1) Expressions littérales

a) Usage des lettres dans un calcul

Certaines lettres désignent un nombre qu'on ne peut pas écrire avec des chiffres.

Exemple :

Le nombre « pi », noté avec la lettre grecque π est le rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle ; sa valeur exacte ne peut s'écrire avec des chiffres car ce n'est pas un nombre rationnel (on ne peut pas l'écrire sous forme de fraction, encore moins sous forme décimale).

Dans la plupart des cas, les lettres sont utilisées lorsqu'un nombre n'est pas connu, lorsqu'il peut varier. Cela arrive très fréquemment dans une formule ou une propriété.

Exemples :

le périmètre d'un carré de côté c est égale à $4c$ (sous-entendu $4\times c$, voir les conventions d'écriture)
L'aire d'un disque de rayon r est égale à πr^2 (sous-entendu $\pi\times r\times r$, idem)
Si un triangle de côtés a, b et c vérifie l'égalité $a^2+b^2=c^2$ alors ce triangle est un triangle rectangle.

b) Conventions d'écriture

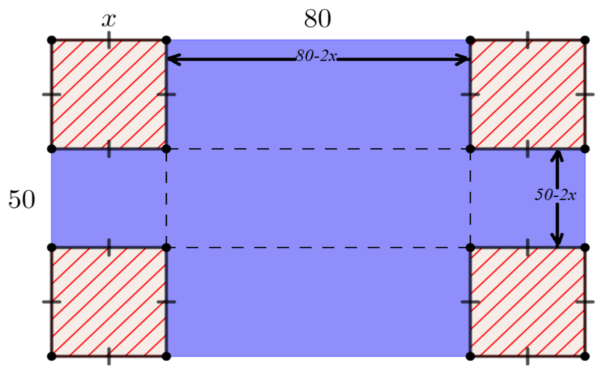
Pour simplifier, on n'écrit pas les symboles de la multiplication devant une lettre ou une parenthèse ouvrante.
Exemples : $2\times n$ se note $2n$; $2\times(n+1)$ se note $2(n+1)$

Toujours pour simplifier, on utilise au maximum la notation des puissances.
Exemples : $n\times n$ se note n^2 ; $(n+1)\times(n+1)$ se note $(n+1)^2$

On exécute les multiplications ou les additions quand on le peut.
Exemples : $0\times n$ se note 0 ; $1\times n$ se note n ; $2\times(3n)$ se note $6n$; $0+n$ se note n ; $(-n)+n$ se note 0

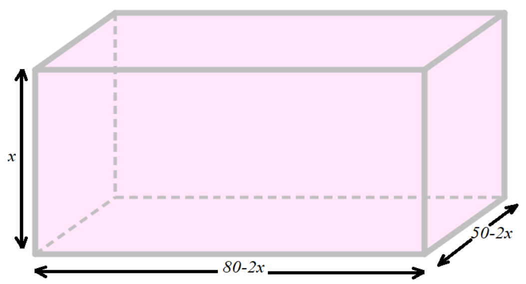
c) Obtenir une expression littérale

Pour traduire une situation, on est amené à écrire des *expressions littérales* (qui contiennent une ou plusieurs lettres). Il faut toujours commencer par définir la signification d'une lettre.



Exemple :

J'enlève une coin carré aux 4 sommets d'une feuille mesurant 80mm sur 50mm pour former une petite boîte sans couvercle en pliant selon les pointillés (voir la figure) et en collant les arêtes verticales.



En désignant par x le côté des carrés, je peux exprimer :

- la longueur de la boîte : $80-2x$ (on enlève 2 fois le côté du carré dans une longueur)
- la largeur de la boîte : $50-2x$ (idem dans une largeur)
- le volume de la boîte : $x(80-2x)(50-2x)$ (on multiplie la hauteur x, par la longueur et la largeur)

d) Tester une égalité

Les égalités peuvent être *vraies* pour certaines valeurs et *fausses* pour d'autres valeurs.

