1) Définitions

a) Fractions et quotients

Un *quotient* est le résultat d'une division.
2 ÷ 3 est le quotient de 2 par 3.

Le *quotient* de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

Si on a l'égalité 3 × □ = 2, alors le nombre □ vaut 2 ÷ 3.

Dans la division de a par b, a est appelé le *dividende*, b étant le *diviseur*. Lorsqu'on effectue une division où le dividende, le diviseur et le quotient sont entiers, on dit qu'on fait une *division euclidienne*. Dans une division euclidienne, il y a un *reste*, entier aussi, qui peut être nul (on dit alors que la division "tombe" juste) ou non.
La division de 50 par 12 donne 4 et un reste 2, on peut noter cela : 50 ÷ 12 = 4, reste 2. Mais on préfèrera souvent la notation avec un produit suivante : 50 = 12 × 4 + 2.

Le résultat d'une division n'étant pas toujours un nombre décimal (parfois la division « ne s'arrête pas »), le quotient de a par b ne peut parfois pas être écrit autrement qu'en donnant l'opération qui le définit c'est-à-dire $a \div b$.
2 ÷ 3 = 0,66666666666…(une infinité de 6). Ce quotient n'a pas d'écriture décimale exacte (on note pourtant parfois ce nombre $0,\underline{6}$ en soulignant le chiffre qui se répète), on va donc l'écrire 2÷3, ou mieux, on va utiliser la notation fractionnaire : $\frac{2}{3}$.

Une *fraction* est un quotient de 2 entiers, noté avec la *notation fractionnaire* qui utilise un trait pour séparer le dividende du diviseur. Dans la *fraction* $\frac{a}{b}$ le nombre a, le dividende du quotient, est appelé *numérateur* de la fraction, tandis que le nombre b, le diviseur du quotient, est appelé *dénominateur* de la fraction.

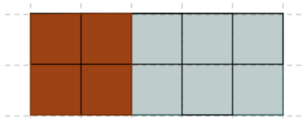
Une fraction est donc un nombre (un quotient) résultat d'une opération (une division), mais c'est aussi une façon d'écrire ce nombre. On peut noter cette fraction avec un trait oblique / (un slash) ou deux points : ou encore le symbole ⌐ (notation rencontrée sur certaines calculatrices).

L'écriture fractionnaire n'est pas réservée aux fractions. On peut noter n'importe quel quotient sous forme fractionnaire. Le trait de fraction remplace dans ce cas, tout simplement, le symbole de division. Mais attention aux priorités opératoires qui nécessite parfois qu'on ajoute des parenthèses autour du numérateur et du dénominateur d'une fraction lorsqu'on utilise une calculatrice.
La fraction $\frac{2+6}{3-1}$ vaut $\frac{8}{2}$, donc 2. Mais avec une calculatrice, il faudrait taper (2+6)/(3-1) sinon, la séquence 2+6/3-1 donnera 3 (car la calculatrice effectuera d'abord 6/3 et ensuite 2+2-1).

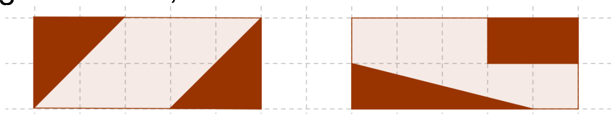
Remarque : dans certains pays, au Canada par exemple, on apprend à transformer des fractions *impropres* (dont de numérateur est supérieur au dénominateur) en "nombre fractionnaire", c'est-à-dire un entier suivi d'une fraction *propre*. Par exemple 5/2 sera noté 2 1/2 ce qui signifie 2+1/2. certaines calculatrice affichent alors pour ces nombres la notation un peu étrange 2⌐1⌐2. Cet usage en rappelle un autre, la notation égyptienne qui n'utilise que des fractions *unitaires* (dont le numérateur est 1) de dénominateur différents. Ainsi 2/5 peut être noté 1/5 + 1/6 + 1/30.

b) Fractions et proportions

L'idée de proportion est étudiée généralement avant celle de fraction. On demande par exemple à un élève de colorier les 2/5 d'une grille contenant 10 cases.



