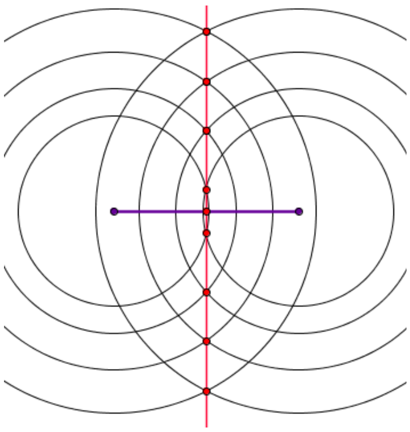
Classe de 5$^{\text{ème}}$ | **Chapitre 4 : Angles et Triangles**

1) <u>Médiatrices</u> (rappel)

<u>Définition</u> : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

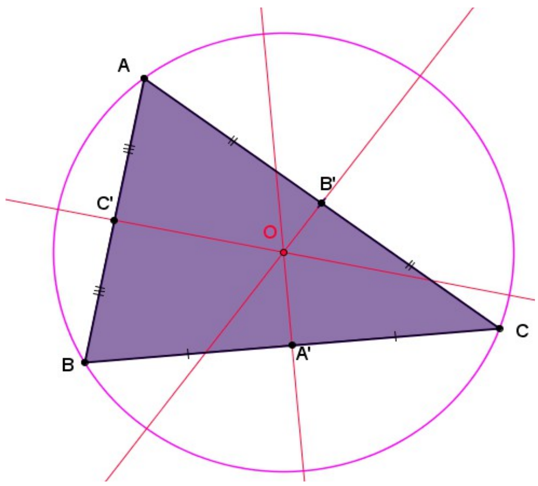
Si M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors AM=BM. Si M est un point tel que AM=BM alors M appartient à la médiatrice du segment [AB].



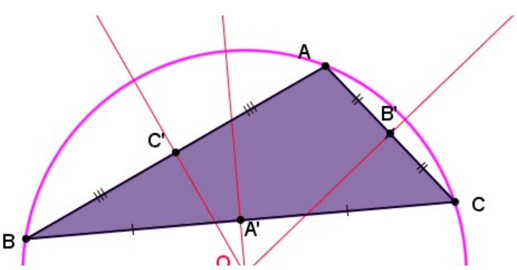
<u>Propriété caractéristique</u> : La médiatrice d'un segment est une droite perpendiculaire au segment qui passe par le milieu du segment.
La médiatrice d'un segment est un de ses axes de symétrie.

<u>Construction</u> : Si on considère que la médiatrice du segment [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par I, le milieu de [AB]. Il faut placer I (en divisant la *mesure* de AB par 2) qui est un point de la médiatrice et utiliser l'*équerre* pour tracer celle-ci.
Si on considère la définition ci-dessus, il suffit de tracer deux cercles de même rayon (au *compas*) en prenant alternativement les deux extrémités du segment comme centres. Si le rayon commun est assez grand, ces cercles se coupent en deux points de la médiatrice (la tracer avec une *règle*).

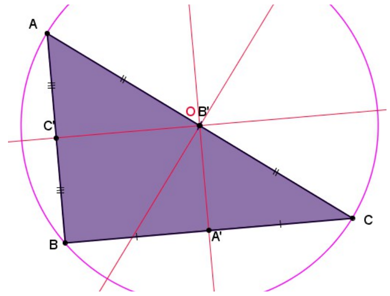
<u>Médiatrices des côtés d'un triangle</u> :
Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point situé à égale distance des sommets de ce triangle. Ce point est donc le centre d'un cercle passant par ces sommets.
On appelle ce cercle, le cercle *circonscrit* au triangle.
Le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des médiatrices. Il est noté souvent O. Pour le tracer, remarquer qu'il suffit de tracer deux médiatrices.



Démonstration : Les médiatrices de [AB] et [AC] se coupent si l'angle en A n'est pas plat. Appelons P le point d'intersection de ces droites.
Comme P est sur la médiatrice de [AB], on a PA=PB.
Comme P est sur la médiatrice de [AC], on a PA=PC.
On en déduit que PA=PB=PC, et donc PB=PC, le point P est sur la médiatrice de [BC].
Si deux médiatrices se coupent alors les trois médiatrices sont concourantes.
Il existe un point à égale distance des sommets du triangle et un cercle qui contiennent ces trois points.



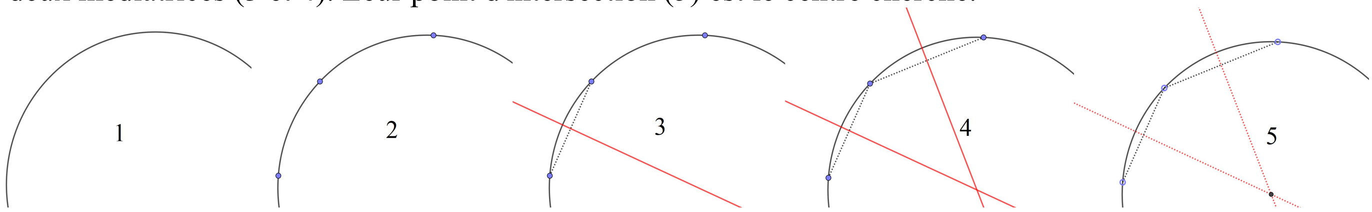
Remarque : Si deux médiatrices sont parallèles, la 3$^{\text{ème}}$ est également parallèle aux deux premières. Le centre du cercle est rejeté à l'infini et le cercle circonscrit est alors une droite. Cela arrive à un triangle aplati.



<u>Propriété</u> : Le *centre du cercle circonscrit* à un triangle est à l'intérieur du triangle si les trois angles sont aigus (triangle acutangle). Il est sur le milieu du plus grand côté si le triangle est rectangle. Il est à l'extérieur du triangle si le triangle comporte un angle obtus (triangle obtusangle).

