5ème	Chapitre 2 : Symétrie centrale et parallélogrammes

Chapitre 2 : Symétrie centrale et parallélogrammes

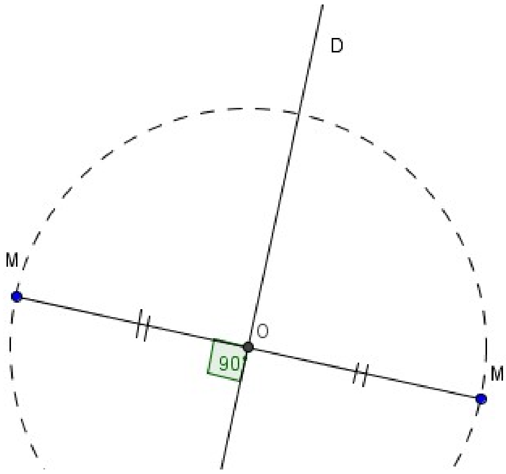
1) Symétrique d'un point

a) Symétrique d'un point par rapport à une droite (*rappel*)

Définition : Le symétrique *M'* d'un point *M* par rapport à une droite *D* est tel que :

(*MM'*) est perpendiculaire à *D* et [*MM'*] a pour milieu un point de *D*

On dit que *D* est l'*axe de la symétrie* qui transforme *M* en *M'*.



Le programme de construction est le suivant :

- Tracer la droite perpendiculaire à *D* passant par *M*
- Cette droite coupe *D* en un point *O*, tracer le cercle de centre *O* passant par *M*.
- Ce cercle recoupe la perpendiculaire à *D* en un point *M'*, placer *M'*.

Remarque : un point de la droite *D* a pour symétrique lui-même. Sur notre figure, le symétrique de *O* par rapport à *D* est *O*. On dit d'un point qui n'est pas déplacé par une symétrie qu'il est *invariant*.

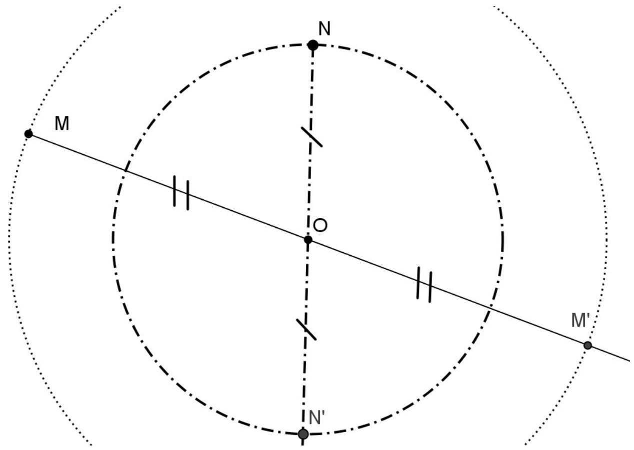
b) Symétrique d'un point dans la symétrie centrale

Dans la symétrie centrale, il n'y a pas d'axe de symétrie mais il y a un point invariant : le *centre* de la symétrie.

Définition : Le symétrique *M'* d'un point *M* par rapport au point *O* est tel que :

le segment [*MM'*] a pour milieu le point *O*

On dit que *O* est le *centre de la symétrie* qui transforme *M* en *M'*.



Le programme de construction est le suivant :

- Tracer la demi-droite [*MO*).
- Tracer le cercle de centre *O* passant par *M*.
- Ce cercle coupe la demi-droite en *M'* qui est le point cherché. Placer *M'*.

Remarque : une propriété immédiate de cette symétrie centrale est que si le symétrique de *M* est *M'*, alors le symétrique de *M'* est *M*, on dit que *M* et *M'* sont symétriques par rapport à *O*.
Sur la figure ci-contre, nous avons aussi *N* et *N'* qui sont symétriques par rapport à *O*.

