5ème **Chapitre 1 : Nombres**

1. Priorités opératoires

a) Expressions ne contenant que des + ou des −

Règle 1 : Lorsqu'il n'y a que des additions, on effectue les calculs dans l'ordre que l'on veut et on peut aussi changer l'ordre des nombres si cela nous arrange.

Exemple : 0,25+5+0,75+18+2=(0,25+0,75)+5+(18+2)=1+5+20=26 (on a changé l'ordre des termes).

Vocabulaire : quand on additionne plusieurs nombres, on dit qu'on effectue la *somme* de ces nombres. Chacun des nombres est un *terme* de la somme.

Règle 2 : Lorsqu'il n'y a que des additions et des soustractions, on peut :
- effectuer les calculs dans l'ordre de l'écriture (de gauche à droite).
- effectuer les soustractions en premier (cette méthode n'est pas toujours possible).
- effectuer la somme A des nombres à ajouter, puis la somme B des nombres à soustraire, et enfin la différence entre A et B.

Exemple : 12+5−2=17−2 (on effectue d'abord +) et aussi 12+3 (on effectue d'abord −),
mais 12−5+2=7+2=9 (on effectue d'abord −, la 1ère opération) mais surtout pas 12−7=5.
Si, dans 12−5+2, on effectue d'abord 5+2, c'est qu'on calcule en réalité 12−(5+2)=12−7.

Vocabulaire : quand on soustrait deux nombres, on dit qu'on effectue la *différence* de ces nombres.
On ne parle pas de la différence de trois nombres car cela n'a pas de sens :
12−7−2=5−2=3 (différence entre 5 et 2), mais c'est aussi 12−(7+2)=12−9=3 (différence entre 12 et 9)

Pour effectuer mentalement un long calcul comme E=120+25−12+13−10−4+41−15, on devrait préférer la 3ème méthode : E=120+25+13+41−12−10−4−15=(120+25+13+41)−(12+10+4+15)=199−41=158

Règle 3 : Lorsqu'il y a des parenthèses, on effectue d'abord les opérations contenus dans les parenthèses.

Exemple : 12−(4−3)−1=12−1−1=11−1=10 alors que 12−(4−3−1)=12−(1−1)=12−0=12 et, sans parenthèses le résultat est différent : 12−4−3−1=8−3−1=5−1=4.

b) Expressions ne contenant que des × ou des ÷

Règle 4 : Lorsqu'il n'y a que des multiplications, on effectue les calculs dans l'ordre que l'on veut et on peut aussi changer l'ordre des nombres si cela nous arrange.

Exemple : 4×13×25×3=4×(13×25)×3=4×(25×13)×3=(4×25)×(13×3)=100×39=3900

Vocabulaire : quand on multiplie plusieurs nombres, on dit qu'on effectue le *produit* de ces nombres. Chacun des nombres est un *facteur* du produit.

Notation : Devant une parenthèse ou devant une lettre (dans un calcul, une lettre remplace un nombre) on omet généralement le symbole de la multiplication.
Par exemple, on note $4a$ le produit $4\times a$, et on note $4(L+2)$ le produit $4\times(L+2)$.

Règle 5 : Lorsqu'il n'y a que des multiplications et des divisions, on peut :
- effectuer les calculs dans l'ordre de l'écriture (de gauche à droite).
- effectuer les divisions partielles en premier (cette méthode n'est pas toujours possible).
- effectuer le produit A des nombres à multiplier, puis le produit B des nombres à diviser, et enfin le quotient entre A et B

Exemple : 12×6÷2=72÷2=36 (on effectue d'abord ×) et aussi 12×3 (on effectue d'abord ÷),
mais 12÷6×2=2×2=4 (on effectue d'abord ÷, la 1ère opération) et non 12÷12=1.

Vocabulaire: quand on divise deux nombres, on dit qu'on effectue le *quotient* de ces nombres.
On ne parle pas du quotient de trois nombres car cela n'a pas de sens.

