$5^{ème}$ Chapitre 1 : Expressions numériques

Connaissances : Nombres entiers et décimaux positifs : calcul, divisibilité sur les entiers
**Enchaînement d'opérations.*
Capacités : *Effectuer une succession d'opérations donnée sous diverses formes (par calcul mental, à la main ou instrumenté), uniquement sur des exemples numériques. Écrire une expression correspondant à une succession donnée d'opérations*.
Commentaires : L'acquisition des priorités opératoires est un préalable au calcul algébrique. Les questions posées à propos de résultats obtenus à l'aide de calculatrices peuvent offrir une occasion de dégager les priorités opératoires usuelles. La capacité visée dans le socle commun concerne uniquement un calcul isolé. Pour construire la capacité : « savoir quand et comment utiliser les opérations élémentaires pour résoudre un problème », la succession d'opérations, si elle est nécessaire, se fait étape par étape. Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

1. Priorités opératoires

a) Expressions ne contenant que des + ou des −

Règle 1 : Lorsqu'il n'y a que des additions, on effectue les calculs dans l'ordre que l'on veut et on peut changer l'ordre des nombres.

Exemple : 0,25+5+0,75+18+2=(0,25+0,75)+5+(18+2)=1+5+20=26

Vocabulaire: quand on additionne plusieurs nombres, on dit qu'on effectue la *somme* de ces nombres. Chacun des nombres est un *terme* de la somme.

Règle 2 : Lorsqu'il y a que des additions et au moins une soustraction, on effectue les calculs dans l'ordre indiqué, de gauche à droite, et on ne peut changer l'ordre des nombres.

Exemple : 12+5−2=17−2 (on effectue d'abord +) et aussi 12+3 (on effectue d'abord −),
mais 12−5+2=7+2=9 (on effectue d'abord −, la 1ère opération) et non 12−7=5.

Vocabulaire: quand on soustrait deux nombres, on dit qu'on effectue la *différence* de ces nombres. On ne parle pas de la différence de trois nombres car cela n'a pas de sens si on ne donne pas l'ordre des nombres.

Remarque: Si, dans 12−5+2 on veut d'abord effectuer 5+2, on doit mettre des parenthèses, qui vont changer l'ordre. 12−(5+2)= 12−7=5 alors que 12−5+2= (12−5)+2=7+2=9.

Règle 3 : Lorsqu'il y a des parenthèses, on effectue d'abord les opérations contenus dans les parenthèses.

Exemple : 12−(4−3)−1=12−1−1=11−1=10 alors que 12−(4−3−1)=12−(1−1)=12−0=12 et, sans parenthèse le résultat est différent: 12−4−3−1=8−3−1=5−1=4.

b) Expressions ne contenant que des × ou des ÷

Règle 4 : Lorsqu'il n'y a que des multiplications, on effectue les calculs dans l'ordre que l'on veut et on peut changer l'ordre des nombres.

Exemple : 4×13×25×3=(4×25)×(13×3)=100×39=3900.

Vocabulaire : quand on multiplie plusieurs nombres, on dit qu'on effectue le *produit* de ces nombres. Chacun des nombres est un *facteur* du produit.

Notation : Devant une parenthèse ou une lettre (remplaçant un nombre) on omet généralement le symbole de la multiplication. Par exemple on note $4x$ le produit $4\times x$, et on note $4(x+2)$ le produit $4\times(x+2)$.

Règle 5 : Lorsqu'il y a que des multiplications et au moins une division, on effectue les calculs dans l'ordre indiqué, de gauche à droite, et on ne peut changer l'ordre des nombres.

Exemple : 12×6÷2=72÷2 (on effectue d'abord ×) et aussi 12×3 (on effectue d'abord ÷),
mais 12÷6×2=2×2=9 (on effectue d'abord ÷, la 1ère opération) et non 12÷12=1.

Vocabulaire: quand on divise deux nombres, on dit qu'on effectue le *quotient* de ces nombres. On ne parle pas du quotient de trois nombres car cela n'a pas de sens si on ne donne pas l'ordre des nombres.