Exemple :

l'égalité $2a-3=a+5$ est vraie pour $a=8$ (car $2\times 8-3=13$ et $8+5=13$) mais fausse pour $a=10$ (car $2\times 10-3=17$ et $10+5=15\neq 17$).

Lorsqu'une égalité est donnée, on peut remplacer les nombres inconnus par des valeurs particulières et voir (en effectuant les calculs) si l'égalité est vraie ou fausse. Cela s'appelle *tester une égalité*.

Exemple :

Testons l'égalité suivante $2n^2+1=n(n-2)\Leftrightarrow 2\times n\times n+1=n\times(n-2)$ pour savoir si elle est vérifiée pour des

valeurs entières d'un nombre inconnu n.
On peut essayer au hasard différentes valeurs de ce nombre, mais le plus efficace est d'utiliser un tableur.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
$2n^2+1$	1	3	9	19	33	51	73	99	129	3	9	19	33	51	73	99
$n(n-2)$	0	-1	0	3	8	15	24	35	48	3	8	15	24	35	48	63

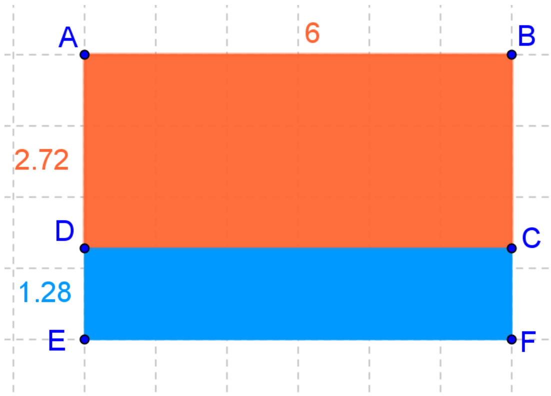
D'après ce tableau, il existe une valeur entière qui vérifie cette égalité, c'est -1 .
Vérification : $2\times(-1)\times(-1)+1=2+1=3$ et $(-1)\times(-1-2)=(-1)\times(-3)=3$

2) Distributivité

Lorsque nous effectuons un produit « à la main », nous décomposons un des facteurs en somme. Par exemple, pour calculer 75×12 nous décomposons 12 en la somme 10+2 et effectuons 75×10=750 et 75×2=150, puis nous ajoutons les produits partiels 750 et 150 pour trouver le résultat final 900.
Nous avons donc considéré que 75×(10+2) = 75×10+75×2.
Cette propriété s'appelle la *distributivité de la multiplication sur l'addition*.

Propriété : a, b et c étant trois nombres quelconques, le *produit* $a\times(b+c)$ est égal à la *somme* $a\times b + a\times c$
Plus simplement $a(b+c) = ab + ac$

Illustration graphique :
Cette propriété est représentée par un calcul d'aire de rectangle :
a est la longueur du côté [AB]
[AE], l'autre côté, mesure $(b+c)$
On comprend bien que l'aire du rectangle ABFE est égale à la somme des aires des deux petits rectangles qui le compose ABCD et DCFE.
Ici, l'aire du rectangle ABCD est 6×2,72=16,32
L'aire du rectangle DCFE est 6×1,28=7,68
L'aire du grand rectangle ABFE est 6×(2,72+1,28)=6×4=24



En calcul mental, cette propriété est intéressante :
Pour calculer 16×21, on décompose un des facteurs, par exemple 21, en une somme : 16×21= 16×(20+1).
On distribue alors la multiplication: 16×(20+1)=16×20+16×1.
On effectue les produits simples 16×20=320 et 16×1=16 et puis la somme 320+16=336.

Cette propriété est valable si on remplace l'addition par la soustraction.
Nous avons vu qu'en effet, une soustraction n'est rien d'autre que l'addition de l'opposé.

