CORRECTION *Barème : 8points-5points-5points -2points*

1) Distributivité

Dans les exercices suivants les lettres x et y représentent des nombres quelconques et $x^2=x\times x$.

a) Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A=5x+2x=(5+2)\times x=7x$
$B=21x-14y=7\times 3x-7\times 2y=7(3x-2y)$
$C=50x+200x^2=50x\times 1+50x\times 4x=50x(1+4x)$
$D=4x^2-12xy=4x(x-3y)$

b) Développer et réduire si possible les expressions suivantes :

$E=2(x+2)=2x+2\times 2=2x+4$
$F=5x(x-2)=5x\times x-5x\times 2=5x^2-10x$
$G=5(x+1)-3x+1=5x+5\times 1-3x+1=5x+5-3x+1=2x+6$
$H=12-3(x-1)=12-3x+3\times 1=15-3x$

2) Expressions littérales

a) Évaluer les expressions littérales n^3-n et $(n^3-n)\div 3$ pour les valeurs entières comprises entre 0 et 10 (*rappel* : $n^3=n\times n\times n$ est le « cube » de *n*)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3-n	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720	990
n^3-n)/3	0	0	2	8	20	40	70	112	168	240	330

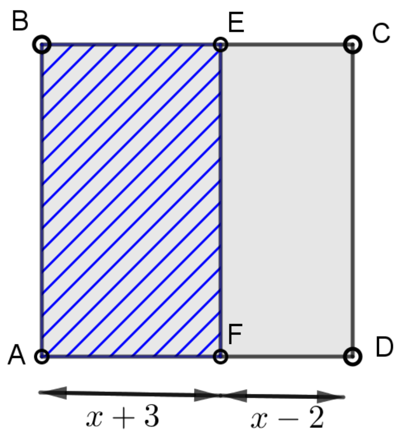
b) Par l'observation de ces résultats, quelle remarque peut-on faire concernant n^3-n ?
On peut remarquer que n^3-n est divisible par 3 car la dernière ligne montre toujours un quotient par 3 entier.

c) Cette remarque est-elle valable pour un entier *n* quelconque, à votre avis ? OUI, ce n'est pas une coïncidence qui serait vraie pour les 11 premiers entiers et fausse par la suite pour certaines valeurs...

Que faut-il faire pour le prouver ? Il faut le montrer avec une lettre (en factorisant).

Ce n'était pas attendu ici mais en voici la preuve : $n^3-n=n(n^2-1)$. À ce stade, vous êtes bloqués parce que votre technique de factorisation est limitée, mais bientôt vous verrez que $n^2-1=(n-1)(n+1)$ et du coup $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$. On constate qu'il s'agit de trois nombres entiers consécutifs car $n-1$ est l'entier qui précède n tandis que $n+1$ est l'entier qui succède à *n*. Parmi trois entiers consécutifs, il y en a forcément un qui est un multiple de 3, donc leur produit l'est aussi.

3) Obtenir une expression littérale



ABCD est un carré *;* *E* et *F* sont des points de [*AD*] et [*BC*] tels que *ABEF* est un rectangle.
x désignant un nombre supérieur ou égal à 2, on a *AF* = *x* + 3 et *FD* = *x* − 2.

a) Exprimer à l'aide de *x* :

- La longueur *AD* $x+3+x-2=2x+1$
- L'aire $\mathcal{A}$ du carré *ABCD* $(2x+1)^2$
- L'aire $\mathcal{B}$ du rectangle *ABEF* $(x+3)(2x+1)$
- L'aire $\mathcal{C}$ du rectangle *ECDF* $(x-2)(2x+1)$

b) Exprimer $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et leur somme sous forme développée et réduite.

$\mathcal{B}=(x+3)(2x+1)=(x+3)\times 2x+(x+3)\times 1=x\times 2x+3\times 2x+x+3=2x^2+6x+x+3=2x^2+7x+3$
$\mathcal{C}=(x-2)(2x+1)=(x-2)\times 2x+(x-2)\times 1=x\times 2x-2\times 2x+x-2=2x^2-4x+x-2=2x^2-3x-2$
$\mathcal{B}+\mathcal{C}=(2x^2+7x+3)+(2x^2-3x-2)=(2x^2+2x^2)+(7x-3x)+(3-2)=4x^2+4x+1$

c) Vérifier que cette somme est égale à $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}=(2x+1)(2x+1)=(2x+1)\times 2x+(2x+1)\times 1=2x\times 2x+1\times 2x+2x+1=4x^2+2x+2x+1=4x^2+4x+1$

On constate donc que c'est bien pareil que ce qui a été trouvé au b).
En fait, c'était plus simple de vérifier cette égalité avec les formes factorisées :
$\mathcal{B}=(x+3)(2x+1)$ et $\mathcal{C}=(x-2)(2x+1)$ donc
$\mathcal{B}+\mathcal{C}=(x+3)(2x+1)+(x-2)(2x+1)=[(x+3)+(x-2)](2x+1)=(2x+1)(2x+1)=\mathcal{A}$
Ma question b) était mal formulée, j'aurai du demander :
« Exprimer la somme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sous la forme factorisée »
NB : J'ai ajusté mon barême pour tenir compte de cette mauvaise indication (développer était trop difficile)

4) <u>Connaître le cours</u>

$5\times x+11$ est-il un produit ou une somme? C'est une somme (de 5*x* et 11).

Quel est le 2$^{\text{ème}}$ terme de la somme $(x+1)^2+5(x+1)+3$? Le 2$^{\text{ème}}$ terme est 5(*x*+1).

Quel est le 1$^{\text{er}}$ facteur du produit $3x(x+1)$? Le 1$^{\text{er}}$ facteur de ce produit est 3.

Écrire une expression littérale pour la somme de 12 et du produit de 2 par x Voici cette somme : 12+2*x*

BONUS (*maximum : 2 points*) :
Lorsque *n* personnes se rencontrent en se serrant chacune la main, combien cela fait-il de poignées de mains ?
Chaque personne sert la main à tous les autres.
Si il y a *n* personnes en tout, chaque personne sert la main à $n-1$ personnes.
Cela fait donc $n(n-1)$ poignées de mains ?
Non, car ce nombre compte deux fois chaque poignée de mains (car il y a deux personnes en jeu).
Le nombre précédent doit donc être divisé par 2 : il y a $n(n-1)\div 2$.

personnes	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
poignées de mains	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190

Remarque : on aurait pu réfléchir en prenant des exemples, avec *n*=2, puis 3, 4, etc.

- pour 2 personnes : 1 seule poignée de main ;
- pour 3 personnes : 3 poignées de main ;
- pour 4 personnes : 4+2=6 poignées de main ;

C'est comme si on comptait le nombre de côtés d'un polygone à *n* cotés (il y en a *n*) et le nombre de diagonales (plus difficile à compter mais pour un quadrilatère il y a 2 diagonales ; d'une façon générale, il y en a $n(n-3)\div 2$ mais si on sait trouver ce nombre, on sait répondre à la question)

- pour 5 personnes : 5+5=10 poignées de main (il y a 5 côtés dans un pentagone et 5 diagonales) ;
- pour 6 personnes : 6+12=10 poignées de main (il y a 5 côtés dans un pentagone et 5 diagonales) ;
- etc.