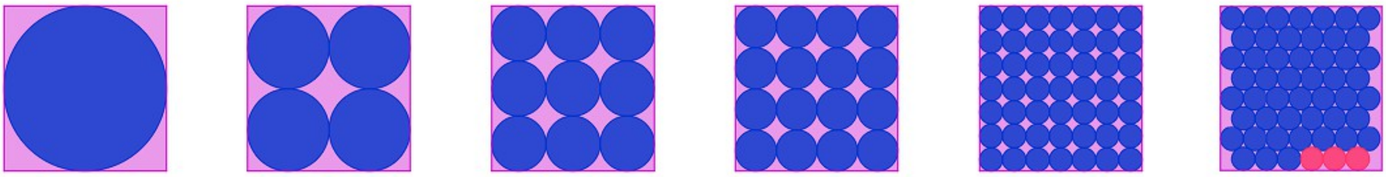
CORRECTION

1) Cercles dans carré

a) Lorsqu'on met un cercle dans un carré de façon à ce que les bords du cercle soient au contact avec les côtés du carré, on dit qu'on a « rempli » le carré avec le cercle. Calculer l'aire extérieure au cercle contenue dans un carré de côté 10 rempli par ce cercle (en rose sur l'image). Si l'on rempli le carré avec 4 cercles, quel est l'aire extérieure aux cercles contenues dans le carré rempli par les cercles ? Même question pour 9, 16, 25 et 49 cercles dans le carré (réponses dans un tableau avec, pour justification : le calcul littéral du rayon des cercles, de leur aire et de l'aire extérieure aux cercles).



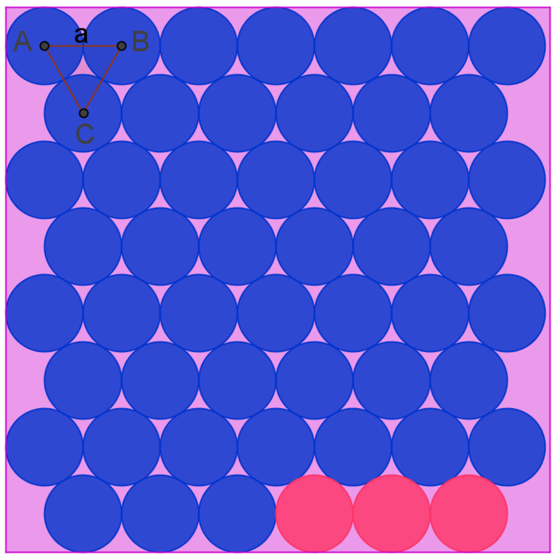
Le côté du carré est fixé à 10 mais les résultats se généralisent par proportionnalité à n'importe quel carré.
Pour le 1er carré, celui rempli par 1 seul cercle, la partie de l'aire du carré extérieure au cercle est égale à $10^2-5^2\times\pi=100-25\pi\approx 21{,}46$. En pourcentage de l'aire du carré, cela représente 21,46% de cette aire.
Dans le 2ème cas, on peut découper le carré en 4 carrés semblables au 1er :
La partie de l'aire du carré extérieure aux cercles est égale à $10^2-4\times(2{,}5^2\times\pi)=100-25\pi\approx 21{,}46$, soit la même chose que dans le 1er cas.
Même chose pour le 3ème, le 4ème et le 5ème cas où la partie de l'aire du carré non occupée par les cercles est environ égale à 21,46% de cette aire.
Les formules demandées pour n^2 cercles dans un carré :

- rayons des cercles $\frac{5}{n}$ (les diamètres mesurent $\frac{10}{n}$)
- aire d'un cercle $\left(\frac{5}{n}\right)^2\times\pi=\frac{25\pi}{n^2}$ donc aire des n cercles $\frac{n\times 25\pi}{n^2}=\frac{25\pi}{n}$
- aire du carré non remplie par les cercles $10^2-\frac{25\pi}{n}=100-\frac{25\pi}{n}$