Propriété : a, b et c étant trois nombres quelconques, le *produit* $a\times(b-c)$ est égal à la *différence* $a\times b - a\times c$.
Plus simplement : $a(b-c) = ab - ac$

Exemple : 16×19 = 16×(20−1) = 16×20−16×1 = 320−16 = 304.

Avec un calcul d'aire de rectangles : l'aire du rectangle ABCD est égale à la différence entre l'aire du grand rectangle ABFE et l'aire du petit rectangle DCFE : 6×4 − 6×1,28 = 6×(4 − 1,28) = 6×2,72

b) Développement et factorisation

La forme $a(b+c)$ est un **produit** de deux *facteurs :* le premier facteur est a et le second est la somme $b+c$.
On dit que cette forme est la forme *factorisée*.
On met des parenthèses autour de $b+c$ car sinon on ne multiplierait a que par b : $a\times b+c=(a\times b)+c$ (la multiplication est prioritaire).
La forme factorisée du périmètre du rectangle est $2(L+\ell)$ où L=Longueur et ℓ : largeur

La forme $ab+ac$ est une **somme** de deux *termes :* le premier terme est le produit ab, le second est le produit ac. On dit que cette forme est la forme *développée*.
On ne met pas de parenthèses autour des produits car ils s'effectuent en premier.
La forme développée du périmètre du rectangle est $2L+2\ell$ (avec L=Longueur et ℓ : largeur)

Développer, c'est transformer le produit en somme en utilisant la distributivité, cela revient à remplacer $a(b+c)$ par $ab+ac$. Cette transformation d'écriture s'appelle un *développement*.
Exemples : lorsqu'on écrit 16×(20−1) = 16×20−16×1 on a développé.

Factoriser, c'est transformer une somme en produit en utilisant la distributivité. C'est une transformation inverse du développement qu'on appelle *factorisation*. Cela revient à remplacer $ab+ac = a(b+c)$.
Lorsqu'on fait cela, on dit qu'on *met a en facteur.*
Pour cela, on remarque que a est un *facteur commun* des deux produits ab et ac, et on l'extrait de la somme.
Exemples : lorsqu'on écrit $16\times25+16\times75=16\times(25+75)$ on a mis 16 en facteur dans le calcul.
Factorisons l'expression $E=3a+5a$. Le nombre a est un facteur commun qu'on met en facteur $E=(3+5)\times a = 8a$
L'expression $F=8a+16b$ a un facteur commun qui est ici 8 (car $16=8\times2$) d'où la factorisation $F= 8(a+2b)$.

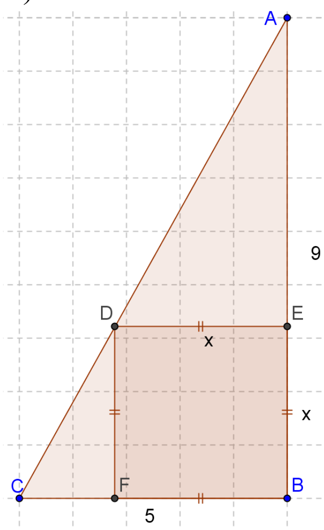
Développer ←

$$ab+ac \quad = \quad a(b+c)$$

Factoriser →

Variantes de ces propriétés :
$ab+cb = b(a+c)$; $ab+bc = b(a+c)$; $ab - bc = b(a - c)$
$ad+bd +cd = d(a+b+c)$; $ab + ac -ad = a(b+c-d)$; $ab - ac -ad = a(b-c-d)$

c) Applications



Les transformations d'écritures que nous venons d'étudier ont de nombreuses applications :