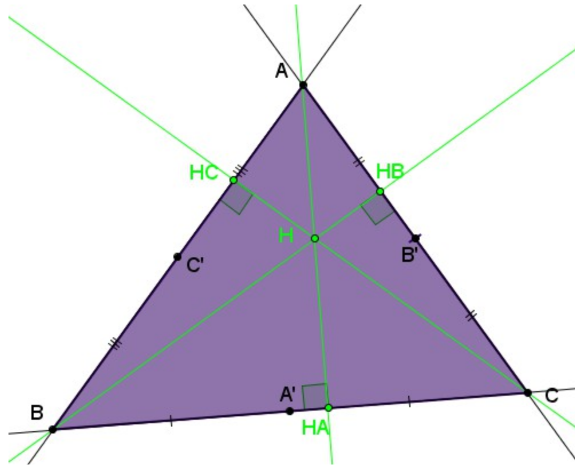
<u>Application</u> : comment retrouver le centre perdu d'un cercle (dessiné à l'étape 1 ci-dessous)?
En plaçant trois points sur le cercle de manière aussi espacée que possible (étape 2). On construit alors

deux médiatrices (3 et 4). Leur point d'intersection (5) est le centre cherché.



2) <u>Les hauteurs</u>

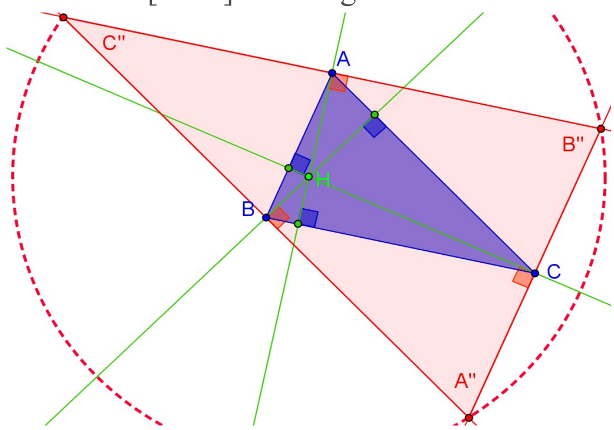
Définition : une hauteur d'un triangle est une droite perpendiculaire à un côté qui passe par le sommet opposé.



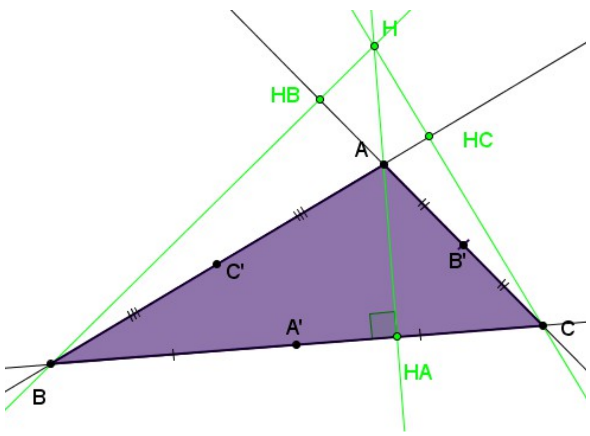
Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A est la perpendiculaire à [BC] qui passe par A.
Cette droite coupe le côté [BC] en un point (noté H_A) appelé *pied de la hauteur.*
Lorsque un des angles ABC ou BCA est obtus, la hauteur issue de A ne coupe pas le côté [BC] mais elle coupe son prolongement, la droite (BC).

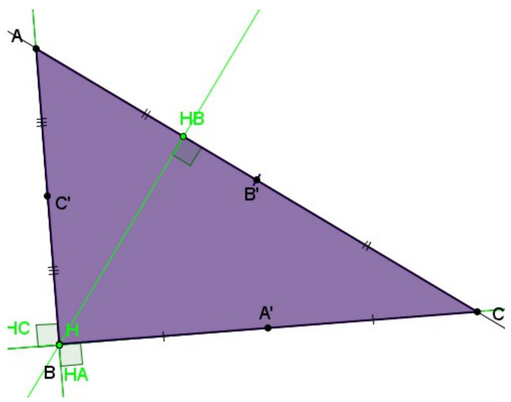
Propriété : Les hauteurs d'un triangle sont *concourantes*, c'est-à-dire qu'elles se coupent en un même point. Ce point de concours des hauteurs est appelé l'*orthocentre* du triangle (noté H sur la figure).

Démonstration : Construisons le triangle A"B"C" relatif à un triangle ABC en traçant d_C la parallèle à (AB) passant par C, d_B la parallèle à (AC) passant par B et d_A la parallèle à (BC) passant par A. d_A coupe d_B en C", d_B coupe d_C en A" et d_C coupe d_A en B".
Par construction, ACBC" et AB"CB sont des parallélogrammes ayant un côté en commun [BC].
Les côtés opposés [C"A] et [AB"] sont donc parallèles et égaux. A est donc le milieu de [B"C"].
La hauteur issue de A du triangle ABC est donc la médiatrice du côté [B"C"] du triangle A"B"C".
De même, les deux autres hauteurs du triangle ABC sont les deux autres médiatrices de A"B"C".
Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.
Les médiatrices de A"B"C" sont donc concourantes.
Par conséquent les hauteurs de ABC sont concourantes car ce sont les médiatrices de A"B"C".
On remarque que l'orthocentre H de ABC est le centre du cercle circonscrit (en pointillé) à A"B"C".

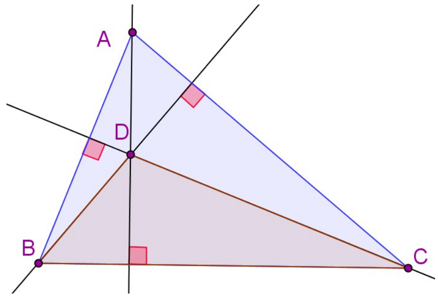


Propriété :
L'orthocentre d'un triangle acutangle est à l'intérieur.
Celui d'un triangle obtusangle est à l'extérieur.
Celui d'un triangle rectangle est le sommet de l'angle droit.