Le tableau demandé :

n	1	2	3	4	5	6	7
rayon d'un cercle	5	2,5	1,6666666667	1,25	1	0,8333333333	0,7142857143
aire d'un cercle	78,53981634	19,634954085	8,72664626	4,9087385212	3,1415926536	2,181661565	1,6028533947
aire des cercles	78,53981634	78,53981634	78,53981634	78,53981634	78,53981634	78,53981634	78,53981634
aire non remplie	21,46018366	21,46018366	21,46018366	21,46018366	21,46018366	21,46018366	21,46018366

b) Pour un carré contenant 49 cercles, on se demande s'il est possible d'en glisser trois de plus en rangeant les cercles en quinconce (dessin sur la figure de droite). Le carré est-il alors bien rempli d'après vous ?



Dans le dernier cas, la situation est différente.
Les cercles forment des triangles équilatéraux.
Un triangle équilatéral ABC de côté a a une hauteur d'environ 0,866a. Le théorème de Pythagore, étudié en 4ème, permet de montrer que cette hauteur vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Le carré rempli ainsi a un côté de 7 hauteurs de triangle et 2 demi-côtés, soit :

$$7\frac{\sqrt{3}}{2}a+2\left(\frac{a}{2}\right)=(3{,}5\sqrt{3}+1)\,a\approx 11{,}9956\,a$$

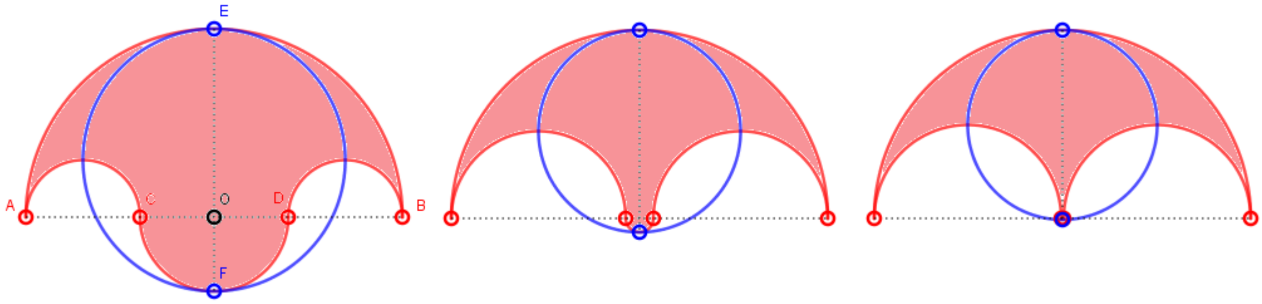
Si cette longueur vaut 10, c'est que $(3{,}5\sqrt{3}+1)\,a=10$
et a vaut donc $\frac{10}{3{,}5\sqrt{3}+1}\approx 1{,}4159938$.
Le rayon des cercles vaut la moitié de cette valeur, soit $\frac{5}{3{,}5\sqrt{3}+1}\approx 0{,}707997$. Cette valeur est légèrement inférieure à la valeur du rangement précédent qui était de 0,7142857 environ.
L'aire des 52 cercles réunies vaut : $52\times\pi\times\left(\frac{5}{3{,}5\sqrt{3}+1}\right)^2\approx 81{,}887$.
L'aire inoccupée par les cercles représente alors :
$100-52\times\pi\times\left(\frac{5}{3{,}5\sqrt{3}+1}\right)^2\approx 18{,}1128$, soit un peu moins que dans les cas précédents. Cette occupation du carré par les cercles est donc meilleure puisqu'il y a moins d'espace vide.

