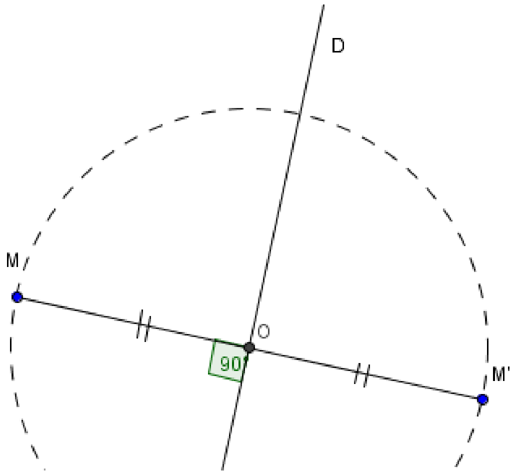
## 1) Symétrique d’un point

a) Rappel : construction du symétrique d’un point par rapport à une droite.

Définition : Le symétrique M’ d’un point M par rapport à une droite D est tel que : (MM’) est perpendiculaire à D et [MM’] a pour milieu un point de D.




Le programme de construction est le suivant :

- Tracer la droite perpendiculaire à D passant par M
- Cette droite coupe D en un point O, tracer le cercle de centre O passant par M.
- Ce cercle recoupe la perpendiculaire à D en un point M’, placer M’.

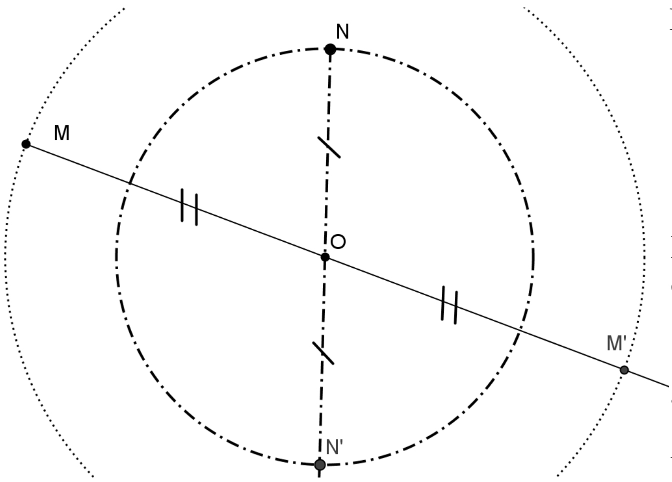
Remarque : un point de la droite D a pour symétrique lui-même. Sur notre figure, le symétrique de O par rapport à D est O. On dit d’un point qui n’est pas déplacé par une symétrie qu’il est *invariant*.

b) Symétrique d'un point dans la symétrie centrale

Dans la symétrie centrale, il n'y a pas d'*axe* de symétrie.

A sa place, invariant par la symétrie, il y a un point qu'on appelle le *centre* de la symétrie.

Définition : Le symétrique M’ d’un point M par rapport au point O est tel que : le segment [MM’] a pour milieu le point O. On dit que O est le centre de la symétrie qui transforme M en M'.




Le programme de construction est le suivant :

- Tracer la demi-droite [MO).
- Tracer le cercle de centre O passant par M.
- Ce cercle coupe la demi-droite en M' qui est le point cherché. Placer M’.

Remarque : une propriété immédiate de cette symétrie centrale est que si le symétrique de M est M', alors le symétrique de M' est M, on dit que M et M' sont symétriques par rapport à O. Sur la figure, nous avons aussi N et N' qui sont symétriques par rapport à O.

Une autre remarque. Ces deux phrases sont strictement équivalentes : "L*e symétrique de M par la symétrie de centre O est M'*." et "*Le milieu de [MM'] est O.*"

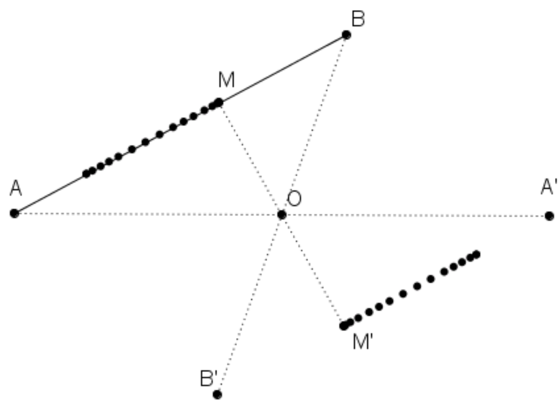
!!Mise en garde : du fait de l'emploi du même mot, *symétrique,* il y a un risque de confusion. La différence vient de l'élément de symétrie qui est une droite dans un cas, un point dans l'autre. On aurait pu appeler la symétrie centrale autrement, par exemple *demi-tour* puisque tout revient à tourner autour du centre d'un demi-tour. Nous utiliserons d'ailleurs parfois cette appellation, comme synonyme de symétrie centrale.

