1) Médiatrices

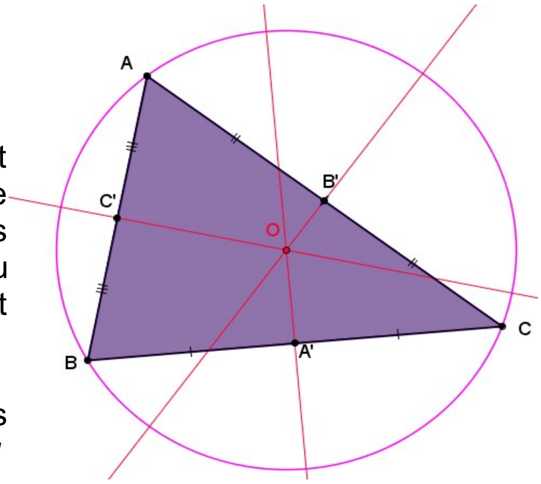
Définition : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment (cours de 6ème).

Si M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors AM=BM. Si M est un point tel que AM=BM alors M appartient à la médiatrice du segment [AB].



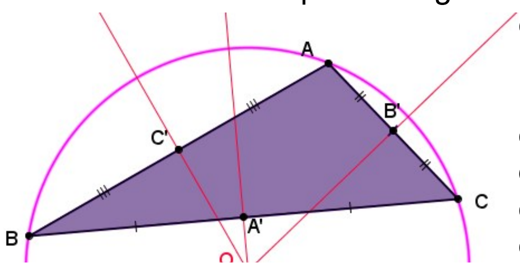
Propriété : La médiatrice d'un segment est une droite perpendiculaire au segment qui passe par le milieu du segment. Cette droite est un des axes de symétrie du segment (l'autre étant la droite qui supporte le segment).

Autre définition de la médiatrice d'un segment :
La médiatrice d'un segment [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par I, le milieu de [AB].

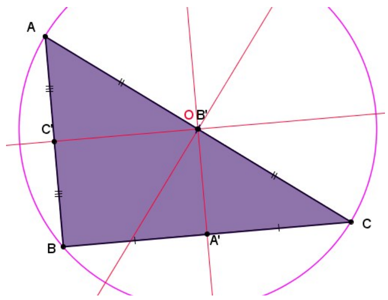


Médiatrices des côtés d'un triangle :
Les 3 médiatrices d'un triangle se coupent en un point situé à égale distance des sommets de ce triangle. Ce point est donc le centre d'un cercle passant par ces sommets. On appelle ce cercle, le cercle *circonscrit* au triangle. Le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des médiatrices, noté souvent O.

Démonstration du concours des médiatrices : Les médiatrices de [AB] et [AC] se coupent si l'angle $\widehat{BAC}$ n'est pas plat. Appelons alors P le point d'intersection de ces 2 droites. Comme P est sur la médiatrice de [AB] on a PA=PB et comme P est aussi sur la médiatrice de [AC], on a PA=PC. On en déduit que PA=PB=PC, et donc PB=PC, le point P est sur la médiatrice de [BC]. Si 2 médiatrices se coupent alors les 3 médiatrices sont concourantes. Il existe un point à égale distance des sommets du triangle et un cercle qui contiennent ces 3 points.



Remarque : Si 2 médiatrices sont parallèles, la 3ème est également parallèle aux 2 premières. Le centre du cercle est rejeté à l'infini et le cercle circonscrit est alors une droite : ceci arrive lorsque le triangle est aplati.