Remarque :
Si D est l'orthocentre de ABC, alors A est l'orthocentre de BCD, B est l'orthocentre de ACD et C est l'orthocentre de ABD.
Parmi ces quatre triangles, un seul est acutangle, les trois autres sont obtusangles. Si un de ces triangles est rectangle, alors deux des points sont confondus.

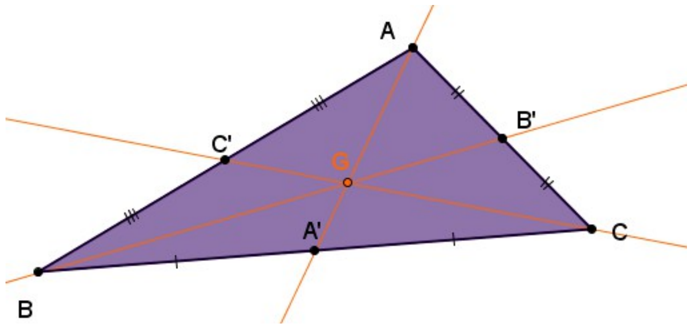


3) <u>Les médianes</u> (facultatif)

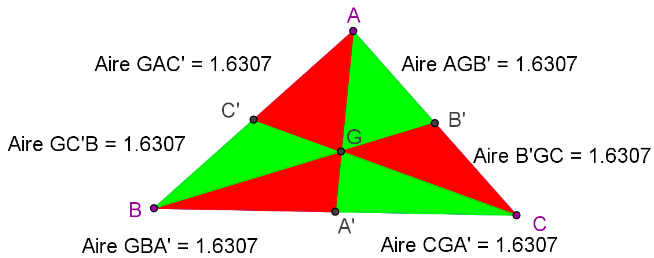
Définition : Une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

Dans le triangle ABC, la médiane passant par A passe par le milieu de [BC] (noté A').

Propriété : Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes, le point de concours des médianes est appelé le *centre de gravité* du triangle (noté G sur la figure).

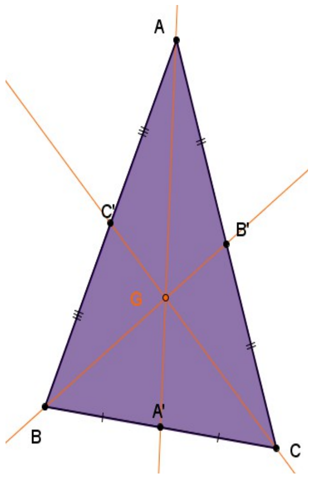


L'appellation « centre de gravité » vient du fait que l'aire du triangle est équitablement répartie autour du point G de sorte qu'il soit le seul point où l'on puisse faire tenir un triangle matériel (découpé dans une feuille de carton homogène par exemple) en équilibre. Cette particularité vient du fait que les six triangles de sommets G colorés sur la figure ont la même aire.



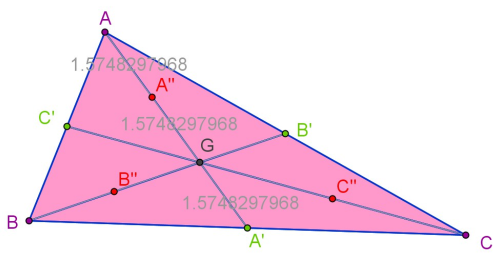
Que le triangle soit acutangle, rectangle ou obtusangle, le centre de gravité est toujours à l'intérieur du triangle. Ceci est dû à la convexité du triangle se traduit par la propriété suivante.

Propriété : Le centre de gravité d'un triangle se trouve sur chaque médiane, aux deux-tiers de la distance qui sépare un sommet du milieu du côté opposé.

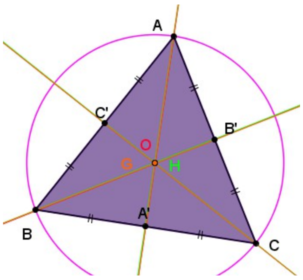


Si G est le centre de gravité de ABC et que A', B' et C' sont les milieux de [BC], [CA] et [AB], alors on a $AG=\frac{2}{3}\times AA'$, $BG=\frac{2}{3}\times BB'$ et $CG=\frac{2}{3}\times CC'$.

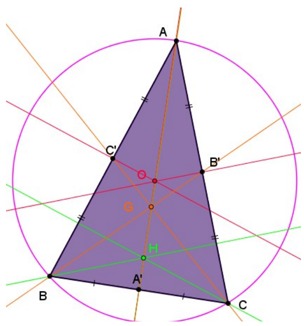
On exprime la même chose en disant que le centre de gravité est deux fois plus loin du sommet que du milieu opposé.
Avec les mêmes notations, on peut donc écrire :
$AG=2GA'$, $BG=2GB'$ et $CG=2GC'$



Sur l'illustration, A'', B'' et C'' sont les milieux des segments qui joignent le centre de gravité G aux sommets du triangle. En mesurant AA'', A''G et GA' on constate que ces segments sont égaux : AA''=A''G=GA'. De même BB''=B''G=GB' et CC''=C''G=GC'.



Remarque :
Si le triangle ABC est isocèle en A (AB=AC), les points O, H et G sont alignés sur l'axe de symétrie.
Si le triangle est équilatéral (AB=BC=CA) les trois points de concours sont confondus (O=G=H).