## 2) Propriétés de la symétrie centrale

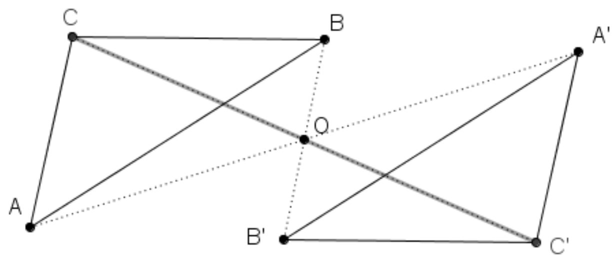
a) Symétrique d’un segment

Si l’on construit les symétriques de 3 points alignés comme A, M et B sur la figure ci-contre, on obtient 3 points alignés. De plus, la distance entre deux points est conservée par la symétrie centrale.

Sur notre figure AB = A’B’ et AM = A’M’.



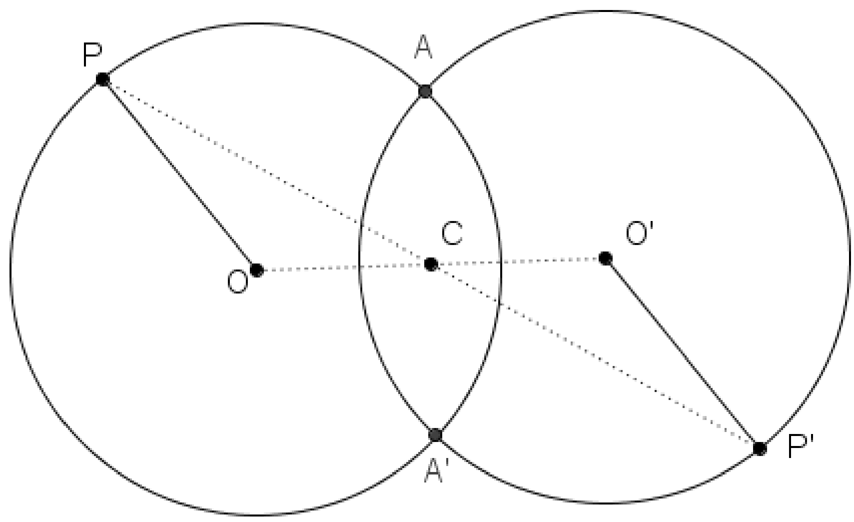

Nous retiendrons qu’une symétrie centrale transforme un segment en un segment de même longueur. Sur notre figure [AB] est transformé en [A’B’]. Mais ce qui est remarquable (et que n'a pas la symétrie axiale!) c'est que les segments symétriques sont parallèles. La symétrie centrale transforme un segment en un segment parallèle et de même mesure.




Pour construire le symétrique d'un segment, il suffit donc de construire le symétrique des deux extrémités du segment, puis de tracer le segment qui joint ces deux points. Une autre méthode est de construire le symétrique d'un seul point, puis de tracer la parallèle passant par ce point sur laquelle on placera l'autre point. Sur la figure de droite on a tracé un triangle et son symétrique par rapport à O. Les côtés symétriques sont parallèles et de même longueur.
Remarque : On peut obtenir le triangle A'B'C' en faisant tourner le triangle ABC autour du centre O d'un demi-tour.

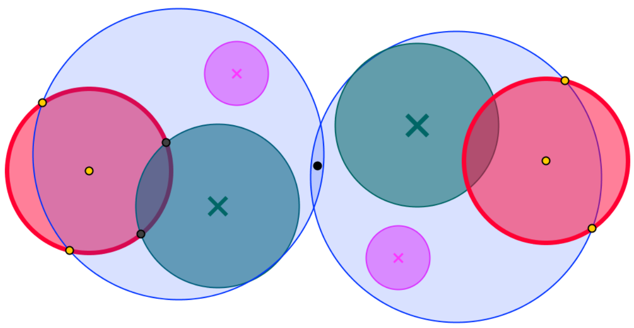
b) Symétrique d'un cercle

Si l'on doit tracer le symétrique d'un cercle de centre O passant par P par rapport à un point C, il suffit de tracer l'image O' du centre O et l'image P' du point P. Un cercle a, en effet, pour symétrique un autre cercle de même rayon et dont le centre est le symétrique du centre du cercle de départ.