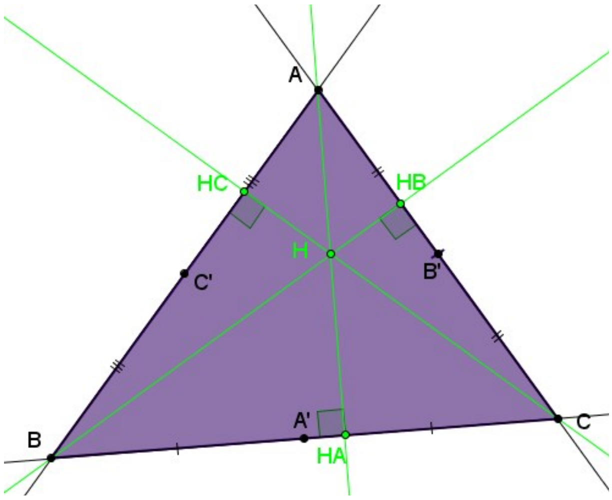


Propriété : Le **centre du cercle circonscrit** à un triangle est à l'intérieur du triangle si les 3 angles sont aigus (triangle acutangle). Il est sur le milieu du plus grand côté si le triangle est rectangle. Il est à l'extérieur du triangle si le triangle comporte un angle obtus (triangle obtusangle).

Application du concours des médiatrices : comment retrouver le centre perdu d'un cercle ? En plaçant 3 points sur le cercle de manière aussi espacée que possible (pour la précision du tracé). On construit alors 2 médiatrices. Leur point d'intersection est le centre cherché.

2) <u>Les hauteurs</u>

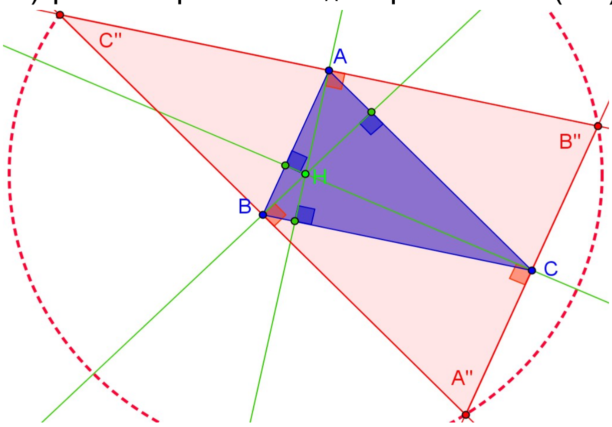
<u>Définition</u> : Les hauteurs d'un triangle sont les droites qui sont perpendiculaires à un côté et qui passent par le sommet opposé.



Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A est la perpendiculaire à [BC] qui passe par A. Cette droite coupe le côté [BC] en un point H_A appelé le *pied de la hauteur*. Lorsque un des angles ABC ou BCA est obtus, la hauteur issue de A ne coupe pas le côté [BC] mais elle coupe son prolongement, la droite (BC).

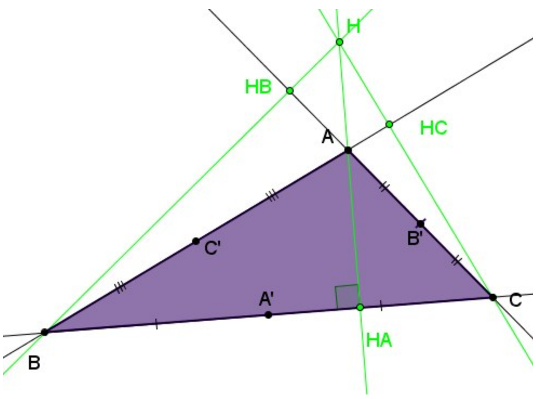
<u>Propriétés</u> : Dans un triangle, les 3 hauteurs sont *concourantes*, c'est-à-dire qu'elles se coupent en un point. Ce point de concours des hauteurs est appelé l'**orthocentre** du triangle. Nous avons noté H ce point sur notre figure.

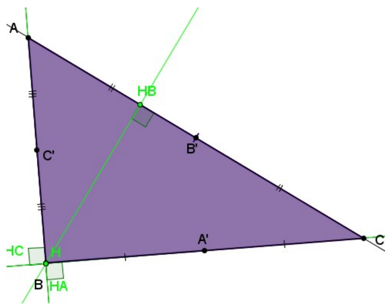
<u>Démonstration</u> : Construisons le triangle A"B"C" relatif à un triangle ABC en traçant d_C la parallèle à (AB) passant par C, d_B la parallèle à (AC) passant par B et d_A la parallèle à (BC) passant par A. d_A coupe d_B en C", d_B coupe d_C en A" et d_C coupe d_A en B".