La règles est valable ici aussi, comme partout: les parenthèses changent l'ordre des opérations.
Exemple : 12÷(4÷2)=12÷2=6 alors que 12÷4÷2=(12÷4)÷2= 3÷2=1,5.

c) Expressions contenant à la fois des + ou des − et des × ou des ÷

Lorsqu'au supermarché on achète un pot de pâte de chocolat à 2€70 et 3 canettes à 0€90 d'une boisson gazeuse, pour savoir le total à payer, on effectue l'opération 2,70+3×0,90 et il ne vient à personne l'idée d'additionner d'abord 2,70 et 3. Il faut, en effet effectuer d'abord la multiplication.

Règle 6 : Lorsqu'il y a un mélange des quatre opérations, on effectue d'abord les multiplications et les divisions.

Exemple : 12+3×6−2=12+18−2=20−2 =18, on effectue d'abord ×, puis les + et − de gauche à droite.
Autre exemple : 100−72÷2−3×5=100−36−5=64−15=49.

d) Expressions contenant des parenthèses

Les parenthèses modifient l'ordre « naturel » des opérations. Les parenthèses qui ne changent pas l'ordre des opérations sont inutiles et peuvent donc être enlevées.
Exemple: dans les expressions suivantes, les parenthèses sont inutiles 12+(3×6)−2 ; (4×10)+5

Règle 7 : Lorsqu'il y a plusieurs parenthèses emboîtées, on effectue les calculs en partant des parenthèses les plus intérieures.

Exemple : 12+(3×(6−2))=12+(3×4)=12+12=24
Autre exemple : 360÷(28−(48÷(6÷2)))=360÷(28−(48÷3))=360÷(28−16)=360÷12=20

Remarque : Les parenthèses extérieures sont parfois remplacées par des crochets ou des accolades.
Exemple : 12+(3×(6−2)) peut se noter 12+[3×(6−2)], 360÷(28−(48÷(6÷2))) peut se noter avec parenthèses, crochets et accolades 360÷{28−[48÷(6÷2)]} ce qui aide la lecture de ces expressions.

e) Expressions utilisant un ou des trait(s) de fraction

Le trait de fraction sert à noter une division, par exemple $\frac{2}{3}$ est le quotient de 2 par 3.

$$\frac{2}{3}=2\div 3$$

Règle 8 : Lorsqu'on utilise un trait de fraction, on considère que le numérateur et le dénominateur sont entre des parenthèses.

Exemple : $\frac{2+6}{3-1}=\frac{8}{2}=4$, l'expression de départ aurait pu être notée (2+6)÷(3−1).

Attention, si on utilise une calculatrice pour calculer une expression dans laquelle une division est remplacée par un trait de fraction, les parenthèses (qui ne sont pas écrites) doivent être ajoutées!

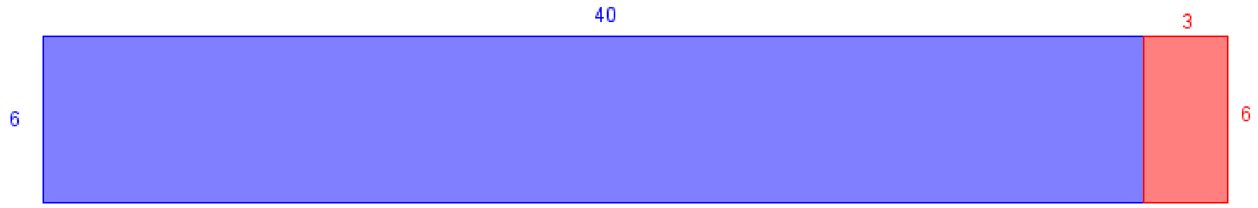
Si je dois calculer l'expression $71+\frac{7}{13+\frac{41}{29+23}}$, je dois taper 71+7÷(13+41÷(29+23)). D'autres parenthèses inutiles peuvent être employées, mais il faut au moins écrire ces deux paires emboîtées.

2. Distributivité

a) Distributivité de la multiplication sur l'addition

Cette propriété est connue depuis longtemps :
Lorsqu'on pose l'opération pour effectuer la multiplication 43×6, on effectue séparément 3×6 et 40×6 et on additionne les deux résultats, car $43\times6=3\times6+40\times6$. Ceci est un exemple de ce qu'on appelle la distributivité de la multiplication sur l'addition et qui se note plutôt $(40+3)\times6=40\times6+3\times6$

Un autre exemple, une illustration géométrique de ceci : si on doit calculer l'aire de la figure ci-dessous qui est un rectangle de 6m de large et de 43 m de long, on peut faire le calcul des aires des deux rectangles de couleurs séparément ou calculer l'aire du grand rectangle directement.