N'importe quel point M du cercle de départ aura pour symétrique un point M' du cercle symétrique.

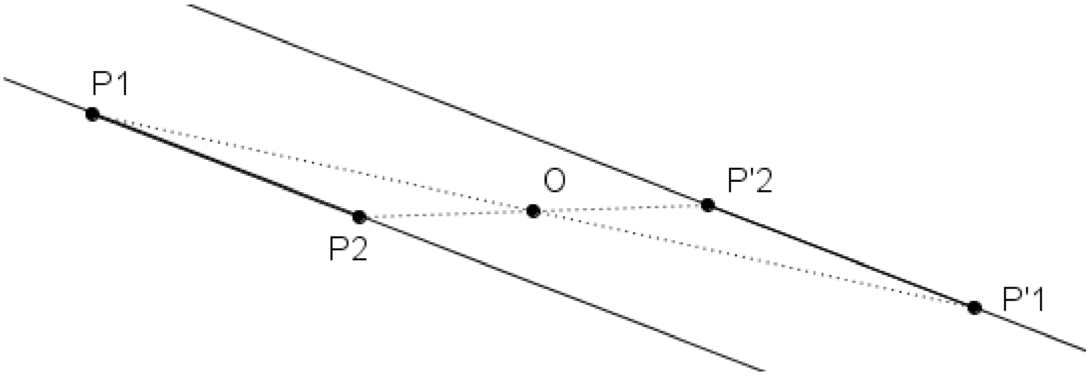
Lorsque le rayon du cercle est inférieur à la distance OO' séparant les deux cercles, les deux cercles symétriques se coupent en deux points A et A' sur notre figure. Ces points d'intersections sont symétriques l'un de l'autre. Ce sont les seuls points du cercle de départ qui ont leur symétrique sur le cercle symétrique.



Ci-dessus un groupe de cercles et leur symétrique par rapport à un centre (en noir). On voit que la symétrie centrale ne déforme rien : tout le groupe est simplement dessiné à l'envers.

c) Symétrique d'une droite

Le symétrique d'une droite d par rapport à un point O est une droite d' parallèle à d. On trace d' en construisant les symétriques de 2 points quelconques $P_1$ et $P_2$ de la droite d. Les symétriques $P'_1$ et $P'_2$ de ces 2 points seront en effet sur la droite d'. Il existe des droites qui sont invariantes par symétrie centrale : ce sont les droites qui passent par le centre de la symétrie. Deux droites symétriques sont parallèles strictement lorsqu'elles ne passent pas par le centre de la symétrie ; elles sont confondues lorsqu'elles passent par le centre.