Ces trois phrases sont strictement équivalentes :

- *Le symétrique de M par la symétrie de centre O est M'.*
- *Le milieu de [MM'] est O.*
- *M et M' sont diamétralement opposés sur un cercle de centre O.*

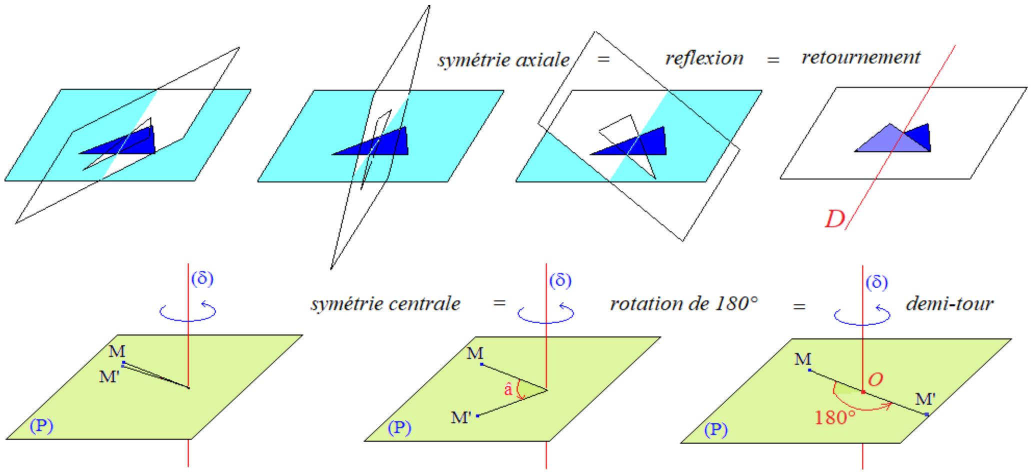
c) Comparaison entre les deux sortes de symétrie

Du fait de l'emploi du même mot « *symétrie* », il y a un risque de confusion.
La différence vient de l'élément de symétrie qui est une droite dans un cas, un point dans l'autre.
Si on ne veut pas employer le terme de symétrie, on peut appeler la symétrie centrale autrement :

demi-tour ou, ce qui signifie la même chose, *rotation de 180°*

La symétrie axiale ou orthogonale, quant à elle, peut aussi être appelée : *réflexion* ou *retournement*

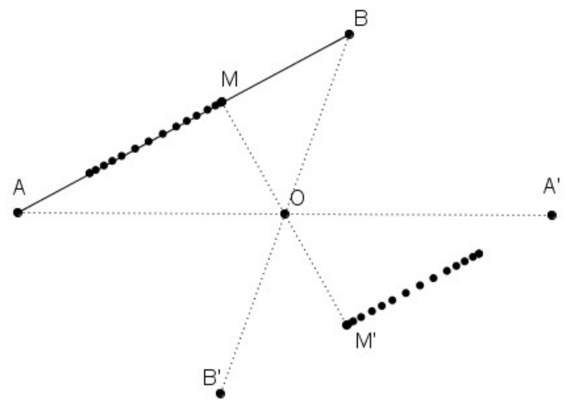
Remarque : Les réflexions et les demi-tours sont des transformations du plan, mais si on les plonge dans un espace à trois dimensions, on s'aperçoit qu'elles correspondent toutes les deux à des rotations de 180° autour d'une droite : la réflexion présente cette rotation dans un plan contenant l'axe de la rotation (la droite *D*) alors que le demi-tour la présente dans un plan perpendiculaire à cet axe (noté δ ci-dessous) ; celui-ci apparaît sous la forme d'un point (le point *O*) qui est l'endroit où l'axe de rotation perce le plan de la figure.
Les figures qui suivent présentent des animations de ces deux types de rotations dans l'espace.



2) Propriétés de la symétrie centrale

a) Symétrique d'un segment

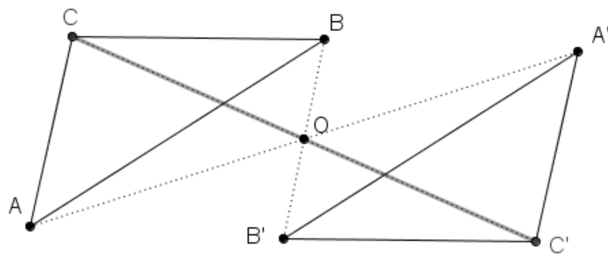
Si l'on construit les symétriques de trois points alignés comme A, M et B sur la figure ci-contre, on obtient trois points alignés. De plus, la distance entre deux points est conservée par la symétrie centrale.
Sur notre figure $AB = A'B'$ et $AM = A'M'$.