- Résoudre des équations. Vous étudierez ce point là en 4ème.
- Simplifier des expressions numériques.
  Exemple : la somme des aires des triangle ADE et CDF ci-contre vaut $x(9-x)\times\frac{1}{2}+x(5-x)\times\frac{1}{2}$. Cette expression se simplifie en la mettant $x\times\frac{1}{2}$ en facteur $x\times\frac{1}{2}\times(9-x+5-x)=x\times\frac{1}{2}\times(14-2x)$. On continue à simplifier en mettant 2 en facteur dans le dernier facteur, ce qui se simplifie alors en $x\times\frac{1}{2}\times2\times(7-x)=x(7-x)$
- Prouver des propriétés.
  Exemple : le produit de deux nombres impairs est impair.
  $p=2n+1$ et $p'=2n'+1$ sont deux nombres impairs
  $pp'=(2n+1)(2n'+1)=2n(2n'+1)+(2n'+1)=4nn'+2n+2n'+1=2(2nn'+n+n')+1=2n''+1$
  On constate que $2nn'+n+n'$ est un entier n'' d'où $pp'=2n''+1$ est impair.

3) Fonctions

a) Proportionnalité

Définition :
Il y a une situation de proportionnalité lorsque deux grandeurs sont présentes et que l'on passe de la 1ère grandeur à la 2ème en multipliant toujours par un même nombre (un nombre constant, indépendant des grandeurs, appelé *coefficient de proportionnalité*).

Exemple : Lors d'un déplacement à vitesse constante, il y a proportionnalité entre la distance parcourue (la 1ère grandeur) et la durée du parcours (la 2ème grandeur).
À 60 km/h on parcourt 60km en 1h, 120km en 2h, 180km en 3h, etc.
On peut aussi remarquer qu'à cette vitesse, on parcourt 6km en 0,1h (6minutes), 30km en 1/2h (30 min) et aussi, bien sûr, 0km en 0h.
Ces différentes valeurs peuvent se disposer dans le tableau suivant :

Durée du parcours (en h)	0	0,1	0,5	1	2	3
Distance parcourue (en km)	0	6	30	60	120	180

Dans cet exemple, le coefficient de proportionnalité pour passer de la 1ère grandeur à la 2ème grandeur est 60 : on doit multiplier la 1ère grandeur (durée) par 60 pour trouver la 2ème grandeur (distance).
Autrement dit *durée*×60=*distance*

Si on donne une lettre pour le contenu de chacune des deux grandeurs – par exemple d pour la *distance* et t pour le *temps* – la situation de proportionnalité va pouvoir s'écrire par une égalité du type $t\times60=d$ où la lettre d'une grandeur est égale au produit de la lettre de l'autre grandeur multipliée par le coefficient de proportionnalité (il peut aussi être écrit avec une lettre).

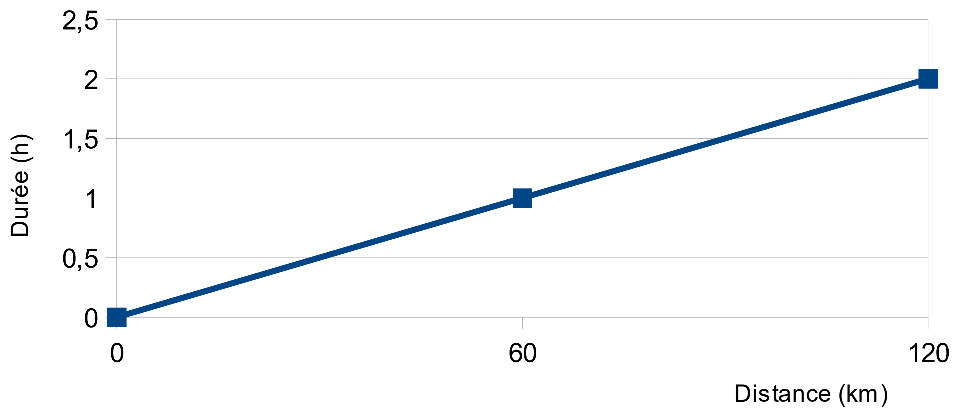
Autres exemples : Dans le précédent exemple, on a la relation $d=60t$ qui traduit une proportionnalité entre les grandeurs d et t. D'autres situations de proportionnalité :

- $p=4{,}5q$ où p est le prix de q kilos d'un fruit coûtant 4,5€ le kilo
- $p'=p+\frac{15}{100}p=p(1+\frac{15}{100})=\frac{115}{100}p=1{,}15p$ où p' est le nouveau prix d'un article coûtant p€ qui vient d'être augmenté de 15 %.
- $p=4c$ où p est le périmètre d'un carré de côté c.