Le carré est-il alors bien rempli, dans le sens où tous les bords du carré sont en contact avec les cercles ?
Calculons la longueur occupée horizontalement par les cercles :
Il y a 7 diamètres de longueur a, soit $\frac{7\times 10}{3{,}5\sqrt{3}+1}\approx 9{,}911956583$. Cette longueur étant inférieure à 10, le carré n'est pas bien rempli. D'ailleurs cela se voyait sur ma figure où les cercles sont en contact avec le bord du carré en haut, en bas et à gauche, mais pas à droite.

On ne peut donc pas arranger les 49 cercles initiaux (dont le rayon mesure environ 0,7142857) en quinconce de manière à glisser 3 cercles supplémentaires. Si on le faisait, la hauteur de cet empilement dépasserai légèrement 10 :
Cette hauteur vaut, on l'a dit $(3{,}5\sqrt{3}+1)a$ et a vaut $\frac{10}{7}\approx 14{,}28571428$, cela fait $(3{,}5\sqrt{3}+1)\frac{10}{7}\approx 10{,}08882547$

2) Salinons et arbelos

Un salinon est le nom donné par Archimède[1] à cette surface limitée par 4 demi-cercles (en rose ci-dessous) qui ressemble à une salière :



En supposant que AB=10 cm et OF=4 cm, déterminer l'aire S du salinon ainsi que l'aire C du cercle de diamètre [EF]. Comparer ces deux aires. Que semble t-il ? Vérifier cette propriété en prenant une autre valeur pour AB et OF.

Le demi-disque de diamètre [AB] a une aire qui mesure $\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2\div 2=\frac{\pi AB^2}{8}$, soit $\frac{\pi 10^2}{8}=\frac{100\pi}{8}=\frac{25\pi}{2}\approx 39{,}26990817$.

On lui ajoute l'aire du demi-disque de rayon [OF] qui mesure $\pi OF^2\div 2=\frac{\pi OF^2}{2}$, soit $\frac{\pi 4^2}{2}=8\pi\approx 25{,}13274123$.

On lui retranche deux fois l'aire du demi-disque de diamètre [AC], soit un disque complet de diamètre $AC=AB-CD=AB-2\times OF$ qui mesure donc $\pi\left(\frac{AB-2\times OF}{2}\right)^2\div 4=\frac{\pi(AB-2\times OF)^2}{16}$, soit $\frac{\pi(10-2\times 4)^2}{16}=\frac{4\pi}{16}=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7853981634$.

Finalement, on trouve l'aire du salinon : $\frac{25\pi}{2}+8\pi-\frac{\pi}{4}=81\frac{\pi}{4}=20{,}25\pi\approx 63{,}61725124$.
(avec les valeurs approchées $39{,}26990817+25{,}13274123-0{,}7853981634=63{,}61725124$)

Le cercle de diamètre [EF] a pour diamètre $EF=OE+OF=OA+OF=\frac{AB}{2}+OF$.

Son rayon vaut $\left(\frac{AB}{2}+OF\right)\div 2$ et son aire $\left[\left(\frac{AB}{2}+OF\right)\div 2\right]^2\pi$,

Avec AB=10 et OF=4, on trouve $\left[\left(\frac{10}{2}+4\right)\div 2\right]^2\pi=4{,}5^2\pi=20{,}25\pi$, soit exactement l'aire du salinon.

Est-ce toujours le cas ?
Je vais prendre AB=10 et faire varier OF entre 0 (le minimum et 5 (le maximum). Plutôt que de recommencer tous ces calculs qui sont assez compliqués, je vais les rentrer dans le tableur :

AB	10	10	10	10	10	10
R=OE=AB/2	5	5	5	5	5	5
r=OF	5	4	3	2	1	0
AC=(AB-2*OF)/2	0	1	2	3	4	5
EF=AB/2+OF	10	9	8	7	6	5
Demi-disque de diamètre AB	39,26990817	39,26990817	39,26990817	39,26990817	39,26990817	39,26990817
Demi-disque de rayon OF	39,26990817	25,132741229	14,137166941	6,2831853072	1,5707963268	0
Disque de diamètre AC	0	0,7853981634	3,1415926536	7,0685834706	12,566370614	19,634954085
Aire du salinon	78,53981634	63,617251235	50,265482457	38,484510006	28,274333882	19,634954085
Disque de diamètre EF	78,53981634	63,617251235	50,265482457	38,484510006	28,274333882	19,634954085

Je remarque alors que l'aire du salinon est toujours égale à celle du disque de diamètre [EF].
Cette propriété semble donc toujours vraie. Pour le prouver, il faut utiliser le calcul littéral.
Prouver la propriété dans le cas général, en prenant AB = $2R$ et OF = $r<R$.