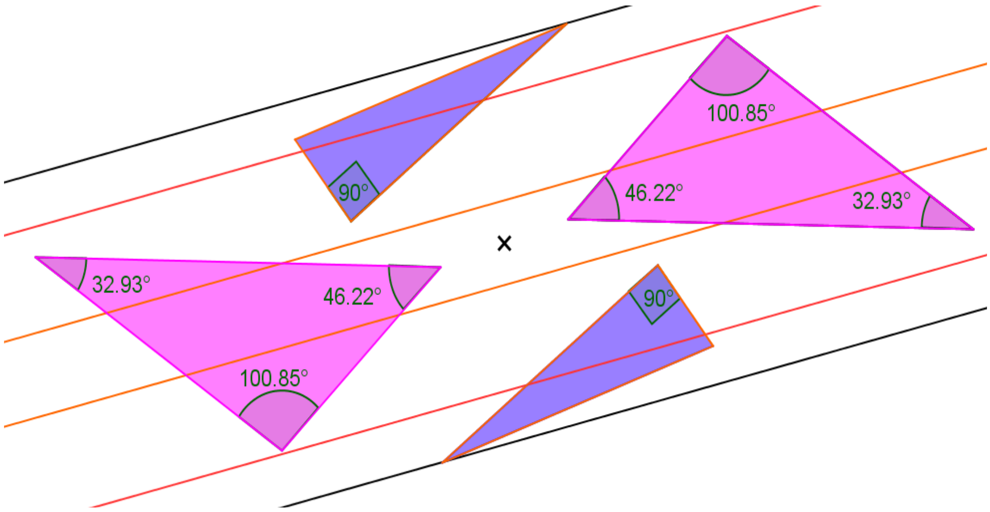



d) Symétrique d'un angle

Le symétrique d'un angle $\widehat{ABC}$ est un angle $\widehat{A'B'C'}$ de même mesure.
En particulier un angle droit a pour symétrique un angle droit.

Un triangle dont les angles mesurent 33°, 46° et 101° aura pour symétrique un triangle dont les angles mesurent 33°, 46° et 101°.

Deux droites parallèles auront pour symétriques deux droites parallèles.
Deux droites perpendiculaires auront pour symétriques deux droites perpendiculaires.




Autrement dit, la symétrie ne déformera pas les triangles, ni aucun polygone, ni aucune figure.

Pour résumer : la symétrie centrale ne change pas les angles, les longueurs et les formes. C'est une transformation qui ne fait que déplacer les figures. La symétrie axiale avait aussi cette caractéristique. On dit que ce sont des déplacements. Il existe d'autres déplacements qui seront étudiés plus tard.

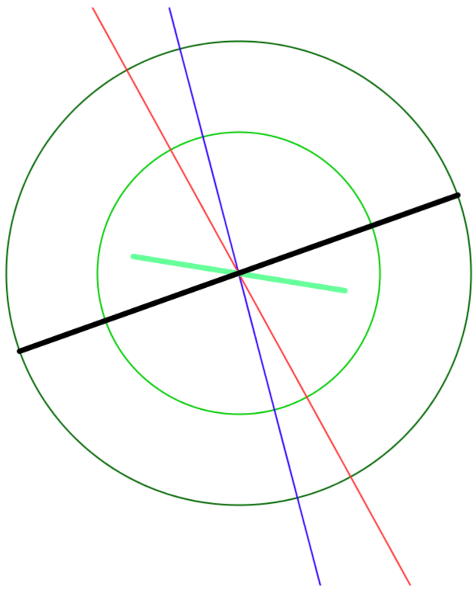
## 3) Centre de symétrie d'une figure

a) Définition

> Définition : on dit qu'une figure $\mathcal{F}$ admet le point O comme centre de symétrie si tous les points de la figure $\mathcal{F}$ ont pour symétrique par rapport au point O, un point de la figure $\mathcal{F}$. Autrement dit O est un centre de symétrie pour la figure $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est invariante par la symétrie de centre O.

Exemples : Parmi les figures simples étudiées jusqu'ici, un segment a un centre de symétrie : son milieu, un cercle a un centre de symétrie : son centre, une droite a une infinité de centre de symétrie : tous les points de la droite peuvent être considérés comme centre de symétrie de la droite.

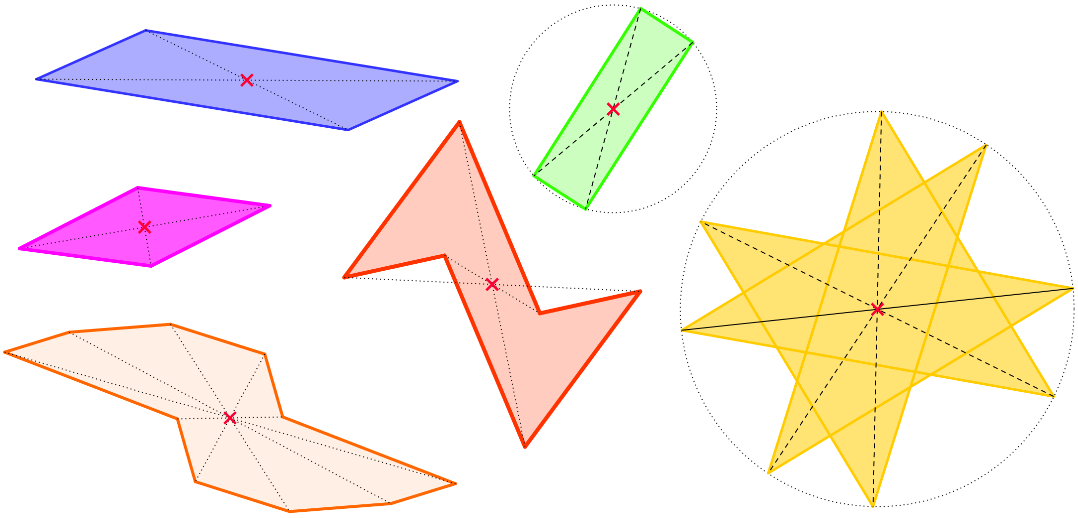
Sur la figure ci-contre, nous avons tracés deux segments ayant le même centre de symétrie, deux droites et deux cercles ayant également le même point comme centre de symétrie.