Cette propriété est utilisée en calcul mental pour calculer par exemple 21×9. On décompose 21 en 20+1 puis on effectue $20\times9=180$ et $1\times9=9$ et enfin, on additionne 180 et 9.

Dans l'autre sens, cette propriété permet de simplifier des calculs comme $3\times25+7\times25$, car on sait que $3\times25+7\times25=(3+7)\times25=10\times25=250$.

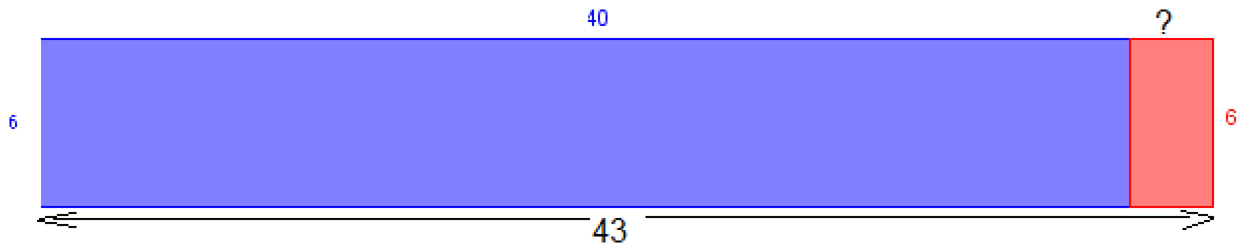
D'une façon générale, en remplaçant les nombres par des lettres on a :

$$\mathbf{a}\times b+\mathbf{a}\times c=\mathbf{a}\times(b+c) \text{ et aussi } b\times\mathbf{a}+c\times\mathbf{a}=(b+c)\times\mathbf{a}$$

Remarque : C'est évidemment vrai dans l'autre sens, $\mathbf{a}\times(b+c)=\mathbf{a}\times b+\mathbf{a}\times c$ et aussi $(b+c)\times\mathbf{a}=b\times\mathbf{a}+c\times\mathbf{a}$

b) Distributivité de la multiplication sur la soustraction

Il s'agit de la même propriété, en remplaçant le + par un −. L'illustration géométrique est la même, sauf qu'on connait une grande longueur (43) et un petite (40) et qu'on doit calculer l'aire du rectangle dont on ne connait pas l'autre petite longueur (le rectangle rose). On doit effectuer une soustraction des deux aires connues : $6\times43-6\times40=6\times(43-40)=6\times3=18$.



De même, si je dois effectuer le calcul 17×99 mentalement, je vais considérer que 99 est la différence $100-1$ et effectuer $17\times99=17\times(100-1)=17\times100-17\times1=1700-17=1683$.

D'une façon générale, en remplaçant les nombres par des lettres on a :

$$\mathbf{a}\times b-\mathbf{a}\times c=\mathbf{a}\times(b-c) \text{ et aussi } b\times\mathbf{a}-c\times\mathbf{a}=(b-c)\times\mathbf{a}$$

Remarque : C'est aussi vrai évidemment dans l'autre sens,
$\mathbf{a}\times(b-c)=\mathbf{a}\times b-\mathbf{a}\times c$ et aussi $(b-c)\times\mathbf{a}=b\times\mathbf{a}-c\times\mathbf{a}$

c) Développements et factorisations (vocabulaire)

Dans ces égalités de la distributivité, on appelle *forme développée*, l'expression où on doit effectuer en dernier l'addition ou la soustraction comme $3\times25+7\times25$ ou $17\times100-17\times1$. Dans l'autre expression, l'opération qu'on effectue en dernier est la multiplication (parce qu'il y a des parenthèses. C'est un produit, qu'on appelle *forme factorisée*. Par exemple, c'est $(3+7)\times25$ ou $17\times(100-1)$. Quand on passe de la forme développée à la forme factorisée, on dit qu'on factorise (ou qu'on met en facteur). Quand on fait le contraire, qu'on passe de la forme factorisée à la forme développée, on dit qu'on développe. Par exemple lorsque j'écris : $3\times(x-1)=3\times x-3\times1=3x-3$, j'ai effectué un développement. Quand j'écris $4\times x+4\times7=4\times(x+7)$, j'effectue une factorisation.