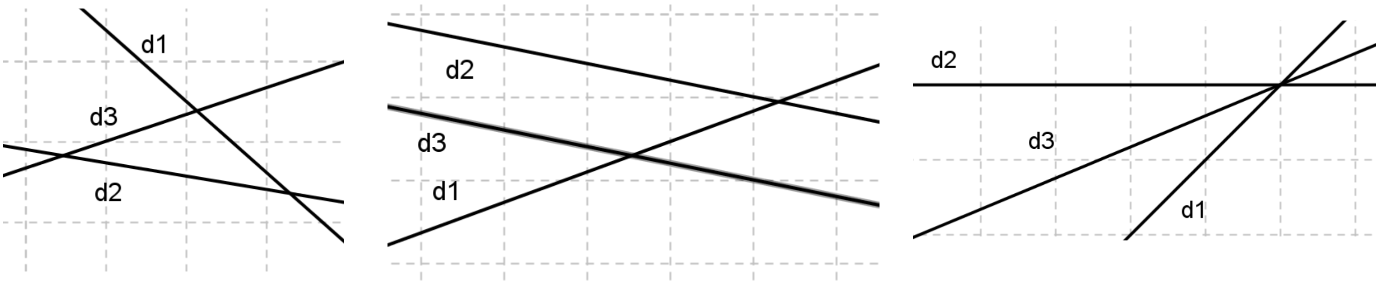


4) Conditions d'existence

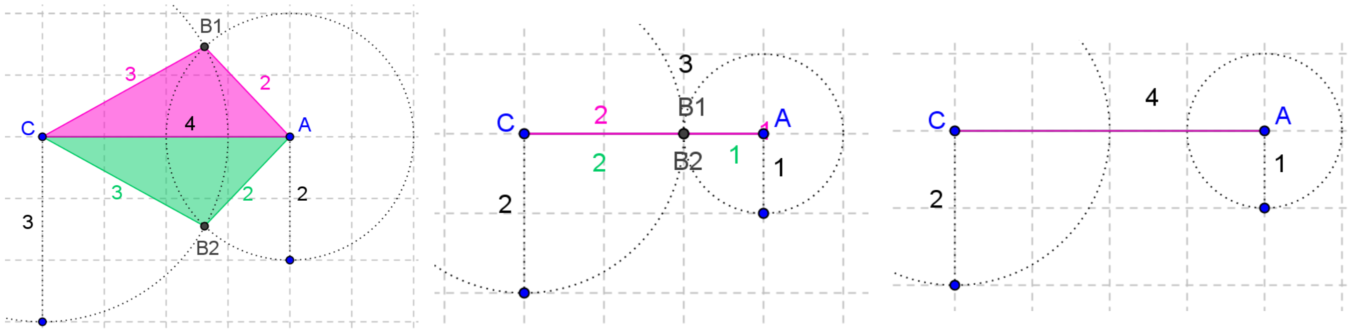
Remarque : On appelle triangle, un ensemble de trois points distincts. Si ces points sont alignés on est dans un cas particulier de triangle, le cas du triangle *aplati*. Les angles d'un triangle aplati sont 0°, 0° et 180°. Ce triangle est spécial, mais il existe. Nous allons envisager maintenant d'autres situations où se posent la question de l'existence du triangle.

il y a plusieurs façons de définir un triangle :

1. On se donne *trois droites*. Le triangle est définit à partir des points d'intersection de ces droites. Le triangle n'existe pas si les droites sont concourantes (un seul point au lieu de 3) ou si deux droites au moins sont parallèles. Pour définir un triangle, il faut donc trois droites sécantes deux à deux mais pas concourantes.



2. On se donne *trois longueurs*. Par exemple les égalités AB=2, BC=3 et CA=4 permettent de définir un triangle ABC (voir figure). Il se peut que les trois points soient alignés, comme avec les égalités AB=1, BC=2 et CA=3. Par contre si l'on se donne des égalités comme celles-ci AB=1, BC=2 et CA=4, alors le triangle n'existe pas.



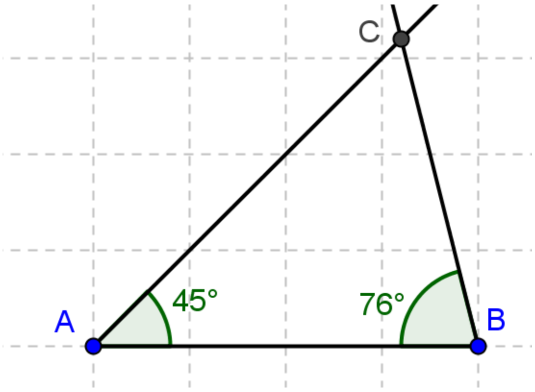
Propriété : Pour qu'un triangle défini par ses côtés existe, il faut que chaque côté soit plus court que la somme des deux autres.
Pour un triangle ABC, il faut que soient vérifiées les inégalités suivantes, appelées *inégalités triangulaires* : $AB \leq AC + CB$, $BC \leq AB + AC$ et $AC \leq AB + BC$

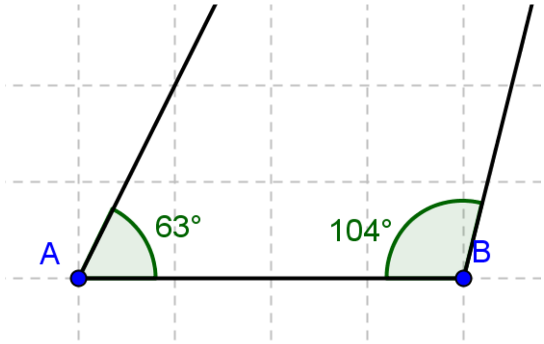
En fait, seul le plus grand des côtés peut dépasser la somme des deux autres.
Il suffit de vérifier une seule de ces inégalités, celle où le plus grand côté est comparé à la somme des deux autres. S'il est supérieur à cette somme le triangle n'existe pas.
Exemple : CA=4 , AB=1 et BC=2. Comme 4>1+2 le triangle ABC n'existe pas. Les deux autres inégalités sont vérifiées (1<2+4 et 2<1+4) mais elles ne suffisent pas à prouver l'existence du triangle.

Cas d'égalité (important!) : Si la somme de deux côtés est égale au 3ème côté, alors le triangle existe mais il est aplati (les trois sommets sont alignés). Un des angles est plat alors que les deux autres sont nuls. Autrement dit, si AC+CB=AB alors C appartient au segment [AB].
Réciproquement, si trois points A, B et C sont alignés, alors la somme de deux côtés du triangle aplati ABC égale le 3ème côté. Autrement dit, si C appartient au segment [AB] alors AC+CB=AB.

