Classe de $5^{ème}$ **Chapitre 3 : Les fractions**

1) Définitions

a) Quotients

Dans la division de *a* par $b \neq 0$, le nombre *a* est appelé *dividende*, le nombre *b* étant le *diviseur.*
Le résultat de la division est appelé *quotient*.
Le quotient est le nombre qui, multiplié par le diviseur, donne le dividende.
Le diviseur ne peut être nul car cela n'aurait pas de sens de diviser par zéro (aucun nombre multiplié par zéro ne peut donner le dividende qui est généralement un nombre non nul).

Division euclidienne : division où dividende, diviseur **et** quotient sont entiers.
Dans une division euclidienne, il y a un *reste* qui est entier lui aussi.
Le reste d'une division euclidienne est, dans tous les cas, inférieur strictement au diviseur.

Remarque : Parfois le reste d'une division euclidienne est nul (on dit quelle « tombe » juste). Dans ce cas le dividende est un *multiple* du diviseur. On dit aussi que le diviseur *divise* le dividende ou bien encore que le diviseur est un *diviseur* du dividende.

La division de 50 par 12 donne 4 et un reste 2, on peut noter cela : $50 \div 12 =$ 4, reste 2.
Mais on préfère la notation suivante : $50 = 12 \times 4 + 2$.
Si j'ai 50 oeufs à ranger dans des boîtes de 12, il y a 4 boîtes pleines et il me reste 2 oeufs à ranger.

Le quotient d'une division n'est pas toujours un nombre décimal car parfois la division « ne s'arrête pas ».
Le quotient de *a* par *b* pourrait ne pas s'écrire autrement qu'avec l'opération qui le définit c'est-à-dire $a \div b$.
$2 \div 3 = 0{,}66666666666\ldots$(une infinité de 6).
Ce quotient n'ayant pas d'écriture décimale exacte, on utilise la notation fractionnaire : $\frac{2}{3}$ qui signifie exactement la même chose que $2 \div 3$, sauf que $\frac{2}{3}$ est considéré comme un nombre alors que $2 \div 3$ est considéré comme une opération à effectuer.
Remarque : On peut aussi utiliser une notation décimale spécifique pour ce type de nombre en soulignant le ou les chiffre(s) qui se répète(nt). Ainsi $\frac{2}{3}$ peut être noté $0{,}\underline{6}$. L'inconvénient est qu'on perd alors l'information du calcul qui produit ce résultat. Un autre inconvénient est l'absence d'un consensus international pour cette notation (certains écrivent $0{,}\overline{6}$ tandis que d'autres écrivent 0,[6])

Une *fraction* est un quotient de deux entiers noté avec la *notation fractionnaire* (celle-ci utilise un trait pour séparer le dividende du diviseur). La *fraction* $\frac{a}{b}$ est donc le nombre qui, multiplié par *b* donne *a*.
Dans la *fraction* $\frac{a}{b}$ le nombre *a*, le dividende du quotient, est appelé *numérateur* de la fraction, tandis que le nombre *b,* le diviseur du quotient, est appelé *dénominateur* de la fraction.

Une fraction est donc un nombre, résultat d'une opération, mais c'est aussi une façon d'écrire ce nombre.

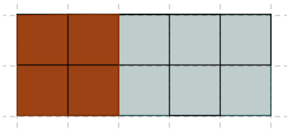
Comme en informatique on écrit plus facilement sur une ligne unique (l'écriture d'une fraction nécessite deux lignes), on peut trouver des écritures de fractions avec un trait oblique / (un *slash*) ou deux points : ou le symbole ⌐ (certaines calculatrices). Par exemple, on parlera de 2/3 ou 2:3 ou 2⌐3.

Remarque : L'écriture fractionnaire n'est pas réservée aux fractions.
On peut noter n'importe quel quotient sous forme fractionnaire. Le trait de fraction remplace dans ce cas, tout simplement, le symbole de division. Mais attention aux priorités opératoires qui nécessite parfois qu'on ajoute des parenthèses autour du numérateur et du dénominateur d'une fraction lorsqu'on utilise une calculatrice (voir chapitre 1).

Exemple :
La fraction $\frac{2+6}{3-1}$ vaut $\frac{8}{2}$, donc 2.
Mais avec une calculatrice, il faudrait taper $(2+6)/(3-1)$ sinon, la séquence $2+6/3-1$ donnera 3 car la calculatrice effectuera d'abord 6/3 et ensuite $2+2-1$ (priorité à la division).

