1. Diviseurs

a) Division euclidienne (rappel)

La *division euclidienne* d'un entier naturel a par un entier naturel non nul b conduit à un quotient entier q et un reste entier r strictement inférieur à b. Cette division se note $a=b\times q+r$ avec $r<b$.

Propriété :

Pour un couple d'entiers (a, $b\neq 0$), le couple d'entiers (q, r) défini par $a=b\times q+r$ avec $r<b$ est *unique*.

Exemple : $50=12\times 4+2$.
La division euclidienne de 50 par 12 donne un quotient de 4 et un reste de $2<12$, on notera ($q=4$, $r=2$).
Cette égalité donne aussi le résultat de la division euclidienne de 50 par 4 : ($q=12$, $r=2$).
L'égalité $50=12\times 4+2$ correspond donc, ici, aux résultats de deux divisions euclidiennes différentes.
Cependant, une même égalité du type $a=b\times c+d$ ne donne pas toujours le résultat de deux divisions euclidiennes. Par exemple, $51=9\times 5+6$ donne le quotient et le reste de la division euclidienne de 51 par 9 ($q=5$, $r=6$) mais ne donne pas le quotient et le reste de la division euclidienne de 51 par 5 car le reste de cette division n'est pas $6>5$ mais 1 : $51=5\times 10+1$ d'où le résultat ($q=10$, $r=1$).

On peut aussi effectuer la division euclidienne *avec des entiers relatifs* (a ou b éventuellement négatifs) :
Il existe un seul couple (q, r) tel que $a=b\times q+r$ avec $0\leq r<|b|$ (le reste doit toujours être positif).

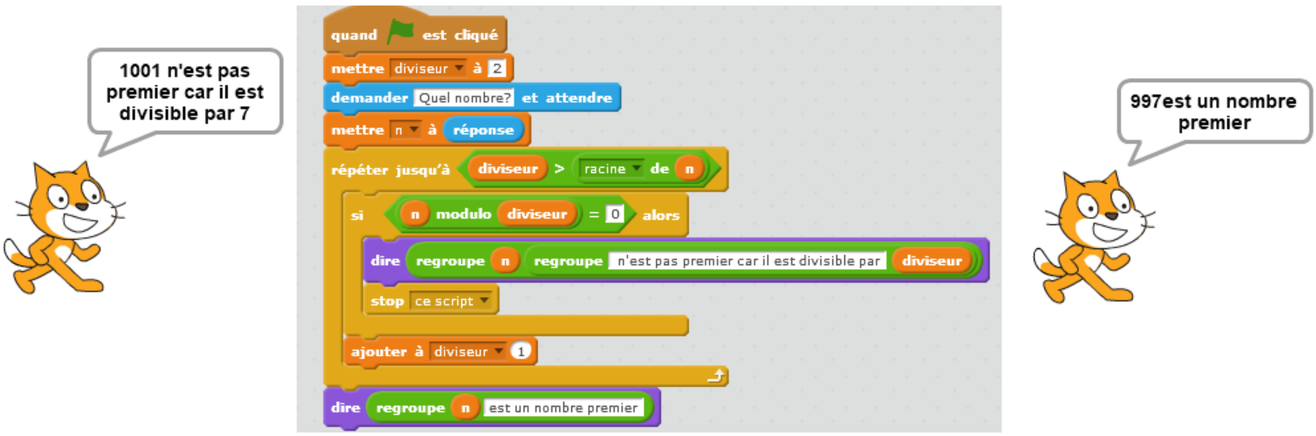
Exemple :
Comme $50=12\times 4+2$, la division euclidienne de 50 par 12 conduit au couple ($q=4$, $r=2$).
En prenant l'opposé de chaque membre $-50=-12\times 4-2=-12\times 4+(10-12)=-12(4+1)+10=-12\times 5+10$
Donc la division euclidienne de -50 par -12 conduit au couple ($q=5$, $r=10$) et comme on a aussi $-50=12\times(-5)+10$, la division euclidienne de -50 par 12 conduit au couple ($q=-5$, $r=10$).
Pour la division euclidienne de 50 par -12, il suffit de remarquer que $50=(-12)\times(-4)+2$; le couple cherché est ($q=-4$, $r=2$).

Définition : Si la division euclidienne de a par b conduit à un reste nul ($r=0$), on dit que a est un *multiple* de b ou que a est *divisible* par b et que b *divise* a ou aussi que b est un *diviseur* de a.