b) Autres figures ayant un centre de symétrie

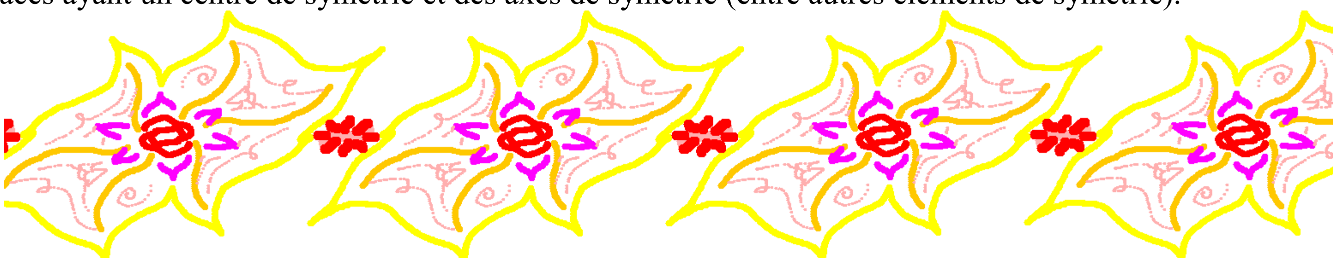
On connaît des triangles qui ont un centre de symétrie ? Non. Les triangles équilatéraux ont trois axes de symétrie, mais ils n'ont pas de centre de symétrie.

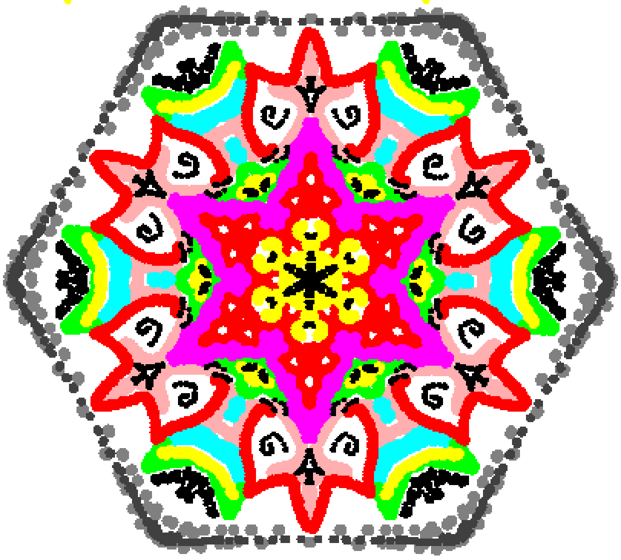
Pour avoir un centre de symétrie, un polygone doit avoir des côtés opposés parallèles et de même longueur. Voici quelques polygones ayant un centre de symétrie (la croix rouge).

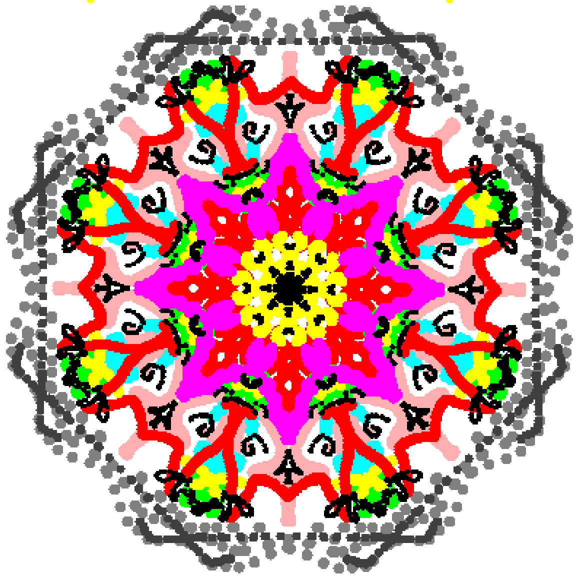


Certains de ces polygones n'ont qu'un centre de symétrie, d'autres ont un centre et un ou des axe(s) de symétrie : le rectangle vert et le losange violet ont deux axes de symétrie (perpendiculaires pour le losange), l'étoile à 8 côtés a aussi deux axes de symétrie perpendiculaires. Une étoile a 8 côtés, si elle est régulière peut avoir jusqu'à 8 axes de symétrie. Sauriez-vous en dessiner une ?