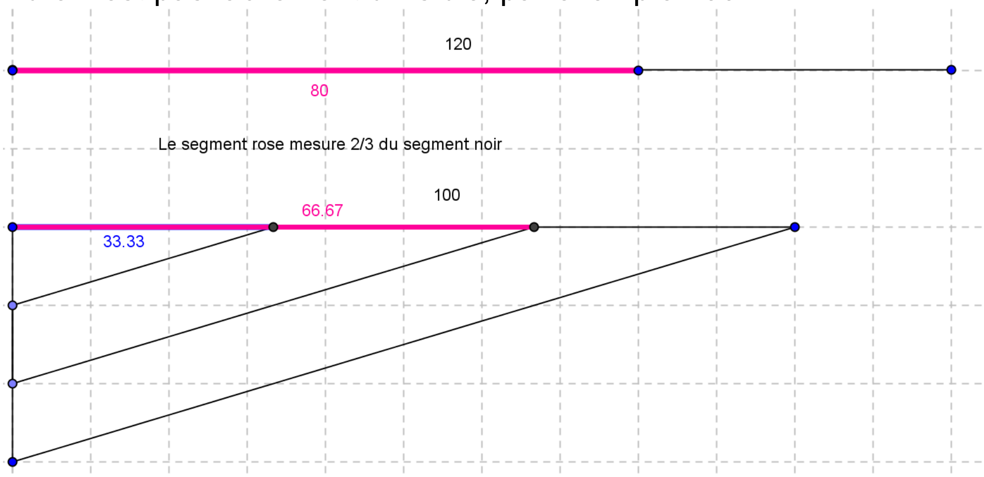
Cette activité permet de comprendre que 2/5 et 4/10 sont des fractions égales. On dira qu'on a colorié une même proportion de la figure si on a colorié n'importe quelle surface ayant une aire égale à 2/5 de celle de la figure entière, comme celles-ci.



En fait, la proportion contient l'idée de comparer une partie à l'ensemble. Si on fait des coloriages pour avoir la bonne proportion, cela ne demandent pas de connaissances particulières.

Mais rapidement on va devoir faire des calculs, on devra calculer une quantité pour avoir une certaine proportion dans l'ensemble. La notion mathématique qu'il faudra alors employer est celle de *multiplication d'une fraction par une quantité* (voir partie 3), ce qui est déjà plus compliqué.

Si on demande de tracer un segment ayant une longueur égale à 2/3 d'un segment donné, c'est facile si la longueur du segment initial est divisible par 3, par exemple 120, cela demande un calcul si le nombre n'est pas facilement divisible, par exemple 100.



2) <u>Propriété d'égalité et ses conséquences</u>

<u>Propriété</u> : un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie son dividende et son diviseur par un même nombre. Avec la notation fractionnaire, si a, b et c sont des nombres quelconques (c doit être différent de 0 pour que les quotients existent) alors on a l'égalité suivante : $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$

Par exemple : 0,2÷12,5 = 2÷125 = 4÷250 = 16÷1000.

Un autre exemple avec des fractions : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{80}{120} = \frac{2 \times c}{3 \times c}$.

Cette propriété a de nombreuses applications, que nous allons passer en revue.

a) <u>Comparaisons de fractions</u>

Pour comparer deux fractions, on va généralement les "mettre" au même dénominateur. Car si des fractions ont le même dénominateur, il suffit de comparer les numérateurs pour comparer les fractions.

Si on doit comparer 4/5 et 7/12 par exemple, on peut transformer ces fractions pour qu'elles aient le même dénominateur :

$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 12}{5 \times 12} = \frac{48}{60}$ et $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 5}{12 \times 5} = \frac{35}{60}$. Comme 48>35, on en déduit que $\frac{48}{60} > \frac{35}{60}$ et donc $\frac{4}{5} > \frac{7}{12}$

Remarque : bien sûr on peut faire autrement. On peut diviser à la calculatrice 4 par 5 et 7 par 12 et comparer les quotients écrits sous forme décimale.
4/5=0,8 tandis que *7/12≈0,58333...*donc 4/5>7/12.

b) <u>Additions ou soustractions de fractions</u>
Pour additionner deux fractions, on doit également les mettre au même dénominateur. Car alors, il suffit d'additionner les numérateurs.
Par exemple 1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = (2+1)/4 = 3/4
Un autre exemple : $\frac{4}{5}+\frac{7}{12}=\frac{48}{60}+\frac{35}{60}=\frac{48+35}{60}=\frac{83}{60}$

Pour la soustraction, c'est exactement pareil : $\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\frac{4\times 2}{5\times 2}-\frac{3}{10}=\frac{8}{10}-\frac{3}{10}=\frac{8-3}{10}=\frac{5}{10}$

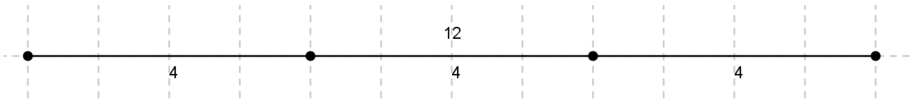
c) <u>Simplifications de fractions</u>

Simplifier une fraction, c'est transformer la fraction pour qu'elle s'écrive avec un numérateur et un dénominateur entiers plus petits.