Sur notre figure $[AB]$ est transformé en $[A'B']$.
Observation : les segments symétriques sont parallèles.
Propriété : La symétrie centrale transforme un segment en un segment parallèle et de même mesure.

Conséquence : La symétrie de centre O transforme A en A' et B en B', donc elle transforme le segment $[A$B] en le segment $[A'B']$ de manière à avoir $(AB)//(A'B')$ et $AB=A'B'$.
Dans le même temps, elle transforme A en A' et $\boldsymbol{B'}$ **en** $\boldsymbol{B}$, donc elle transforme le segment $[AB']$ en le segment $[BA']$ de manière à avoir $\boldsymbol{(AB')//(A'B)}$ et $\boldsymbol{AB'=A'B}$.
Finalement, le quadrilatère $ABA'B'$ a des côtés opposés parallèles et égaux deux à deux. Ce type de quadrilatère est appelé parallélogramme. C'est donc la même chose de dire qu'une symétrie transforme $[AB]$ en $[A'B']$ ou de dire que $ABA'B'$ est un parallélogramme.

Sur la figure de droite on a tracé un triangle et son symétrique par rapport à O. Les côtés symétriques sont parallèles et de même longueur.
Les quadrilatères suivants sont des parallélogrammes :
$CBC'B'$, $ABA'B'$ et $ACA'C'$

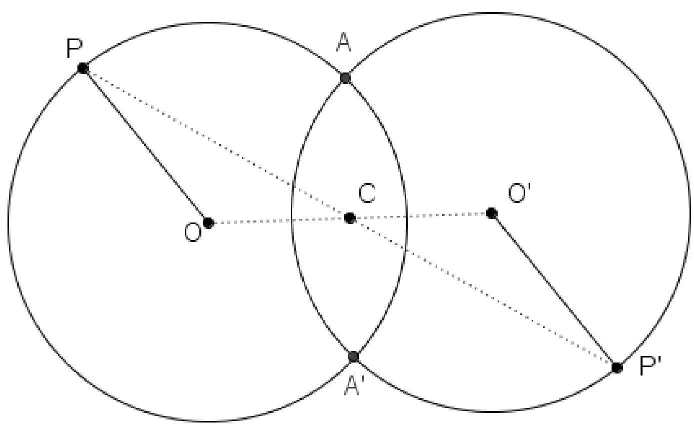


Pour construire le symétrique d'un segment, il suffit donc de construire le symétrique des deux extrémités du segment, puis de tracer le segment qui joint ces deux points. Une autre méthode est de construire le symétrique d'un seul point, puis de tracer la parallèle passant par ce point sur laquelle on placera l'autre point.

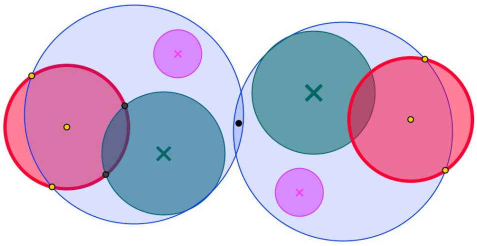
b) Symétrique d'un cercle

Un cercle a pour symétrique un cercle de même rayon, les centres des deux cercles étant symétrique l'un de l'autre.

Si l'on doit tracer le symétrique d'un cercle de centre O passant par P par rapport à un point C, il suffit de tracer l'image O' du centre O et l'image P' du point P.
$OPO'P'$ est un parallélogramme de centre C.