Exemple : Comme la division euclidienne de 50 par 5 est $50=5\times 10$ (le reste est nul), on dit que 5 divise 50, que 5 est un diviseur de 50 ou que 50 est un multiple de 5.
On peut remarquer également que 10 divise aussi 50. La liste des diviseurs de 50 ne contient pas que 5 et 10 ; il y a aussi 2 et 25 car $50=2\times 25$ et aussi 1 et 50 car $50=1\times 50$.
La liste complète des diviseurs de 50 contient six nombres : 1, 2, 5, 10, 25, 50.

La liste des diviseurs d'un nombre est finie et contient toujours 1 et le nombre lui-même.

Définition : Si un entier naturel a n'est divisible que par 1 et par lui-même, on dit qu'il est *premier*.



Remarquer qu'un nombre premier doit avoir deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.
Pour cette raison, et pour une raison plus profonde qui sera expliquée plus tard, **1 n'est pas premier**.
Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, (apprendre par cœur jusque là), etc.

Pour obtenir la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre n quelconque, on peut utiliser le petit programme Scratch que j'ai reproduit ci-dessus. Il teste le reste de la division euclidienne de n par *diviseur* (noté n modulo *diviseur* en Scratch) pour toutes les valeurs entières de la variable diviseur allant de 2 à la racine carrée de n (nombre habituellement noté $\sqrt{n}$). Pourquoi s'arrêter à cette valeur ? Comme dit plus haut, si il y avait un diviseur plus grand que $\sqrt{n}$, il y en aurait un autre plus petit. Donc si on n'en a pas trouvé de plus petit, il ne peut y en avoir de plus grand... CQFD

b) Critères de divisiblité

Ils permettent de reconnaître des diviseurs sans calcul.
Il y en a de plusieurs types : les plus simples sont ceux qui demandent juste d'observer le chiffre des unités (ou les chiffres les plus à droite du nombre), les autres demandent d'effectuer un calcul avec les chiffres.

- Divisibilité par 2

♥Un nombre divisible par 2 (on dit aussi nombre pair) se termine toujours par 0, 2, 4, 6 ou 8.
Réciproquement, tout nombre se terminant par 0, 2, 4, 6 ou 8 est divisible par 2.
On note un tel nombre $n=2k$ (k est un entier) par opposition aux nombres impairs qui sont notés $2k+1$.

Par exemple $36=2\times18$ (36 est pair) mais $37=2\times18+1$ (37 est impair).

- Divisibilité par 5

♥Un nombre divisible par 5 se termine toujours par 0 ou 5.
On note un tel nombre $n=5k$.
Les nombres non multiples de 5 sont de quatre types différents : $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$.

- Divisibilité par 10 (par 100, par 1000, ...)

♥Un nombre divisible par 10 (par 100, par 1000, ...) se termine toujours par 0 (par 00, par 000, ...).
On note un tel nombre $n=10k$ ($100k$, $1000k$, ...).

- Divisibilité par 3 (par 9)

♥Un nombre est divisible par 3 (par 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (par 9).
On note un tel nombre $n=3k$ ($9k$ pour les multiples de 9).

Par exemple 1986 est divisible par 3 car $1+9+8+6=24$ qui est divisible par 3 (on connait la table de 3 et on sait que $3\times8=24$ mais on peut aussi appliquer le critère : $2+4=6$ qui est divisible par 3 puisque $6=3\times2$)
1987 et 1988 ne sont pas divisibles par 3 ; 1987 est du type $3k+1$ et 1988 est du type $3k+2$ (ou $3k-1$).

- Divisibilité par 4

♥Un nombre est divisible par 4 si le nombre constitué des deux chiffres de droites est divisible par 4.
Par exemple 1234567890 n'est pas divisible par 4 car 90 ne l'est pas (mentalement j'effectue la division de 90 par 2, cela me donne 45 qui n'est pas divisible par 2). C'est plus rapide que de taper la division sur sa calculatrice.

D'autres critères peuvent être utiles, mais cette notion a beaucoup perdu d'intérêt avec les calculatrices qui effectuent les divisions plus rapidement que l'application des critères.

D'une façon générale, un nombre est divisible par $a\times b$ s'il est divisible par a **et** par b.
On peut déduire de cette propriété un critère de divisibilité par 6 :
Il doit se terminer par 0, 2, 4, 6 ou 8 **et** la somme de ses chiffres doit être divisible par 3.
Par exemple 1234567890 est divisible par 6 car il se termine par 0 (il est divisible par 2) et la somme de ses chiffres est divisible par 3 : $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45=3\times15$.
Avec ma calculatrice, je vérifie que le quotient est bien un entier : $1234567890\div6=205761315$.

2. Décomposition en facteurs premiers

a) TFA

Tout nombre entier peut s'écrire comme le produit de nombres premiers.