Vous constaterez dans ces différents exemples, qu'une même lettre peut désigner à peu près n'importe quoi ; pour cette raison, il faut toujours préciser ce qu'on désigne par une lettre.

Une relation de proportionnalité entre les grandeurs a et b peut s'exprimer par une relation du type $a=kb$ où k est une constante indépendante de a et de b. On peut, en divisant cette égalité par b (si b n'est pas nul), exprimer cette relation par l'égalité $\boxed{\frac{a}{b}=k}$.

Représentation graphique : une situation de proportionnalité est toujours représentée par *une <u>droite</u> qui passe par l'<u>origine</u>*. Les deux axes étant gradués de manière à contenir les différentes valeurs des deux grandeurs, les points correspondants aux valeurs du tableau de proportionnalité sont alignés avec l'origine (le point de coordonnées (0;0)).



b) <u>Fonctions</u>

Définition : Une fonction numérique est un procédé qui associe à des nombres d'autres nombres.

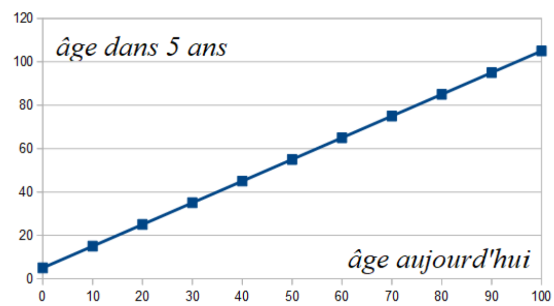
Exemple : En notant x l'âge des personnes aujourd'hui, on peut définir la fonction qui à x associe l'âge des mêmes personnes dans 5 ans, soit x+5. On peut nommer cette fonction, par exemple f, et la définir par cette notation $f: \quad x \rightarrow x+5$

Une fonction peut être illustrée par un tableau de valeurs : on choisit quelques valeurs représentatives et on donne pour chacune, les nombres qui sont associés à ces valeurs (les images de ces valeurs).
Dans l'exemple précédent, on va prendre des âges possibles, donc des nombres entiers compris entre 0 et 100. Les images seront des nombres compris entre 5 et 105 :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
x+5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105

(*J'ai pris ici des valeurs régulièrement espacées mais ce n'est pas une obligation*)

Une fonction peut être aussi être illustrée par un graphique : on place dans un repère les points du tableau de valeurs et on peut compléter ces points par une courbe continue (sans lever le crayon) puisque les âges (les valeurs de x) sont tous possibles.



Remarque : Dans une situation de proportionnalité il y a une fonction du type $f: \ x \to k\,x$
L'image d'un nombre *x* par la fonction est égale à *x* multiplié par un nombre *k,* constant et indépendant de *x.*
On appelle ce type de fonction, une fonction *linéaire.*
Autrement dit, les fonctions linéaires (du type $f: \ x \to k\,x$) traduisent les situations de proportionnalité.

Un dernier exemple qui montre que toutes les fonctions ne sont pas représentées graphiquement par des droites : l'aire d'un carré de côté *x* mesure x^2. Ici, la courbe obtenue a la forme d'une parabole.
Voici un tableau de valeurs pour des nombres compris entre 0 et 40 cm (*x* peut théoriquement devenir infiniment grand mais jamais négatif puisque cette lettre désigne une longueur) :

x	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
x^2	0	16	64	144	256	400	576	784	1024	1296	1600