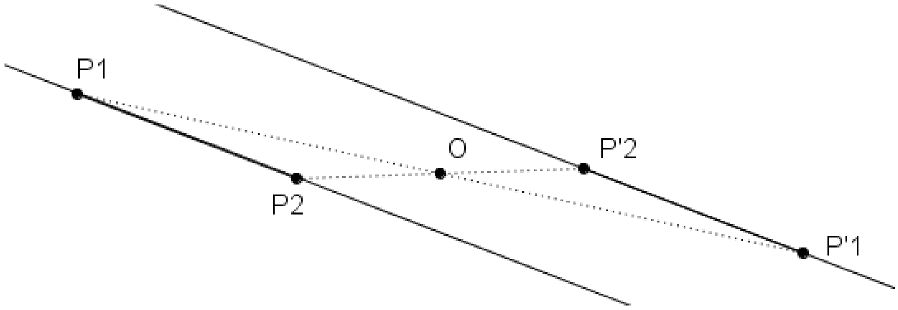


N'importe quel point M du cercle de départ aura pour symétrique un point M' du cercle symétrique.
Lorsque le rayon du cercle est inférieur à la distance OO' séparant les deux cercles, les deux cercles symétriques se coupent en deux points A et A' sur notre figure. Ces points d'intersections sont symétriques l'un de l'autre. Ce sont les seuls points du cercle de départ qui ont leur symétrique sur le cercle symétrique.



Ci-contre un groupe de cercles et leur symétrique par rapport à un centre (en noir). On voit que la symétrie centrale ne déforme rien : tout le groupe est simplement dessiné à l'envers.

c) <u>Symétrique d'une droite</u>
Le symétrique d'une droite d par rapport à un point O est une droite d' parallèle à d. On trace d' en construisant les symétriques de deux points quelconques P_1 et P_2 de la droite d. Les symétriques P'_1 et P'_2 de ces deux points seront en effet sur la droite d'.

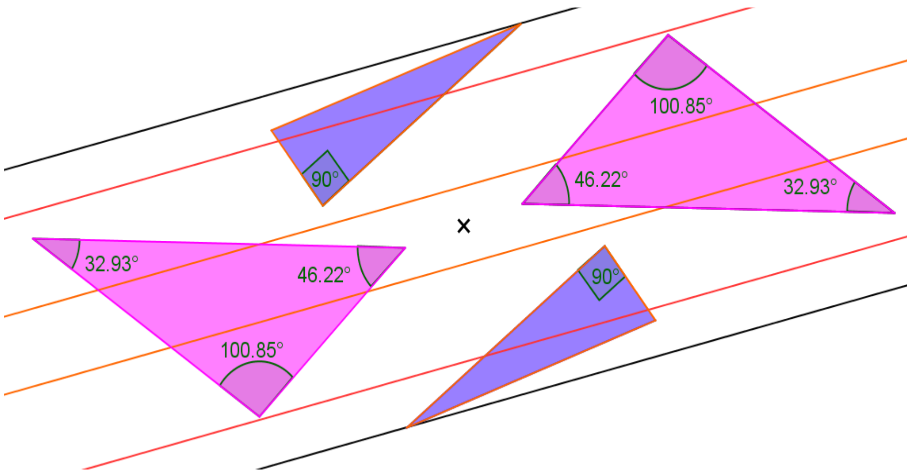


Il existe des droites qui sont globalement invariantes par symétrie centrale : celles passant par le centre de la symétrie. Le symétrique de la droite (OP_1) est la droite (OP'_1) qui est confondue avec (OP_1).
Deux droites symétriques sont parallèles strictement (parallèles et disjointes) lorsqu'elles ne passent pas par le centre de la symétrie. Sur ma figure ci-dessus, $(P_1P_2)//(P'_1P'_2)$ mais $(P_1P_2)\neq(P'_1P'_2)$.

d) <u>Symétrique d'un angle</u>
Le symétrique d'un angle $\widehat{ABC}$ est un angle $\widehat{A'B'C'}$ de même mesure.
En particulier un angle droit a pour symétrique un angle droit.

Un triangle dont les angles mesurent 33°, 46° et 101° a pour symétrique un triangle dont les angles mesurent 33°, 46° et 101°.

Deux droites parallèles ont pour symétriques deux droites parallèles.
Deux droites perpendiculaires auront pour symétriques deux droites perpendiculaires.



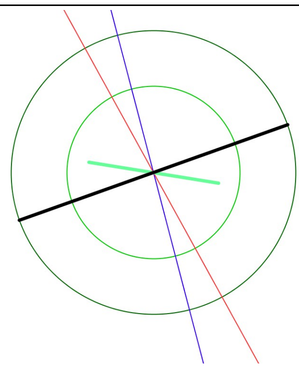
Autrement dit, la symétrie ne déforme pas les triangles, ni aucun polygone, ni aucune figure.