Exemples : Simplifions les fractions $\frac{128}{450}$ et $\frac{129}{450}$.
Pour la première remarquons que 128 et 450 sont *pairs* (multiples de 2) et donc :
$\frac{128}{450}=\frac{2\times 56}{2\times 225}=\frac{56}{225}$.
Pour la seconde remarquons que 126 et 450 sont des multiples de 3 (la somme de leurs chiffres est à chaque fois un multiple de 3 : 1+2+9=12=3×4, 4+5+0=9=3×3) et donc :
$\frac{129}{450}=\frac{129\div 3}{450\div 3}=\frac{43}{150}$
Remarques : On peut continuer à simplifier une fraction pour réduire au maximum son numérateur et son dénominateur. Dans notre exemple on ne peut pas simplifier davantage la première fraction car 56 ne se divise que par des nombres pairs et par 7 alors que 225 n'est ni pair ni divisible par 7. Pour la deuxième fraction on ne peut pas continuer la simplification car 43 est un nombre *premier* (qui n'est divisible par aucun nombre plus petit que lui, à part 1) et que 150 n'est pas divisible par 43.

3) <u>Multiplication d'un quotient par un nombre</u>
a) <u>Considérations introductives</u>
Lorsqu'on partage un segment de 12 cm en 5 (on en prend $\frac{1}{5}$) on obtient un segment qui mesure 2,4 cm car 12 ÷ 5 = 2,4. Donc $\frac{1}{5}$ de 12 vaut 12÷ 5 ou $\frac{12}{5}$.

La fraction $\frac{2}{3}$ c'est 2 ÷ 3 (2 unités divisées par 3) mais c'est aussi 2 tiers (2 fois 1 tiers) c'est-à-dire que $\frac{2}{3}=2\times\frac{1}{3}$. Si l'on prends les $\frac{2}{3}$ d'un segment de 12 cm, on peut calculer la longueur d'un tiers et multiplier cette longueur par 2 : $\frac{2}{3}$de 12 = $2\times\frac{12}{3}=2\times 4$. On trouve le même résultat si on effectue d'abord la multiplication 2 × 12 et ensuite la division par 3 car 24 ÷ 3 = 2 × 4. En résumé, comme $\frac{2}{3}$ de 12 égale $2\times\frac{12}{3}=\frac{2\times 12}{3}=8$, on notera $\frac{2}{3}$ de 12 sous la forme $\frac{2}{3}\times 12$.



b) <u>Calculs de la fraction d'une quantité</u>

D'une manière générale, les $\frac{2}{3}$ d'une quantité q correspondent à un quantité égale à $\frac{2}{3}\times q$ qui se calcule aussi bien par le produit $2\times\frac{q}{3}$ que par le quotient $\frac{2\times q}{3}$.

Dans tous les cas, prendre $\frac{a}{b}$ d'une quantité q, c'est calculer une quantité q' égale à $\frac{a}{b}\times q=\frac{a\times q}{b}=a\times\frac{q}{b}$ (Il y a en fait 3 façons distinctes d'effectuer le calcul de q').

Exemple 1 : $\frac{4}{5}$ des élèves d'une classe contenant 25 élèves sont des filles. Le nombre de filles est $\frac{4}{5}\times 25$ qu'on peut calculer de 3 façons distinctes :

$$\frac{4}{5}\times 25=0{,}8\times 25=20\quad;\quad 4\times\frac{25}{5}=4\times 5=20\quad;\quad\frac{4\times 25}{5}=\frac{100}{5}=20$$

Exemple 2 : Une entreprise a utilisé 45% ($\frac{45}{100}$) de sa réserve de fuel qui fait 6000L. Combien lui en reste t-il ? Elle a utilisé $\frac{45}{100}\times 6000=45\times\frac{6000}{100}=45\times 60=2700$ L, il lui en reste donc 6000 - 2700 = 3300 L.

c) <u>Fraction d'une fraction</u>

Nous pouvons appliquer ce qui vient d'être revu (car déjà vu en sixième) en prenant comme quantité q une fraction : si on prends par exemple le quart de la moitié, on va devoir calculer $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$. Voyons ce que cela donne sur un schéma :

La moitié a été partagé en quart, le carré rouge représente le quart de la moitié (les 3/4 restants sont en orange), mais il représente le huitième de l'ensemble. En effet $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. Pour effectuer ce produit, il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs ensemble, car $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1\times 1}{4\times 2}$.