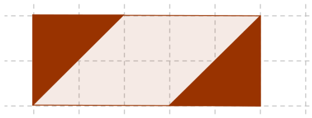
Remarques : L'ancienne notation égyptienne n'utilisait que des fractions *unitaires* (fractions dont le numérateur est 1) de dénominateurs différents. Ainsi 2/5 pouvait être noté 1/3 + 1/15.
La notation anglosaxonne (toujours actuelle) utilise, quant-à elle, des fractions *propres* (fractions inférieures à 1) pour écrire la partie décimale d'un nombre décimal. Ainsi 12,5=12+1/2 est noté 12½.

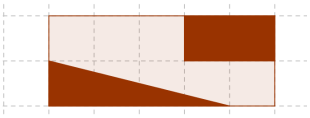
b) <u>Partages et proportions</u>



L'idée de proportion est étudiée généralement avant celle de fraction.
On demande à un élève du primaire de colorier les 2/5 d'une grille contenant 10 cases.

Cette activité permet par exemple de comprendre que 2/5 et 4/10 sont des fractions égales.
On dira qu'on a colorié une même proportion de la figure si on a colorié n'importe quelle surface ayant une aire égale à 2/5 de celle de la figure entière, comme les deux propositions ci-contre.





L'idée qu'on se fait alors des fractions est davantage proche de la notion de *fraction propre* (inférieure à 1) et on a du mal à imaginer qu'une fraction puisse être plus grande que 1. D'où la notation anglosaxonne qui transforme une fraction impropre comme $\frac{12}{5}$ en la notation composite $2\frac{2}{5}$ (*mixed number*). Le nom français de fraction qui vient de fracture n'aide d'ailleurs pas à se faire une idée plus large de cette notion. L'usage d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a et $b\neq 0$ quelconques s'est imposé en France depuis la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

2) <u>Propriété</u>

un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie son dividende et son diviseur par un même nombre non nul. Cela signifie que si a, b et c sont des nombres quelconques et si $c\neq 0$, alors $\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$

Exemples :
Avec des quotients : 0,2÷12,5 = 2÷125 = 4÷250 = 16÷1000.
Avec des fractions : $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{80}{120}=\frac{2\times c}{3\times c}$.
Cette propriété a de nombreuses applications, que nous allons passer en revue.

a) <u>Simplifications de fractions</u>

Simplifier une fraction, c'est transformer la fraction pour qu'elle s'écrive avec un numérateur et un dénominateur entiers plus petits.

<u>Exemples</u> : Simplifions les fractions $\frac{128}{450}$ et $\frac{129}{450}$:

Pour la première remarquons que 128 et 450 sont *pairs* (multiples de 2) et donc $\frac{128}{450}=\frac{2\times 56}{2\times 225}=\frac{56}{225}$.
Pour la seconde remarquons que 129 et 450 sont des multiples de 3 (la somme de leurs chiffres est à chaque fois un multiple de 3 : 1+2+9 = 12 = 3×4, 4+5+0 = 9 = 3×3) et donc $\frac{129}{450}=\frac{129\div 3}{450\div 3}=\frac{43}{150}$.
Remarque :
On peut continuer à simplifier une fraction pour réduire au maximum son numérateur et son dénominateur. Dans notre exemple on ne peut pas simplifier davantage la première fraction car 56 ne se divise que par des nombres pairs et par 7 alors que 225 n'est ni pair ni divisible par 7. Pour la deuxième fraction on ne peut pas continuer la simplification car 43 est un nombre *premier* (qui n'est divisible par aucun nombre plus petit que lui, à part 1) et que 150 n'est pas divisible par 43.

b) <u>Comparaisons de fractions</u>
Pour comparer deux fractions, on va généralement les "mettre" au même dénominateur (car si des fractions ont le même dénominateur, il suffit de comparer les numérateurs pour comparer les fractions).

Exemple :
Si on doit comparer 4/5 et 7/12, on peut transformer ces fractions pour qu'elles aient le même dénominateur

Comme $\frac{4}{5}=\frac{4\times12}{5\times12}=\frac{48}{60}$ et $\frac{7}{12}=\frac{7\times5}{12\times5}=\frac{35}{60}$ et 48>35, on en déduit que $\frac{48}{60}>\frac{35}{60}$ d'où $\frac{4}{5}>\frac{7}{12}$.