On a dit que le demi-disque de diamètre [AB] a une aire qui mesure $\frac{\pi AB^2}{8}=\frac{\pi(2R)^2}{8}=\frac{\pi R^2}{2}$.

On lui ajoute l'aire du demi-disque de rayon [OF] qui mesure $\frac{\pi OF^2}{2}=\frac{\pi r^2}{2}$.

On lui retranche le disque complet de diamètre AC qui mesure $\frac{\pi(AB-2\times OF)^2}{16}=\frac{\pi(2R-2r)^2}{16}=\frac{\pi 4(R-r)^2}{16}=\frac{\pi(R-r)^2}{4}$.

L'aire du salinon est donc $\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi r^2}{2}-\frac{\pi(R-r)^2}{4}=\frac{2\pi R^2+2\pi r^2-\pi(R-r)^2}{4}$.

Pour aller plus loin dans le développement, remarquons que

$$(R-r)^2=(R-r)(R-r)=R(R-r)-r(R-r)=R^2-2rR+r^2$$

$$(R+r)^2=(R+r)(R+r)=R(R+r)+r(R+r)=R^2+2rR+r^2$$

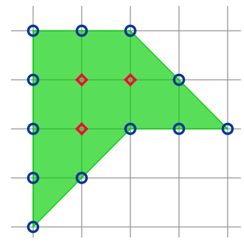
L'aire du salinon est donc $\frac{2\pi R^2+2\pi r^2-\pi(R^2-2rR+r^2)}{4}=\frac{\pi R^2+\pi r^2+2\pi rR}{4}=\frac{\pi(R^2+r^2+2rR)}{4}=\frac{\pi(R+r)^2}{4}$.

Que vaut l'aire du disque de rayon $\frac{EF}{2}=\frac{\frac{AB}{2}+OF}{2}=\frac{R+r}{2}$: $\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2=\frac{\pi(R+r)^2}{4}$, exactement la même valeur que celle du salinon

Que se passe t-il dans le cas où r=0 (le salinon dans ce cas est un arbelos) ?
Rien, la formule reste valable pour cet arbelos qui est un cas particulier de l'arbelos étudié également par Archimède.

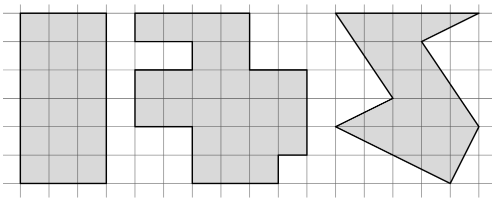
1 Archimède de Syracuse (−287 ;−212) est un grand scientifique grec, à la fois physicien, mathématicien et ingénieur.