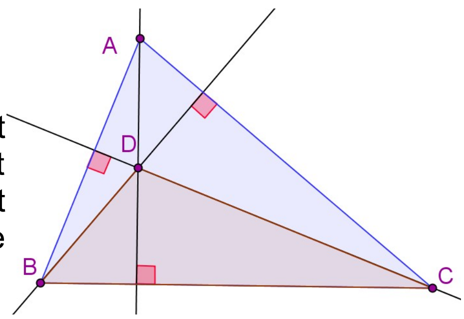
Par construction, ACBC" et AB"CB sont des parallélogrammes ayant un côté en commun [BC]. Les côtés opposés [C"A] et [AB"] sont donc parallèles et égaux. A est donc le milieu de [B"C"]. La hauteur issue de A du triangle ABC est donc la médiatrice du côté [B"C"] du triangle A"B"C". De même, les 2 autres hauteurs du triangle ABC sont les 2 autres médiatrices de A"B"C". On sait déjà que les médiatrices d'un triangle sont concourantes donc les médiatrices de A"B"C" sont concourantes. On en déduit que les hauteurs de ABC (qui sont les médiatrices de A"B"C") sont concourantes. L'orthocentre H de ABC est le centre du cercle circonscrit (en pointillé) à A"B"C".

<u>Propriété</u> : Lorsque le triangle est acutangle, l'orthocentre est à l'intérieur du triangle. Lorsque le triangle est rectangle, l'orthocentre est le sommet de l'angle droit. Lorsque le triangle est obtusangle, l'orthocentre est à l'extérieur du triangle.

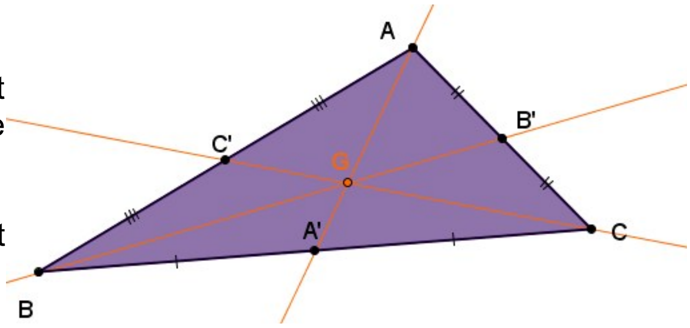




<u>Remarque</u> : Si D est l'orthocentre de ABC, alors A est l'orthocentre de BCD, B est l'orthocentre de ACD et C est l'orthocentre de ABD. Parmi ces 4 triangles, un seul est acutangle, les 3 autres sont obtusangles. Si un de ces triangle est rectangle, alors 2 des points sont confondus.



3) <u>Les médianes</u>

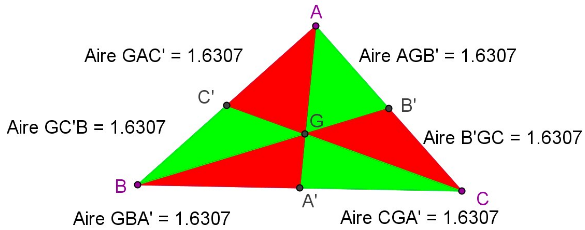


<u>Définition</u> : Les médianes d'un triangle sont les droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

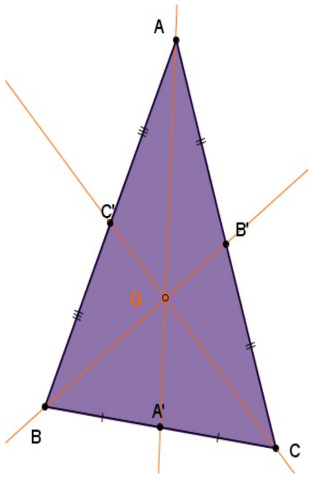
Dans le triangle ABC, la médiane passant par A passe par le milieu de [BC].