Théorème Fondamental de l'Arithmétique : La décomposition en facteurs premiers est unique

Exemples : $15=3\times5$; $30=2\times3\times5$; $100=2\times2\times5\times5$;
$13=13$ (13 est premier, sa décomposition ne contient qu'un seul facteur : lui-même)

Remarque : C'est pour respecter ce théorème que l'on peut justifier que 1 n'est pas un nombre premier. En effet si on le comptait parmi les premiers, on pourrait décomposer n'importe quel nombre d'une infinité de façons différentes : $15=3\times5$, mais aussi $15=1\times3\times5=1\times1\times3\times5=1\times1\times1\times3\times5$, etc.

b) Algorithme de décomposition

Pour déterminer la décomposition en facteurs premiers d'un nombre, on utilise l'algorithme suivant :

- On divise le nombre par 2 et, si c'est possible, on recommence avec le quotient obtenu.
- On recommence ensuite avec des divisions par 3 tant que c'est possible.
- On recommence ensuite avec le prochain nombre premier : 5, puis avec 7, etc.
- On arrête ce procédé lorsqu'il faut essayer de diviser le quotient obtenu par un nombre premier plus grand que la racine carrée[1] de ce quotient.

Exemple : cherchons la décomposition en facteurs premiers du nombre 1234.
$1234\div2=617$. Le quotient 617 étant impair, on arrête de diviser par 2 ;
On essaie alors la divisibilité par 3 : Comme $6+1+7=14$ non divisible par 3, 617 n'est pas divisible par 3.
Comme 617 se termine par 7 (ni 5, ni 0), 617 n'est pas divisible par 5.
$617\div7\approx88,14$ donc 617 n'est pas divisible par 7.
$617\div11\approx56,09$ donc 617 n'est pas divisible par 11.
$617\div13\approx47,46$ donc 617 n'est pas divisible par 13.
$617\div17\approx36,27$ donc 617 n'est pas divisible par 17.
$617\div19\approx32,47$ donc 617 n'est pas divisible par 19.
$617\div23\approx26,82$ donc 617 n'est pas divisible par 23.
Inutile de chercher plus loin car le nombre 617 n'ayant aucun diviseur premier inférieur à $\sqrt{617}\approx24,83$ est un nombre premier. Par conséquent $1234=2\times617$.

Cela peut paraître un peu long comme méthode mais comme tout algorithme, cela se programme et aujourd'hui les ordinateurs réalisent tout cela très rapidement (il suffit d'avoir programmé au préalable).

Cherchons la décomposition en facteurs premiers du nombre 360.
$360\div2=180$; $180\div2=90$; $90\div2=45$; $45\div3=15$; $15\div3=5$; $5=5$
Dans la pratique, on pose les opérations en deux colonnes : à gauche le dividende (ce qui reste à diviser) et à droite le nombre premier qui le divise. On utilise l'algorithme ci-dessus jusqu'à obtenir un 1 dans la colonne de gauche (voir ci-contre).
Sans calculatrice, je trouve donc que $360=2\times2\times2\times3\times3\times5$.
NB : 360 est un nombre choisi pour définir le degré du fait de sa grande divisibilité.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Remarque :
On peut noter cette décomposition en utilisant la notation des puissances (notion qui sera étudiée en 4ème), sous la forme simplifiée : $360=2^3 3^2 5^1$. Les petits chiffres placés légèrement au-dessus et à droite des facteurs premiers, appelés *exposants*, indiquent la multiplicité de chacun des facteurs dans la décomposition.

La décomposition d'un nombre premier ne contient que le nombre premier.
Le plus petit nombre divisible par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 est $2\times2\times2\times3\times3\times5\times7=8\times9\times35=2520$.
Le nombre $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9=362\ 880$ a pour décomposition $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times3\times5\times7$.

1 La racine carrée d'un nombre positif (la racine carrée de 2 est notée $\sqrt{2}$ est le nombre qu'il faut multiplier par lui-même pour trouver le nombre de départ. Ainsi $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$, le nombre $\sqrt{2}$ vaut environ 1,414 (vérifier avec la calculatrice).

c) Utilisations de la décomposition

La décomposition en facteurs premiers d'un nombre permet de mieux comprendre un nombre.

✔ En combinant entre eux les différents facteurs, on trouve l'ensemble des diviseurs de ce nombre.