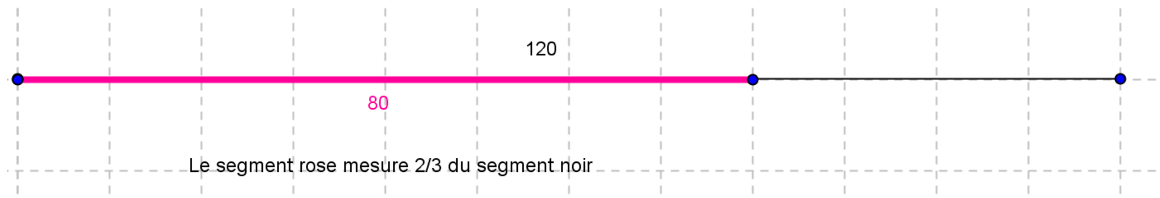
Remarque :
Bien sûr, on peut faire autrement.
On peut diviser à la calculatrice 4 par 5 et 7 par 12 et comparer les quotients écrits sous forme décimale.
4÷5 = 0,8 tandis que 7÷12 ≈ 0,58333... donc 4/5 > 7/12.

c) Pourcentages
Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100 et notée avec le symbole %.
Le pourcentage est une des façons d'écrire un rapport sans dimension entre deux nombres.
Cette notion est souvent utilisée car le fait d'utiliser toujours le même dénominateur permet de comparer immédiatement deux pourcentages (comparer deux fractions est moins intuitif)
Exemple : 25% = $\frac{25}{100}$ = 0,25. Pour comparer $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{7}$, ce n'est pas évident.
Mais sachant que la 1$^{\text{ère}}$ fraction correspond à 25% et la seconde à 28,6% environ, on voit immédiatement que c'est la seconde qui est plus grande.

d) Additions et soustractions
Pour additionner deux fractions, on doit également les mettre au même dénominateur.
Car alors, il suffit d'additionner les numérateurs.
Par exemple 1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = (2+1)/4 = 3/4
Un autre exemple : $\frac{4}{3}+\frac{7}{12}=\frac{4\times4}{3\times4}+\frac{7}{12}=\frac{16}{12}+\frac{7}{12}=\frac{16+7}{12}=\frac{23}{12}$
Pour la soustraction, c'est exactement pareil : $\frac{4}{3}-\frac{7}{12}=\frac{16}{12}-\frac{7}{12}=\frac{16-7}{12}=\frac{9}{12}$

3) Fraction d'une quantité

Si on fait des coloriages pour avoir la bonne proportion, cela ne demandent pas de connaissances particulières tant que le partage peut se faire aisément. Mais rapidement on va devoir faire des calculs : on devra calculer une quantité pour avoir une certaine proportion dans l'ensemble.
Si on demande de tracer un segment ayant une longueur égale à 2/3 d'un segment donné, c'est facile si la longueur du segment initial est divisible par 3, par exemple 120.



Cette opération est moins évidente si le nombre n'est pas divisible par le dénominateur de la fraction.
Prendre les 2/3 d'une longueur de 100 demande d'effectuer un calcul ($100\times\frac{2}{3}=\frac{100\times2}{3}=\frac{200}{3}\approx66{,}67$, voir plus loin) ou bien d'exploiter une propriété géométrique étudiée en 4$^{\text{ème}}$ (théorème de Thalès).

a) Produit d'un nombre par une fraction
D'une manière générale, les $\frac{2}{3}$ d'une quantité q correspondent à un quantité égale à $\frac{2}{3}\times q$ qui se calcule aussi bien par le produit $2\times\frac{q}{3}$ que par le quotient $\frac{2\times q}{3}$.

Dans tous les cas, pour prendre la fraction $\frac{a}{b}$ d'une quantité q :   il faut calculer une quantité q' égale à $\frac{a}{b}\times q=\frac{a\times q}{b}=a\times\frac{q}{b}$ (3 façons distinctes d'effectuer ce calcul).