<u>Propriété 1</u> : Dans un triangle, les 3 médianes sont concourantes, le point de concours des médianes est appelé le **centre de gravité** du triangle. Nous avons noté G ce point sur notre figure.

<u>Démonstration</u> : nous n'allons pas démontrer cette propriété ici (cela est laissé au cours de la classe de 4ème) mais nous allons l'admettre momentanément sans preuve. Nous pouvons cependant signaler que l'appellation « centre de gravité » vient du fait que l'aire du triangle est équitablement répartie autour de ce point G de sorte qu'il soit le seul point où l'on puisse faire tenir un triangle matériel (découpé dans une feuille de carton homogène par exemple) en équilibre. Cette particularité vient du fait que les 6 triangles de sommets G colorés sur la figure ont la même aire.



Que le triangle soit acutangle, rectangle ou obtusangle, le centre de gravité est toujours à l'intérieur du triangle. Ceci est dû à la convexité du triangle et découle de la propriété suivante :

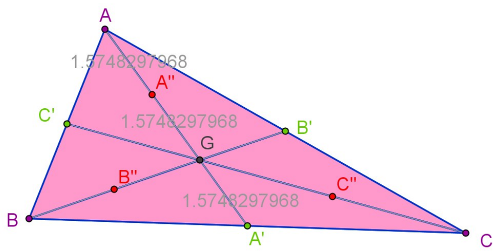


<u>Propriété 2</u> : Le centre de gravité d'un triangle se trouve sur chaque médiane, aux deux-tiers de la distance qui sépare un sommet du milieu du côté opposé.

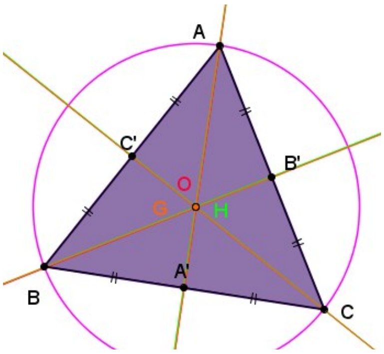
Si G est le centre de gravité de ABC et que A', B' et C' sont les milieux de [BC], [CA] et [AB], alors on a :

$AG = \frac{2}{3} \times AA'$; $BG = \frac{2}{3} \times BB'$; $CG = \frac{2}{3} \times CC'$

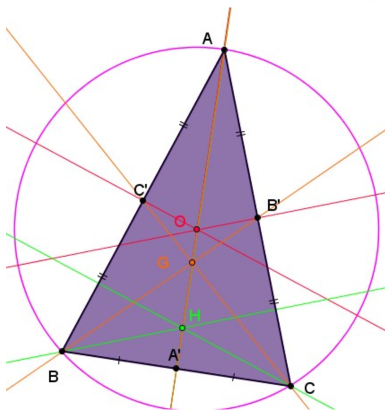
On exprime la même chose en disant que le centre de gravité est deux fois plus loin du sommet que du milieu opposé. Avec les mêmes notations, on peut donc écrire que $AG = 2 \times GA'$; $BG = 2 \times GB'$; $CG = 2 \times GC'$.



Sur notre illustration, nous avons placé A'', B'' et C'', les milieux des segments qui joignent le centre de gravité G aux sommets du triangle. Nous avons mesuré alors AA'', A''G et GA' et constaté que ces segments sont égaux : AA''=A''G=GA'. De même on aurait BB''=B''G=GB' et CC''=C''G=GC'.



<u>Remarque</u> : Dans le cas où le triangle ABC est isocèle en A (AB=AC), les points O, H et G sont alignés sur l'axe de symétrie. Si le triangle est équilatéral (AB=BC=CA) les 3 points de concours sont confondus (O=G=H).