D'une façon générale, prendre $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ c'est calculer $\frac{a\times c}{b\times d}$.

Exemple 1 : 30% de la surface de la Terre est occupée par les continents. On estime de plus, que 10% seulement des continents est cultivable*. Quelle fraction de la surface terrestre est cultivable? Les 30% de 10%, c'est-à-dire $\frac{30}{100}\times\frac{10}{100}=\frac{30\times 10}{100\times 100}=\frac{300}{10000}=\frac{3}{100}$, donc seulement 3%. C'est peu...et en diminution du fait de la croissance des zones urbaines.

* : Sur une surface totale de 13 milliards d'hectares de terre sur la planète, les terres cultivables représentent 11%, les pâturages 27%, les forêts 32% et les zones urbaines 9%. La majeure partie des 21% restant n'est pas adaptée à l'agriculture, aux pâturages ou aux forêts en raison de sols trop stériles ou trop peu profonds pour permettre à des plantes d'y pousser, ou parce que l'environnement est trop froid, trop sec, trop montagneux, trop rocailleux ou trop humide.

Exemple 2 : La moitié des filles et le quart des garçons n' a pas fait son devoir de maths (ces chiffres sont fantaisiste, la plupart des filles et des garçons faisant leurs devoirs). Sachant que les filles représentent 3/5 des élèves (les garçons représentent donc 2/5 des élèves), quelle fraction de la classe n'a pas fait son devoir?
Il faut calculer 1/2 de 3/5 et additionner le résultat à 1/4 de 2/5.
$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1\times 3}{2\times 5}=\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1\times 2}{4\times 5}=\frac{2}{20}$ d'où la fraction de ceux qui n'ont pas fait leur devoir est : $\frac{3}{10}+\frac{2}{20}=\frac{2\times 3}{2\times 10}+\frac{2}{20}=\frac{6}{20}+\frac{2}{20}=\frac{6+2}{20}=\frac{8}{20}$ ce qui donne après simplification 2/5 des élèves de la classe, soit 40% (une sorte de moyenne entre la moitié (50%) et le quart (25%)).

d) Proportionnalité

Définition : Une situation est dite de proportionnalité lorsque deux grandeurs (2 séries de nombres) sont reliées par un même coefficient multiplicateur (appelé coefficient de proportionnalité).

Exemple : les longueurs en cm et les longueurs en *inches* (pouces) sont reliées par un même coefficient multiplicateur. Comme 1 *inch* = 2,54 cm, on en déduit que pour passer d'une longueur en pouces à une longueur en cm, il faut multiplier par 2,54. Dans l'autre sens, il faut diviser par 2,54. Illustrons cette situation par le tableau de proportionnalité suivant,

Longueur en pouces	1	2	10	1÷2,54≈0,3937	≈3,937
Longueur en cm	2,54	5,08	25,4	1	10

Dans une situation de proportionnalité, le coefficient peut être obtenu par un quotient. Pour passer de a à b, il faut multiplier par le coefficient $\frac{b}{a}$. En effet, en supposant que $a\neq 0$ si $a\times x=b$ alors on doit avoir $x=\frac{b}{a}$ car $a\times\frac{b}{a}=\frac{a\times b}{a}=b$ comme on l'a vu dans la partie précédente.
Cela nous donne un moyen de contrôler qu'une situation est bien une situation de proportionnalité : il suffit de vérifier que les coefficients obtenus sont égaux.
Exemple : Un automobiliste a noté les distances parcourues (en km) et le volume d'essence qu'il a utilisé pour les parcourir (en L). Si on calcule les coefficients multiplicatifs qui permettent de passer de V (les Volumes d'essence) à D (les Distances parcourues), on s'aperçoit qu'**ils ne sont pas égaux** et donc, que **la situation n'est pas une situation de proportionnalité**.

D=Distances (km)	570	620	350
V=Volumes d'essence (L)	40	44	24
Coefficient D/V	14,25	14,0909...	14,5833...