Pour conclure : la symétrie centrale conserve les angles, les longueurs et les formes. C'est une transformation qui ne fait que déplacer les figures. La symétrie axiale avait aussi cette caractéristique. On dit que ce sont des *déplacements*. Il existe d'autres déplacements qui seront étudiés plus tard (rotations, translations).

3) Centre de symétrie d’une figure

a) Définition

Une figure $\mathcal{F}$ admet le point O comme centre de symétrie si tous les points de $\mathcal{F}$ ont pour symétrique par rapport au point O, un point de la figure $\mathcal{F}$.
Autrement dit, O est un centre de symétrie pour $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est invariante par la symétrie de centre O.



Parmi les figures simples étudiées jusqu’ici :

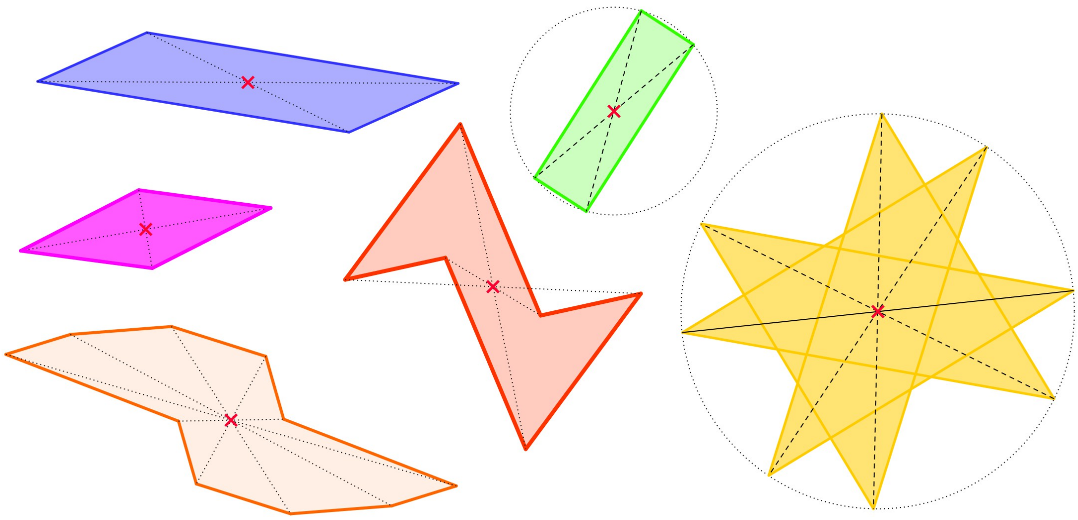
- un segment a un centre de symétrie : son milieu
- un cercle a un centre de symétrie : son centre
- une droite a une infinité de centre de symétrie : tous ses points.

Sur la figure ci-contre, nous avons tracés deux segments ayant le même centre de symétrie, deux droites et deux cercles ayant également le même point comme centre de symétrie.

b) Polygones ayant, ou pas, un centre de symétrie

Pour avoir un centre de symétrie, un polygone doit avoir des côtés opposés parallèles et de même longueur.
Il en faut donc un nombre pair : un triangle, un pentagone ne peuvent avoir de centre de symétrie.
Les triangles équilatéraux ont trois axes de symétrie, mais ils n’ont pas de centre de symétrie.

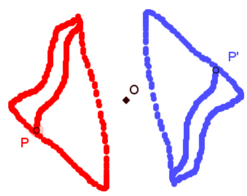
Voici quelques polygones ayant un centre de symétrie (noté par une croix en rouge).



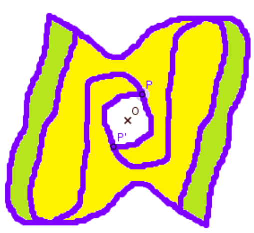
Certains de ces polygones n’ont qu’un centre de symétrie, d’autres ont un centre et un ou des axe(s) de symétrie : le rectangle vert et le losange rose ont deux axes de symétrie (perpendiculaires pour le losange), l’étoile jaune à huit côtés a aussi deux axes de symétrie perpendiculaires.
Une étoile à huit côtés, si elle est régulière peut avoir jusqu’à huit axes de symétrie.