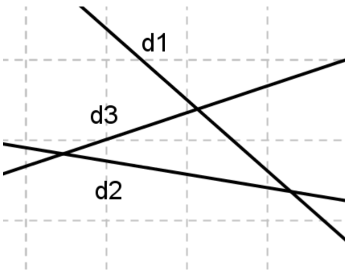


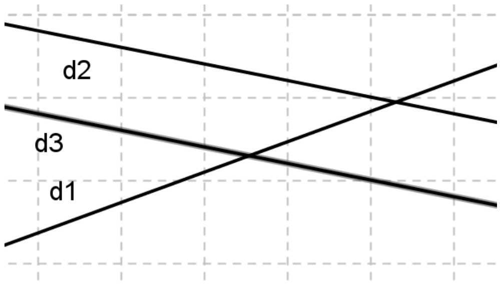
4) Conditions d'existence d'un triangle

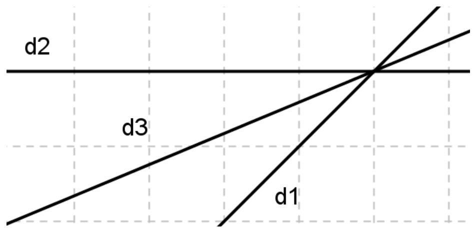
Remarque d'introduction : On appelle triangle, un ensemble de 3 points distincts. Si ces points sont alignés on est dans un cas particulier de triangle, le cas du triangle *aplati*. Les angles d'un triangle aplati sont 0°, 0° et 180°. Ce triangle est spécial, mais il existe. Nous allons envisager maintenant d'autres situations où se posent la question de l'existence du triangle.

il y a plusieurs façons de définir un triangle :

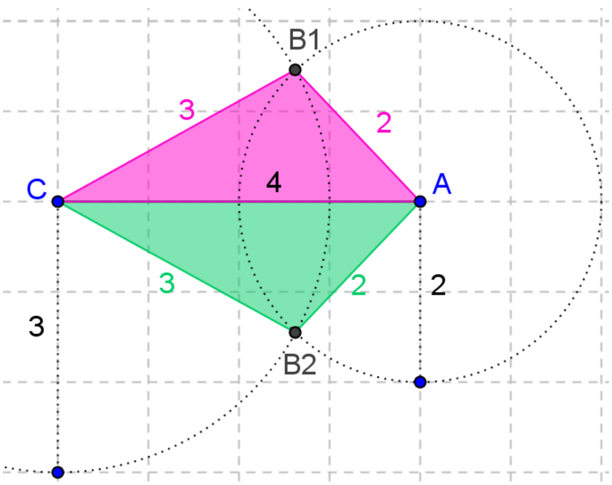
1. On se donne 3 droites. Le triangle est définit à partir des points d'intersection de ces droites. **Le triangle n'existe pas si les droites sont concourantes** (un seul point au lieu de 3) **ou si deux droites au moins sont parallèles**. Il faut donc 3 droites sécantes mais pas concourantes pour définir un triangle.

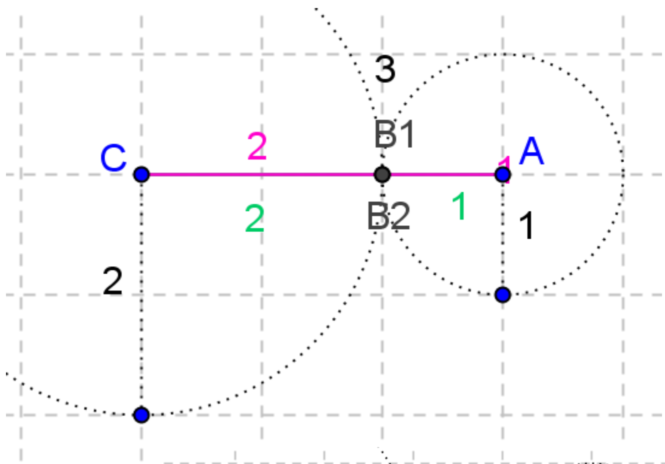






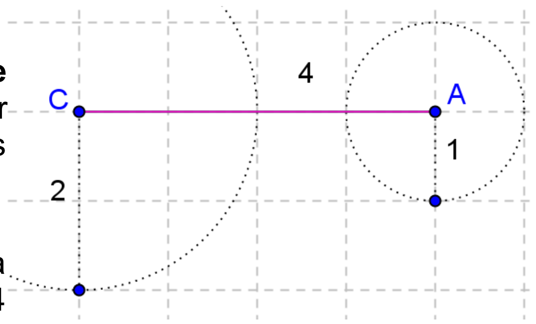
2. On se donne 3 longueurs. Par exemple les égalités AB=2, BC=3 et CA=4 permettent de définir un triangle ABC (voir figure). Il se peut que les 3 points soient alignés, comme avec les égalités AB=1, BC=2 et CA=3. Par contre si l'on se donne des égalités comme celles-ci AB=1, BC=2 et CA=4, alors le triangle n'existe pas.