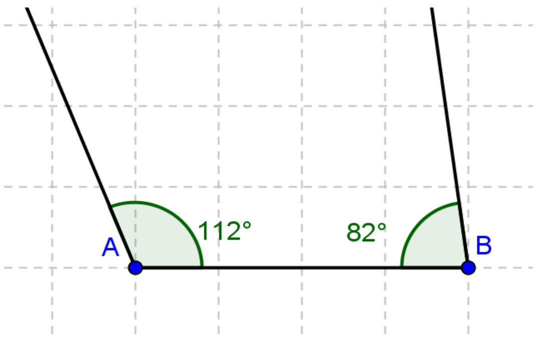
3. On se donne *une longueur et deux angles*. Dans ce cas, selon les valeurs des angles il peut y avoir un triangle ou pas. Par exemple, si on se donne AB et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$, il faut que la somme de ces angles soit inférieure à 180° pour que le triangle existe.

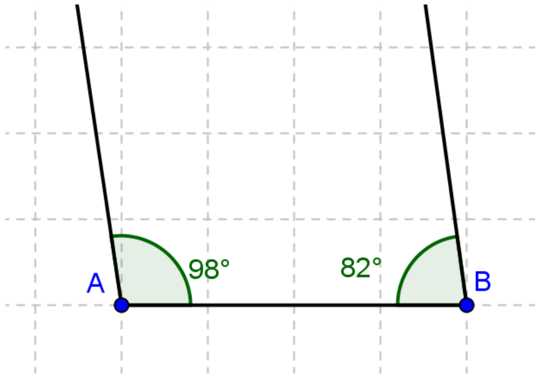
Pour $\widehat{ABC}=76°$ et $\widehat{BAC}=45°$, le triangle ABC existe et on vérifie que 76+45<180, de même pour $\widehat{ABC}=104°$ et $\widehat{BAC}=63°$, même si le point C n'est pas forcément visible sur la feuille. Le point C existe et le triangle ABC existe avec lui car 104+63=167 et que 167<180.



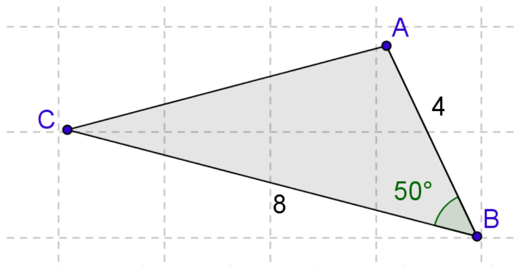


Par contre, pour $\widehat{ABC}=82°$ et $\widehat{BAC}=112°$, le point C n'existe pas et le triangle ABC non plus. Dans ce cas 82+112=194 et 194 n'est pas inférieur à 180. De même, pour le cas limite où $\widehat{ABC}+\widehat{BAC}=180°$. Dans ce dernier cas les côtés [BC] et [AC] sont parallèles, et chacun sait que les parallèles ne se rencontrent pas (il n'y aurait qu'un professeur de maths pour oser prétendre qu'elles se rencontrent, mais à l'infini...)

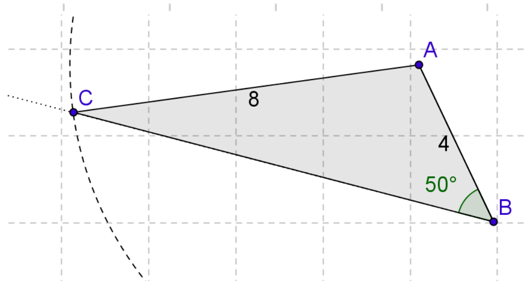




On pourrait se donner un côté, disons AB, et deux angles dont un est opposé au côté choisi, par exemple $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$. Dans ce cas, le plus simple est sans doute de calculer le 3[ème] angle en utilisant le fait que la somme des 3 angles fait 180°, donc ici $\widehat{BAC}=180-\widehat{ABC}-\widehat{BCA}$.



4. On se donne *deux longueurs et un angle*. Les constructions les plus évidentes sont celles qui donnent les longueurs des côtés de l'angle connu. Par exemple, si $\widehat{ABC}=50°$ et $AB=4\,cm$ et $BC=8\,cm$, il n'y a aucune difficulté à tracer la figure.

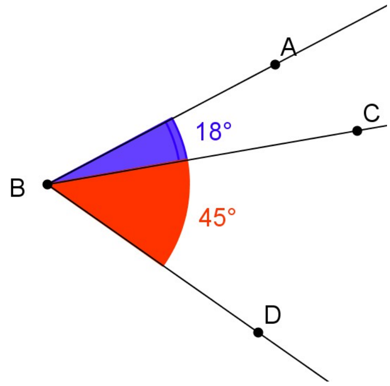


La construction est moins immédiate lorsqu'on donne un des angles qui a pour côté le segment dont on ne connaît pas la mesure. On ne peut pas calculer les autres angles (car on n'en connaît qu'un) ni non plus l'autre côté.

Supposons qu'on donne le triangle ABC tel que $\widehat{ABC}=50°$ et $AB=4\,cm$ et $AC=8\,cm$ (le côté [AC] n'est pas un côté de l'angle connu). À partir du point A, on peut tracer le cercle de rayon 8 cm et prolonger le côté [BC] de l'angle jusqu'à couper le cercle au point C.
Y a t-il pour ce type de donnée, des cas où le triangle n'est pas constructible ? Non, tout est possible ici.

4) <u>Les angles</u>
a) <u>Angles adjacents</u> (rappel)
Deux angles sont *adjacents* s'ils ont un côté commun et qu'ils sont situés de part et d'autre de celui-ci.