Remarque : La règle 3 est valable ici aussi, comme partout : les parenthèses changent l'ordre des opérations. Par exemple : 12÷(4÷2)=12÷2=6 alors que 12÷4÷2=(12÷4)÷2= 3÷2=1,5.

c) Expressions contenant à la fois des + ou des − et des × ou des ÷

Lorsqu'au supermarché on achète un pot de pâte à tartiner à 2€70 et 3 canettes à 0€90 d'une boisson gazeuse, pour savoir le total à payer, on effectue l'opération 2,70+3×0,90 et il ne vient à personne l'idée d'additionner d'abord 2,70 et 3. Il faut, en effet, effectuer d'abord la multiplication.

Règle 6 : Lorsqu'il y a un mélange des quatre opérations (+, −, × et ÷), on effectue d'abord les multiplications et les divisions et ensuite les additions et soustractions.

Exemples : 12+3×6−2=12+18−2=30−2 =28, on effectue d'abord ×, puis les + et − de gauche à droite.
100−72÷2−3×5=100−36−5=64−15=49.

d) Expressions contenant des parenthèses

Les parenthèses modifient l'ordre « naturel » des opérations (ordre fixé par les règles 1, 2 et 4 à 6).
Les parenthèses qui ne changent pas l'ordre des opérations sont dites **inutiles** et peuvent être enlevées.
Exemple : dans les calculs A=12+(3×6)−2 et B=(4×10)+5, les parenthèses sont inutiles car on peut écrire A=12+3×6−2 et B=4×10+5, les résultats seront inchangés.
Les parenthèses inutiles servent parfois à souligner un aspect du calcul. Pour illustrer la règle 4, j'ai utilisé des parenthèses « inutiles » : 4×13×25×3=4×(13×25)×3=4×(25×13)×3=(4×25)×(13×3)

Règle 7 : Lorsqu'il y a plusieurs parenthèses emboîtées, on effectue les calculs en partant des parenthèses les plus intérieures.

Exemple : 12+(3×**(**6−2**)**)=12+(3×4)=12+12=24
360÷(28−(48÷**(**6÷2**)**))=360÷(28−**(**48÷3**)**)=360÷**(**28−16**)**=360÷12=20

Remarque : Les parenthèses extérieures sont parfois remplacées par des crochets ou des accolades.
L'expression 12+(3×(6−2)) peut se noter 12+[3×(6−2)].
F=360÷(28−(48÷**(**6÷2**)**)) peut se noter avec parenthèses, crochets et accolades
F=360÷{28−[48÷(6÷2)]} cela aide la lecture de cette expression.
On aurait aussi pu obtenir le même résultats avec des couleurs :
F=360÷(28−(48÷(6÷2)))
ou bien encore avec des parenthèses de tailles différentes :
$F=360\div\Big(28-\big(48\div(6\div2)\big)\Big)$

e) Expressions utilisant un ou des trait(s) de fraction

Le trait de fraction sert à noter une division, par exemple $\frac{2}{3}$ est le quotient de 2 par 3 : $\frac{2}{3}=2\div3$.

Règle 8 : Lorsqu'on utilise un trait de fraction, on considère que le numérateur et le dénominateur sont entre des parenthèses.

Exemple : $\frac{2+6}{3-1}=\frac{8}{2}=4$, l'expression de départ aurait pu être notée sur une ligne (2+6)÷(3−1).

Attention : si on utilise une calculatrice pour calculer une expression dans laquelle une division est remplacée par un trait de fraction, les parenthèses (qui ne sont pas écrites) doivent être ajoutées!
Si je dois calculer l'expression $71+\frac{7}{13+\frac{41}{29+23}}$, je dois taper 71+7÷(13+41÷(29+23)). D'autres parenthèses inutiles peuvent être employées, mais il faut au moins écrire ces deux paires emboîtées.

2. Les nombres négatifs

a) Définitions

Introduction : Lorsque nous effectuons une soustraction en enlevant plus que ce que l'on a, par exemple si on enlève 8 à 3 (on calcule 3−8=?), la calculatrice donne un résultat (3−8=−5) : un nombre avec un signe moins devant (−5). Ce nombre est négatif. Il est inférieur à zéro, c'est pour cela qu'on lui met un signe moins. Nous rencontrons ce genre de nombre aussi dans la vie courante : température négative, étage d'un immeuble en dessous du rez-de-chaussée... On comprend aussi, par ces situations concrètes, qu'un nombre comme −5 doit être plus petit qu'un nombre comme −1...

Définition n°1 : Un nombre *négatif* est un nombre précédé d'un signe moins (−).