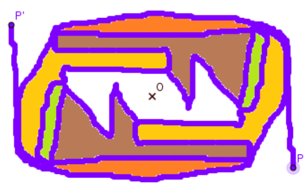
c) Autres figures ayant un centre de symétrie

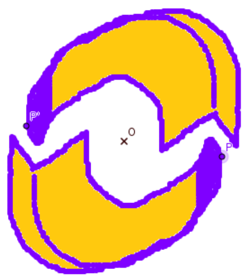
Les figures ayant un centre de symétrie ne sont pas nécessairement des polygones.
Sur Geogebra, si je place deux point O et P, que je trace le point P' symétrique de P par rapport à O et que j'active, pour P et P', le mode « trace activée », je peux dessiner une figure (en rouge) en déplaçant le point P et voir se dessiner (en bleu) la figure symétrique (obtenue par le déplacement du point P').



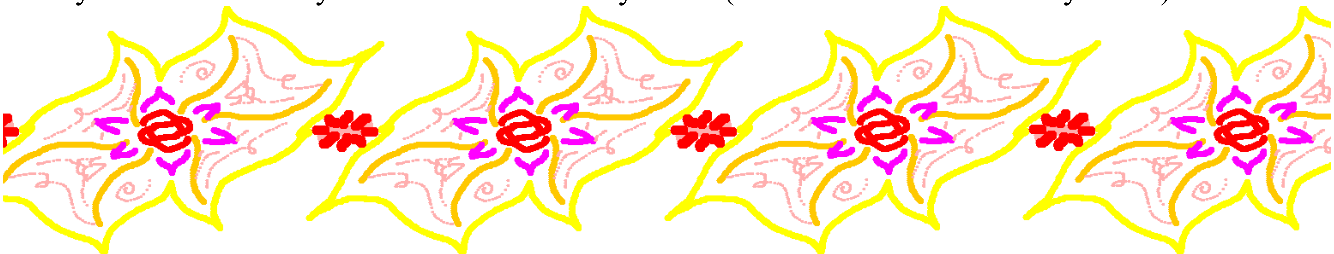
De cette façon, je peux dessiner des figures qui ont un centre de symétrie : il suffit de colorer de la même couleur les points P et P'.

