5$^{\text{ème}}$3 DS4 : Angles janvier 2022

CORRECTION

1] Questions de cours (7 *points*)

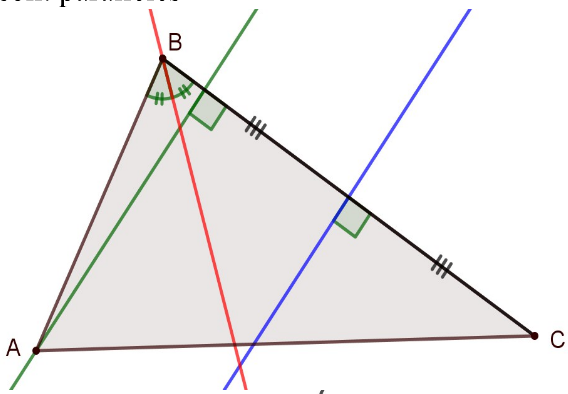
a) Donner une définition pour les expressions suivantes :

- Angles supplémentaires
- Bissectrice d'un angle
- Cercle circonscrit à un triangle

Angles supplémentaires : leur somme fait 180°
Bissectrice d'un angle : droite partageant un angle en deux angles égaux et adjacents
Cercle circonscrit à un triangle : cercle passant par les trois sommets du triangle

b) Citer une propriété qui permet de prouver que deux droites sont paralléles

Si une droite sécante détermine avec elles des angles alterne-internes égaux alors les deux droites sont paralléles.



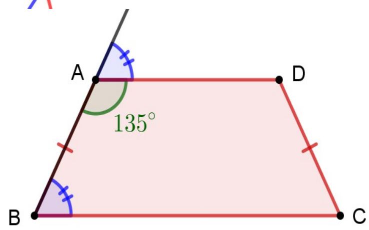
c) Sur le triangle *ABC* ci-contre, tracer :

- la hauteur issue de *A* : fait en vert
- la médiatrice de [*BC*] : fait en bleu
- la bissectice de $\widehat{ABC}$: fait en rouge

2] Calculs d'angles (5 *points*)

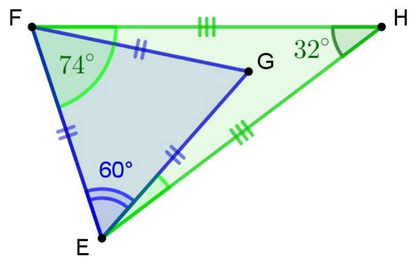
(*attention : les figures peuvent être fausses...*)

a) *ABCD* est un quadrilatère tel que *AB*=*DC*, (*AD*)//(*BC*) et $\widehat{BAD}=135°$. Calculer l'angle $\widehat{ABC}$.



L'angle supplémentaire à $\widehat{BAD}$ vaut 180−135=45° : je l'ai tracé en bleu. Cet angle est correspondant avec $\widehat{ABC}$ par rapport à (AD) et (BC) qui sont parallèles, ils sont donc égaux et on a $\widehat{ABC}=45°$.
L'indication *AB*=*DC* ne servait à rien.

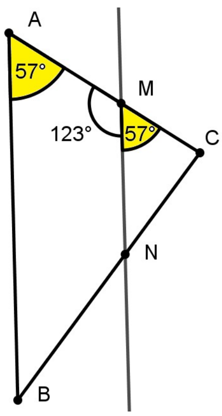
b) *EFH* est un triangle isocèle en *H* dans lequel on a construit le triangle équilatéral *EGF* et $\widehat{EHF}=32°$.
Calculer l'angle $\widehat{HEF}$.



Comme les angles d'un triangle font 180° et qu'ici le triangle FEH est isocèle en H, on en déduit que $\widehat{HEF}=(180-32)\div2=148\div2=74°$.
Combien vaut l'angle $\widehat{GEF}$?
Le triangle équilatéral EGF a des angles de 60° donc $\widehat{GEF}=60°$.
En déduire l'angle $\widehat{HEG}$.
$\widehat{HEG}$ et $\widehat{FEG}$ sont adjacents, donc $\widehat{HEG}=\widehat{HEF}-\widehat{FEG}=74-60=14°$.

3] Études de Figures (8 *points*)

a) *ABC* est un triangle dont les côtés [*CA*] et [*CB*], sont coupés par une sécante (*MN*), où *M* est un point de [*CA*] tandis que *N* est un point de [*CB*]. On sait de plus que $\widehat{AMN}=123°$ et $\widehat{MAB}=57°$.