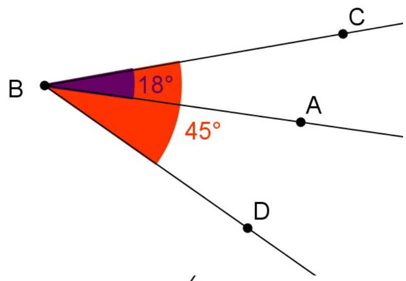
Si $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBD}$ sont *adjacents* alors le côté en commun est [BC) et les A et D ne sont pas du même côtés de [BC). Deux angles sont adjacents s'ils sont *à côté sans se chevaucher.*



Propriété : Si $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBD}$ sont adjacents, alors on peut ajouter leurs mesures pour trouver la mesure de l'angle composé de ces deux angles : $\widehat{ABC}+\widehat{CBD}=\widehat{ABD}$.

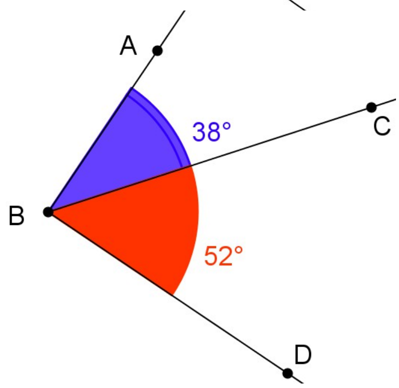
Exemple : $\widehat{ABC}$ =18° et $\widehat{CBD}$ =45°. Comme ces angles sont adjacents, alors $\widehat{ABD}=\widehat{ABC}+\widehat{CBD}=18+45=63$ °.

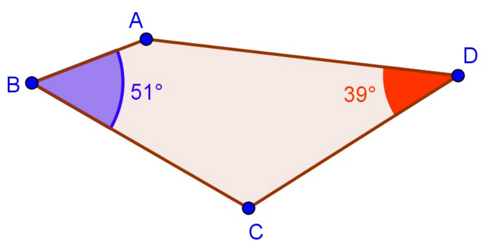
Exemple suivant : $\widehat{ABC}$ =18° et $\widehat{CBD}$ =45° mais ces angles ne sont pas adjacents car ils se superposent (ils sont du même côté de leur côté commun). La somme de leurs mesures ne donne rien. C'est la différence de leurs mesures qui donnera celle de $\widehat{ABD}$, car alors ce sont $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABD}$ qui sont adjacents :
$\widehat{ABD}=\widehat{CBD}-\widehat{ABC}=45-18=27$ °



b) <u>Angles complémentaires</u> (rappel)
Deux angles sont *complémentaires* si la somme de leurs mesures vaut un angle droit.

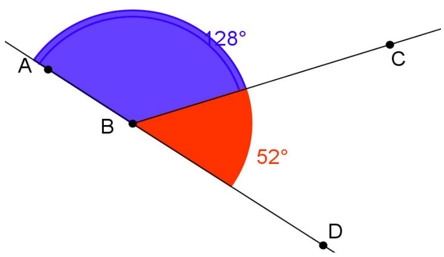
Lorsqu'on découpe un angle droit en deux angles adjacents, on obtient deux angles complémentaires (par définition). C'est le cas de la figure de gauche avec un découpage en deux angles adjacents dont les mesures sont complémentaires : 38+52=90.





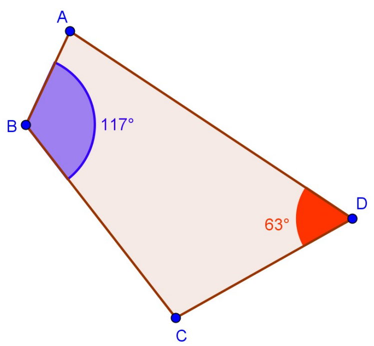
Remarque : Deux angles complémentaires ne sont pas forcéments adjacents.
Sur l'illustration de gauche les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont non-adjacents mais complémentaires.
Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont également non-adjacents et complémentaires.

c) <u>Angles supplémentaires</u> (rappel)
Deux angles sont *supplémentaires* si la somme de leurs mesures vaut un angle plat (180°).



Lorsqu'on découpe un angle plat en deux angles adjacents, on obtient deux angles supplémentaires (par définition). C'est le cas de la figure de gauche avec un découpage en deux angles adjacents dont les mesures sont supplémentaires : 128+52=180.

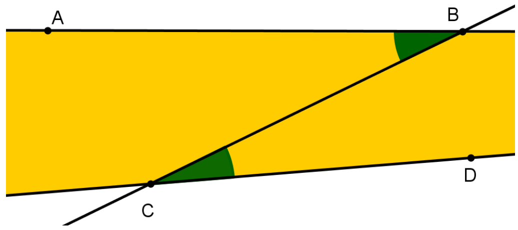
Cette propriété sera parfois utilisée pour prouver que des points sont alignés. En effet A, B et D sont alignés si il existe un point C, non situé sur (AB), tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBD}$ soient adjacents et supplémentaires.



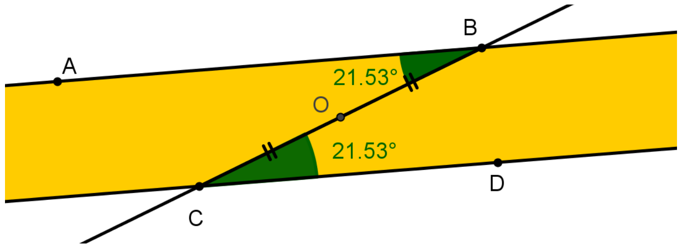
Deux angles supplémentaires ne sont pas forcéments adjacents, comme sur l'illustration ci-contre où les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont non-adjacents et supplémentaires. Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont non-adjacents et supplémentaires (voir plus loin).

d) <u>Angles alternes-internes</u>

Deux angles sont *alternes-internes* lorsqu'ils sont situés de part et d'autre d'une droite qui coupe une bande comprise entre deux droites.