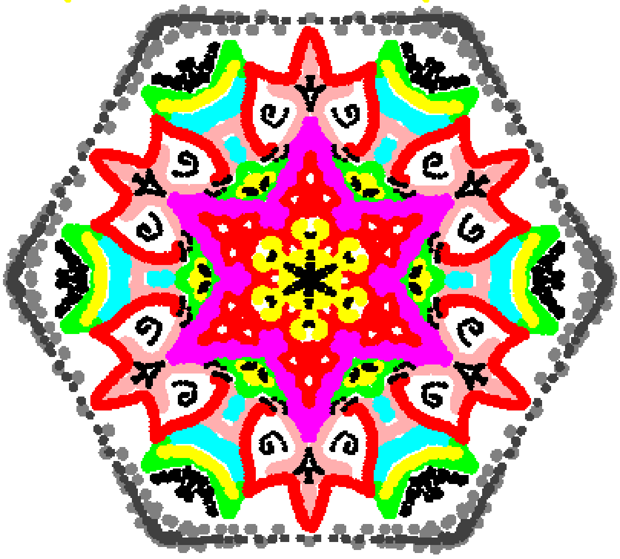


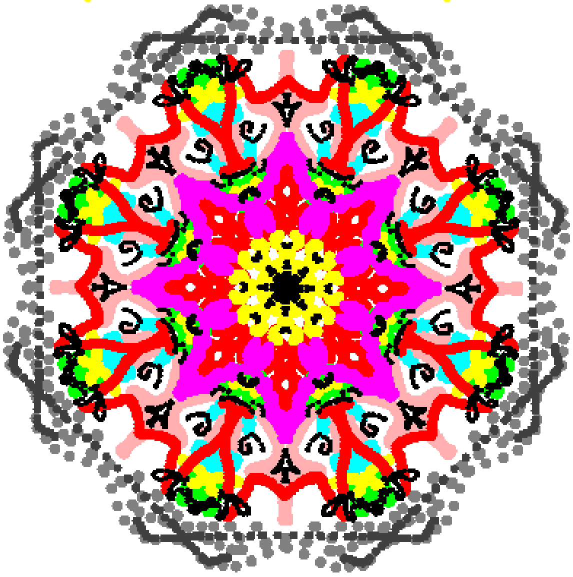




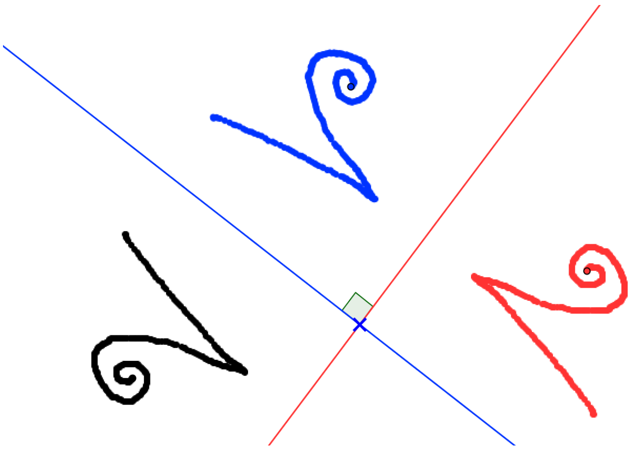
Certains motifs utilisent la symétrie centrale dans un but décoratif : les frises, les rosaces et les pavages.
La première figure est une frise ayant des centres de symétrie (en rouge), la deuxième et la troisième sont des rosaces ayant un centre de symétrie et des axes de symétrie (entre autres éléments de symétrie).



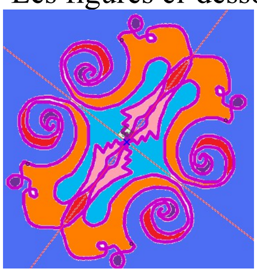
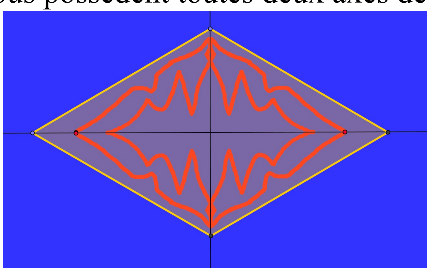
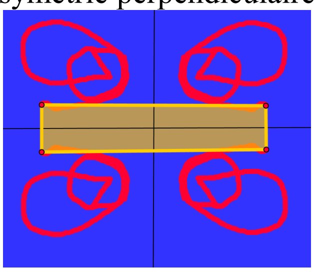
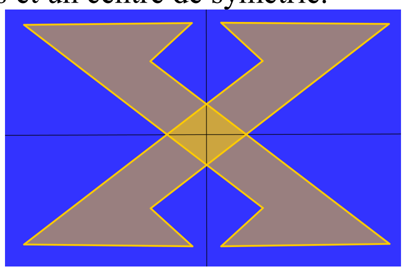




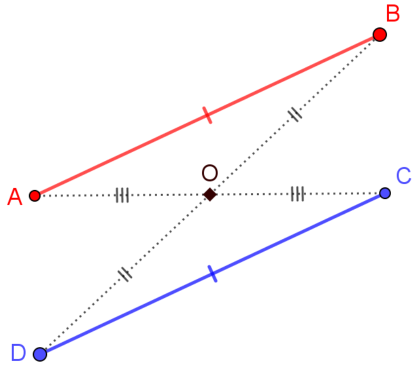
Remarque :
La symétrie centrale peut être fabriquée au moyen de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires.
Si on fait subir à une figure $\mathcal{F}$ une première symétrie axiale d'axe d_1, cela donne une figure $\mathcal{F}_1$.
Si l'on fait subir maintenant à la figure $\mathcal{F}_1$ une seconde symétrie axiale d'axe d_2 perpendiculaire à d_1, cela donne une figure $\mathcal{F}_2$. La figure $\mathcal{F}_2$ est symétrique de la figure $\mathcal{F}$ par rapport au point d'intersection de d_1 et d_2



Conséquence : les figures qui possèdent deux axes de symétrie perpendiculaires (par exemple le rectangle ou le losange) possèdent également un centre de symétrie, le point d'intersection des deux axes.
Les figures ci-dessous possèdent toutes deux axes de symétrie perpendiculaires et un centre de symétrie.