NB : Les transformations d'écritures qu'on appelle factorisation ou développement sont très souvent employées en mathématiques. C'est pourquoi il faut maîtriser ce vocabulaire et ces techniques.

3. Divisibilité des entiers

a) Multiples et diviseurs

<u>Définitions</u> : les multiples d'un entier n donné sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $n\times m$, où m est un entier quelconque.
Si un nombre p est multiple de n, alors il peut s'écrire $p=n\times m$ où m est un entier. Dans ce cas p est divisible par n, le quotient de p par n est m, $p\div n=m$. On dit aussi que n est un diviseur de p.
<u>Propriété</u> : Tout entier p a au moins 2 diviseurs : 1 (diviseur commun à tous les entiers) et p lui-même.

<u>Exemple</u> : les multiples de 2 sont les nombres qui peuvent s'écrire $2\times m$ ou $2m$ (avec m entier).
La liste des multiples de 2 est obtenue en remplaçant m par tous les entiers successifs. Ce sont les nombres *pairs* : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, etc. Remarquons que les nombres entiers qui ne sont pas multiples de 2 sont dits *impairs* et peuvent s'écrire $2\times m+1$ (avec m entier).
254 est un multiple de 2 car $254=2\times127$. Parmi les diviseurs de 254, il y a 1, 2, 127 et 254.

b) Règles de divisibilité

Divisibilité par 2 : Pour reconnaître si un nombre entier est pair, on regarde son dernier chiffre. S'il appartient à la liste {0, 2, 4, 6, 8} alors le nombre est pair, c'est-à-dire divisible par 2 ou multiple de 2.

Preuve : Supposons que n s'écrive avec les chiffres $abcd$, on peut le décomposer en la somme $abc\times10+d$ et donc si n est pair, alors on peut s'écrire $abc\times10+d=2\times m$, et donc $d=2\times m-abc\times10$. Cette dernière expression se factorise en $2\times(m-abc\times5)$. d doit donc être un chiffre pair.

D'autres règles de divisibilité sont du même genre que celle-ci.

Divisibilité par 5 et par 10 : Pour reconnaître si un nombre entier est un multiple de 5 ou de 10, on regarde son dernier chiffre. S'il appartient à la liste {0, 5} alors le nombre est un multiple de 5, si c'est un zéro alors le nombre est un multiple de 10.
Divisibilité par 100 (par 1000) : Pour reconnaître si un nombre entier est un multiple de 100 (de 1000), on regarde ses 2 derniers chiffres (ses 3 derniers chiffres). S'ils sont égaux à 00 (à 000), alors le nombre est un multiple de 100 (de 1000).

Les règles de divisibilité par 3 et par 9 sont d'un autre genre :

Divisibilité par 3 : Pour reconnaître si un nombre entier est divisible par 3, on regarde la somme de ses chiffres. Si cette somme est un multiple de 3 alors le nombre de départ est aussi un multiple de 3, sinon le nombre de départ n'est pas non plus un multiple de 3.

Preuve : Supposons que n s'écrive avec les chiffres $abcd$, on peut le décomposer en la somme $a\times1000+b\times100+c\times10+d$ et donc si n est multiple de 3, alors on peut s'écrire :
$a\times1000+b\times100+c\times10+d=3\times m$, et donc $a\times(999+1)+b\times(99+1)+c\times(9+1)+d=3\times m$.
Le 1er membre de cette dernière expression se développe : $a\times999+a\times1+b\times99+b\times1+c\times9+c\times1+d=3\times m$
Et en regroupant $[a\times999+b\times99+c\times9]+a+b+c+d=3\times m$.
On doit donc avoir $a+b+c+d=3\times m-a\times999+b\times99+c\times9=3\times[m-a\times333+b\times33+c\times3]$. C'est-à-dire que

$a+b+c+d$ doit être un multiple de 3.

Remarque : pour qu'un nombre soit multiple de 6, il faut et il suffit qu'il soit divisible par 2 et par 3.
Exemple : 123456 est divisible par 2 (se termine par 6 qui est pair) et par 3 ($1+2+3+4+5+6=21=3\times7$) donc il est divisible par 6. Vérification $123456\div6=20576$.