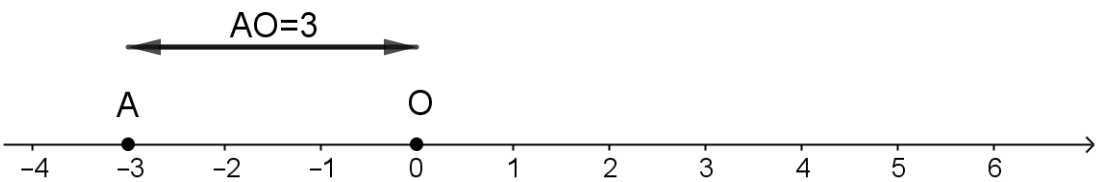
Remarque : Le fait d'être négatif est une caractéristique portant sur la valeur du nombre et pas sur son type. Il y a des nombres entiers négatifs, des nombres décimaux négatifs, des nombres rationnels négatifs, etc.

Exemples : −3 et −12 sont des entiers négatifs ; −0,5 et −10,25 sont des décimaux non-entiers négatifs ; $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{12}{7}$ sont des nombres rationnels non-décimaux négatifs.

Définitions associées : Par opposition aux nombres négatifs, les autres (ceux qui ne sont pas négatifs) sont appelés positifs. Les nombres *positifs* peuvent être précédés d'un signe plus (+3), mais généralement, on ne met rien devant (+3 est noté simplement 3). Les entiers *naturels* (ceux que l'on utilise pour compter les objets) sont, par définition, les entiers positifs. L'ensemble des nombres positifs et négatifs est appelé l'ensemble des nombres *relatifs*.

Un nombre relatif est donc une valeur numérique (écrite avec des chiffres) précédée d'un signe + ou − (que l'on n'écrit pas nécessairement pour le signe +). Il est donc constitué de deux parties :

- le signe + ou −
- la valeur numérique privée du signe, appelée *valeur absolue* ou *distance à zéro* car, sur un axe gradué d'origine *O*, l'abscisse *a* d'un point *A* peut être négative ou positive mais la longueur du segment [*OA*] est toujours un nombre positif. Par exemple si *A* a pour abscisse −3 alors *OA*=3.

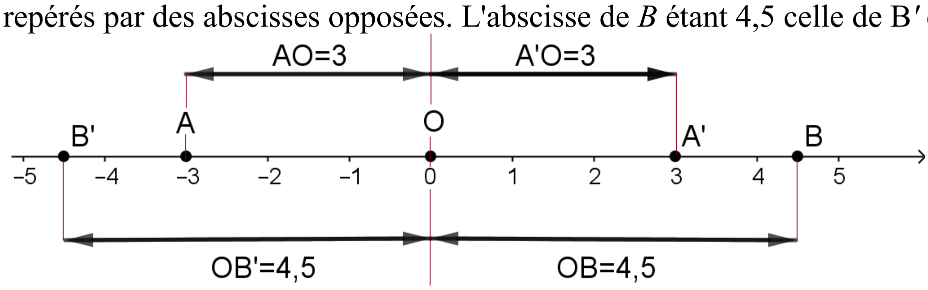


Définition n°2 : Deux nombres qui ne diffèrent que par leur signe sont dits *opposés*.

Conséquences : i) Tous les nombres positifs ont un opposé négatif, et réciproquement.
L'opposé de 3 est −3 et, réciproquement, l'opposé de −3 est 3.

ii) L'opposé de l'opposé d'un nombre est le nombre lui même.
−(−3)=3 et, d'une façon générale pour tout nombre *a* : $-(-a)=a$.

Propriété : Les nombres opposés sont disposés de façon symétrique par rapport à l'origine :
Sur cet axe, j'ai placé les points *A* et *A′* de manière à ce que l'origine *O* soit le milieu du segment [*AA′*]. Ces deux points sont repérés par des abscisses opposées. L'abscisse de *B* étant 4,5 celle de B′ est −4,5.



Une autre définition de l'opposé d'un nombre a : c'est le nombre qu'il faut à a pour obtenir 0.
On comprendra mieux cette définition après avoir défini l'addition des nombres relatifs

Avec des inégalités, en notant x un nombre quelconque :
si $x>0$ (comprendre « si le nombre x est positif ») alors $-x<0$ (comprendre « le nombre $-x$ est négatif ») et, réciproquement, si $x<0$ alors $-x>0$ (se lit « si x est négatif alors $-x$ est positif »).
Si x est un nombre quelconque alors $-x$ n'est pas forcément un nombre négatif (il l'est si x est positif).