3) Théorème de Pick



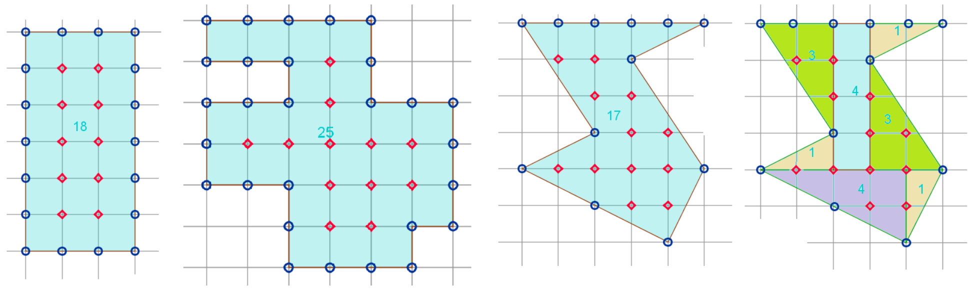
G. Pick a découvert en 1899 une relation entre l'aire et le périmètre de tous les *polygones sur quadrillage*[2] : $2\times(A+1-I)=P$ où A est l'*A*ire du polygone (unité : le carreau), P le nombre de points d'intersection du quadrillage le long du *P*érimètre et I le nombre de points d'intersection à l'*I*ntérieur du polygone.

Exemple : le pentagone de droite a une aire A=8, I=3 points du quadrillage à l'intérieur (carrés rouges) et P=12 points du quadrillage sur son périmètre (ronds bleus). Ces nombres vérifient bien la relation de Pick car $2\times(8+1-3)=2\times6=12$.



a) Montrer que les trois polygones sur quadrillage ci-contre vérifient bien la relation de Pick.

Je commence par reproduire ces polygones en plaçant sur les bords les points constituant le nombre P et dans l'intérieur ceux constituant I.



En complétant ensuite le tableau (ci-dessous), je constate que la relation de Pick est bien vérifiée pour chacune des trois figures examinées, la dernière colonne du tableau étant égale à celle donnant P.

Pour calculer l'aire A de la figure n°3, nous avons découpé celle-ci en triangles (il y a plusieurs façons de faire ceci). Ainsi nous pouvons trouver trois triangles d'aire 1 (2×1÷2=1), deux triangles d'aire 3 (2×3÷2=3) et deux triangles d'aire 4 (2×4÷2=4) ou bien utiliser la fonction de GeoGebra qui donne directement l'aire.

	P (nombre de points comptés sur le périmètre)	I (nombre de points comptés à l'intérieur du polygone)	A	$2\times(A+1-I)$
Figure de droite	12	3	8	$2\times(8+1-3)=12$
Figure 1 : rectangle	18	10	3×6=18	$2\times(18+1-10)=18$
Figure 2 : polygone à 14 côtés	28	12	4+2+12+4+3=25	$2\times(25+1-12)=28$
Figure 3 : polygone à 7 côtés	12	12	3×2+4×2+1×3+1=17	$2\times(17+1-12)=12$

b) On veut tracer des triangles sur quadrillage contenant toujours I=3 points d'intersection du quadrillage et ayant des nombres P différents. Trouver le maximum de valeurs possible pour P. *À chaque fois, tracer le triangle avec les points pour P et pour I de deux couleurs différentes ; déterminer les valeurs de A à l'aide de la relation de Pick.*

Pour ces triangles, on doit avoir $2\times(A+1-I)=P$, et donc $2\times(A-2)=P$ ou encore $2\times A=P+4$. Cela conduit à l'égalité $A=\frac{P}{2}+2$, et comme P est un nombre entier (contrairement à A qui peut être décimal non entier), on peut donner toutes les valeurs possibles entières à P, du moment qu'elles sont supérieures ou égales à 3 car il y a toujours 3 sommets et qu'ils doivent être sur le quadrillage.

Faisons varier P pour voir les valeurs que peut théoriquement prendre A :

P	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A=P\div2+2$	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8

Maintenant cherchons de tels triangles. Nous ne sommes pas sûr qu'ils existent tous.