Exemple : Cherchons les diviseurs de 360 à l'aide l'écriture $360=2^3 3^2 5^1$

$$2^0 3^0 5^0=1\ ;$$
$$2^0 3^0 5^1=5\ ;\ 2^0 3^1 5^0=3\ ;\ 2^1 3^0 5^0=2\ ;$$
$$2^0 3^1 5^1=15\ ;\ 2^0 3^2 5^0=9\ ;\ 2^1 3^0 5^1=10\ ;\ 2^1 3^1 5^0=6\ ;\ 2^2 3^0 5^0=4\ ;$$
$$2^0 3^2 5^1=45\ ;\ 2^1 3^1 5^1=30\ ;\ 2^1 3^2 5^0=18\ ;\ 2^2 3^0 5^1=20\ ;\ 2^2 3^1 5^0=12\ ;\ 2^3 3^0 5^0=8\ ;$$
$$2^1 3^2 5^1=90\ ;\ 2^2 3^1 5^1=60\ ;\ 2^2 3^2 5^0=36\ ;\ 2^3 3^0 5^1=40\ ;\ 2^3 3^1 5^0=24\ ;$$
$$2^2 3^2 5^1=180\ ;\ 2^3 3^1 5^1=120\ ;\ 2^3 3^2 5^0=72\ ;$$
$$2^3 3^2 5^1=360.$$

On doit faire la liste des facteurs seuls, puis des produits de 2 facteurs, les produits de 3 facteurs, etc. jusqu'au produit de tous les facteurs, sans oublier d'ajouter 1 (obtenu en multipliant 0 facteurs premiers)

Le nombre de diviseurs de 360 peut se compter. Mais on peut aussi le calculer :

Le nombre $360=2^3 3^2 5^1$ a $(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=4\times3\times2=24$ diviseurs différents.

Méthode : On trouve ce nombre en effectuant le produit de chaque exposant augmenté de 1 (pour tenir compte de l'absence possible de ce facteur dans le diviseur).

✔ Sachant les décompositions en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur d'une fraction, on peut simplifier celle-ci en éliminant 2 par 2 les facteurs communs éventuels.

Exemple : Sachant que $360=2\times2\times2\times3\times3\times5$ et que $100=2\times2\times5\times5$, la fraction $\frac{360}{100}$ s'écrit

$$\frac{2\times2\times2\times3\times3\times5}{2\times2\times5\times5}=\frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times2\times3\times3\times\cancel{5}}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{5}\times5}=\frac{2\times3\times3}{5}=\frac{18}{5}$$

Remarque :

Avec cette méthode, si on considère le produit des facteurs communs supprimés, on obtient le plus grand des diviseurs communs du numérateur et du dénominateur (un nombre appelé PGCD des deux nombres). Ici, on a supprimé en haut et en bas de la fraction le produit $2\times2\times5=20$; le PGCD de 100 et de 360 est donc 20. Ces deux nombres (100 et 360) ont d'autres diviseurs communs qui sont tous les diviseurs de 20. Ces notions d'arithmétiques seront développées plus tard, particulièrement en 3ème.

✔ Détermination du *plus grand diviseur commun* de deux nombres

Dans de nombreuses situations, on a besoin de déterminer le PGCD de deux nombres.

On peut faire la liste des diviseurs communs entre les deux nombres et choisir le plus grand.

Exemple :

les diviseurs de 48 sont : $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, 4, $\underline{6}$, 8, 12, 16, 24 et 48

les diviseurs de 30 sont : $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, 5, $\underline{6}$, 10, 15 et 30

les diviseurs communs de 48 et 30 sont : $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$ et $\underline{6}$.

Le plus grand diviseur commun de 48 et 30 est donc 6.

Avec les décompositions en facteurs premiers : $48=2\times2\times2\times\underline{2}\times\underline{3}$ et $30=\underline{2}\times\underline{3}\times5$,

Il suffit de prendre les facteurs communs, soit $\underline{2}\times\underline{3}=6$. On note cela PGCD(48,30)=6.

✔ Détermination du *plus petit multiple commun* de deux nombres

Dans de nombreuses situations, on a besoin de déterminer le PPCM de deux nombres.

On peut commencer à écrire la liste des multiples de chacun des deux nombres et choisir le plus petit.

Exemple :

Multiples de 48 sont : 48, 96, 144, 192, $\underline{240}$, 288, 336, 384, etc.

Multiples de 30 sont : 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, $\underline{240}$, 270, 300, etc.

Le plus petit multiple commun de 48 et 30 est donc $\underline{240}$.

Avec les décompositions en facteurs premiers : $48=\underline{2}\times\underline{2}\times\underline{2}\times\underline{2}\times3$ et $30=2\times\underline{3}\times\underline{5}$,

Il suffit de prendre les tous les facteurs avec la plus grande multiplicité[2], soit $\underline{2}\times\underline{2}\times\underline{2}\times\underline{2}\times\underline{3}\times\underline{5}=240$

2 La multiplicité d'un facteur est le nombre de fois où ce facteur est présent dans le nombre décomposé.