4) Étude des parallélogrammes



> *Définition* : un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux parallèles.

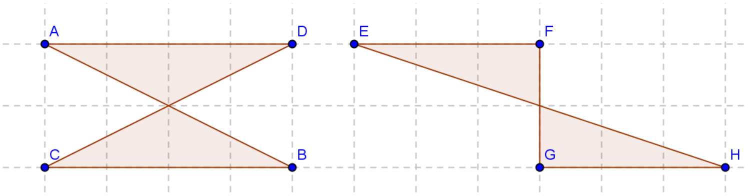
Si *ABCD* est un parallélogramme, alors (*AB*)//(*CD*) et (*AC*)//(*BD*).

On l'a dit plus haut, le symétrique d'un segment [*AB*] par rapport à un point *O* étant un segment [*CD*] parallèle au premier et de même longueur (*CD*=*AB*), la symétrie de centre *O* échange *A* et *C* d'une part et *B* et *D* de l'autre. Elle transforme donc aussi le segment [*AD*] en un segment parallèle : le segment [*BD*]. Le quadrilatère *ABCD* est donc un parallélogramme.

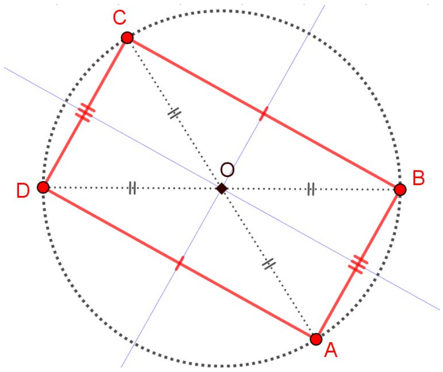
Conséquences :
- Les diagonales d'un parallélogramme se croisent en leur milieu.
- Les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur.
- Les angles opposés d'un parallélogramme ont même mesure.

Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut et il suffit d'avoir une de ses propriétés :
- Les côtés opposés sont deux à deux parallèles.
- Les diagonales se coupent en leur milieu.
- Les côtés opposés ont deux à deux la même longueur et le quadrilatère n'est pas croisé.
- Un côté est parallèle au côté opposé et de même longueur et le quadrilatère n'est pas croisé.

<u>Remarque</u> : La condition « le quadrilatère n'est pas croisé » se rajoute dans certains cas, car le quadrilatère peut se trouver dans une de ces configurations, illustrées ci-contre, où *ABCD* et *EFGH* sont des quadrilatères croisés.
- ABCD a ses côtés opposés de même longueur, mais ce n'est pas un parallélogramme.
- EFGH a ses angles opposés de même mesuremais ce n'est pas un parallélogramme.

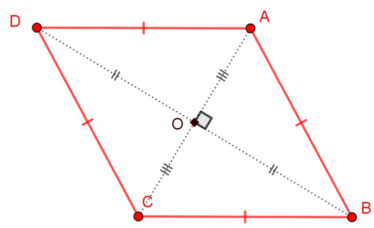


Quadrilatères particuliers :
- Le *rectangle* est un parallélogramme dont les angles sont droits et les diagonales de même longueur.



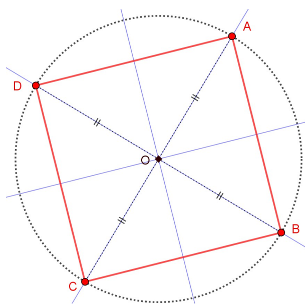
Si on inscrit un rectangle dans un cercle, les diagonales du rectangles sont des diamètres du cercle.
Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle. De même si un de ses angles est droit.
Les rectangles ont deux axes de symétrie qui sont confondus avec les médiatrices des côtés (en trait fin bleu sur la figure).

- Le *losange* est un parallélogramme dont les côtés sont de même longueur et les diagonales perpendiculaires.



Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange. De même si deux côtés consécutifs ont même longueur.
Les losanges ont deux axes de symétrie qui sont confondus avec les diagonales (en pointillés sur la figure).

- Le *carré* est à la fois un losange et un rectangle.



Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré.
Les carrés ont quatre axes de symétrie puisqu'il a les deux du rectangle et les deux du losange (en bleu sur la figure).