Remarque : Le seul nombre relatif qui soit à la fois positif et négatif est 0 qu'on peut écrire −0.
0 est le plus grand nombre négatif et le plus petit nombre positif.

b) Ordre des nombres relatifs

Sur l'axe gradué, on l'a dit, l'ordre des entiers négatifs est en sens inverse de celui des entiers positifs :

$$3>2>1>0 \text{ mais } -3<-2<-1<0$$

Propriété n°1 : L'ordre des nombres négatifs est l'inverse de celui des nombres positifs.

L'ordre de deux nombres négatifs est l'inverse de celui de leur distance à zéro.
Par contre, l'ordre de deux nombres positifs est celui de leur distance à zéro.

Propriété n°2 : Les nombres négatifs sont tous inférieurs aux nombres positifs.

Si deux nombres n'ont pas le même signe, le plus petit est le nombre négatif (exemple $-3<2$ et $-2<3$).
Si deux nombres ont le même signe, le plus petit est :

- celui qui a la plus petite distance à zéro si les signes sont positifs (exemple $2<3$).
- celui qui a la plus grande distance à zéro si les signes sont négatifs (exemple $-3<-2$).

Les nombres relatifs sont-ils plus nombreux que les nombres positifs ? Cela semble vrai car pour chaque nombre positif, il y a le nombre positif qui lui correspond (son opposé). On pourrait en déduire qu'il y a 2 fois plus de nombres relatifs que de nombres positifs, sauf que les nombres en question étant infinis, on ne peut multiplier ainsi par 2 un nombre infini... Si l'on voulait numéroter tous les nombres entiers relatifs, on pourrait procéder ainsi : 0 est le n°1, 1 est le n°2, −1 est le n°3, 2 est le n°4, −2 est le n°5, etc. En procédant ainsi, on pourrait numéroter tous les nombres entiers relatifs avec seulement les nombres entiers positifs ! Ce raisonnement prouve que les 2 ensembles de nombres ont le même nombre d'éléments, ce qui reste assez paradoxal.

c) Additions et soustractions

- Additions

Nous savons qu'additionner des nombres positifs c'est additionner leur distance à zéro. Pour additionner des nombres négatifs cela sera pareil : on additionne leur distance à zéro et on conserve le signe −.

Par exemple : $3+5=8$. Avec des nombres négatifs : $(-3)+(-5)=-8$. On additionne 3 et 5, les distances à zéro, et puis on remet le signe −. Penser à des pertes : si j'ai déjà une perte de 3 et que je perds 5 à nouveau. En tout, j'ai perdu $3+5=8$, comme c'est une perte je mets un signe −, j'ai donc en tout −8.

Règle n°1 : Pour additionner deux nombres relatifs de même signe, on doit effectuer une addition des distances à zéro et conserver le signe des nombres.

Additionner des nombres de signes opposés ne peut pas se faire avec la même règle.
Imaginons que la température soit de −5° et qu'elle augmente de 7° ; la nouvelle température sera de 2° (on avance sur l'axe gradué de 7 vers la droite en partant de −5) ce qui correspond au résultat de l'opération $(-5)+(+7)$. En réalité, additionner des nombres de signes différents, c'est effectuer une soustraction : ici il faut effectuer la soustraction $7-5$; le résultat est positif car la plus grande distance à zéro est celle de 7, celle d'un nombre positif. Le résultat est donc positif.

Si la température est de $-7°$ et qu'elle augmente de $5°$; la nouvelle température sera de $-2°$. La plus grande distance à zéro est celle de -7, celle d'un nombre négatif. Le résultat est donc négatif.

Règle n°2 : Pour **additionner** deux nombres relatifs de signes contraires, on doit effectuer une **soustraction** des distances à zéro et conserver le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro.

Exemples : $3+(-5)=-(5-3)=-2$. On garde le signe de -5 (le signe $-$) car 5 est plus grand que 3.
$5+(-3)=+(5-3)=+2$. On garde le signe de 5 (le signe +) car 5 est plus grand que 3.