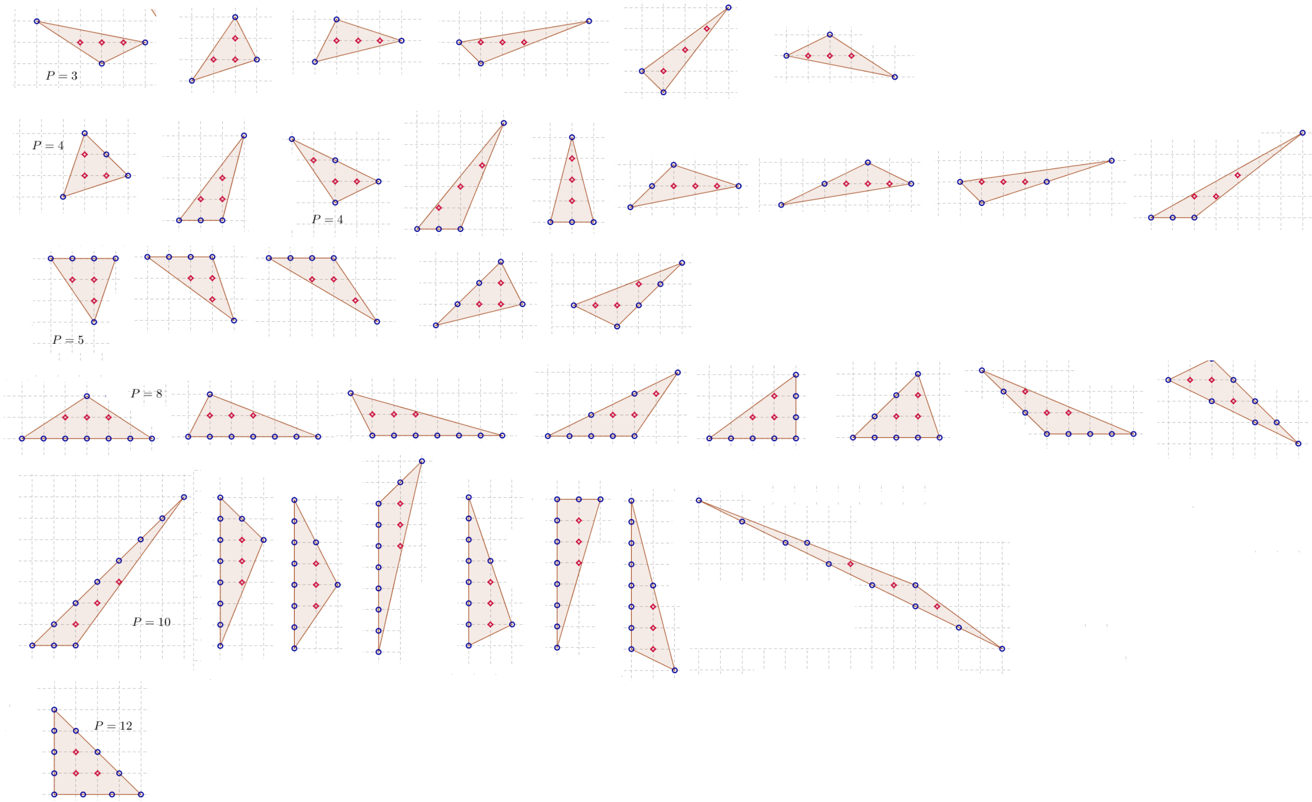
Nous trouvons facilement des triangles qui conviennent pour P=3, 4, 5, 8, 10 et 12 mais nous n'en trouvons pas pour P=6, 7, 9, 11 et les valeurs supérieures à 12 (celles-ci n'ont pas *a priori* été exclues).

Pour l'instant, nous avons donc trouvé six valeurs de P différentes mais est-ce le maximum ?

Existe t-il un triangle sur quadrillage pour lequel P=6 et I=3 (même question pour P=7, 9, 11 et 13) ? On peut faire une étude qui examine toutes les configurations possibles des 3 points intérieurs, la question est ouverte mais cette étude systématique est difficile car il y a de nombreux cas a examiner, potentiellement une infinité.