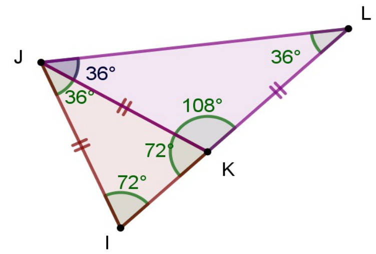


Les droites (*AB*) et (*MN*) sont-elles parallèles?
Faire une figure soignée et expliquer (*citer la propriété utilisée*).
Oui, les droites (*AB*) et (*MN*) sont parallèles.
Deux angles consécutifs du quadrilatère AMNB sont supplémentaires car 123+57=180°.
L'angle $\widehat{CMN}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{AMN}$ car les points A, M, C sont alignés. Les angles correspondants $\widehat{CMN}$ et $\widehat{CAB}$ sont donc égaux et, par conséquent, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

b) Sur la figure ci-contre :
JKL est un triangle isocèle en *K* ; *IJK* est un triangle isocèle en *J* ; (*JK*) est la bissectrice de $\widehat{IJL}$; l'angle $\widehat{LJK}$ mesure 36°.
Calculer les angles $\widehat{IKJ}$ et $\widehat{JKL}$.
Comme (*JK*) est la bissectrice de $\widehat{IJL}$, on a $\widehat{IJK}=\widehat{LJK}=36°$.

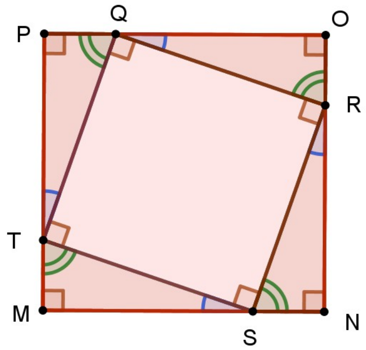
$\widehat{IKJ}$ est un des angles égaux du triangle isocèle *IJK*, donc $\widehat{IKJ}=\frac{180-36}{2}=\frac{144}{2}=72°$.
$\widehat{JKL}$ est l'angle principal du triangle isocèle *JKL*, donc $\widehat{JKL}=180-2\times36=180-72=108°$.

Les points *I*, *K* et *L* sont-ils alignés ? (*justifier la réponse*)



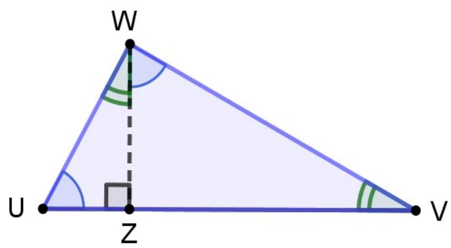
$\widehat{IKJ}$ et $\widehat{JKL}$ sont des angles supplémentaire car 72+108=180°.
L'angle $\widehat{IKL}$ est donc formé de deux angles adjacents supplémentaires : c'est un angle plat ; le point *K* appartient donc au segment [*IL*].

c) *MNOP* est un carré de côté 5cm.
On place les points *Q*, *R*, *S* et *T* à 1cm de *P*, *O*, *N* et *M* sur les segments [*PO*], [*ON*], [*NM*] et [*MP*] (*voir la figure*).
Prouver que le quadrilatère *QRST* est un carré.



Le triangle *PQT* étant rectangle en *P*, il possède deux angles complémentaires $\widehat{PQT}$ et $\widehat{PTQ}$ que j'ai colorié en vert et bleu et dont je peux noter leurs mesures α et β. Je sais donc que α+β=90°.
Les triangles rectangles ORQ, NSR et MTS sont superposables à PQT car ils ont les mêmes côtés donc les mêmes angles.
Par conséquent $\widehat{PTQ}$, $\widehat{OQR}$, $\widehat{NRS}$ et $\widehat{MST}$ sont des angles égaux et complémentaires de $\widehat{PQT}$; ils mesurent donc β.
Au point *Q* se rejoignent trois angles adjacents dont deux sont complémentaires : $\widehat{PTQ}=\alpha$ et $\widehat{OQR}=\beta$; le 3ème est donc nécessairement droit : $\widehat{RQT}=180-(\alpha+\beta)=90°$.
Au sommet *Q* il y a un angle droit, et de même pour tous les sommets du quadrilatère *QRST*, ce quadrilatère est donc un rectangle. Mais comme tous ses côtés sont égaux (QT=RQ=SR=TS car ce sont les grands côtés des quatre triangles superposables), ce rectangle est un carré.

d) *UVW* est un triangle et *Z* le pied de la hauteur issue de *W*.
On suppose, de plus, que $\widehat{ZUW}=\widehat{ZWV}$.
Quelle est la nature[1] du triangle *UVW* ? (*justifier*)
Le triangle *UZW* étant rectangle en *Z*, il possède deux angles complémentaires $\widehat{ZUW}$ et $\widehat{UWZ}$.



De même, le triangle *ZWV* étant rectangle en *Z* possède deux angles complémentaires $\widehat{ZWV}$ et $\widehat{WVZ}$.
Si le triangle *UVW* est tel que $\widehat{ZUW}=\widehat{ZWV}$, on a alors $\widehat{UWZ}=\widehat{WVZ}$.
Deux des angles de *UVW* sont donc complémentaires : $\widehat{ZUW}$ et $\widehat{WVZ}$.
Le 3ème angle de ce triangle est donc droit : $\widehat{UWV}=90°$.
Le triangle *UVW* est alors rectangle en *W*.

1 La nature d'un triangle peut être : quelconque, isocèle, rectangle ou équilatéral