Conséquence : L'addition de deux nombres opposés donne zéro.
$3+(-3)=0$ et, d'une façon générale pour tout nombre a : $a+(-a)=0$

- Soustractions

Additionner des nombres de signes contraires c'est soustraire des nombres de même signe.
Soustraire des nombres de même signe c'est additionner des nombres de signes contraires.
Exemple : $(+3)-(+5)=(+3)+(-5)$ ou encore : $(-3)-(-5)=(-3)+(+5)$

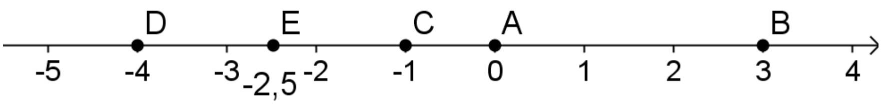
Pour simplifier et généraliser cette règle un peu abstraite qui parait mal justifiée, disons plus simplement
soustraire c'est additionner l'opposé

Enlever -5 c'est ajouter 5 : $(-3)\mathbf{-(-5)}=(-3)\mathbf{+(+5)=}2$ et aussi $(+3)-(-5)=(+3)+(+5)=8$.
Enlever 5 c'est ajouter -5 : $(-3)\mathbf{-(+5)}=(-3)\mathbf{+(-5)=}-8$ et aussi $(+3)-(+5)=(+3)+(-5)=-2$.

Pour faire encore plus simple, il suffit de remarquer que :
- les symboles $-(-$ et $+(+$ sont interchangeables,
- et de même $-(+$ et $+(-$ sont interchangeables.

Règle n°3 : Pour **soustraire** un nombre relatif, on doit **ajouter** l'opposé de ce nombre.

Application : calcul de distance sur un axe gradué.
La distance entre deux points d'un axe gradué est égale à la différence entre les abscisses.
On doit enlever l'abscisse la plus petite à l'abscisse la plus grande.
De cette façon la distance sera toujours positive (supérieure à zéro) comme il se doit.



$AB=3-0=3$; $CB=3-(-1)=3+(+1)=4$; $DB=3-(-4)=3+4=7$; $DE=(-2,5)-(-4)=-2,5+(+4)=4-2,5=1,5$

En fait, on s'aperçoit qu'avec les nombres relatifs, une addition peut conduire à effectuer une soustraction (comme $-2,5+(+4)$ qui est une soustraction car on ajoute des nombres de signes opposés) et une soustraction peut conduire à effectuer une addition (comme $3-(-1)$ qui est l'addition de 3 et 1).

- Simplifications d'écriture

Les parenthèses sont lourdes à manipuler, longues à écrire. Pour s'en passer, on peut procéder par étape :

Étape 1 : On remplace toutes les soustractions par des additions (en ajoutant l'opposé du nombre qu'on doit soustraire). Il n'y a plus de signe $-$ devant une parenthèse : $3-(-1) = 3+(+1)$ et $-3-(+2) = -3+(-2)$.

Étape 2 : On enlève les additions et les parenthèses. Il ne restera plus que les signes des nombres qui feront offices de symboles d'opérations. Cela peut paraître déroutant, mais ça marche!
On écrit ainsi la suite d'additions $3+(+5)+(-2)+(-4)+(+11)$ de la manière simplifiée $3+5-2-4+11$.
Étape 3 : On effectue les opérations dans l'ordre rappelé dans la partie 1, en suivant les règles de priorité.
$3+5-2-4+11=3+5+11-2-4=(3+5+11)-(2+4)= 19-6=13$.

3. Complément facultatif : les différentes sortes de nombres

a) Les entiers

Les premiers nombres utilisés sont les entiers naturels (entiers positifs).

Le plus petit entier naturel est 0 ; les autres sont obtenus en ajoutant 1 au nombre entier qui précède :

0, 1, 2, 3, 4, …, 9, 10, 11, 12, …, 99, 100, 101, … etc.

On les écrit généralement en chiffre, en utilisant un système numérique de position de base 10 qui utilise les 10 chiffres, dits arabes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Ce système est le système décimal.