Propriété : Pour qu'un triangle existe, **il faut que chaque côté soit plus court que la somme des 2 autres**. Pour un triangle ABC, il faut que soient vérifiées les inégalités suivantes, appelées **inégalités triangulaires** :

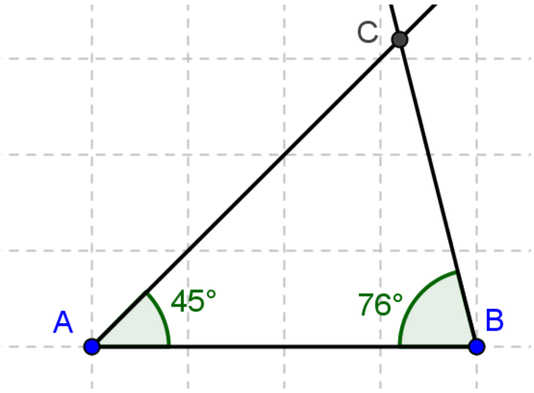
$AB \leq AC + CB$; $BC \leq BA + AC$; $CA \leq CB + BC$

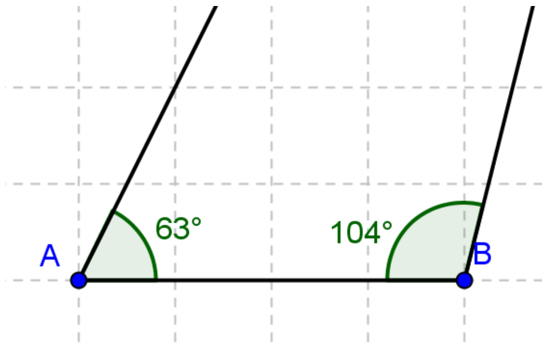


En fait, seul le plus grand des côtés peut dépasser la somme des 2 autres (dans notre exemple, lorsque CA=4 alors que AB+BC=3, le triangle ABC n'existe pas). *Il suffit donc de vérifier une seule* de ces inégalités : Le plus grand côté d'un triangle doit être plus petit que la somme des 2 autres, sinon le triangle n'existe pas.

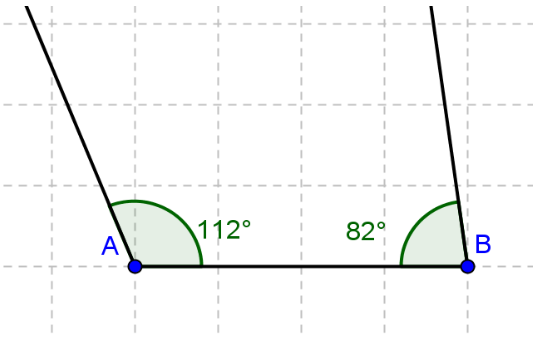
Cas d'égalité (important!) : Si la somme de 2 côtés est égale au 3ème côté, alors le triangle existe mais il est aplati (les 3 sommets sont alignés). Un des angles est plat alors que les 2 autres sont nuls. Autrement dit, si AC+CB=AB alors C appartient au segment [AB].
Réciproquement, si 3 points A, B et C sont alignés, alors la somme de 2 côtés du triangle aplati ABC égale le 3ème côté. Autrement dit, **si C appartient au segment [AB] alors AC+CB=AB**.