Ci-contre, deux droites déterminent une bande (en jaune). Ces deux droites sont coupées par une 3ème droite. Deux angles alternes-internes ont été coloriés de la même couleur (en vert). Si (AB) et (CD) sont deux droites coupées par (BC), les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont alternes-internes.



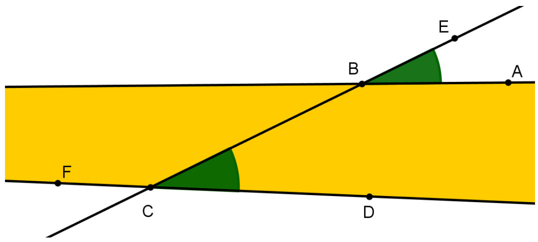
Lorsque les deux droites qui déterminent la bande sont parallèles, la figure constituée des trois droites possède un *centre de symétrie*.
Si la droite (BC) coupe les droites parallèles (AB) et (CD), le milieu O du segment [BC] est le centre de symétrie de cette figure.
En effet, B et C sont symétriques et le symétrique de (AB) par rapport à O est une droite arallèle à (AB) passant par C, le symétrique de B. C'est donc (CD).

Par la symétrie de centre O, les angles alternes-internes sont symétriques.
La symétrie conservant les angles, on en déduit que les angles alternes-internes sont égaux.

Propriété : Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles coupées par une droite d_3, les angles alternes-internes qu'elles déterminent sont égaux. La réciproque est vraie aussi : si des angles alternes-internes sont égaux, alors les deux droites qui sont coupées par une sécante sont parallèles.

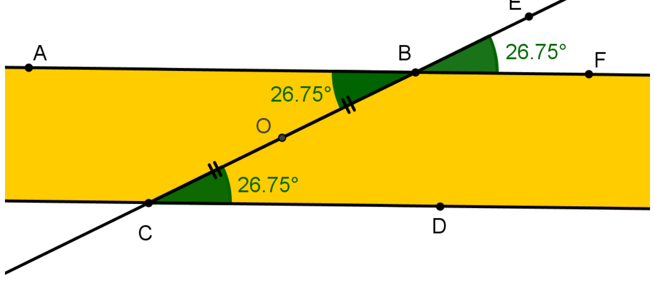
e) <u>Angles correspondants</u>

Deux angles sont *correspondants* lorsqu'ils sont situés du même côté d'une droite qui coupe une bande comprise entre deux droites, l'un étant dans la bande et l'autre en dehors.



Ci-contre, deux droites déterminent une bande (en jaune). Ces deux droites sont coupées par une 3ème droite. Deux angles correspondants ont été coloriés de la même couleur (en vert). Si (AB) et (CD) sont deux droites coupées par (BC), E étant sur (BC) avec B entre E et C. Les angles $\widehat{EBA}$ et $\widehat{BCD}$ sont correspondants.

Lorsque les deux droites qui forment la bande sont parallèles, les angles alternes-internes sont égaux. Nous savons également que des angles opposés par leur sommet sont égaux. Nous en déduisons que les angles correspondants sont égaux aussi.

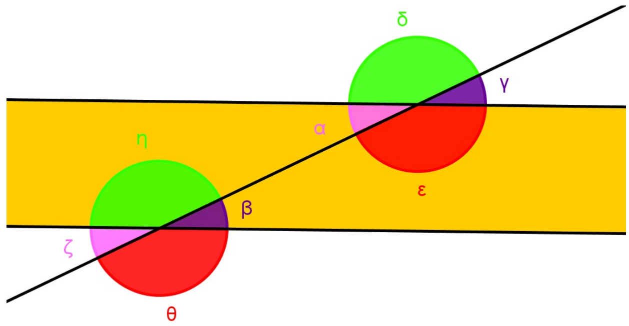


Sur la figure ci-contre, la droite (BC) coupe les droites parallèles (AB) et (CD). Les angles alternes-internes $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux.
Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EBF}$ sont opposés par leur sommet B, ils sont donc égaux. On en déduit que les angles correspondants $\widehat{EBF}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux.

Propriété : Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles coupées par une droite d_3, les angles correspondants qu'elles déterminent sont égaux. La réciproque est vraie aussi : si des angles correspondantes sont égaux, alors les deux droites qui sont coupées par une sécante sont parallèles.

Conclusion : si d_1 // d_2 et si d_3 coupe d_1 et d_2, alors les angles alternes-internes sont égaux et les angles correspondants aussi. Réciproquement, une seule égalité d'angle (deux alternes-internes ou deux correspondants) permet de conclure au parallélisme des droites d_1 et d_2.
Si l'on considère la figure ci-contre où d_1 // d_2 on a :

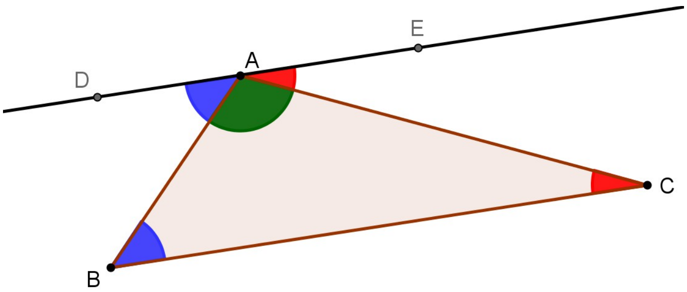
angles alternes-internes	angles correspondants
$\alpha=\beta$; $\varepsilon=\eta$	$\beta=\gamma$; $\theta=\varepsilon$; $\delta=\eta$; $\alpha=\zeta$



f) <u>Angles d'un triangle</u>

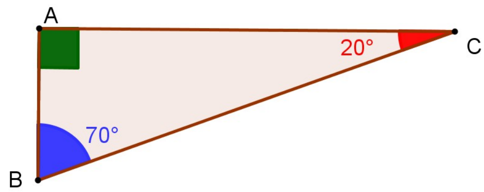
Propriété : La somme des trois angles d'un triangle vaut un angle plat.