Il faut se rappeler qu'il existe[1] d'autres façons de noter les nombres :

- le système décimal japonais ou chinois qui dispose de chiffres spécifiques comme 一(1), 二(2), 三(3), 四(4), 五(5), 六(6), 七(7), 八(8), 九(9) et d'indicateurs de position comme 十(10), 百(100), 千(1000) ou 万(10 000).
- le système binaire (base 2, 10 en binaire c'est 2 dans le système décimal), le système hexadécimal (utilise la base 16), anciennement on a utilisé des systèmes encore plus variés (numérotations maya, égyptienne, grecque, romaine, ...)

Avec les entiers naturels, on peut compter les objets (fonction cardinale) et on peut les énumérer (fonction ordinale). Ce roman contient 720 pages, j'en suis à la 345[ème].

Les entiers négatifs sont venus tardivement compléter la collection.
Ils permirent notamment de donner un résultat numérique pour toutes les soustractions entre entiers (sans les négatifs, il n'y a pas de solution à la soustraction 3−4).

b) Les décimaux

Ce sont des nombres qui ont une écriture décimale finie.
Leur partie décimale (celle qui est à droite de la virgule) doit être finie.
Par exemple 12,3456 est un nombre décimal car la partie décimale est finie (elle vaut 0,3456 c'est-à-dire 3456 dix-millièmes) alors que le quotient de 1 par 3 n'a pas décriture décimale finie : 1÷3=0,333333... (des 3 jusqu'à l'infini). Ce quotient 1÷3 n'est pas un nombre décimal, c'est un nombre rationnel non-décimal noté $\frac{1}{3}$.

On peut noter les nombres décimaux avec des fractions, par exemple $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{25}$ et $\frac{357}{960}$ sont des nombres décimaux même si ce n'est pas évident avec ces écritures.
Les nombres décimaux peuvent toujours se noter sous la forme de fraction décimales (le dénominateur doit être une « puissance de dix » comme 10, 100, 1000, etc.). Les nombres précédents sont décimaux car $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$, $\frac{17}{25}=\frac{68}{100}$ et $\frac{357}{960}=\frac{371875}{1000000}$.

Pour qu'un nombre rationnel soit décimal, il suffit que le dénominateur de son écriture irréductible soit le produit d'une puissance[2] de 2 et d'une puissance de 5.
Cela vient du fait que notre base de numération est la base 10=2×5.
Ainsi $\frac{357}{960}=\frac{119}{320}$, cette dernière fraction est irréductible, comme de plus, son dénominateur peut s'écrire 2×2×2×2×2×2×5 (un produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de 5), ce nombre est décimal.

Bien sûr, il y a des décimaux négatifs comme $-\frac{1}{2}=-0{,}5$ ou $-\frac{17}{25}=-0{,}68$.

L'ensemble des nombres décimaux relatifs est *dénombrable* : on peut compter tous les nombres décimaux, sans en oublier un seul, avec les nombres entiers ! Il suffit de choisir un ordre de parcours de cet ensemble et de s'y tenir. Il y a donc « autant » de nombres décimaux que de nombres entiers...

1 Lire par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/Système_décimal
2 Puissance de 2 : nombre qui peut s'écrire comme un produit de *n* facteurs 2 (n étant un entier positif ou nul). Par exemple 64 est une puissance de 2 car 64= 2×2×2×2×2×2 ; puissance de 5: nombre qui peut s'écrire comme un produit de *n* facteurs 5.

c) Les rationnels

Ce sont des nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers, donc sous la forme de fractions. Par exemple $\frac{1}{2}$ ou $\frac{17}{25}$ qui sont des rationnels décimaux, mais il faut ajouter toutes les fractions qui ne sont pas décimales comme $\frac{1}{3}$ ou $\frac{17}{26}$.

Les nombres rationnels ont des écritures décimales périodiques : une séquence de chiffres se répète jusqu'à l'infini. Par exemple $\frac{1}{3}=0{,}3333...$ (la séquence de un chiffre : 3 se répète jusqu'à l'infini) ou $\frac{17}{26}=0{,}6538461538461538461...$ (la séquence de six chiffres 538461 se répète jusqu'à l'infini).
Cette propriété vient du fait que lorsqu'on divise par un entier (le diviseur), il ne peut y avoir plus de restes différents que le diviseur. Dès qu'un reste revient, on est assuré de retrouver une même séquence de chiffres au quotient.