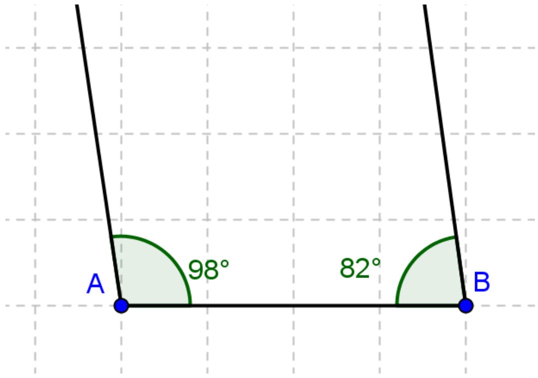
3. On se donne <u>1 longueur et 2 angles</u>. Dans ce cas, selon les valeurs des angles il peut y avoir un triangle ou pas. Par exemple, si on se donne AB et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$, **il faut que la somme de ces angles soit inférieure à 180° pour que le triangle existe**. Pour $\widehat{ABC}=76°$ et $\widehat{BAC}=45°$, le triangle ABC existe et on vérifie que 76+45<180, de même pour $\widehat{ABC}=104°$ et $\widehat{BAC}=63°$, même si le point C n'est pas forcément visible sur la feuille. Le point C existe et le triangle ABC existe avec lui car 104+63=167 et que 167<180.





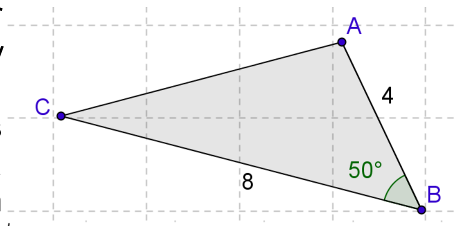
Par contre, pour $\widehat{ABC}=82°$ et $\widehat{BAC}=112°$, le point C n'existe pas et le triangle ABC non plus. Dans ce cas 82+112=194 et 194 n'est pas inférieur à 180. De même, pour le cas limite où $\widehat{ABC}+\widehat{BAC}=180°$. Dans ce dernier cas les côtés [BC) et [AC) sont parallèles, et chacun sait que les parallèles ne se rencontrent pas (il n'y aurait qu'un professeur de maths pour oser prétendre qu'elles se rencontrent, mais à l'infini...)



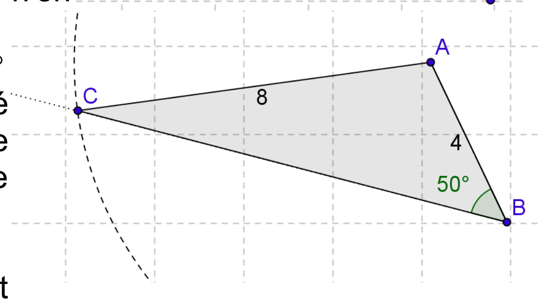


On pourrait se donner un côté, disons AB, et deux angles dont un est opposé au côté choisi, par exemple $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$. Dans ce cas, le plus simple est sans doute de calculer le 3ème angle en utilisant le fait que la somme des 3 angles fait 180°, donc ici $\widehat{BAC}=180-\widehat{ABC}-\widehat{BCA}$.

4. On se donne <u>2 longueurs et 1 angle</u>. Les constructions les plus évidentes sont celles qui donnent les longueurs des côtés de l'angle connu. Par exemple, si $\widehat{ABC}=50°$ et $AB=4\,cm$ et $BC=8\,cm$, il n'y a aucune difficulté à tracer la figure.



La construction est moins immédiate lorsqu'on donne un des angles qui a pour côté le segment dont on ne connaît pas la mesure. On ne peut pas calculer les autres angles (car on n'en connaît qu'un) ni non plus l'autre côté.
Supposons qu'on donne le triangle ABC tel que $\widehat{ABC}=50°$ et $AB=4\,cm$ et $AC=8\,cm$ (le côté [AC] n'est pas un côté de l'angle connu). À partir du point A, on peut tracer le cercle de rayon 8 cm et prolonger le côté [BC) de l'angle jusqu'à couper le cercle au point C.



Y a t-il pour ce type de donnée, des cas où le triangle n'est pas constructible ? Non, tout est possible ici.