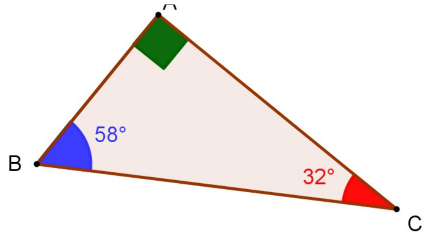
Considérons la figure ci-contre où j'ai tracé la parallèle au côté (BC) passant par le sommet opposé A : la droite (DE) étant parallèle à (BC), les angles alternes-internes $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DAB}$ sont égaux (en bleu), de même, les angles alternes-internes $\widehat{BCA}$ et $\widehat{EAC}$ sont égaux (en rouge).



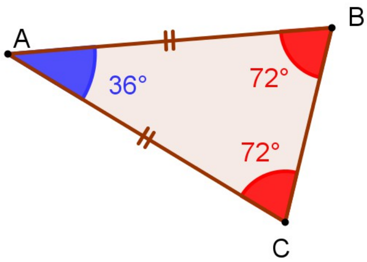
Nous avons donc :
$\widehat{ABC}+\widehat{BAC}+\widehat{BCA}=\widehat{DAB}+\widehat{BAC}+\widehat{EAC}=180°$ car ces trois derniers angles sont adjacents et forment un angle plat (puisque D, A et E sont alignés).

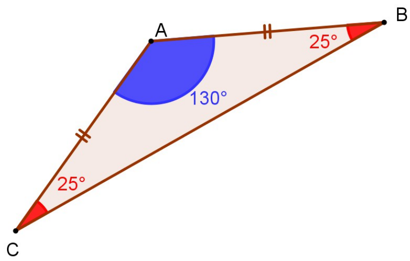
Cette propriété est valable pour tous les triangles.
Certains cas particuliers retiendront notre attention :
Dans un *triangle rectangle*, un des angles mesure 90°, les deux autres seront donc complémentaires.
Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90°$

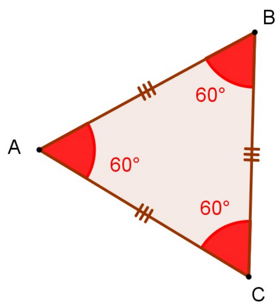




Dans un *triangle isocèle*, deux angles sont égaux.
Si on note α la mesure de ces angles égaux alors le troisième mesurera $180-2\alpha$.



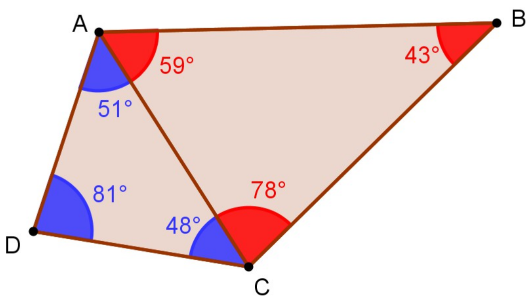


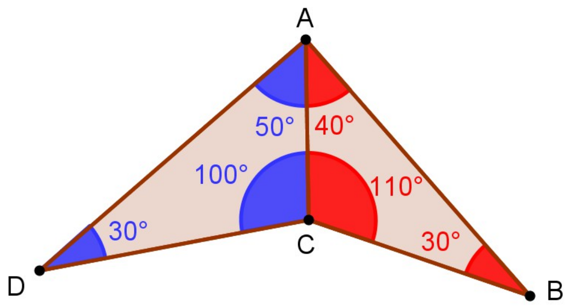


Dans un *triangle équilatéral*, les trois angles sont égaux.
Si on note α la mesure de ces angles égaux alors leur somme vaut $3\alpha=180$, et donc un seul de ces angles vaut $\alpha=180\div3=60$. Les angles d'un triangle équilatéral valent tous 60°.

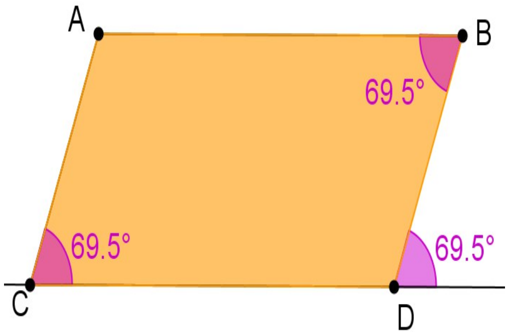
Remarque : la propriété du triangle s'étend à un polygone quelconque.
Pour un quadrilatère, la somme des angles est 360°.
Pour un polygone à n côtés, la somme des angles vaut $(n-2)\times180°$.

Pour le quadrilatère ABCD de gauche, la somme des angles vaut : $(51+49)+43+(78+48)+81 = 360$.
Il suffit de décomposer le polygone en triangles et d'appliquer la propriété des angles du triangle.





Pour un polygone non-convexe, certains angles sont *rentrants* (supérieurs à 180°) au lieu d'être saillants (inférieurs à 180°) mais la propriété reste vraie.
Pour le quadrilatère non-convexe ci-dessus, les angles mesurent 90, 30, 210 et 30° et la somme vaut bien 360° : 90+30+210+30=360.
Pour le dodécagone (12 côtés) de droite qui est régulier, les angles mesurent 90° ou 270°. Leur somme doit valoir (12−2)×180=10×180=1800°.
Comme 8 angles valent 90° (cela fait 720°) et 4 angles valent 270° (cela fait 1080°), la somme vaut 720+1080=1800°.



Dans un *parallélogramme*, les angles opposés sont égaux par raison de symétrie (voir chapitre 2). On peut aussi considérer les angles alternes-internes et correspondants comme ceux colorés en rose sur la figure. Si on note α et β la mesure des deux angles différents alors la somme des 4 angles vaut α+β+α+β=360, et donc α+β=180°. Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont donc supplémentaires.

Ces propriétés des angles du parallélogramme se comprennent mieux lorsqu'on envisage la supplémentarité des angles consécutifs sur la figure complète.