Les figures ayant un centre de symétrie ne sont pas nécessairement des polygones. Voyez par exemple les figures ci-dessous qui ont été obtenues avec un petit programme du site mathadomicile.fr qui exploite les propriétés des symétries (axiales et centrales) pour obtenir des frises, des rosaces, des pavages et des cadres. La première figure est une frise ayant des centres de symétrie (en rouge), la deuxième et la troisième sont des rosaces ayant un centre de symétrie et des axes de symétrie (entre autres éléments de symétrie).

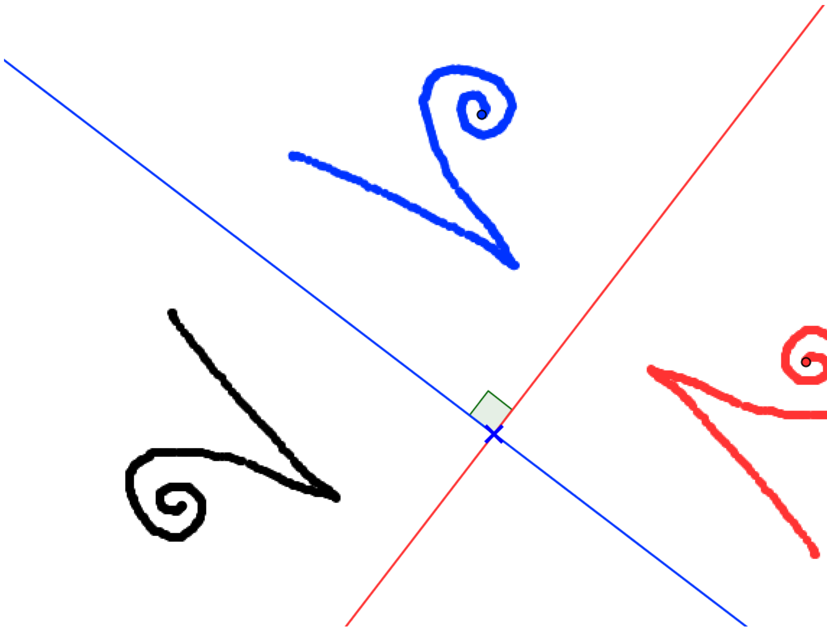






Un dernier point : quelle relation y a t'il entre symétrie centrale et symétrie axiale? On peut répondre à cette question de plusieurs façons mais la propriété suivante mérite d'être soulignée : si l'on fait subir à une figure $\mathcal{F}$ une première symétrie axiale d'axe $d_1$, cela donne une figure $\mathcal{F}_1$. Si l'on fait subir maintenant à la figure

$\mathcal{F}_1$ une seconde symétrie axiale d'axe $d_2$ perpendiculaire à $d_1$, cela donne une figure $\mathcal{F}_2$. Oui, et alors? Et bien regardez la figure $\mathcal{F}_2$, comparez là à la figure de départ, la figure $\mathcal{F}$. Ne constatez-vous rien?



Les figures noires et rouges sont obtenues ainsi : une première symétrie d'axe bleu transforme la figure noire en la figure bleue, puis la seconde symétrie d'axe rouge transforme la figure bleue en la figure rouge. Les figures noires et rouge sont **symétriques par rapport au point d'intersection des deux axes** de symétrie (le point marqué d'une croix sur la figure). Et oui, on peut considérer qu'une symétrie centrale est le produit (on dit la composition) de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires.

Conséquence de cette propriété : les figures qui possèdent deux axes de symétrie perpendiculaires (par exemple le rectangle ou le losange) possèdent également un centre de symétrie, le point d'intersection des deux axes. Regardez plutôt les figures ci-dessous tracées avec deux symétries axiales d'axes perpendiculaires.