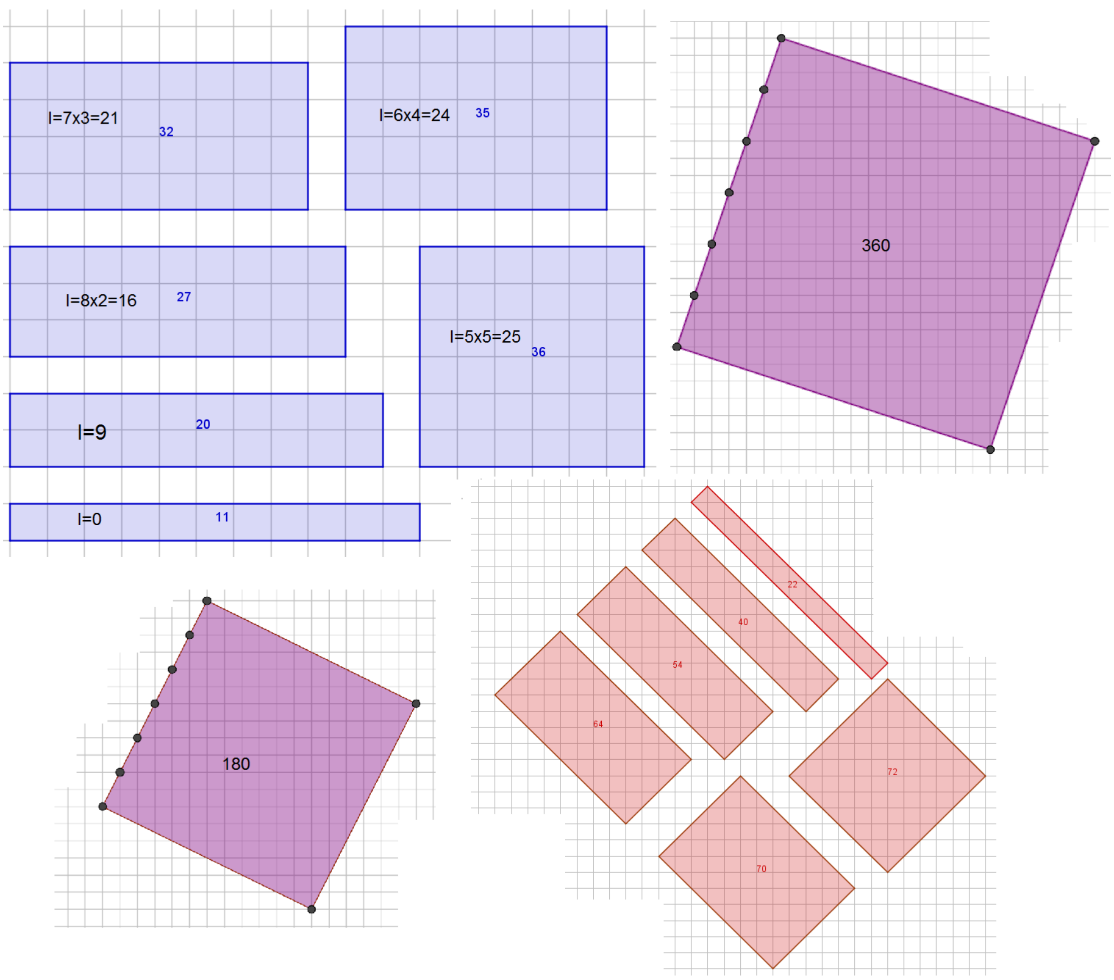
---

2 *Polygone sur quadrillage* : ses sommets sont des points d'intersection d'un quadrillage sous-jacent (règle ② du Penta dans DM6).



Nous en resterons donc là pour le moment. On voit sur l'illustration que des essais nombreux ont été réalisés et j'ai bien essayé de trouver, sans succès, les formes manquantes. Je pense qu'il n'y a pas d'autres valeurs possibles. Quelqu'un me prouvera t-il le contraire ?

c) On veut tracer des rectangles sur quadrillage de périmètre P=24 et ayant des aires A différentes. Montrer qu'il ne peut y avoir que six formes différentes de rectangle.