Généralement, on utilise la situation de proportionnalité comme un *modèle* mathématique, qui permet de prévoir des résultats. Par exemple, dans la situation précédente (l'automobiliste et sa consommation d'essence), *on peut penser qu'il y a proportionnalité* entre D et V. Cela permet d'estimer des consommations (V) connaissant les distances (D) ou le contraire (estimer D connaissant V). On peut compléter le tableau de proportionnalité avec le coefficient calculé sur une valeur.

D=Distances (km)	570	620	24×14,25=342
V=Volumes d'essence (L)	40	620÷14,25=43,50877...≈43,5	24
Coefficient D/V	14,25	Coefficient estimé : 14,25	Coefficient estimé :14,25

Règle de trois : cette règle, étudiée au primaire, permet de calculer une 4ème proportionnelle (le 4ème nombre d'une situation de proportionnalité où on en connaît déjà 3) par un passage à l'unité. Supposons que nous connaissions 3 nombres a, b et c et que nous voulions calculer d, le 4ème nombre d'une situation de proportionnalité entre les séries (a, c) et (b, d). Remarquons que le passage à l'unité revient à calculer un coefficient de proportionnalité.

Grandeur 1	a	1	$c=1\times c$
Grandeur 2	b	$b\div a$	$\boldsymbol{d=(b\div a)\times c}$

Exemple : les poules ont pondu 15 œufs en 3 jours, combien vont-elles en pondre en 5 jours ? La méthode employée utilise naturellement le passage à l'unité (elles pondent 5 œufs en 1 jour). Pour 5 jours, elles pondront donc 5×5=25 œufs (en supposant qu'il y a proportionnalité).

Propriétés supplémentaires dans un tableau de proportionnalité :

Grandeur 1	a	$2a$	$3a$	$k\times a$	c	$a+c$	$k\times a+k'\times c$
Grandeur 2	b	$2b$	$3b$	$k\times b$	d	$b+d$	$k\times b+k'\times d$

Pour reprendre notre exemple sur des poules pondant 15 œufs en 3 jours (k=2), elles pondent 30 œufs en 6 jours (k=3), 45 œufs en 9 jours, etc. et comme elles pondent 5 œufs en 1 jours (k=1/3) elles pondent aussi 50 œufs (45+5 ou 5×10) en 10 jours (9+1 ou 1×10).
Les propriétés dont on parle ici sont liées à la *distributivité* de la multiplication sur l'addition (voir le chapitre sur le calcul littéral).

Application 1 : Pourcentages.
Calculer un pourcentage s'est chercher une 4ème proportionnelle.
Par exemple, dans une population de 125 000 personnes, il y a 43 000 personnes qui parlent la langue A. Cela représente quel pourcentage ?

Population totale	125000	100
Parlant la langue A	43000	?

Le nombre cherché (le taux du pourcentage) est égal à 100×43 000÷125 000=34,4. Il y a donc 34,4% de la population qui parle la langue A. On pourrait donner d'autres fractions pour indiquer cette proportion, par exemple on pourrait dire qu'il y a 344 personnes sur 1000 qui parlent la langue A.

Application 2 : Échelles des cartes.
Sur une carte géographique ou un plan on représente la réalité en appliquant un coefficient de proportionnalité (l'échelle e). On dit que la carte est une *réduction* de la réalité de coefficient e.
L'échelle est souvent donnée sous la forme d'une fraction dont le numérateur est 1.
Par exemple, une carte au 1/25000ème est une réduction de coefficient $\frac{1}{25000}$. Cela signifie que 1 cm sur la carte représente 25 000 cm dans la réalité, soit 250 m ou 0,25 km.

Longueur réelle	25000	?	?	1	1250
Longueur sur la carte	1	1,2	25	?	?

Dans cette situation, les nombres cherchés sont des 4ème proportionnelles. Ce qui a été dit dans le cas général est applicable.
Par exemple ici, 1,2 cm sur la carte représente 1,2×25000=30000 cm = 300 m dans la réalité. 1250 m dans la réalité sont représentés par 1250×1÷25000=0,05 m = 5 cm sur la carte.

Remarque : Certaines représentation sont des *agrandissements* de la réalité. Par exemple, une photo prise au microscope ou encore le plan d'un composant électronique. Dans ce cas, on parlera aussi d'échelle, mais cette fois l'échelle sera supérieure à 1, et donc on ne l'exprimera pas sous la forme d'une fraction de dénominateur 1, mais sous la forme d'un entier. On dira que la photo d'un organisme est à l'échelle 200 (on peut dire aussi 200:1) si 1 mm dans la réalité est représenté par 200 mm (20 cm) sur la photo de l'organisme.