Idées pour la démonstration :

Montrons sur un exemple pourquoi $\frac{3}{2}\times 10=15$. Comme on l'a rappelé au début du chapitre, la fraction $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b donne a. Ainsi, $\frac{3}{2}$ est le nombre qui, multiplié par 2 donne 3.
On peut donc écrire notre calcul : $\frac{3}{2}\times 10=\frac{3}{2}\times(2\times 5)=(\frac{3}{2}\times 2)\times 5=3\times 5=15$.
Pour tenter de généraliser cet exemple, on vient de montrer que $\frac{3}{2}\times q=\frac{3}{2}\times(2\times\frac{q}{2})=(\frac{3}{2}\times 2)\times\frac{q}{2}=3\times\frac{q}{2}$ ce qui, on le comprend bien, peut aisément se généraliser en l'égalité $\frac{a}{b}\times q=a\times\frac{q}{b}$.
Pourquoi la fraction $\frac{a\times q}{b}$ est-elle égale aux deux précédentes ?
Toujours d'après la définition, $\frac{a\times q}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b donne $a\times q$.
Cela s'écrit $\frac{a\times q}{b}\times b=a\times q$; or $(a\times\frac{q}{b})\times b=a\times(\frac{q}{b}\times b)=a\times q$, les nombres $\frac{a\times q}{b}$ et $a\times\frac{q}{b}$ sont donc égaux puisque, multipliés par le même nombre b, ils donnent le même nombre $a\times q$.
Pour admettre cette démonstration, on doit seulement savoir que les propriétés de la multiplication (associativité et commutativité) et aussi l'unicité du quotient : si $a\times q=b$ et $a\times q'=b$ alors $q=q'$.

Exemple n°1 :
$\frac{4}{5}$ des élèves d'une classe contenant 25 élèves sont des filles. Le nombre de filles peut être calculé de trois façons distinctes : $\frac{4}{5}\times 25=0,8\times 25=20$; $\frac{4\times 25}{5}=\frac{100}{5}=20$; $4\times\frac{25}{5}=4\times 5=20$. Il y a 20 filles dans cette classe.

Exemple n°2 :
Une entreprise a utilisé 45% de sa réserve de fuel qui fait 6000L. Combien lui en reste t-il ?
Elle a utilisé $\frac{45}{100}\times 6000=45\times\frac{6000}{100}=45\times 60=2700$ L. Il lui en reste donc 6000−2700 = 3300 L.

b) Prolongement (facultatif) : fraction d'une fraction
Nous pouvons appliquer ce qui vient d'être vu en prenant comme quantité q une fraction :
Si on prends par exemple le quart de la moitié, on va devoir calculer $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$.
Voyons ce que cela donne sur un schéma :

La moitié a été partagé en quart, le carré rouge représente le quart de la moitié (les 3/4 restants sont en orange), mais il représente le huitième de l'ensemble. En effet $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.
Pour effectuer ce produit, il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs ensemble,
car $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1\times 1}{4\times 2}$.

D'une façon générale, prendre $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ c'est calculer $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Exemple n°1 :
30% de la surface de la Terre est occupée par les continents.
On estime de plus, que 10% seulement des continents est cultivable[1].
Quelle fraction de la surface terrestre est cultivable?
Les 30% de 10%, c'est-à-dire $\frac{30}{100}\times\frac{10}{100}=\frac{30\times 10}{100\times 100}=\frac{300}{10000}=\frac{3}{100}$, donc seulement 3%.

Exemple n°2 :
La moitié des filles et le quart des garçons n' a pas fait son devoir de maths (chiffres fantaisistes).
Sachant que les filles représentent 3/5 des élèves, quelle fraction de la classe n'a pas fait son devoir?
Les filles représentant 3/5 des élèves, les garçons représentent donc 1−3/5=2/5 des élèves.
Il faut calculer 1/2 de 3/5 et additionner le résultat à 1/4 de 2/5 :
$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1\times 3}{2\times 5}=\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1\times 2}{4\times 5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$
La fraction des élèves qui n'ont pas fait leur devoir est donc égale à :
$\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3+1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{40}{100}$, soit 40% de la classe (on dirait aussi 2 élèves sur 5 n'ont pas fait leur devoir).

1 : Sur une surface totale de 13 milliards d'hectares de terre sur la planète, les terres cultivables représentent 11%, les pâturages 27%, les forêts 32% et les zones urbaines 9%. La majeure partie des 21% restant n'est pas adaptée à l'agriculture, aux pâturages ou aux forêts en raison de sols trop stériles ou trop peu profonds pour permettre à des plantes d'y pousser, ou parce que l'environnement est trop froid, trop sec, trop montagneux, trop rocailleux ou trop humide.