Remarquons qu'il n'y a pas grand chose à modifier dans cette preuve pour justifier la règle suivante :

> Divisibilité par 9 : Pour reconnaître si un nombre entier est divisible par 9, on regarde la somme de ses chiffres. Si cette somme est un multiple de 9 alors le nombre de départ est aussi un multiple de 9, sinon le nombre de départ n'est pas non plus un multiple de 9.

Exemple : 256 est-il un multiple de 3 ou de 9 ? Non, car la somme de ses chiffres est 13 ($2+5+6=13$) qui n'est pas divisible par 3 (ni par 9). 255 est le multiple de 3 le plus proche de 256. On reconnaît que 255 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres est un multiple de 3 : $2+5+5=12=4\times3$.
Divisons 255 par 3 : $255=240+15=80\times3+5\times3=(80+5)\times3=85\times3$. Conclusion $256= 85\times3+1$.

Curiosités : D'autres règles de divisibilité ont été découvertes, comme par exemple pour qu'un nombre $abcd$ soit divisible par 7 il faut que la différence $abc-d\times2$ soit divisible par 7 (les premiers chiffres moins le double du dernier). Pour qu'il soit divisible par 11, il faut que $(b+d)-(a+c)$ soit divisible par 11 (les chiffres de rang pair moins les chiffres de rang impair). Exemple 2013 est divisible par 11 car $(0+3)-(2+1)=0$ et 0 est un multiple de 11. Vérification $2013\div11=183$. Mais 2013 n'est pas divisible par 7 car $201-3\times2=195$ et $19-5\times2=9$ n'est pas un multiple de 7. Par contre 2009 est multiple de 7 car $200-9\times2=182$ et $18-2\times2=14$ est un multiple de 7. Vérification $2009\div7=287$.
$1001=7\times11\times13$ et donc les multiples de 1001 sont des multiples de 7, de 11 et de 13. Par exemple 154 154 est un multiple de 7, de 11 et de 13, comme 2002 ou 11 011...

c)Division euclidienne

> La division *euclidienne*[1] de p par n est celle où on donne le quotient q sous la forme entière, avec le reste éventuel r ($r<n$), entier lui aussi. Une division euclidienne est donc une division où le dividende, le diviseur, le quotient et le reste sont des nombres entiers.
> On note cette division en ligne sous la forme suivante : $p=n\times q+r$

Exemple : on a vu que $256=85\times3+1$, cela signifie que dans la division euclidienne de 256 par 3, le quotient est 85 et le reste est 1. Remarquons, qu'alors dans la division euclidienne de 256 par 85, le quotient est 3 et le reste est 1.

Remarque : Si, dans la division euclidienne de p par n, le reste r est nul, alors p est divisible par n.

Division euclidienne posée (rappel, c'est la première technique de division posée apprise au primaire)
Supposons que dans un problème, nous avons 256 euros à partager en 3, on pose la division :

256	3
24	85
16	
15	
1	

Donc 256 = 3 × 85 + 1
On peut écrire à la rigueur 256 ÷ 3 = 85, reste 1.
Le dividende est ici 256, le diviseur 3, le quotient 85 et le reste 1.
Le quotient n'est pas exact car 256 n'est pas divisible par 3 et donc on l'égalité 256 ÷ 3 = 85 est fausse.

Utilisation de la calculatrice : Les calculatrices de collège, généralement, effectuent directement les divisions euclidiennes. La touche ÷R (touche de division avec reste) est utilisée pour cela. Si cette touche n'est pas présente (voir notice), il faut prendre la partie entière de la division décimale :
333 ÷ 12 = 27,75 ; la partie entière (27) est le quotient entier cherché, pour trouver le reste on effectue la différence 333 – 27×12 = 9. On peut alors écrire en ligne la division euclidienne de 333 par 12 :
333 = 12 × 27 + 9.

[1] L’adjectif *euclidien* vient de Euclide qui est un mathématicien grec de l’antiquité. À cette époque on s’intéressait beaucoup aux entiers et aux quotients d'entiers qui font l'objet d'une partie des mathématiques : l’arithmétique.