On peut toujours retrouver l'écriture fractionnaire d'un nombre dont l'écriture décimale est périodique.
S'il y a *n* chiffres dans la séquence qui se répète, il suffit d'enlever le nombre à 10×10×10×...×10×10 (*n* facteurs 10) fois le nombre.
Par exemple 1,234234234234... (la séquence de trois chiffres 234 se répète jusqu'à l'infini). J'enlève ce nombre à 10×10×10=1000 fois ce nombre, donc je calcule 1234,234234234...−1,234234234234... mais les décimales s'éliminent et je trouve un entier 1234−1=1233. Or, ce faisant, j'ai calculé 999 fois le nombre, donc ce nombre vaut $\frac{1233}{999}$. Vous pouvez vérifier ! Ce nombre se simplifie par 9 en $\frac{137}{111}$.

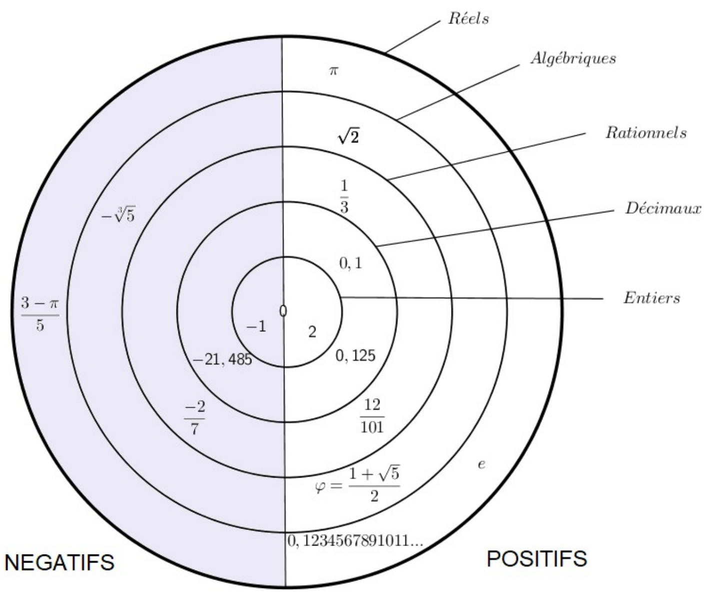
L'ensemble des nombres rationnels est un ensemble dénombrable, comme celui des décimaux qu'il contient. On peut compter tous les nombres rationnels avec les nombres entiers ! Il y a donc « autant » de nombres rationnels que de nombres entiers. Le procédé pour dénombrer les rationnels utilise la fonction de couplage de Cantor[3] qui demande d'énumérer les rationnels positifs $\frac{a}{b}$ selon la somme $a+b$ croissante.

$a+b=1$	N°1 : $\frac{0}{1}=0$			
$a+b=2$	$\frac{0}{2}=0$ (déjà compté)	N°2 : $\frac{1}{1}=1$		
$a+b=3$	$\frac{0}{3}=0$ (déjà compté)	N°3 : $\frac{1}{2}$	N°4 : $\frac{2}{1}=2$	
$a+b=4$	$\frac{0}{4}=0$ (déjà compté)	N°5 : $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}=1$ (déjà compté)	N°6 : $\frac{3}{1}=3$

Ainsi de suite jusqu'à l'infini, et si on veut inclure les rationnels négatifs, il suffit de les ajouter dans le dénombrement (1 et −1 seraient les nombres n°2 et 3, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ seraient les nombres n°4 et 5, etc.).

d) Les réels

Les nombres réels sont ceux que l'on peut écrire sous une forme décimale illimitée.
Cet ensemble de nombres contient tous les nombres connus jusque là : les entiers, les décimaux, les rationnels. Il contient aussi tous les nombres irrationnels : ceux qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction comme $\sqrt{2}$ ou π.
Un nombre irrationnel très simple à écrire juxtapose tous les entiers : c'est le nombre de Champernowne 0,1234567891011... nommé en l'honneur de D.G.Champernowne qui l'a introduit en 1933. On peut calculer n'importe quelle décimale de ce nombre mais il n'y a aucune séquence périodique.



3 Georg Cantor est un mathématicien allemand, né le 3 mars 1845 à Saint-Pétersbourg (Empire russe) et mort le 6 janvier 1918 à Halle (Empire allemand). Il est connu pour être le créateur de la théorie des ensembles.