Donner les valeurs de A et de I dans ces six cas et illustrer chacune de ces valeurs par un exemple.
Pour ces rectangles, on doit avoir $2\times(A+1-I)=24$, et donc $A=11+I$.
I est un nombre entier supérieur ou égal à 0.

En nous limitant à 27, voici donc les valeurs théoriquement possibles pour A :

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$A=I+11$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38

Si le rectangle est construit selon les côtés du quadrillage, son aire ne peut pas être égale à un nombre premier. J'ai colorié en orange les colonnes où A est premier. Il faut que cette aire soit égale à un produit de deux entiers, on peut donc supprimer les valeurs 13, 17, 19, 23, etc. de la liste des valeurs possibles pour A. Le nombre premier 11 est pourtant une aire première possible car le rectangle 1×11 existe.

On s'aperçoit que I ne peut valoir que six valeurs : 0, 9, 16, 21, 24, 25 et 36 (formes colorées en bleu sur l'illustration) ce qui correspond à six formes différentes :

- si Long=12, large=1, c'est le rectangle d'aire $A=1\times11$ pour lequel $I=0$.
- si Long=11, large=2, c'est le rectangle d'aire $A=2\times10=20$ pour lequel $I=9$.
- si Long=10, large=3, c'est le rectangle d'aire $A=3\times9=27$ pour lequel $I=2\times8=16$.
- si Long=9, large=4, c'est le rectangle d'aire $A=4\times8=32$ pour lequel $I=3\times7=21$.
- si Long=8, large=5, c'est le rectangle d'aire $A=5\times7=35$ pour lequel $I=4\times6=24$.
- si Long=7, large=6, c'est le carré d'aire $A=6\times6=36$ pour lequel $I=5\times5=25$.

I	0	9	16	21	24	25
$A=I+11$	11	20	27	32	35	36
Longueur	11	10	9	8	7	6
largeur	1	2	3	4	5	6
Long/large	11	5	3	2	1,4	1

Si les côtés des rectangles suivent les diagonales du quadrillage (figures colorées en rose sur l'illustration), on retrouve les mêmes six formes, identiques aux premières à un coefficient d'agrandissement près : elles n'ont ni la même aire, ni les mêmes côtés, mais les rapports Longueur/largeur sont égaux.

I	11	29	43	53	59	61
$A=I+11$	22	40	54	64	70	72
Long/large	11	5	3	2	1,4	1

Cette remarque peut être également faite pour d'autres dispositions sur le quadrillage (voir les illustrations où on a représenté un carré d'aire 180 et un autre d'aire 360). Il y a une infinité de dispositions qui conviendront et qui produiront, à chaque fois, les mêmes six formes différentes de rectangles, la sixième étant un carré.

d) On veut tracer des pentagones sur quadrillage d'aire $A=8$ et ayant des nombres différents.
Montrer que les caractéristiques P et I ne peuvent prendre que sept valeurs différentes.
Illustrer chacune de ces valeurs par un exemple de pentagone sur quadrillage d'aire $A=8$.

Pour ces pentagones, on doit avoir $2\times(8+1-I)=P$ et donc $P=2\times(9-I)$. Comme I est un nombre entier supérieur ou égal à 0 et P un nombre entier supérieur ou égal à 5, les valeurs théoriquement possibles pour P sont 6, 8, 10, 12, 14, 16 et 18, ce qui fait bien sept valeurs différentes.

Il était demandé d'avoir des nombres P et I différents. Je voulais dire : des valeurs de P différentes et, subséquemment, des valeurs de I différentes. Je ne pensais pas qu'il fallait nécessairement avoir $P\neq I$. La possibilité $I=P=6$ convient donc bien comme 7[ème] forme (je l'ai coloriée en jaune).

Le triangle $P=4$, $I=7$ semble convenir (je l'ai colorié en orange) sauf que … ce n'est pas un pentagone !

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P=2(9-I)	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0